数字化反绝热驱动中的误差标度

Takuya Hatomura*NTT基础研究实验室与NTT理论量子物理研究中心，NTT公司，日本神奈川县243-0198（日期：2023年3月9日）

我们研究了反绝热驱动实现绝热捷径时由数字化导致的误差。我们发现，误差可能随时间切片数量 M 呈现 $\mathcal{O}(M^{-2})$ 的标度，而传统的一阶 Suzuki-Trotter 分解理论预测的误差标度则更差，为 $\mathcal{O}(M^{-1})$。我们通过考虑状态依赖误差界指出了这种可能性，并通过数值模拟证实了这种误差标度 $\mathcal{O}(M^{-2})$ 的出现。此外，我们通过数值方法表明，数字化近似反绝热驱动时可以观察到中间误差标度。这些结果从成本和性能两方面揭示了数字化反绝热驱动的实用价值。

arXiv:2303.04235v1 [quant-ph] 7 Mar 2023

I. 引言

绝热控制是以期望方式调控量子态的一种基本方法。它使我们能够跟踪给定系统的瞬时能量本征态 [1]。人们提出了许多基于绝热控制的量子算法。绝热控制的一项优点是能够抵御控制调度中的误差。事实上，只要满足绝热条件，我们就能获得相似的结果（参见文献 [2] 及其中的参考文献）。其缺点是，为满足绝热条件而需要较长的操作时间。这会降低绝热算法的效率，并使其易受退相干影响。

加速绝热控制是一项重要课题。人们为此提出了各种方法，例如反绝热驱动 [3, 4], 、基于不变量的逆向工程 [5], 、快速前向缩放 [6, 7], 、量子绝热最速曲线 [8], 等。尤其是，反绝热驱动和基于不变量的逆向工程统称为绝热捷径，并已得到广泛研究 [9]。

在反绝热驱动中，通过施加附加驱动来抵消非绝热变化，从而实现快进的绝热时间演化 [3, 4]。尽管反绝热驱动是一种颇具前景的方法，但它需要同时对各种非局域多体相互作用进行随时间变化的控制，因此，将反绝热驱动实际应用于绝热算法仍然具有挑战性。

近期，研究人员考虑了反绝热驱动的数字化，并已在量子设备上实现 [10–12]。在数字化反绝热驱动中，我们可以分别施加原始驱动和附加驱动。此外，这些驱动的时间依赖性可转化为恒强度驱动的持续时间。因此，数字化反绝热驱动有望成为有效实现快速绝热算法的一种潜在方案。

量化数字化反绝热驱动的成本和性能，是评估其实际应用潜力的重要任务。通过利用衡量两种量子动力学相似性的界限 [13], 只需有限的系统信息 [14, 15], 即可评估近似绝热捷径的性能。然而，这种评估方法无法直接应用于数字化反绝热驱动。原因在于，该界限取决于给定动力学对应的两个哈密顿量之间的差异；当差异很大时，这一界限便失去意义。在数字量子模拟中 [16, 17], , 我们通过组合量子门操作来有效实现给定的哈密顿量，因此各时刻的哈密顿量截然不同。近期，本文作者提出了该界限的一个离散版本，可用于评估数字量子模拟的性能 [18]。

本文研究数字化反绝热驱动的误差如何随时间切片数量 M变化。通过对反绝热驱动与数字化反绝热驱动之间的重叠度量应用态依赖界，我们发现二阶误差项 $\mathcal{O}(M^{-2})$消失，这与一阶 Suzuki-Trotter 分解中的主导误差项 [19]一致。因此，三阶误差项 $\mathcal{O}(M^{-3})$成为主导项。由于这些误差会在 M 个时间切片中累积，我们得出结论：数字化反绝热驱动的误差标度为 $\mathcal{O}(M^{-2})$。我们通过数值计算验证了这一误差标度，并研究了数字化近似反绝热驱动的误差标度。

II. 背景

本节概述前人的研究。我们将在第IIA节总结数字化动力学，在第IIB节介绍其误差的评估方法，并在第IIC节介绍数字化反绝热驱动。

A. 数字化动力学

我们考虑在哈密顿量 $\mathcal{H}(t)$ 下的动力学 $|\Psi(t)\rangle = \hat{U}(t,0)|\Psi(0)\rangle$，其中 $U(t,0)$ 是时间演化算子

$$\hat{U}(t,0) = \mathcal{T}\exp\left(-\frac{i}{\hbar}\int_0^t dt'\hat{\mathcal{H}}(t')\right). \tag{1}$$

