arXiv:2303.04260v2 [math-ph] 7 Nov 2023

D-可分量子演化族

KRZYSZTOF SZCZYGIELSKI

Abstract. 我们提出并探讨矩阵代数上的一种 *decomposably divisible* （D-可分）可微量子演化族的概念。具体做法是，以更一般的可分解性条件取代对传播子施加的完全正性要求。研究表明，这类 D-可分动力学映射满足广义形式的主方程，且完全由其时间局域生成元刻画。我们还找到了 D-可分性的充要条件。此外，我们考察了可分解保迹半群。

1. Introduction

本文旨在定义、构造并刻画矩阵代数上的 CP-可分（即马尔可夫）演化族，或量子动力学映射的一种推广；该推广属于一个范围更广、但在数学上仍易于处理的可分解正映射类中的特定子类。我们将注意力限制在可分解可分族的情形，即矩阵代数 $\mathbb{M}_d(\mathbb{C})$上的这类映射 Λ_t ，它们具有可分性，且其传播子在 $\mathbb{M}_d(\mathbb{C})$上保迹并可分解。可分解性是完全正性的一个相对简单但并非平凡的推广；自 20 世纪 70 年代以来，完全正性一直是量子理论中一个得到充分刻画且有充分依据的概念（参见 [1, 2, 3] 及其中的参考文献），传统上用于描述量子系统的时间演化。特别是，CP-可分族 [4, 5] 受到了特别关注，因为 CP-可分性通常被认为等同于马尔可夫性。本文不采用这一思路，而改用 D-可分性，从而有效地得到一类新的非马尔可夫演化族（或者用[6]的术语来说，是弱非马尔可夫演化族；另见 [7]）。我们希望，这类可分解动力学映射今后可用于描述马尔可夫区间之外的物理系统，例如受更复杂量子效应影响的系统，或反映系统中存在高阶关联的情况。

本文结构如下。第2节介绍一些数学预备知识，包括复矩阵代数上的可分解映射这一概念，以及开放量子系统动力学的一些基本描述。本文的主要部分是第3节，讨论D-可分量子演化族，并给出以相应时变生成元表示的D-可分性的充要条件。定理2中给出了这类演化族的构造，这是本文的主要结果。第3.4节讨论半群情形，并介绍一些与其渐近行为有关的结果（定理4和定理6）。最后，第4节给出两个分别处于2维和3维空间中的简单示例。

2. Preliminaries

首先，我们介绍一些基本预备知识，包括正映射的可分解性，以及量子动力学的可分性（和马尔可夫性）等概念。我们将大量使用张成空间 $\mathbb{M}_d(\mathbb{C})$的希尔伯特-施密特基，即关于 $\mathbb{M}_d(\mathbb{C})$上的希尔伯特-施密特内积（也称弗罗贝尼乌斯内积）正交归一的基，该内积定义为

$$\langle a, b\rangle_2 = \operatorname{tr} a^* b = \sum_{i,j=1}^{d} \overline{a_{ij}} b_{ij}, \qquad a, b \in \mathbb{M}_d(\mathbb{C}). \tag{2.1}$$

在所有这类基中，由严格厄米矩阵组成的基将受到特别关注。具体而言，设 $\{F_i\}_{i=1}^{d^2}$ 是满足以下约束的希尔伯特–施密特基

$$F_i = F_i^*, \quad \operatorname{tr} F_i = \delta_{id^2}, \quad F_{d^2} = \frac{1}{\sqrt{d}} I. \tag{2.2}$$

这类基可视为泡利矩阵和盖尔曼矩阵的推广，也可以用类似的方法构造（详情及其他性质见附录 A.1）。根据构造，矩阵 F_i 可以是非对角的对称矩阵、反对称矩阵或对角矩阵（其中所有 F_i s.t. $i < d^2$ 均为无迹矩阵）。对于任意 d，对称矩阵和反对称矩阵的数量各恰为 $d(d-1)/2$，而对角矩阵有 d 个。本文通篇专门用符号 F_i 表示这类基，并引入相应的编号，使得 F_i 为：

- 在 $1 \leqslant i \leqslant \frac{1}{2}d(d-1)$ 时为对称矩阵，
- 对于 $1 + \frac{1}{2}d(d-1) \leqslant i \leqslant d(d-1)$ 是反对称的，
- 对于 $1 + d(d-1) \leqslant i \leqslant d^2$ 是对角的。

以下复合规则将十分重要：对于每个 F_i，F_j，都有

$$F_i F_j = \sum_{k=1}^{d^2} \xi_{ijk} F_k, \tag{2.3}$$

其中系数 ξ_{ijk} 可计算为

$$\xi_{ijk} = \langle F_k, F_i F_j\rangle_2 = \operatorname{tr} F_i F_j F_k \tag{2.4}$$

并且可用所谓的结构常数表示，这些常数刻画了作为李代数的$\mathbb{M}_d(\mathbb{C})$。接下来可以轻易验证以下恒等式成立：

$$\xi_{ijk} = \xi_{kij} = \xi_{jki}, \quad \overline{\xi_{ijk}} = \xi_{jik}. \tag{2.5}$$

2.1. 可分解映射。设 $\mathscr{A}$、$\mathscr{B}$ 为有序含幺 *-代数，并设 $\mathscr{A}^+$、$\mathscr{B}^+$ 分别表示 $\mathscr{A}$ 和 $\mathscr{B}$ 中正元素构成的凸锥。若有界线性映射 $\phi\colon \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ 满足 $\phi(\mathscr{A}^+) \subseteq \mathscr{B}^+$，即将正元素映射为正元素，则称其为正映射，或称为 $\phi \in \mathsf{P}(\mathscr{A}, \mathscr{B})$。此外，若某个扩展映射$\phi_n = \mathrm{id} \otimes \phi$，通过规定 $\phi_n([a_{ij}]) = [\phi(a_{ij})]$,$a_{ij} \in \mathscr{A}$作用于 $\mathbb{M}_n(\mathscr{A}) \simeq \mathbb{M}_n(\mathbb{C}) \otimes \mathscr{A}$，对于某个 n也是正映射，则称 ϕ 为 n-正；若进一步对所有 $n \in \mathbb{N}$均为 n-正，则称映射 ϕ 为完全正（CP），或称为 $\phi \in \mathsf{CP}(\mathscr{A}, \mathscr{B})$。于是，$\mathsf{P}(\mathscr{A}, \mathscr{B})$ 和 $\mathsf{CP}(\mathscr{A}, \mathscr{B})$ 都是从 $\mathscr{A}$ 到 $\mathscr{B}$的所有线性映射空间中的凸锥。

完全正映射的结构可通过著名的 Stinespring 膨胀定理来刻画。该定理指出，对于每个 $\phi \in \mathsf{CP}(\mathscr{A}, B(H))$，若 $\mathscr{A}$ 为含幺 C*-代数，

且 H 为希尔伯特空间，则存在某个辅助希尔伯特空间 K，使得 ϕ 可以表示为以下映射的复合（表示不唯一）：

$$\phi(a) = V^*\pi(a)V, \qquad a \in \mathscr{A}, \tag{2.6}$$

对于某个有界算子 V： $H \to K$ 以及 * -同态 π： $\mathscr{A} \to B(K)$。如果所讨论的 $\mathscr{A}$ 和 H 都是有限维的，也就是说， ϕ 作用于矩阵代数之间， ϕ： $\mathbb{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathbb{M}_m(\mathbb{C})$，则定义所谓的 ϕ 的 Choi矩阵，

$$C_\phi = \sum_{i,j=1}^{n^2} E_{ij} \otimes \phi(E_{ij}), \tag{2.7}$$

其中 E_{ij} 是矩阵单位（即它们在位置 (i, j) 上为 1，在其他所有位置上均为 0），并张成 $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$。映射 $\phi \mapsto C_\phi$ 是从 $B(\mathbb{M}_n(\mathbb{C}) \ \mathbb{M}_m(\mathbb{C}))$ 到 $\mathbb{M}_n(\mathbb{C}) \otimes \mathbb{M}_m(\mathbb{C}) \simeq \mathbb{M}_{mn}(\mathbb{C})$ 的双射，称为 Choi-Jamiołkowski 同构。于是，Stinespring膨胀定理等价于著名的 Choi定理 [8]，该定理指出， ϕ 是完全正的，当且仅当它是 n-正的；而这又当且仅当 $C_\phi \in \mathbb{M}_{mn}(\mathbb{C})^+$。此外，作为推论，可以证明，对于每个 $\phi \in$ 完全正的$(\mathbb{M}_n(\mathbb{C}) \ \mathbb{M}_m(\mathbb{C}))$，都存在一组矩阵 $\{X_i\}_{i=1}^{mn} \subset \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{C})$，使得

$$\phi(a) = \sum_{i=1}^{mn} X_i a X_i^*, \quad a \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C}), \tag{2.8}$$

这就是与 ϕ 相关的 ϕ (矩阵 X_i 称为 Kraus 算子) 的 Kraus分解。完全正性的概念在数学和物理学中都被证明是一个非常稳健的概念。遗憾的是，尽管 Stinespring、Choi 和 Kraus 的研究成果给出了完全正映射的完整刻画，但对于仅为正映射的情形，我们尚无这样的刻画，而找到它多年来一直是数学领域的一个长期目标。

本文将重点讨论正映射的一个特殊子类，即所谓的可分解映射。它可以看作是完全正映射在概念上简单、但仍非平凡的推广。此外，从现在起，我们假设所讨论的所有映射都是矩阵代数 $\mathbb{M}_d(\mathbb{C})$ 上的自同态，并相应调整记号，将该代数上的适当映射简记为 $B(\mathbb{M}_d(\mathbb{C}))$、$\mathrm{P}(\mathbb{M}_d(\mathbb{C}))$ 和 $\mathrm{CP}(\mathbb{M}_d(\mathbb{C}))$。