* takuya.hatomura.ub@hco.ntt.co.jp

我们假设哈密顿量由可模拟的部分组成，如下所示

$$\hat{\mathcal{H}}(t) = \sum_k \hat{H}_k(t), \tag{2}$$

其中，每个 $\hat{H}_k(t)$ 都可以在量子设备上模拟。

在数字量子模拟中[16, 17], 我们将时间演化算符 (1) 近似为

$$\hat{U}(T,0) \approx \prod_{n=M}^{1} \hat{U}_d(nT/M,(n-1)T/M), \tag{3}$$

其中， T 是终止时刻， M 是时间切片数，

$$\hat{U}_d(nT/M,(n-1)T/M) = \prod_k \hat{U}_k(nT/M,(n-1)T/M), \tag{4}$$

and

$$\hat{U}_k(nT/M,(n-1)T/M) = \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\frac{T}{M}\hat{H}_k(nT/M)\right). \tag{5}$$

这里采用一阶 Suzuki-Trotter 分解，其误差按 $\mathcal{O}(M^{-1})$ 的阶缩放。具体而言，共有 M 个时间切片，每个切片会产生 $\mathcal{O}(M^{-2})$ 阶误差。注意，我们还假设近似 $\hat{\mathcal{H}}(nT/M) \approx \hat{\mathcal{H}}((n-1)T/M)$，但每个切片的误差也按 $\mathcal{O}(M^{-2})$ 的阶缩放。于是，数字化动力学

$$|\Psi_d(mT/M)\rangle = \prod_{n=m}^{1} \hat{U}_d(nT/M,(n-1)T/M)|\Psi_d(0)\rangle, \tag{6}$$

得以实现，其中 $m = 1、2、\ldots\ldots、M$，且 $|\Psi_d(0)\rangle$ 是初始态。我们假设初始态相同，即 $|\Psi_d(0)\rangle = |\Psi(0)\rangle$。

B. 数字化动力学中的误差

根据文献 [18], , 我们可以得到不等式

$$|\langle\Psi(T)|\Psi_d(T)\rangle| \geq \cos\left(\sum_{n=1}^{M}\mathcal{L}_n\right), \quad \text{for} \sum_{n=1}^{M}\mathcal{L}_n \leq \frac{\pi}{2}, \tag{7}$$

其中

$$\mathcal{L}_n = \arccos|\langle\Psi(nT/M)|\hat{U}_d(nT/M,(n-1)T/M) \times [\hat{U}(nT/M,(n-1)T/M)]^\dagger|\Psi(nT/M)\rangle|. \tag{8}$$

注意，式（8）中参考动力学和数字化动力学的角色可以互换。对式（8）应用泰勒展开，可得

$$\mathcal{L}_n \approx \frac{T^2}{2\hbar^2M^2}|\langle\Psi(nT/M)|\hat{A}(nT/M)|\Psi(nT/M)\rangle|, \tag{9}$$

其中

$$\hat{A}(nT/M) = \sum_{\substack{k,l \\ (k\neq l)}} [\hat{H}_k(nT/M), \hat{H}_l(nT/M)]. \tag{10}$$

由于有 M 个 $\mathcal{L}_n$ 切片，该界给出了相同的误差标度 $\mathcal{O}(M^{-1})$，但它取决于给定的状态，并且比传统分析 [16, 17] 更紧。

C. 数字化反绝热驱动

我们考虑一个参考哈密顿量

$$\hat{\mathcal{H}}_{\rm ref}(t) = \sum_n E_n(t)|n(t)\rangle\langle n(t)|, \tag{11}$$

其中 $E_n(t)$ 是本征能量， $|n(t)\rangle$ 是其能量本征态。根据反绝热驱动理论 [3, 4], , 我们可以通过引入反绝热哈密顿量来实现参考哈密顿量（11）的绝热时间演化

$$\hat{\mathcal{H}}_{\rm cd}(t) = i\hbar\sum_n(1-|n(t)\rangle\langle n(t)|)|\partial n(t)\rangle\langle n(t)|, \tag{12}$$

其中 $\partial = \partial/\partial t$。反绝热驱动的时间演化算符为

$$\hat{U}_{\rm ad}(t,0) = \mathcal{T}\exp\left(-\frac{i}{\hbar}\int_0^t dt'\hat{\mathcal{H}}_{\rm ad}(t')\right), \tag{13}$$

其中

$$\hat{\mathcal{H}}_{\rm ad}(t) = \hat{\mathcal{H}}_{\rm ref}(t) + \hat{\mathcal{H}}_{\rm cd}(t). \tag{14}$$

绝热态为 $|\Psi_{\rm ad}(t)\rangle = \hat{U}_{\rm ad}(t,0)|\Psi_{\rm ad}(0)\rangle$。

在数字化反绝热驱动中， [10–12], 我们将总哈密顿量的时间演化算符（13）（14）分解为参考哈密顿量（11）和反绝热哈密顿量（12）对应的时间演化算符，如式（3）、（4）和（5）所示。这里，将所得动力学记为 $|\Psi_{{\rm ad},\ d}(mT/M)\rangle$，其中 $m = 1、2、\ldots\ldots、M$。

III. 结果

本节展示我们的结果。我们在第 $\mathcal{O}$（M^{-2}）节 III A 讨论误差标度的可能性，并在第 IIIB节通过数值模拟展示其出现。此外，我们还在第 IIIB节讨论数字化近似反绝热驱动。

A. 误差标度的可能性 $\mathcal{O}(M^{-2})$

许多量子算法只使用参考哈密顿量的单个能量本征态（11），因此我们假设初始态表示为 $|\Psi_{\rm ad}(0)\rangle = |g(0)\rangle$，其中

$|g(0)\rangle$ 是参考哈密顿量的一个能量本征态（11）。接着，反绝热驱动的动力学会追踪这一个能量本征态：

$$|\Psi_{\rm ad}(t)\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}\int_0^t dt' E_g(t')} e^{i\gamma_g(t)} |g(t)\rangle, \tag{15}$$

其中 $\gamma_g(t)$ 是 Berry 相位。值得注意的是，将公式 (11)、(12) 和 (15) 代入公式 (9) 右侧后，我们发现其结果为零。这意味着，即便采用最简单的分解，即一阶 Suzuki-Trotter 分解，数字化反绝热驱动中的误差也可能不会按 $\mathcal{O}(M^{-1})$ 标度。

为找出数字化反绝热驱动中的主导误差，我们研究公式 (8) 泰勒展开中的高阶项。由此可得

$$\mathcal{L}_n \approx \frac{T^3}{6\hbar^3 M^3} |\langle g(nT/M)|\hat{B}(nT/M)|g(nT/M)\rangle|, \tag{16}$$

其中

$$\hat{B}(nT/M) = [\hat{\mathcal{H}}_{\rm cd}(nT/M), [\hat{\mathcal{H}}_{\rm cd}(nT/M), \hat{\mathcal{H}}_{\rm ref}(nT/M)]]. \tag{17}$$

利用表达式 (11) 和 (12)，还可将其改写为

$$\mathcal{L}_n \approx \frac{T^3}{3\hbar M^3} \left| \sum_{\substack{k \\ (k\neq g)}} \frac{\langle g|(\partial\hat{\mathcal{H}}_{\rm ref})|k\rangle\langle k|(\partial\hat{\mathcal{H}}_{\rm ref})|g\rangle}{E_k - E_g} \right|, \tag{18}$$

为简洁起见，省略了参数 (nT/M)。该项产生 $\mathcal{O}(M^{-3})$ 误差标度，并且我们有 M 个切片，每个切片的$\mathcal{L}_n$，因此预期数字化反绝热驱动中的误差按 $\mathcal{O}(M^{-2})$ 标度。

我们指出，出现误差标度 $\mathcal{O}(M^{-2})$仅仅是一种可能性。在反绝热驱动的离散化过程中，假设采用近似 $\mathcal{H}_{\rm ad}(nT/M) \approx \mathcal{H}_{\rm ad}((n-1)T/M)$，这会导致每个切片产生 $\mathcal{O}(M^{-2})$ 误差。此外，界限 (7) 与公式 (16) [(18)] 仅给出了数字化的最坏情况表现，并不能保证实际动力学具有相应的标度。当这些影响处于次主导地位时，才能得到误差标度 $\mathcal{O}(M^{-2})$ 。