令 θ： $\mathbb{M}_d(\mathbb{C}) \to \mathbb{M}_d(\mathbb{C})$ 表示转置映射，即

$$\theta(a) = a^{\mathrm{T}}, \quad [a_{ij}] \mapsto [a_{ji}], \tag{2.9}$$

相对于 $\mathbb{C}^d$ 中选定的某个基。容易看出， θ 是一个正映射，但它不是完全正的（事实上，它甚至不是 2-正的）。转置使我们能够定义另一类正映射，即所谓的完全共正映射。若映射 $\phi \in \mathrm{P}(\mathbb{M}_d(\mathbb{C}))$ 与 θ 复合后是完全正的，则称其为完全共正（coCP）映射；或者说，存在某个 $\phi \in \mathrm{CP}(\mathbb{M}_d(\mathbb{C}))$，使得

$$\phi = \theta \circ \tilde{\phi}. \tag{2.10}$$

完全正性与共正性这两种概念的结合，决定了一类可分解映射，这类映射将始终是本文关注的焦点：

定义 1. 设 $\varphi \in \mathrm{P}(\mathbb{M}_d(\mathbb{C}))$。若 φ 可分解，即 $\varphi \in \mathrm{D}(\mathbb{M}_d(\mathbb{C}))$，则称其为可分解映射；如果它可以表示为完全正映射与余完全正映射的凸组合，也就是说，存在 $\phi, \psi \in \mathrm{CP}(\mathbb{M}_d(\mathbb{C}))$，使得

$$\varphi = \phi + \theta \circ \psi. \tag{2.11}$$

可分解映射也可以用以下充要条件来刻画。设 $\varphi \in \mathrm{P}(\mathbb{M}_d(\mathbb{C}))$，并设 $C_\varphi \in \mathbb{M}_{d^2}(\mathbb{C})$为其对应的Choi矩阵。通过识别$\mathbb{M}_{d^2}(\mathbb{C}) \simeq \mathbb{M}_d(\mathbb{C}) \otimes \mathbb{M}_d(\mathbb{C})$，我们引入一个部分转置线性映射（相对于第二个因子） Γ on $\mathbb{M}_{d^2}(\mathbb{C})$，其在简单张量上的作用定义如下:

$$a \otimes b \mapsto (a \otimes b)^\Gamma = a \otimes b^{\mathrm{T}}. \tag{2.12}$$

再定义两个凸锥

$$V_d = \mathbb{M}_{d^2}(\mathbb{C})^+, \quad V_d^\Gamma = \{\rho : \rho^\Gamma \in \mathbb{M}_{d^2}(\mathbb{C})^+\}. \tag{2.13}$$

于是，以下可分解映射的刻画成立 [9, 10]:

定理1。映射 φon $\mathbb{M}_d(\mathbb{C})$可分解，当且仅当

$$\forall\, \rho \in V_d \cap V_d^\Gamma : \operatorname{tr} C_\varphi \rho \geqslant 0. \tag{2.14}$$

实际上，要判断给定的线性映射是否可分解，若需通过将其完全正部分和余完全正部分精确分解为式（2.11）中的组合来实现，即使在低维代数中也可能是一项难以完成的任务。相反，定理1中所述条件可以通过半定规划（SDP）程序相当充分地加以检验，本文也采用了这种方法。

每个可分解映射 φ 同时也保持厄米性，即满足

$$\varphi(a)^* = \varphi(a^*) \tag{2.15}$$

对所有 $a \in \mathbb{M}_d(\mathbb{C})$ 均成立。根据 Størmer 和 Woronowicz 的研究 [9, 11] ，当 $mn \leqslant 6$ 时， $B(\mathbb{M}_n(\mathbb{C}) \ \mathbb{M}_m(\mathbb{C}))$ 中正映射与可分解映射的锥相等；也就是说，在这种情况下，每个正映射都是可分解的。特别地， $\mathbb{M}_2(\mathbb{C})$ 上的所有正自同态都是可分解的，$\mathbb{M}_2(\mathbb{C})$ 与 $\mathbb{M}_3(\mathbb{C})$ 之间的正映射也都是如此。然而，高维代数中可分解性的精确条件仍未得到解答，不过文献中早已给出了针对 $\mathbb{M}_3(\mathbb{C})$ 上映射的反例。

2.2. 量子演化族。这里我们简要介绍开放量子系统理论中的演化。设 ρ_t 表示某个 d 维量子系统的时变密度矩阵，即设

$$\rho_t \in \mathbb{M}_d(\mathbb{C})^+, \quad \operatorname{tr} \rho_t = 1 \qquad \text{for all } \ t \in \mathbb{R}_+. \tag{2.16}$$

一族线性、以时间为参数的映射 $\{\Lambda_t : \ t \in \mathbb{R}_+\}$ ，作用于 $\mathbb{M}_d(\mathbb{C})$，并通过方程描述密度矩阵的演化

$$\rho_t = \Lambda_t(\rho_0) \tag{2.17}$$

对于某个初始 ρ_0，称其为量子演化族，或量子动力学映射。为了在每个 $t \geqslant 0$保持 ρ_t 作为密度矩阵的概率解释，要求 Λ_t 保迹（即 $\operatorname{tr} \Lambda_t(\rho) = \operatorname{tr} \rho$）且为正。基于物理上的考虑，人们通常不仅要求正性，而是要求 Λ_t 的完全正性（例如可在 [1, 2, 3] 及众多其他来源中找到适当的解释）。然而，本文将放弃这一限制，转而采用可分解性。

定义 2. 如果对于每个 $t \in [t_1, t_2]$ 和每个 $s \in [t_1, t]$，都存在一个映射$V_{t,\ s}$ 满足

$$\Lambda_t = V_{t,s} \circ \Lambda_s. \tag{2.18}$$

此外，如果对于每个 $s \leqslant t$，$V_{t,s}$ 都是正映射或完全正映射，那么在此区间内，$\{\Lambda_t : t \in \mathbb{R}_+\}$ 分别称为 P-可分或 CP-可分。

这样的二参数映射族 $\{V_{t,s} : s \leqslant t\}$ 称为演化族的传播子（因为 $V_{t,s}$ 将 Λ_s 向前传播）。如果 Λ_t 可逆，则显然有 $V_{t,s} = \Lambda_t \circ \Lambda_s^{-1}$。CP-可分性通常被视为马尔可夫性。

通常假设所讨论的动力学映射满足以下两种等价形式的局域时间主方程

$$\frac{d\Lambda_t}{dt} = L_t \circ \Lambda_t \qquad \text{or} \qquad \frac{d\rho_t}{dt} = L_t(\rho_t), \tag{2.19}$$

其中某个映射 $L_t \in B(\mathbb{M}_d(\mathbb{C}))$ 称为生成元。所有满足式 (2.19) 的动力学映射都是可分的。根据 Lindblad、Gorini、Kossakowski 和 Sudarshan 的著名结果 [4, 5], ，可逆映射 Λ_t满足主方程 (2.19) 且为 CP-可分的充要条件是 L_t 必须具有如下形式

$$L_t(\rho) = -i[H_t, \rho] + \sum_{j,k=1}^{d^2-1} a_{jk}(t) \left(F_j \rho F_k - \frac{1}{2}\{F_k F_j, \rho\} \right), \tag{2.20}$$

其中， H_t 是厄米的，并且对所有 $t \in \mathbb{R}_+$， $[a_{jk}(t)] \in \mathbb{M}_{d^2-1}(\mathbb{C})^+$ （$\{a, b\} = ab + ba$ 是反对易子）。方程（2.20）定义了 L_t的所谓标准形式（也称林德布拉德形式或 LGKS 形式）。从物理角度看， H_t 被认定为系统的哈密顿量（其中包含兰姆位移修正；此处为简洁起见，令 $\hbar = 1$），而矩阵 $[a_{jk}(t)]$, 通常称为 Kossakowski矩阵，它表示系统与环境相互作用所导致的演化的“非幺正”部分。如果生成元 L_t 与时间无关，即 $L_t = L$，那么主方程（2.19）的解就是一参数压缩半群$\{e^{tL} : t \in \mathbb{R}_+\}$，它由保迹完全正映射构成，称为量子动力半群。

3. D-divisible quantum evolution families

3.1. D-可分性的概念。本节提出并阐述 D-可分性的概念。令 $\{\Lambda_t : t \in \mathbb{R}_+\}$ 再次表示 $\mathbb{M}_d(\mathbb{C})$ 上由正且保迹的映射构成的族。接下来，我们以类似于完全正可分性的方式定义该族的 D-可分性，即要求传播子可分解:

定义 3. 若族 $\{\Lambda_t : t \in \mathbb{R}_+\}$ 在区间 $[t_1, t_2] \subseteq \mathbb{R}_+$ 上是 D-可分的（可分解可分的），当且仅当它在 $[t_1, t_2]$ 上可分，且其关联的传播子 $V_{t,\ s}$ 对所有 s、$t \in [t_1, t_2]$、$s \leqslant t$ 都是保迹且可分解的，即

$$V_{t,s} = X_{t,s} + \theta \circ Y_{t,s}, \tag{3.1}$$

对于某些映射 $X_{t,\ s}$、$Y_{t,\ s} \in \mathrm{CP}(\mathbb{M}_d(\mathbb{C}))$，它们连续依赖于 (t, s)。

这里强调，尽管映射 $V_{t,\ s}$ 整体上必须保迹，但映射 $X_{t,\ s}$和 $Y_{t,\ s}$ 均不必然保迹:

命题 1. 设族 $\{\Lambda_t : t \in \mathbb{R}_+\}$ 在 $[t_1, t_2] \subseteq \mathbb{R}_+$ 中是 D-可分的，且$\Lambda_0 = \mathrm{id}$。则对所有 $t \in [t_1, t_2]$ 和所有 $s \in [t_1, t]$，以下结论成立：

(1) $V_{t,\ t}$ =恒等映射，(2) $X_{t,\ t}$ =恒等映射，

(3) $Y_{t,\ t} = 0$，(4) Λ_t ∈D($\mathbb{M}_d(\mathbb{C})$) 且保迹，

(5) $X_{t,\ s} + Y_{t,\ s}$ 保迹。

证明。性质1由可除性条件 (2.18) 在取$s = t$后立即得到。因此，$V_{t,\ t}$ 是一个可分解映射，其余完全正部分为零，故性质2和3随之成立。对于性质4，注意到 (2.18) 还推出 $\Lambda_t = V_{t,\ 0} \circ \Lambda_0 = V_{t,\ 0}$，因此 Λ_t 是可分解且保迹的。最后，性质5由迹的线性以及转置映射保迹这一点经简单代数运算即可得到。□