B. 误差标度的出现 $\mathcal{O}(M^{-2})$

在数值模拟中，我们考虑横向Ising链中的量子退火[20]。其参考哈密顿量为

$$\hat{\mathcal{H}}_{\rm ref}(t) = \lambda(t)\hat{\mathcal{H}}_P + (1-\lambda(t))\hat{\mathcal{H}}_V, \tag{19}$$

其中 $\mathcal{H}_P$ 是问题哈密顿量，它是具有

$$\hat{\mathcal{H}}_P = -J\sum_{i=1}^{L} \hat{Z}_i\hat{Z}_{i+1}, \tag{20}$$

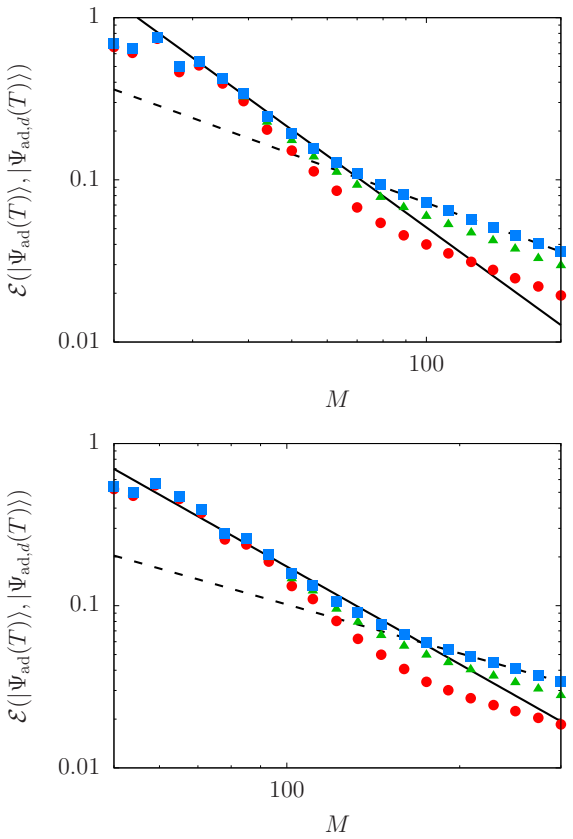

图1. 数字化反绝热驱动相对于反绝热驱动的保真度损失，$\mathcal{E}(|\Psi_{\rm ad}(T)\rangle, |\Psi_{{\rm ad},d}(T)\rangle)$，随时间切片数 M的变化。绘制的符号分别表示（红色圆圈） $T = 1$、（绿色三角形） $T = 5$和（蓝色方块） $T = 10$。误差标度 $\mathcal{O}(M^{-2})$和 $\mathcal{O}(M^{-1})$分别由黑色实线和虚线表示。 x轴的绘制范围分别为（上） $[20, 200]$ 和（下） $[50, 300]$, 。此处，（上）$L = 50$，而（下） $L = 100$。

周期性边界条件 $\hat{Z}_{L+1} = \hat{Z}_1$ 的一维伊辛模型，而 $\hat{\mathcal{H}}_V(t)$ 是驱动哈密顿量，它是一个横向场哈密顿量

$$\hat{\mathcal{H}}_V = -h^x \sum_{i=1}^{L} \hat{X}_i. \tag{21}$$

这里，$\{\hat{X}_i, \hat{Y}_i, \hat{Z}_i\}_{i=1,\,2,\,\ldots,\,L}$ 表示 L个量子比特的泡利矩阵，J 表示相互作用强度，而 h^x 表示横场强度。驱动哈密顿量的平凡基态与问题哈密顿量的基态由时间依赖参数 $\lambda(t)$进行插值，因此它必须满足 $\lambda(0) = 0$ 和 $\lambda(T) = 1$。此处及下文中，我们令 $J = h^x = 1$ 和 $\hbar = 1$ 以采用量子退火的惯用记法，此时尺度变为无量纲。

参考哈密顿量的反绝热哈密顿量——

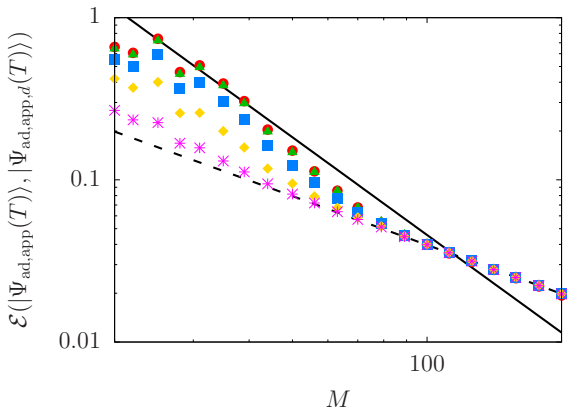

图2. 数字化近似反绝热驱动相对于近似反绝热驱动的保真度损失，$\mathcal{E}(|\Psi_{\rm ad,\ app}(T)\rangle,\ |\Psi_{\rm ad,\ app,\ d}(T)\rangle)$，随时间切片数 M 的变化。图中符号分别表示截断相互作用的数量：（红色圆圈）0、（绿色三角形）10、（蓝色方块）20、（黄色菱形）30 和（洋红色星号）40。误差标度 $\mathcal{O}(M^{-2})$ 和 $\mathcal{O}(M^{-1})$ 分别由黑色实线和虚线表示。所绘制的 x 轴范围为 $[20, 200]$。这里，$T = 1$ 和 $L = 50$。

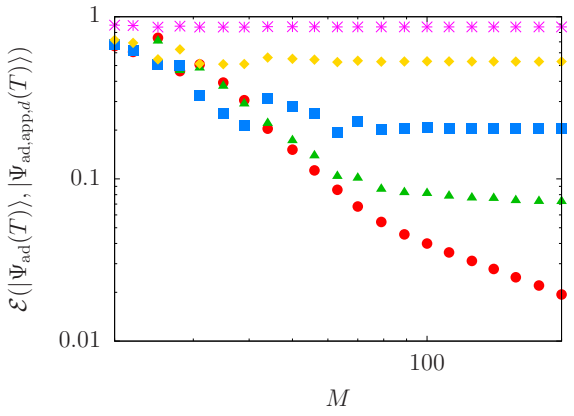

图3. 数字化近似反绝热驱动相对于绝热态的保真度损失，$\mathcal{E}(|\Psi_{\rm ad}(T)\rangle,\ |\Psi_{\rm ad,\ app,\ d}(T)\rangle)$，随时间切片数 M 的变化。图中符号分别表示截断相互作用的数量：（红色圆圈）0、（绿色三角形）10、（蓝色方块）20、（黄色菱形）30 和（洋红色星号）40。所绘制的 x 轴范围为 $[20, 200]$。这里，$T = 1$ 和$L = 50$。

量（19）由式（20）和（21）给出

$$\hat{\mathcal{H}}_{\rm cd}(t) = \sum_{k=0}^{K} \alpha_k(t) \sum_{i=1}^{L} (\hat{Y}_i \hat{X}_i^{(k)} \hat{Z}_{i+k+1} + \hat{Z}_i \hat{X}_i^{(k)} \hat{Y}_{i+k+1}), \tag{22}$$

其中

$$\hat{X}_i^{(k)} = \prod_{j=1}^{k} \hat{X}_{i+j}, \quad \text{for } k = 1, 2, \ldots, L-2, \tag{23}$$

以及 $\hat{X}_i^{(0)} = 1$ [21, 22]。本文通过数值方法确定其时间依赖系数 $\alpha_k(t)$，采用的是代数方法[14]。其显式表达式可见参考文献 [21, 22], ，但由于他们采用了时间无关相互作用，因此需要进行修改。这里，K 是一个整数，$K \leq L-2$，后文将通过截断高阶项来讨论数字化近似反绝热驱动。在精确反绝热驱动中，$K = L-2$。

在数值模拟中，我们采用调度函数 $\lambda(t) = (1/2)[1-\cos(\pi t/T)]$,，此时反绝热哈密顿量(12)在初始时刻和终止时刻均为零，并计算保真度损失

$$\mathcal{E}(|\Psi_1(T)\rangle, |\Psi_2(T)\rangle) = \sqrt{1 - |\langle\Psi_1(T)|\Psi_2(T)\rangle|^2}, \tag{24}$$