3.2. 可分解动力学的生成元。本节给出我们的主要结果，即以相关生成元的性质表述量子演化族为 D-可分的充要条件。在此之前，我们简要讨论一些其他概念。我们的生成元构造（见定理2的证明）将很大程度上依赖于线性映射在 $\mathbb{M}_d(\mathbb{C})$ 上的所谓算子和表示，其中包括转置映射。具体而言，若 T 是代数 $\mathbb{M}_d(\mathbb{C})$ 上任意一个线性自同态，则其在 $a \in \mathbb{M}_d(\mathbb{C})$ 上的作用总可以表示为

$$T(a) = \sum_{i,j=1}^{d^2} t_{ij} F_i a F_j \tag{3.2}$$

对于某个系数矩阵 $[t_{ij}] \in \mathbb{M}_{d^2}(\mathbb{C})$。此外，$T \in$ 完全正（CP）$\mathbb{M}_d(\mathbb{C})$ 当且仅当 $[t_{ij}] \in \mathbb{M}_{d^2}(\mathbb{C})^+$。类似地，转置映射 θ 具有如下形式的算子和表示

$$\theta(a) = a^{\mathrm{T}} = \sum_{i=1}^{d^2} \theta_i F_i a F_i \tag{3.3}$$

系数 $\theta_i \in \{-1, 1\}$ 给定为

$$\theta_i = \begin{cases} -1, & \text{for } 1 + \frac{1}{2} d(d-1) \leqslant i \leqslant d(d-1), \\ +1, & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{3.4}$$

该陈述的证明见附录 A.3.1。我们将使用上面给出的系数 θ_i来定义一个特定的四指标几何张量，该张量在后文中将发挥至关重要的作用。回顾基矩阵 F_i 满足系数 $\xi_{ijk} = \mathrm{tr}\, F_i F_j F_k$的复合规则 (2.3)。

定义 4。我们定义四指标几何张量 $\hat{\Omega} = [\Omega^{jk}_{\mu\nu}]$，其中 $1 \leqslant j, k \leqslant d^2$，$1 \leqslant \mu\nu \leqslant d^2 - 1$，具体定义为

$$\Omega^{jk}_{\mu\nu} = \sum_{i=1}^{d^2} \theta_i \xi_{ij\mu} \overline{\xi_{ik\nu}}. \tag{3.5}$$

很容易证明（参见附录 A.4 节中的引理 1），$\hat{\Omega}$ 可以表示得更为紧凑、稳健，如下所示：

$$\Omega^{jk}_{\mu\nu} = \langle F_k^{\mathrm{T}} F_\mu, F_\nu^{\mathrm{T}} F_j \rangle_2, \tag{3.6}$$

这一表示将派上用场。现在我们可以陈述主要结果:

定理2. 设映射族 $\{\Lambda_t : t \in \mathbb{R}_+\}$ 在 $\mathbb{M}_d(\mathbb{C})$ 上满足常微分方程

$$\frac{d\Lambda_t}{dt} = L_t \circ \Lambda_t, \quad \Lambda_0 = \mathrm{id}, \tag{3.7}$$

其中 $L_t \in B(\mathbb{M}_d(\mathbb{C}))$，且函数 $t \mapsto L_t$ 在区间$[t_1, t_2] \subseteq \mathbb{R}_+$上处处连续。那么，族 $\{\Lambda_t : t \in \mathbb{R}_+\}$ 在此区间内是 D- 可分且保迹的，当且仅当存在定义在 $\mathbb{M}_d(\mathbb{C})$ 上、具有标准形式的映射 M_t ，厄米矩阵$K_t \in \mathbb{M}_d(\mathbb{C})$ 以及矩阵 $[\omega_{jk}(t)] \in \mathbb{M}_{d^2}(\mathbb{C})^+$ ，使得

$$L_t = M_t + N_t, \quad t \in [t_1, t_2], \tag{3.8}$$

其中 N_t 具有如下形式

$$N_t(\rho) = -i[K_t, \rho] + \sum_{\mu,\nu=1}^{d^2-1} \eta_{\mu\nu}(t) \left(F_\mu \rho F_\nu - \frac{1}{2}\{F_\nu F_\mu, \rho\} \right) \tag{3.9}$$

对于系数

$$\eta_{\mu\nu}(t) = \sum_{j,k=1}^{d^2} \Omega_{\mu\nu}^{jk} \omega_{jk}(t). \tag{3.10}$$

证明. 证明将遵循 [3, 定理4.2.1] 的一般思路。我们感兴趣的是计算 $\frac{d\rho_t}{dt}$，其中导数需“从上方”计算，即

$$\frac{d\rho_t}{dt} = \lim_{\epsilon \searrow 0} \frac{\Lambda_{t+\epsilon}(\rho_0) - \Lambda_t(\rho_0)}{\epsilon} = \lim_{\epsilon \searrow 0} \frac{V_{t+\epsilon,t} - \mathrm{id}}{\epsilon} \circ \Lambda_t(\rho_0) = L_t(\rho_t), \tag{3.11}$$

这是通过可分性得到的，$\Lambda_{t+\epsilon} = V_{t+\epsilon,\ t} \circ \Lambda_t$ 且 $\Lambda_0 = \mathrm{id}$。因此我们有

$$L_t = \lim_{\epsilon \searrow 0} \frac{V_{t+\epsilon,t} - \mathrm{id}}{\epsilon}. \tag{3.12}$$

令我们应用 D-可分条件，即令

$$V_{t+\epsilon,t} = X_{t+\epsilon,t} + \theta \circ Y_{t+\epsilon,t} \tag{3.13}$$

对于某些连续函数 $(t,s) \mapsto X_{t,\ s}, Y_{t,\ s} \in$完全正$(\mathbb{M}_d(\mathbb{C}))$，$s \leqslant t$。映射 $X_{t,\ s}$和 $Y_{t,\ s}$均为完全正，因此可写成算子和表示

$$X_{t,s}(\rho) = \sum_{j,k=1}^{d^2} x_{jk}(t,s) F_j \rho F_k, \qquad Y_{t,s}(\rho) = \sum_{j,k=1}^{d^2} y_{jk}(t,s) F_j \rho F_k, \tag{3.14}$$

其中 $\rho \in \mathbb{M}_d(\mathbb{C})$，其中某些矩阵 $[x_{jk}(t,s)], [y_{jk}(t,s)] \in \mathbb{M}_{d^2}(\mathbb{C})^+$ 也连续依赖于 (t,s)。类似地，转置映射 θ 可表示为式 (3.3)，即

$$\theta(\rho) = \rho^{\mathrm{T}} = \sum_{i=1}^{d^2} \theta_i F_i \rho F_i \tag{3.15}$$

其中 θ_i 在式 (3.4) 中给出。因此，利用复合规则 (2.3) 和性质 (2.5)， L_t 的表达式为

$$
\begin{aligned}
L_t(\rho) &= \lim_{\epsilon \searrow 0} \frac{1}{\epsilon} \left[X_{t+\epsilon,t}(\rho) + Y_{t+\epsilon,t}(\rho)^{\mathrm{T}} - \rho \right] \qquad (3.16)\\
&= \lim_{\epsilon \searrow 0} \frac{1}{\epsilon} \left[\sum_{j,k=1}^{d^2} x_{jk}(t+\epsilon,t) F_j \rho F_k + \sum_{j,k,l=1}^{d^2} \theta_l y_{jk}(t+\epsilon,t) F_l F_j \rho F_k F_l - \rho \right] \\
&= \lim_{\epsilon \searrow 0} \frac{1}{\epsilon} \left[\sum_{j,k=1}^{d^2} x_{jk}(t+\epsilon,t) F_j \rho F_k + \sum_{j,k,l=1}^{d^2} \sum_{\mu,\nu=1}^{d^2} \theta_l y_{jk}(t+\epsilon,t) \xi_{lj\mu} \overline{\xi_{lk\nu}} F_\mu \rho F_\nu - \rho \right] \\
&= \lim_{\epsilon \searrow 0} \frac{1}{\epsilon} \left[\sum_{j,k=1}^{d^2} x_{jk}(t+\epsilon,t) F_j \rho F_k + \sum_{\mu,\nu=1}^{d^2} \sum_{j,k=1}^{d^2} \Omega_{\mu\nu}^{jk} y_{jk}(t+\epsilon,t) F_\mu \rho F_\nu - \rho \right].
\end{aligned}
$$

现在设

$$
z_{\mu\nu}(t,s) = \sum_{j,k=1}^{d^2} \Omega_{\mu\nu}^{jk} y_{jk}(t,s). \qquad (3.17)
$$

容易验证，对于任意 (t,s)，矩阵 $[z_{\mu\nu}(t,s)]_{\mu\nu} \in \mathbb{M}_{d^2-1}(\mathbb{C})$ 都是厄米的，但一般并非半正定。接下来，我们从两个求和式中减去含有 $\mu,\nu = d^2$ 的项，并由 $F_{d^2} = \frac{1}{\sqrt{d}} I_d$ 得到，

$$
L_t(\rho) = \lim_{\epsilon \searrow 0} \left[W_{t,\epsilon}\rho + E_{t,\epsilon}\rho + \rho E_{t,\epsilon}^* + \sum_{\mu,\nu=1}^{d^2-1} w_{\mu\nu}(t+\epsilon,t) F_\mu \rho F_\nu \right], \qquad (3.18)
$$

其中我们引入了

$$
w_{\mu\nu}(t,s) = x_{\mu\nu}(t,s) + z_{\mu\nu}(t,s), \qquad (3.19a)
$$

$$
W_{t,\epsilon} = \left[\frac{1}{d} w_{d^2 d^2}(t+\epsilon,t) - 1 \right] I_d, \qquad (3.19b)
$$

$$
E_{t,\epsilon} = \frac{1}{\sqrt{d}} \sum_{\mu=1}^{d^2-1} w_{\mu d^2}(t+\epsilon,t) F_\mu. \qquad (3.19c)
$$

现在，我们通过设定来定义新的时间依赖系数 $g_{\mu\nu}(t)$

$$
g_{d^2 d^2}(t) = \lim_{\epsilon \searrow 0} \frac{1}{\epsilon} \left[\frac{1}{d} w_{d^2 d^2}(t+\epsilon,t) - 1 \right], \qquad (3.20a)
$$

$$
g_{\mu\nu}(t) = \lim_{\epsilon \searrow 0} \frac{1}{\epsilon} w_{\mu\nu}(t+\epsilon,t), \quad 1 \leqslant \mu,\nu \leqslant d^2 - 1, \qquad (3.20b)
$$