其中 $|\Psi_1(T)\rangle$ 和 $|\Psi_2(T)\rangle$ 为给定的两个态。

首先，我们计算数字化反绝热驱动相对于反绝热驱动的保真度损失，$\mathcal{E}(|\Psi_{\rm ad}(T)\rangle, |\Psi_{\rm ad,d}(T)\rangle)$。我们在图1中绘出其随时间切片数 M 的变化。当时间切片数 M 不是很大时，我们清楚地发现保真度损失按 $\mathcal{O}(M^{-2})$标度减小。我们还发现，对于较大的 M，误差标度变为 $\mathcal{O}(M^{-1})$。这一结果可以简单地理解为：按 $\mathcal{O}(M^{-2})$标度的主导误差迅速减小，而按 $\mathcal{O}(M^{-1})$标度的次主导误差则不会。因此，主导误差会在某个点发生转换。次主导误差的一个可能来源是近似 $\mathcal{H}_{\rm ad}(nT/M) \approx \mathcal{H}_{\rm ad}((n-1)T/M)$。下面我们将展示这一可能性的证据。

接下来，我们考虑数字化近似反绝热驱动。这里假设在公式（22）中 $K \leq L-2$。近似反绝热驱动产生的动力学记为$|\Psi_{\rm ad,app}(T)\rangle$，其数字化版本记为$|\Psi_{\rm ad,app,d}(T)\rangle$。我们评估数字化近似反绝热驱动相对于近似反绝热驱动的保真度损失，$\mathcal{E}(|\Psi_{\rm ad,app}(T)\rangle, |\Psi_{\rm ad,app,d}(T)\rangle)$。我们在图2中绘出其随 M 的变化。我们发现，随着截断相互作用数量的增加，误差标度逐渐趋于 $\mathcal{O}(M^{-1})$。还发现，当 M较大时，它会收敛到图1中得到的直线上。也就是说，显然，图1中的次主导误差来自离散化中的近似 $\hat{\mathcal{H}}_{\rm ad}(nT/M) \approx \hat{\mathcal{H}}_{\rm ad}((n-1)T/M)$，更具体地说，来自参考哈密顿量 $\hat{\mathcal{H}}_{\rm ref}(nT/M) \approx \mathcal{H}_{\rm ref}((n-1)T/M)$ 的近似。请注意，随着截断相互作用数量的增加，保真度损失会减小，但这应归因于所涉及的相互作用数量减少，并不意味着性能更好。我们将在下文对此作进一步说明。

最后，我们考察数字化近似反绝热驱动（精确反绝热驱动）的绝热态保真度损失，$\mathcal{E}(|\Psi_{\rm ad}(T)\rangle,\ |\Psi_{\rm ad,\ app,\ d}(T)\rangle)$。我们在图 M 中将其绘制为3。我们发现，当M较小时，绝热态的保真度损失以与精确情形相似的方式下降，即优于 $\mathcal{O}(M^{-1})$；即使截断了一些高阶项，保真度损失仍会在某些点趋于饱和，这是因为反绝热哈密顿量并不完美。

IV. 总结

本文研究了数字化反绝热驱动中的误差标度。我们发现，反绝热驱动的数字化误差按 $\mathcal{O}(M^{-2})$ 标度，而传统预测为 $\mathcal{O}(M^{-1})$。我们还表明，近似反绝热驱动的数字化会导致介于 $\mathcal{O}(M^{-2})$ 和 $\mathcal{O}(M^{-1})$ 之间的误差。这些发现从成本和性能两个角度提升了数字化反绝热驱动的实用性。

在真实量子设备上实现数字化反绝热驱动时，我们可能需要进一步分解参考哈密顿量和反绝热哈密顿量的时间演化算符。为了不抹平有益的误差标度 $\mathcal{O}(M^{-2})$，我们应采用二阶铃木–特罗特分解 [23] 或其他技术。值得注意的是，我们也可以采用高效的乘积公式来分解（近似）反绝热哈密顿量的时间演化算符，而不是采用二阶铃木–特罗特分解[24, 25]。