由于 Λ_t 的可微性，所有极限均存在，因此我们的 $L_t(\rho)$ 表达式变为

$$
L_t(\rho) = g_{d^2 d^2}(t)\rho + E_t\rho + \rho E_t^* + \sum_{\mu,\nu=1}^{d^2-1} g_{\mu\nu}(t) F_\mu \rho F_\nu \qquad (3.21)
$$

对于 $E_t = \frac{1}{\sqrt{d}} \sum_{\mu=1}^{d^2} g_{\mu d^2}(t) F_\mu$。引入两个新矩阵

$$
A_t = \frac{1}{2}(E_t + E_t^*) + \frac{1}{2} \gamma_{d^2 d^2}(t) I_d, \qquad (3.22a)
$$

$$J_t = -\frac{1}{2i}\left(E_t - E_t^*\right), \tag{3.22b}$$

我们得到

$$L_t(\rho) = -i[J_t, \rho] + \{A_t, \rho\} + \sum_{\mu,\nu=1}^{d^2-1} g_{\mu\nu}(t) F_\mu \rho F_\nu. \tag{3.23}$$

我们要求$V_{t,\ s}$ 满足迹保持条件，这意味着 L_t必须使迹为零，即 $\mathrm{tr}\, L_t(\rho) = 0$，且与 ρ无关。对我们的表达式应用这一条件，并利用迹的循环性质进行一些代数运算后，可得

$$A_t = -\frac{1}{2}\sum_{\mu,\nu=1}^{d^2-1} g_{\mu\nu}(t) F_\nu F_\mu. \tag{3.24}$$

因此，代入后我们得到如下形式

$$L_t(\rho) = -i[J_t, \rho] + \sum_{\mu,\nu=1}^{d^2-1} g_{\mu\nu}(t)\left(F_\mu \rho F_\nu - \frac{1}{2}\{F_\nu F_\mu, \rho\}\right), \tag{3.25}$$

尽管它在形式上看起来相似，但这并非标准形式，因为矩阵 $[g_{\mu\nu}(t)]_{\mu\nu}$通常并非半正定。然而，公式 (3.19a) 允许将系数 $g_{\mu\nu}(t)$分解为仅通过传播子的完全正部分或余完全正部分定义的表达式之和，即

$$g_{\mu\nu}(t) = \gamma_{\mu\nu}(t) + \eta_{\mu\nu}(t), \tag{3.26}$$

其中

$$\gamma_{\mu\nu}(t) = \lim_{\epsilon \searrow 0} \frac{1}{\epsilon} x_{\mu\nu}(t+\epsilon, t), \qquad \eta_{\mu\nu}(t) = \lim_{\epsilon \searrow 0} \frac{1}{\epsilon} \sum_{j,k=1}^{d^2} \Omega_{\mu\nu}^{jk} y_{jk}(t+\epsilon, t). \tag{3.27}$$

同理，我们有 $J_t = H_t + K_t$ 其中

$$H_t = \frac{i}{2\sqrt{d}}\left(\sum_{\mu=1}^{d^2-1} \gamma_{\mu d^2}(t) F_\mu - \sum_{\mu=1}^{d^2-1} \overline{\gamma_{\mu d^2}(t)} F_\mu\right) \tag{3.28}$$

并且 K_t 具有相同的结构，只需用 $\eta_{\mu d^2}(t)$ 替换 $\gamma_{\mu d^2}(t)$ 即可。因此显然，表达式 (3.25) 可以改写为作用于 ρ的两个映射之和，$L_t = M_t + N_t$，其中

$$N_t(\rho) = -i[K_t, \rho] + \sum_{\mu,\nu=1}^{d^2-1} \eta_{\mu\nu}(t)\left(F_\mu \rho F_\nu - \frac{1}{2}\{F_\nu F_\mu, \rho\}\right) \tag{3.29}$$

并且 M_t 具有相同的结构，只需用 H_t 替换 K_t，并用 $\gamma_{\mu\nu}(t)$ 替换 $\eta_{\mu\nu}(t)$。直接检验可知，矩阵 H_t 和 K_t 均为厄米矩阵，且映射$X_{t,\ s}$的完全正性保证矩阵 $[x_{\mu\nu}(t,s)]$ 和 $[\gamma_{\mu\nu}(t)]$ 均为半正定矩阵，即映射M_t 处于标准形式。接下来只需证明系数 $\eta_{\mu\nu}(t)$ 如所述。我们有

$$\eta_{\mu\nu}(t) = \sum_{j,k=1}^{d^2} \Omega_{\mu\nu}^{jk} \lim_{\epsilon \searrow 0} \frac{1}{\epsilon} y_{jk}(t+\epsilon, t). \tag{3.30}$$

正如我们在附录中的引理2所示，对求和应用上述极限过程可为所有 $t \in [t_1, t_2]$定义一个半正定矩阵，即我们有

$$\omega_{jk}(t) = \lim_{\epsilon \searrow 0} \frac{1}{\epsilon} y_{jk}(t+\epsilon, t), \quad [\omega_{jk}(t)] \in \mathbb{M}_{d^2}(\mathbb{C})^+ \tag{3.31}$$

且 $\eta_{\mu\nu}(t)$ 具有形式 (3.10)。这证明了充分性。为证明必要性，我们从根据表达式 (3.29) 将 N_t 重新表示为以下形式开始：

$$\begin{aligned} N_t(\rho) = &-i[K_t, \rho] + \left(\sum_{\alpha=1}^{d^2} C_{\alpha,t} \rho C_{\alpha,t}^* \right)^{\mathrm{T}} - \frac{1}{2}[D_t - D_t^*, \rho] \\ &- \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^{d^2} \{C_{\alpha,t}^* C_{\alpha,t}, \rho\} \end{aligned} \tag{3.32}$$

这可通过以下步骤实现：(1) 根据 (3.10) 表示 $\eta_{\mu\nu}(t)$，(2) 根据 (3.5) 展开几何张量 $\Omega_{\mu\nu}^{jk}$，(3) 应用转置映射 θ 的算子和表示 (3.3)，(4) 将 $[\omega_{jk}(t)] \in \mathbb{M}_{d^2}(\mathbb{C})^+$ 表示为 $\omega_{jk}(t) = \sum_\alpha c_{j\alpha}(t) c_{k\alpha}(t)$，其中 $[c_{ij}(t)]$ 是一个新的矩阵，最后 (5) 代入

$$C_{\alpha,t} = \sum_{j=1}^{d^2} c_{\alpha j}(t) F_j, \qquad D_t = \sum_{j,k=1}^{d^2} \omega_{jk}(t) A_k F_j, \tag{3.33}$$

对于 $A_k = \sum_l \theta_l \overline{\xi_{lkd^2}} F_l$（推导过程见附录 A.5 节）。矩阵 $D_t - D_t^*$ 显然是斜厄米的，因此它具有形式 $D_t - D_t^* = -iE_t$，其中 E_t 是某个厄米矩阵。现在回想一下，M_t 处于标准形式，因此矩阵 $[\gamma_{\mu\nu}(t)]$ 是半正定的，即它可以写成以下形式

$$\gamma_{\mu\nu}(t) = \sum_{i=1}^{d^2-1} g_{\mu i}(t) \overline{g_{\nu i}(t)} \tag{3.34}$$

对于某个矩阵 $[g_{ij}(t)] \in \mathbb{M}_{d^2-1}(\mathbb{C})$。然后，通过定义 $G_{\alpha,\ t} = \sum_i g_{\alpha i}(t) F_i$ 我们可以将 M_t 重写为

$$M_t(\rho) = -i[H_t, \rho] + \sum_\alpha \left(G_{\alpha,t} \rho G_{\alpha,t}^* - \frac{1}{2} \{G_{\alpha,t}^* G_{\alpha,t}, \rho\} \right), \tag{3.35}$$

这有时被称为生成元的第二标准形式。所有这些使我们能够将 L_t 的表达式重写为

$$L_t = \tilde{L}_t^{(0)} + \tilde{L}_t^{(1)} + \tilde{L}_t^{(2)} \tag{3.36}$$

其中各个部分 $\tilde{L}_t^{(i)}$ 定义为

$$\tilde{L}_t^{(0)}(\rho) = -i[H_t + K_t + E_t, \rho] - \frac{1}{2} \sum_\alpha \{G_{\alpha,t}^* G_{\alpha,t} + C_{\alpha,t}^* C_{\alpha,t}, \rho\}, \tag{3.37a}$$

$$\tilde{L}_t^{(1)}(\rho) = \sum_\alpha G_{\alpha,t} \rho G_{\alpha,t}^*, \tag{3.37b}$$

$$\tilde{L}_t^{(2)}(\rho) = \left(\sum_\alpha C_{\alpha,t} \rho C_{\alpha,t}^* \right)^{\mathrm{T}} = \theta \left(\sum_\alpha C_{\alpha,t} \rho C_{\alpha,t}^* \right). \tag{3.37c}$$

现在，选取一个递增的时刻序列 $(\tau_j)_{j=0}^n \subset [s,t]$，使得 $\tau_0 = s$ 且$\tau_n = t$。然后，我们可以将传播子 $V_{t,\,s}$ 表示为

$$V_{t,s} = \lim_{\max|\tau_{j+1}-\tau_j|\to 0} \prod_{j=n-1}^{0} e^{(\tau_{j+1}-\tau_j)L_{\tau_j}}, \tag{3.38}$$

也就是说，我们通过半群的复合来近似精确传播子；这称为时间分裂公式 [3]。记 $\tau_{j+1} - \tau_j = \Delta_j$。应用分解式（ 3.8 ），根据李 - 特罗特乘积公式，可得

$$e^{\Delta_j L_{\tau_j}} = \exp\left(\Delta_j \sum_{k=0}^{2} \tilde{L}_{\tau_j}^{(k)}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\prod_{k=0}^{2} \exp\frac{\Delta_j}{n}\tilde{L}_{\tau_j}^{(k)}\right)^n. \tag{3.39}$$

现在我们必须明确三个映射 $\exp\frac{\Delta_j}{n}\tilde{L}_t^{(k)}$ 对于 $k = 0$、1 和 2 的性质：（1）情形 $k = 0$。定义

$$W = \frac{\Delta_j}{n}\left[-i(H_t + K_t + E_t) - \frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{d^2}\left(G_{\alpha,t}^* G_{\alpha,t} + C_{\alpha,t}^* C_{\alpha,t}\right)\right] \tag{3.40}$$

对于固定的 t、j 以及映射 $\xi \mapsto f_\xi \in$CP($\mathbb{M}_d(\mathbb{C})$)，令

$$f_\xi(\rho) = e^{\xi W}\rho e^{\xi W^*}, \qquad \rho \in \mathbb{M}_d(\mathbb{C}). \tag{3.41}$$

然后，通过直接计算可以很容易地验证，我们有

$$\frac{d}{d\xi}f_\xi(\rho) = \frac{\Delta_j}{n}\tilde{L}_t^{(0)}(f_\xi(\rho)), \tag{3.42}$$

即单位矩阵

$$f_\xi = \exp\frac{\xi\Delta_j}{n}\tilde{L}_t^{(0)} \tag{3.43}$$

对所有 $\xi \in \mathbb{R}$均成立，即 $\{f_\xi :\ \xi \in \mathbb{R}\}$ 是一族完全正映射。特别地，$\exp\frac{\Delta_j}{n}\tilde{L}_t^{(0)} = f_1$ 是完全正的。

(2) 情形 $k = 1$。注意，(3.37b) 中定义的 $\tilde{L}_t^{(1)}$ 是完全正映射（其形式为克劳斯形式）。因此，根据命题 6（见附录 A.3.3），$\exp\frac{\Delta_j}{n}\tilde{L}_t^{(1)}$ 也是完全正的。

(3) 情形 $k = 2$。最后，由 (3.37c) 给出的 $\tilde{L}_t^{(2)}$ 显然是余完全正映射。于是，根据命题 7（附录 A.3.3），剩余的映射 $\exp\frac{\Delta_j}{n}\tilde{L}_t^{(2)}$ 是可分解的。

在该结果中，表达式 (3.39) 中极限符号下出现的映射对于每个 n 都是可分解的（作为复合映射）；这表明 $e^{\Delta_j L_{\tau_j}}$ 也是可分解的，因为它是闭锥 D($\mathbb{M}_d(\mathbb{C})$) 中一列可分解映射的极限。同一事实进一步表明，(3.38) 中给出的 $V_{t,\,s}$ 也是可分解的。最后，通过直接计算可检验 $L_t = M_t + N_t$ 会使迹为零，即 tr $L_t(\rho) = 0$。这说明，对于 $t \in \mathbb{R}_+$ 的每一种选择，映射族 $\{e^{\tau L_t} :\ \tau \in \mathbb{R}_+\}$ 都必须保迹；因此，分解式 (3.38) 中的每个映射 $e^{\Delta_j L_{\tau_j}}$ 也都保迹，整个传播子$V_{t,\,s}$ 亦然。这就完成了证明。□

我们用如下等价表述来阐明我们的结果。回忆一下，作为一个有限维向量空间， $\mathbb{M}_d(\mathbb{C})$ 与其代数对偶 $\mathbb{M}_d(\mathbb{C})'$ 同构，其对偶配对可用迹来表示，

$$\mathbb{M}_d(\mathbb{C})' \times \mathbb{M}_d(\mathbb{C}) \ni (f, a) = \operatorname{tr} b_f a, \tag{3.44}$$

其中，映射 $f \mapsto b_f \in \mathbb{M}_d(\mathbb{C})$ 是一个双射。设 ϕ 是 $\mathbb{M}_d(\mathbb{C})$ 上的线性映射。那么，存在另一个 $\mathbb{M}_d(\mathbb{C})$ 上的线性映射 ϕ'，使得

$$\operatorname{tr} a\, \phi(b) = \operatorname{tr} \phi'(a) b, \quad a, b \in \mathbb{M}_d(\mathbb{C}), \tag{3.45}$$

我们称其为 ϕ 的对偶映射（这里稍微宽泛地使用了这一术语）。我们有：

定理3. 线性映射族 $\{\Lambda_t : t \in \mathbb{R}_+\}$，定义在 $\mathbb{M}_d(\mathbb{C})$ 上，并满足区间 $[t_1, t_2] \subseteq \mathbb{R}_+$ 内的方程 (3.7)，是 D- 可分的，当且仅当存在一个厄米矩阵 $S_t \in \mathbb{M}_d(\mathbb{C})$ 和映射 $\varphi_t \in \mathsf{D}(\mathbb{M}_d(\mathbb{C}))$，使得生成元 L_t 具有如下形式

$$L_t = -i[S_t, \cdot\,] + \varphi_t - \frac{1}{2}\{\varphi_t'(I), \cdot\,\}. \tag{3.46}$$

证明. 只需设定两个完全正映射：

$$\phi_t(\rho) = \sum_\alpha G_{\alpha,t} \rho G_{\alpha,t}^*, \quad \psi_t(\rho) = \sum_\alpha C_{\alpha,t} \rho C_{\alpha,t}^*, \tag{3.47}$$

这里我们沿用了定理2证明中的相同记号。接下来可以验证，生成元的两个部分 M_t 和 N_t 都可以方便地重新表示为

$$M_t = -i[H_t, \cdot\,] + \phi_t - \frac{1}{2}\{\phi_t'(I), \cdot\,\}, \tag{3.48a}$$

$$N_t = -i[K_t + E_t, \cdot\,] + \psi_t - \frac{1}{2}\{\psi_t'(I), \cdot\,\} \tag{3.48b}$$

经过简单的代数运算，可以证明它们的和具有所声称的形式，方法是定义可分解映射 φ_t 和厄米矩阵 S_t，如下所示

$$\varphi_t = \phi_t + \theta \circ \psi_t, \quad S_t = H_t + K_t + E_t \tag{3.49}$$

并通知 $(\theta \circ \psi_t)'(I) = \psi_t'(I)$。 □

为了确认我们结果的有效性，我们验证了以 L_t 所提形式给出的族是否确实可分解。我们通过在凸集 $V_d \cap V_d^\Gamma$ 上最小化泛函 $\rho \mapsto \operatorname{tr} C_{e^{tL}} \rho$，检查定理1中所述的条件。为此，我们针对不同维度和 t取值下的 L_t 的多种形式，数值和符号化地应用了半定规划优化例程。

3.3. 渐近完全正性。正如我们通过数值计算所验证的，D-可分动力学映射的可分解性性质通常相当令人意外。例如，尽管传播子$V_{t,\ s}$ 仍然是真正可分解的，即具有非零的余完全正部分，但 Λ_t 也可能突然变为完全正。 Λ_t 的这种行为可能相当复杂，范围从单纯为完全正，到甚至在完全正性与可分解性之间来回变化。在特定情况下，即生成元的选择特定时，会观察到 Λ_t 的一种有趣现象：也就是说， Λ_t 起初可能是可分解的，随后转变为仅完全正，并随着时间推移始终保持如此。这一观察为可分解映射的渐近完全正性给出了如下定义：

定义 5。若存在$t_0 > 0$，使得对于所有 $t \geqslant t_0$， Λ_t 均为完全正且保迹，则称族 $\{\Lambda_t : t \in \mathbb{R}_+\}$ 渐近完全正。

事实上，即使在最简单的半群情形中，也能观察到渐近完全正性，以下示例对此进行了说明；相关分析通过考察 Choi矩阵 C_{Λ_t}的谱来进行。由于 Λ_t 保持厄米性， C_{Λ_t} 是厄米的，因此只需满足 $\operatorname{spec} C_{\Lambda_t} \subset \mathbb{R}_+$， Λ_t 便是完全正的；而若最小特征值 $\lambda_{\min}(C_\varphi)$ 非负，这一条件即可得到保证。因此，至少应当设法找到一些性质良好且可计算的最小特征值下界。Wolkowicz 和 Styan 在 [12, 定理2.1] 中给出了这样一个界。设 $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ 是一个具有实谱的矩阵，$\operatorname{spec} A = \{\lambda_i(A) : 1 \leqslant i \leqslant n\}$, $\lambda_i(A) \in \mathbb{R}$。那么，最小特征值 $\lambda_{\min}(A)$ 满足不等式

$$\mu_A - \nu_A\sqrt{n-1} \leqslant \lambda_{\min}(A) \leqslant \mu_A - \frac{\nu_A}{\sqrt{n-1}}, \tag{3.50}$$

对于 $\mu_A = \frac{1}{n}\operatorname{tr} A$和 $\nu_A^2 = \frac{1}{n}\operatorname{tr}(A^2) - \mu_A^2$。由此可得以下完全正性的充分条件:

命题 2. 保迹映射 $\varphi \in \mathrm{D}(\mathbb{M}_d(\mathbb{C}))$ 是完全正的，当且仅当

$$\sum_{i,j=1}^{d} \|\varphi(E_{ij})\|_2^2 \leqslant \frac{d^2}{d^2-1}, \tag{3.51}$$

其中 $\|a\|_2 = \sqrt{\operatorname{tr} a^* a}$ 表示 $a \in \mathbb{M}_d(\mathbb{C})$ 的希尔伯特-施密特范数。

证明。显然，若 $\lambda_{\min}(C_\varphi)$ 非负，则 $\varphi \in \mathrm{CP}(\mathbb{M}_d(\mathbb{C}))$。利用迹保持这一性质进行简单的代数运算，可验证 φ 满足

$$\operatorname{tr} C_\varphi = d, \qquad \operatorname{tr} C_\varphi^2 = \sum_{i,j=1}^{d} \operatorname{tr} \varphi(E_{ij})\varphi(E_{ji}) = \sum_{i,j=1}^{d} \|\varphi(E_{ij})\|_2^2, \tag{3.52}$$

因为 $E_{ij} = E_{ji}^*$ 和 φ 保持厄米性。由此可验证 $\lambda_{\min}(C_\varphi)$ 满足

$$\lambda_{\min}(C_\varphi) \geqslant \frac{1}{d}\left[1 - \sqrt{(d^2-1)\left(\sum_{i,j=1}^{d} \|\varphi(E_{ij})\|_2^2 - 1\right)}\right], \tag{3.53}$$