[1] T. Kato, 《论量子力学中的绝热定理》, 日本物理学会期刊 5, 435（1950）。[2] T. Albash 和 D. A. Lidar, 《绝热量子计算》, 现代物理评论 90, 015002（2018）。[3] M. Demirplak 和 S. A. Rice, 《绝热》, Physical Review Research 2, 032016(R)（2020）。[14] T. Hatomura 和 K. Takahashi, 《通过绝热规范势的代数表达控制和探索量子系统》, Physical Review A 103, 012220（2021）。[15] T. Hatomura, 《用控制场评估不变量布居转移的性能》, The Journal of Physical Chemistry A 107, 9937（2003）。[4] M. V. Berry, 《无跃迁量子驱动》, Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical 42, 365303（2009）。[5] X. Chen、A. Ruschhaupt、S. Schmidt、A. del Campo、D. Gu´ery-Odelin 和 J. G. Muga, 《谐振阱中的快速最优无摩擦原子冷却：绝热捷径》, Physical Review Letters 104, 063002（2010）。[6] S. Masuda 和 K. Nakamura, 《量子力学中的快进问题》, Physical Review A 78, 062108（2008）。[7] S. Masuda 和 K. Nakamura, 《基于量子速度极限的快进逆向工程》, Physical Review A 106, L040401（2022）。[16] J. Huyghebaert 和 H. D. Raedt, 《时变薛定谔问题的乘积公式方法》, Journal of Physics A: Mathematical and General 23, 5777（1990）。[17] S. Lloyd, 《通用量子模拟器》, Science 273, 1073（1996）。[18] T. Hatomura, 《受驱动系统数字量子模拟的状态依赖误差界》, Physical Review A 105, L050601（2022）。[19] M. Suzuki, 《量子力学中绝热动力学系统的广义特罗特公式》, Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences 466, 1135（2010）。[8] A. T. Rezakhani、W.-J. Kuo、A. Hamma、D. A. Lidar 和 P. Zanardi, 《量子绝热最速曲线》, Physical Review Letters 103, 080502（2009）。[9] D. Gu´ery-Odelin、A. Ruschhaupt、A. Kiely、E. Tor- rontegui、S. Mart´ınez-Garaot 和 J. G. Muga, 《指数算符和内导子的短绝热近似及其在多体问题中的应用》, Communications in Mathematical Physics 51, 183（1976）。[20] T. Kadowaki 和 H. Nishimori, 《横向伊辛模型中的量子退火》, Physical Review E 58, 5355（1998）。[21] A. del Campo、M. M. Rams 和 W. H. Zurek, 《跨越量子临界点的辅助有限速率绝热过程：精确求解量子伊辛模型》, Physical Review Letters 109, 115703（2012）。[10] N. N. Hegade、K. Paul、Y. Ding、M. Sanz、F. Al- barr´an-Arriagada、E. Solano 和 X. Chen, 《绝热捷径：概念、方法与应用》, 现代物理评论 91, 045001（2019）。[22] B. Damski, 《量子伊辛模型的反绝热驱动》, 《数字化绝热量子计算中的绝热性》, Physical Review Applied 15, 024038（2021）。[11] P. Chandarana、N. N. Hegade、K. Paul、F. Albarr´an- Arriagada、E. Solano、A. del Campo 和 X. Chen, 《数字化反绝热量子近似优化算法》, Physical Review Research 4, 013141（2022）。[12] N. N. Hegade、X. Chen 和 E. Solano, 2014).
《数字化反绝热量子优化》, Physical Review Research 4, L042030（2022）。[13] K. Suzuki 和 K. Takahashi, 《通过量子速度极限评估绝热量子计算的性能及其在多体系统中的可能应用》,
[23] M. Suzuki, 指数算符和李指数的分解公式及其在量子力学和统计物理中的若干应用, 数学物理学杂志**26**, 601（1985）。[24] A. M. Childs 和 N. Wiebe, 对易子的指数乘积公式, 数学物理学杂志**54**, 062202（2013）。[25] Y.-A. Chen、A. M. Childs、M. Hafezi、Z. Jiang、H. Kim 和 Y. Xu, 对易子及其在量子模拟中的应用的高效乘积公式, Physical Review Research **4**, 013191（2022）。