这是在 (3.50) 中代入 $A = C_\varphi$, $n = d^2$ 后得到的。最后，要求上述下界非负，即可得到所述结论。□

由此得到渐近完全正性的一个判据:

定理4. 设 $\{\Lambda_t : t \in \mathbb{R}_+\}$ 是 D-可整除保迹族。若满足

$$\lim_{t\to\infty} \sum_{i,j=1}^{d} \|\Lambda_t(E_{ij})\|_2^2 < \frac{d^2}{d^2-1}, \tag{3.54}$$

则该族是渐近完全正的。

证明。令 $g(t) = \sum_{i,\ j=1}^{d} \|\Lambda_t(E_{ij})\|_2^2$。若确实有 $\lim_{t\to\infty} g(t) < \frac{d^2}{d^2-1}$，则根据极限的定义，存在 $t_0 \geqslant 0$，使得对所有 $t > t_0$， $g(t) < \frac{d^2}{d^2-1}$，并且我们有$\lambda_{\min}(C_{\Lambda_t}) \geqslant 0$, $\Lambda_t \in \mathrm{CP}(\mathbb{M}_d(\mathbb{C}))$。根据命题2，即一个族是渐近完全正的。□

3.4. 可分解半群。这里我们简要讨论半群的情形。显然，在分解式 (3.8) 中消去所有时间依赖性，即可得到对任意 d、定义在 $\mathbb{M}_d(\mathbb{C})$上的 D-可分保迹半群的一般刻画。显然，一个半群是 D-可分的，当且仅当它是可分解的，因此我们得到定理2的以下推论：

定理5：半群 $\{e^{tL} : t \in \mathbb{R}_+\}$ 是保迹且可分解的，当且仅当 L 具有定理2和定理3中所述的形式，且所有矩阵均与时间无关。

这里我们指出，Franke 在 1976 [13]，中推导出了半群情形下生成元 L 的一个等价公式，不过所用方法与我们不同，且没有明确利用可分解性。

在某些情况下，定理4中出现的极限可以精确计算。例如，若 L 可对角化，其值可由 L 的特征基及其对应对偶基构成的双正交系确定：

定理6：设 L 可对角化，$0 \in \operatorname{spec} L$ 的重数为1，且 $\varepsilon \in \ker L$ 是相应的特征矩阵。则，

$$\lim_{t\to\infty} \sum_{i,j=1}^{d} \left\| e^{tL}(E_{ij}) \right\|_2^2 = \left(\|\varepsilon\|_2 \, \|\beta\|_2 \right)^2 \geqslant 1, \tag{3.55}$$

其中 $\beta \in \mathbb{M}_d(\mathbb{C})$ 是 L 的对偶基中的一个元素，使得 $\langle \beta, \varepsilon \rangle_2 = 1$。

证明。再次令 $g(t) = \sum_{i,\,j=1}^{d} \left\| e^{tL}(E_{ij}) \right\|_2^2$，并假设 L 可对角化，即存在一个线性无关集合 $\{\mathbf{e}_i\}$，由 $\mathbb{C}^{d^2}$ 的一组（不一定正交的）归一化特征向量张成；这里的特征向量对应于 $\hat{L} \in \mathbb{M}_{d^2}(\mathbb{C})$，即 L 的矩阵形式，详见 A.2节。接着可以证明，总是存在所谓的对偶基（或互反基）$\{\mathbf{b}_i\}$，它也张成 $\mathbb{C}^{d^2}$，并满足关系 $\langle \mathbf{b}_i, \mathbf{e}_j \rangle = \delta_{ij}$；也就是说，$(\{\mathbf{e}_i\}, \{\mathbf{b}_i\})$ 构成一个双正交系。于是，每个作用于 $\mathbb{C}^{d^2}$ 的算子 $\hat{A}$ 都可以写成如下形式

$$\hat{A} = \sum_{i,j=1}^{d^2} a_{ij} \langle \mathbf{b}_i, \cdot \rangle \mathbf{e}_j \tag{3.56}$$

对于系数 $a_{ij} = \langle \mathbf{b}_i, \hat{A}\mathbf{e}_j \rangle$。特别是，当选取基 $\{\mathbf{e}_i\}$ 作为 A 的 $\hat{}$ 特征基时，我们有

$$\hat{A} = \sum_{i=1}^{d^2} \lambda_i(A) \langle \mathbf{b}_i, \cdot \rangle \mathbf{e}_i, \tag{3.57}$$

其中 $\lambda_i(A) \in$ 谱 A，即 $\hat{A}$ 可表示为伪谱分解，即由投影到其特征子空间上的非正交秩一投影算子组合而成。根据可对角化性，对于可逆矩阵 $\hat{P}$，有 $\hat{A} = \hat{P}\hat{D}\hat{P}^{-1}$；矩阵 $\hat{P}$由特征向量 $\mathbf{e}_i$按列排列构成，对角矩阵 $\hat{D} = \operatorname{diag}\{\lambda_i(A)\}$。因此，$\hat{A}$的每个解析函数 f都具有相同的特征子空间，并且 $f(\hat{A}) = \hat{P} f(\hat{D}) \hat{P}^{-1}$，即谱 $f(\hat{A}) = \{f(\lambda_i(A))\}$。因此，我们将谱 $\hat{L} = \{\mu_i\}$ 记作，并假设 $\hat{L}$ 可对角化。于是，$\hat{L}$ 可按特征值 μ_i、特征向量 $\mathbf{e}_i$ 及其对应的对偶向量 $\mathbf{b}_i$作分解 (3.57)。自然地，映射 L 本身也可对角化，因此我们有

$$e^{tL} = \sum_{i=1}^{d^2} e^{\mu_i t} \langle \beta_i, \cdot \rangle_2 \, \varepsilon_i, \tag{3.58}$$

其中 $\beta_i = \mathsf{vec}^{-1}\,\mathbf{b}_i$、$\varepsilon_i = \mathsf{vec}^{-1}\,\mathbf{e}_i$ 是 L 和 $\langle \beta_i, \varepsilon_j\rangle_2 = \delta_{ij}$的特征矩阵。

根据正幺映射的一般理论，我们知道 $\mathsf{spec}\, e^{tL}$ 位于单位圆内（因为是迹范数压缩），包含 1（这是迹保持的结果），并且关于复共轭封闭，即 $e^{\mu_i t}, \overline{e^{\mu_i t}} \in \mathsf{spec}\ e^{tL}$（根据厄米性保持性质） [14]。这意味着 $0 \in \mathsf{spec}\, L$，并且 $\mathsf{spec}\ L \setminus \{0\}$ 由成对的 $\{\mu_i, \overline{\mu_i}$ 组成：$\mathsf{Re}\ \mu_i < 0\}$ 以及可能存在的一些负实数。于是令 $\mu_1 = 0$。我们有

$$e^{\mu_1 t} = 1 \ \text{ and } \ e^{\mu_i t} = e^{-|\operatorname{Re}\mu_i| t} e^{i \operatorname{Im}\mu_i t}, \quad 1 \leqslant i \leqslant d^2 - 1, \tag{3.59}$$

其中我们写作 $-|\operatorname{Re}\mu_i|$，以强调实部的负性。分解式（3.58）允许我们重新写出 $g(t)$ 的表达式。首先，很容易验证

$$\begin{aligned} \langle e^{tL}(E_{ij}), e^{tL}(E_{ij})\rangle_2 &= \sum_{k,l=1}^{d^2} \overline{e^{\mu_k t}} e^{\mu_l t} \langle \langle \beta_k, E_{ij}\rangle_2 \varepsilon_k, \langle \beta_l, E_{ij}\rangle_2 \varepsilon_l \rangle_2 \\ &= \sum_{k,l=1}^{d^2} e^{(\overline{\mu_k} + \mu_l)t} (\beta_k)_{ji} \overline{(\beta_l)_{ji}} \langle \varepsilon_k, \varepsilon_l\rangle_2 \end{aligned} \tag{3.60}$$

这来自内积的性质以及 $\mathsf{tr}\ E_{ij}[a_{ij}] = a_{ji}$ 的性质。将其代入 $g(t)$ 的公式，我们得到

$$g(t) = \sum_{k,l=1}^{d^2} e^{(\overline{\mu_k} + \mu_l)t} z_{kl} \tag{3.61}$$

采用简写记号 $z_{kl} = \langle \beta_l, \beta_k\rangle_2 \langle \varepsilon_k, \varepsilon_l\rangle_2$。利用特征值的性质$\mu_i$，我们将其改写为

$$\begin{aligned} g(t) = z_{11} &+ \sum_{k=2}^{d^2} e^{-2|\operatorname{Re}\mu_k| t} z_{kk} \\ &+ 2 \sum_{k<l} e^{-|\operatorname{Re}\mu_k| t} e^{-|\operatorname{Re}\mu_l| t} \operatorname{Re}\left[e^{i \operatorname{Im}(\mu_k - \mu_l) t} z_{kl} \right]. \end{aligned} \tag{3.62}$$

显然，当 $t \to \infty$ 时，这两个和都按指数速度趋于零，因此

$$\lim_{t\to\infty} g(t) = z_{11} = \|\beta_1\|_2^2 \, \|\varepsilon_1\|_2^2 . \tag{3.63}$$

由施瓦茨不等式，$1 = \langle \beta_1, \varepsilon_1\rangle_2 \leqslant \|\beta_1\|_2 \, \|\varepsilon_1\|_2$，因此确有 $\lim_{t\to\infty} g(t) \geqslant 1$，如所述。□

4. Examples

这里我们给出两个简单示例，展示前文所述低维矩阵代数中的 D-可分迹保持演化。第一个示例涉及 $\mathbb{M}_2(\mathbb{C})$ 上的可分解半群，第二个示例则探讨 $\mathbb{M}_3(\mathbb{C})$ 中时变生成元的一个非常基础的情形。为使所得公式简洁易读，我们以尽可能简单的方式选取合适的生成元，例如将矩阵 $[\omega_{jk}(t)]$ 选为对角矩阵，或忽略生成元 L_t（例如对易子项）的某些部分。

4.1. 代数 $\mathbb{M}_2(\mathbb{C})$ 上的可分解半群。作为第一个示例，我们考察 2 阶复方阵代数上的可分解半群。令

$$L(\rho) = N(\rho) = \frac{1}{2}\sum_{\mu,\nu=1}^{3} \eta_{\mu\nu}\left(\sigma_\mu\rho\sigma_\nu - \frac{1}{2}\{\sigma_\nu\sigma_\mu, \rho\}\right), \tag{4.1}$$

其中， σ_i 是通常的泡利矩阵基，即我们明确忽略了分解式 (3.8) 中的 M 生成元以及 (3.9) 的对易子部分。随后可通过应用 (3.6) 计算几何˜张量 Ω；其唯一非零系数 $\Omega^{jk}_{\mu\nu}$ 为

$$\begin{aligned}\Omega^{11}_{11} = \Omega^{11}_{22} = \Omega^{12}_{12} = \Omega^{13}_{13} = \Omega^{13}_{31} = \Omega^{21}_{21} = \Omega^{22}_{11} = \Omega^{22}_{22} = \Omega^{22}_{33} \\ = \Omega^{23}_{23} = \Omega^{31}_{13} = \Omega^{31}_{31} = \Omega^{32}_{32} = \Omega^{33}_{22} = \Omega^{33}_{33} = \Omega^{44}_{11} = \Omega^{44}_{33} = \frac{1}{2},\end{aligned} \tag{4.2a}$$

$$\Omega^{11}_{33} = \Omega^{12}_{21} = \Omega^{21}_{12} = \Omega^{23}_{32} = \Omega^{32}_{23} = \Omega^{33}_{11} = \Omega^{44}_{22} = -\frac{1}{2}, \tag{4.2b}$$

$$\Omega^{14}_{23} = \Omega^{14}_{32} = \Omega^{24}_{31} = \Omega^{42}_{31} = \Omega^{43}_{12} = \Omega^{43}_{21} = \frac{i}{2}, \tag{4.2c}$$

$$\Omega^{24}_{13} = \Omega^{34}_{12} = \Omega^{34}_{21} = \Omega^{41}_{23} = \Omega^{41}_{32} = \Omega^{42}_{13} = -\frac{i}{2}. \tag{4.2d}$$

为展示此例，我们选择一个对角矩阵 $[\omega_{jk}]$,

$$[\omega_{jk}] = \operatorname{diag}\{w_1, \dots, w_4\}, \quad w_i \geqslant 0. \tag{4.3}$$

矩阵 $[\eta_{\mu\nu}]$ 同样可以写成对角形式

$$[\eta_{\mu\nu}] = \frac{1}{2}\operatorname{diag}\{w_1 + w_2 - w_3 + w_4, w_1 + w_2 + w_3 - w_4, -w_1 + w_2 + w_3 + w_4\}. \tag{4.4}$$

经过一些计算，可得到生成元 L,

$$L(\rho) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} s_{12}(\rho_{11} - \rho_{22}) & -(s_{23} + s_{24})\rho_{12} + (w_4 - w_3)\rho_{21} \\ -(s_{23} + s_{24})\rho_{21} + (w_4 - w_3)\rho_{12} & s_{12}(\rho_{11} - \rho_{22}) \end{pmatrix} \tag{4.5}$$

对于 $s_{ij} = w_i + w_j$。接下来，对 L 进行向量化（为简洁起见，此处略去具体过程），我们得到其谱,

$$\operatorname{spec} L = \{\mu_1 = 0, \mu_2 = -s_{12}, \mu_3 = -s_{23}, \mu_4 = -s_{24}\}, \tag{4.6}$$

以及相应的特征矩阵 ε_i ，使得 $L(\varepsilon_i) = \mu_i\varepsilon_i$；在这个特例中，它们恰好等价于泡利矩阵,

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}I, \quad \varepsilon_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}}\sigma_3, \quad \varepsilon_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}\sigma_1, \quad \varepsilon_4 = -\frac{i}{\sqrt{2}}\sigma_2. \tag{4.7}$$

在这种情况下，对偶基与 $\beta_i = \varepsilon_i$ 相同。动力学半群 e^{tL} 随后可以（同样借助向量化技术）通过其在矩阵 $\rho = [\rho_{ij}]$ 上的作用来刻画:

$$\rho_t = [\rho_{ij}(t)] = e^{tL}([\rho_{ij}]), \tag{4.8}$$

对于矩阵元

$$\rho_{11}(t) = \frac{1}{2}\left(1 + e^{-s_{12}t}\right)\rho_{11} + \frac{1}{2}\left(1 - e^{-s_{12}t}\right)\rho_{22}, \tag{4.9a}$$

$$\rho_{21}(t) = \frac{1}{2}\left(e^{-s_{23}t} - e^{-s_{24}t}\right)\rho_{12} + \frac{1}{2}\left(e^{-s_{23}t} + e^{-s_{24}t}\right)\rho_{21}, \tag{4.9b}$$

$$\rho_{12}(t) = \frac{1}{2}\left(e^{-s_{23}t} - e^{-s_{24}t}\right)\rho_{21} + \frac{1}{2}\left(e^{-s_{23}t} + e^{-s_{24}t}\right)\rho_{12}, \tag{4.9c}$$

$$\rho_{22}(t) = \frac{1}{2}\left(1 + e^{-s_{12}t}\right)\rho_{22} + \frac{1}{2}\left(1 - e^{-s_{12}t}\right)\rho_{11}. \tag{4.9d}$$

Choi矩阵 $C_{e^{tL}}$ 按预期为厄米矩阵，其形式为

$$C_{e^{tL}} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+e^{-s_{12}t} & 0 & 0 & e^{-s_{23}t}+e^{-s_{24}t} \\ 0 & 1-e^{-s_{12}t} & e^{-s_{23}t}-e^{-s_{24}t} & 0 \\ 0 & e^{-s_{23}t}-e^{-s_{24}t} & 1-e^{-s_{12}t} & 0 \\ e^{-s_{23}t}+e^{-s_{24}t} & 0 & 0 & 1+e^{-s_{12}t} \end{pmatrix} \tag{4.10}$$

其谱为

$$\lambda_1(C_{e^{tL}}) = \frac{1}{2}\left(1 - e^{-s_{12}t} - e^{-s_{23}t} + e^{-s_{24}t}\right), \tag{4.11a}$$

$$\lambda_2(C_{e^{tL}}) = \frac{1}{2}\left(1 - e^{-s_{12}t} + e^{-s_{23}t} - e^{-s_{24}t}\right), \tag{4.11b}$$

$$\lambda_3(C_{e^{tL}}) = \frac{1}{2}\left(1 + e^{-s_{12}t} - e^{-s_{23}t} - e^{-s_{24}t}\right), \tag{4.11c}$$

$$\lambda_4(C_{e^{tL}}) = \frac{1}{2}\left(1 + e^{-s_{12}t} + e^{-s_{23}t} + e^{-s_{24}t}\right). \tag{4.11d}$$

根据 w_i 的实际取值， $C_{e^{tL}}$ 的最小特征值可能改变符号和单调性。因此，半群可能表现出混合行为:

(1) 当 $\lambda_{\min}(C_{e^{tL}})$ 处处非负时，对所有 $t \geqslant 0$ 都可能是完全正的；这种情况的示例图见图1,

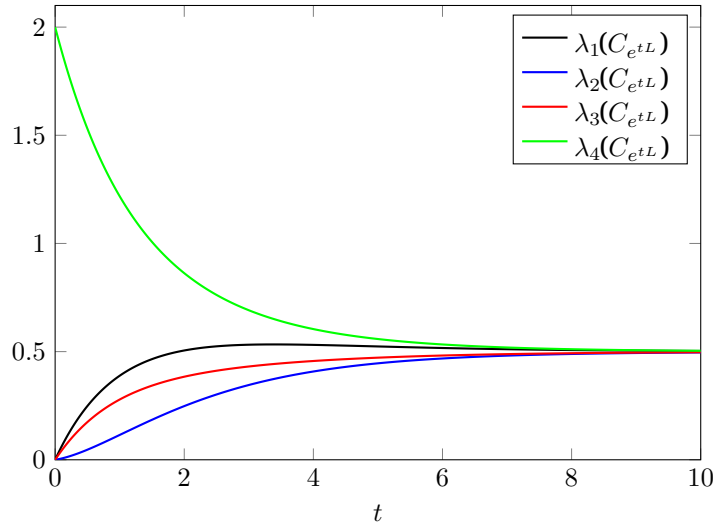

FIGURE 1. $C_{e^{tL}}$ 的 Choi矩阵谱，作为参数 t 的函数，参数为 $w_1 = 0.3$、$w_2 = 0.4$、$w_3 = 0.7$、$w_4 = 0.1$。所有特征值均为非负值，即半群始终是完全正的。

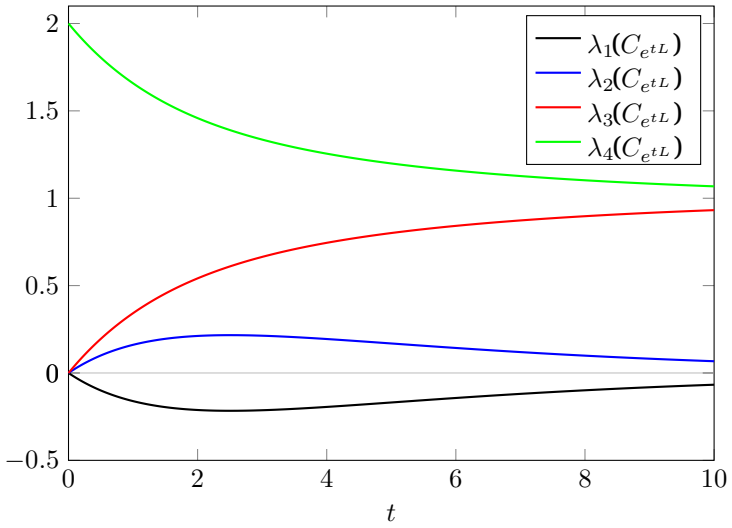

FIGURE 2. Choi矩阵的谱 $C_{e^{tL}}$ 作为 t 的函数，参数为 $w_1 = w_2 = 0$、$w_3 = 0.2$、$w_4 = 0.7$。对于所有 $t > 0$，始终有一个特征值为负，即该半群是可分解的，但绝非完全正（除非 $t = 0$）。

(2) 当 $\lambda_{\min}(C_{e^{tL}}) < 0$ 处处时，对所有$t \geqslant 0$都可能是可分解的（完全正部分和余完全正部分均非零）；见图2，(3) 最后，它可以在某个区间 $(0, t_0]$ 内是可分解的，随后对 $t \geqslant t_0$ 成为完全正的，也就是说，它可能渐近完全正，如图3所示。

4.2. 时变交换 Lindblad 生成元，其中 $\mathsf{d} = 3$。我们的第二个例子涉及代数 $\mathbb{M}_3(\mathbb{C})$ 上一个简单的时变 Lindblad 生成元，我们将其选为

$$L_t = g(t)L, \quad \text{where } g(t) = e^{-t}(1 + \sin \omega t), \tag{4.12}$$

且 $L = \epsilon_1 M + \epsilon_2 N$ 为常数，其形式如 (3.8) 和 (3.9) 所示，但不含对易子项；ϵ_1、ϵ_2、$\omega \geqslant 0$ 为无量纲参数。与前面一样，我们选择一个对角矩阵 $[\omega_{jk}]$，这次其形式为

$$[\omega_{jk}] = \sum_{i=1}^{3} E_{ii} \otimes E_{ii} = \operatorname{diag}\{1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1\}, \tag{4.13}$$

由此得到

$$[\eta_{\mu\nu}] = \frac{1}{6} \operatorname{diag}\{5, 5, 2, 1, 1, -2\} \oplus \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 5 \end{pmatrix}. \tag{4.14}$$

定义生成元部分 M 的矩阵 $[\gamma_{\mu\nu}]$ 直接取为单位矩阵 $\gamma_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}$。请注意，函数 f 始终非负，因此矩阵 $[\gamma_{\mu\nu}]$ 和 $[\omega_{jk}]$ 的半正定性不会受到破坏。张成 $\mathbb{M}_3(\mathbb{C})$ 的希尔伯特-施密特正交归一基 $\{F_i\}_{i=1}^{9}$ 由盖尔曼矩阵（经归一化）构成；详情请参见附录 A.1。计算后，我们得到

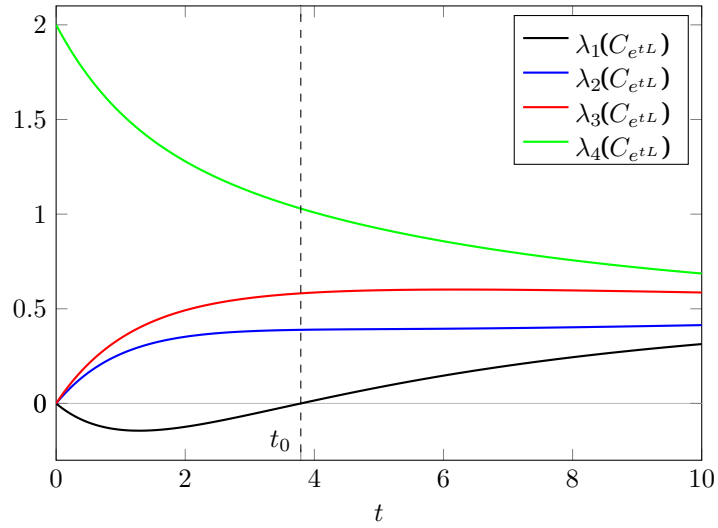

FIGURE 3. 参数为 $w_1 = 0.1$、 $w_2 = 0.03$、 $w_3 = 0.2$、 $w_4 = 0.9$ 时，Choi矩阵 $C_{e^{tL}}$ 关于 t 的谱。最小特征值 $\lambda_{\min}(C_{e^{tL}})$在 $t_0 \approx 3.79$附近变号，并且对所有 $t > t_0$ 均保持为正，即该半群渐近地完全正。

映射 M 和 N 的作用，

$$M(\rho) = \sum_{\mu=1}^{8} \left(F_\mu \rho F_\mu - \frac{1}{2}\{F_\mu^2, \rho\} \right) \tag{4.15a}$$
$$= \begin{pmatrix} -2\rho_{11} + \rho_{22} + \rho_{33} & -3\rho_{12} & -3\rho_{13} \\ -3\rho_{21} & \rho_{11} - 2\rho_{22} + \rho_{33} & -3\rho_{23} \\ -3\rho_{31} & -3\rho_{32} & \rho_{11} + \rho_{22} - 2\rho_{33} \end{pmatrix},$$

$$N(\rho) = \sum_{\mu,\nu=1}^{8} \eta_{\mu\nu} \left(F_\mu \rho F_\mu - \frac{1}{2}\{F_\mu^2, \rho\} \right) \tag{4.15b}$$
$$= \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 6(-2\rho_{11} + \rho_{22} + \rho_{33}) & 4\rho_{21} - 7\rho_{12} & 4\rho_{31} - 19\rho_{13} \\ 4\rho_{12} - 7\rho_{21} & 6(\rho_{11} - \rho_{22}) & 2(2\rho_{32} - 5\rho_{23}) \\ 4\rho_{13} - 19\rho_{31} & 2(2\rho_{23} - 5\rho_{32}) & 6(\rho_{11} - \rho_{33}) \end{pmatrix}.$$

注意，对于任意选取的两个 t、 $s \in \mathbb{R}_+$，生成元 L_t 都满足对易条件 $[L_t, L_s] = 0$。这一便利性质意味着 Λ_t具有特别简单的形式表达式:

$$\Lambda_t = \exp \int_0^t L_{t'} dt' = e^{f(t)L}, \tag{4.16}$$

其中

$$f(t) = \int_0^t g(t')dt' = 1 - e^{-t} + \frac{1}{1+\omega^2}(\omega - \omega e^{-t}\cos\omega t - e^{-t}\sin\omega t). \tag{4.17}$$

映射 Λ_t 随后通过其作用 $\rho_t = \Lambda_t([\rho_{ij}])$ 进行定义，以得到显式的矩阵元

$$\rho_{11}(t) = p_1(t)\rho_{11} + p_2(t)\rho_{22} + p_2(t)\rho_{33}, \tag{4.18a}$$

$$\rho_{22}(t) = p_2(t)\rho_{11} + s_1(t)\rho_{22} + s_2(t)\rho_{33}, \tag{4.18b}$$

$$\rho_{33}(t) = p_2(t)\rho_{11} + s_2(t)\rho_{22} + s_1(t)\rho_{33}, \tag{4.18c}$$

$$\rho_{21}(t) = q_1(t)\rho_{12} + q_2(t)\rho_{21}, \quad \rho_{12}(t) = q_2(t)\rho_{12} + q_1(t)\rho_{21}, \tag{4.18d}$$

$$\rho_{31}(t) = r_1(t)\rho_{13} + r_2(t)\rho_{31}, \quad \rho_{13}(t) = r_2(t)\rho_{13} + r_1(t)\rho_{31}, \tag{4.18e}$$

$$\rho_{32}(t) = u_1(t)\rho_{23} + u_2(t)\rho_{32}, \quad \rho_{23}(t) = u_1(t)\rho_{32} + u_2(t)\rho_{23}, \tag{4.18f}$$

和函数

$$p_1(t) = \frac{1}{3}\left(1 + 2e^{-\frac{3}{2}(2\epsilon_1+\epsilon_2)f(t)}\right), \tag{4.19a}$$

$$p_2(t) = \frac{1}{3}\left(1 - e^{-\frac{3}{2}(2\epsilon_1+\epsilon_2)f(t)}\right), \tag{4.19b}$$

$$q_{1,2}(t) = \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{4}(12\epsilon_1+\epsilon_2)f(t)}\left(1 \mp e^{-\frac{2}{3}\epsilon_2 f(t)}\right), \tag{4.19c}$$

$$r_1(t) = \frac{1}{2}e^{-(3\epsilon_1+\frac{23}{12}\epsilon_2)f(t)}\left(-1 + e^{-\frac{2}{3}\epsilon_2 f(t)}\right), \tag{4.19d}$$

$$r_2(t) = \frac{1}{2}e^{-(3\epsilon_1+\frac{5}{4}\epsilon_2)f(t)}\left(1 + e^{-\frac{2}{3}\epsilon_2 f(t)}\right), \tag{4.19e}$$

$$s_{1,2}(t) = \frac{1}{6}\left[2 + e^{-(3\epsilon_1+\frac{3}{2}\epsilon_2)f(t)}\left(1 \pm 3e^{\epsilon_2 f(t)}\right)\right], \tag{4.19f}$$

$$u_{1,2}(t) = \frac{1}{2}e^{-(3\epsilon_1+\frac{1}{2}\epsilon_2)f(t)}\left(1 \mp e^{-\frac{2}{3}\epsilon_2 f(t)}\right). \tag{4.19g}$$

经过一番推导，可以计算出相应的 Choi矩阵 C_{Λ_t} 及其谱（为方便读者，我们避免列出所得的繁琐公式），至少可以针对选定的参数值进行数值计算。与前述半群示例类似，我们考察了在较宽范围的 ϵ_1、 ϵ_2 和ω 下，Choi矩阵最小特征值 $\lambda_{\min}(C_{\Lambda_t})$ 的时间依赖性，并发现 Λ_t 的行为与半群情形相一致，即 Λ_t 可能始终完全正（当 $\lambda_{\min}(C_{\Lambda_t}) \geqslant 0$、 $t \geqslant 0$时），始终可分解（即余完全正部分非零，当 $\lambda_{\min}(C_{\Lambda_t}) < 0$、 $t \geqslant 0$时），或者渐近完全正（当$\lambda_{\min}(C_{\Lambda_t}) \geqslant 0$ 对所有 $t \geqslant t_0$均成立时），具体取决于参数 $\epsilon_{1,\ 2}$。 $\lambda_{\min}(C_{\Lambda_t})$ 的一些示例图见图4。显然，降低 ϵ_1/ϵ_2 比率会减弱生成元中部分 M (4.15a) 的重要性，并使动力学从全局完全正性趋向可分解性。

5. Acknowledgments

作者感谢 Dariusz Chru´sci´nski 教授的讨论，并感谢匿名审稿人提出的意见和建议，这些意见和建议促成了示例部分的若干改进。

6. Data availability

本研究未创建或分析任何新数据。

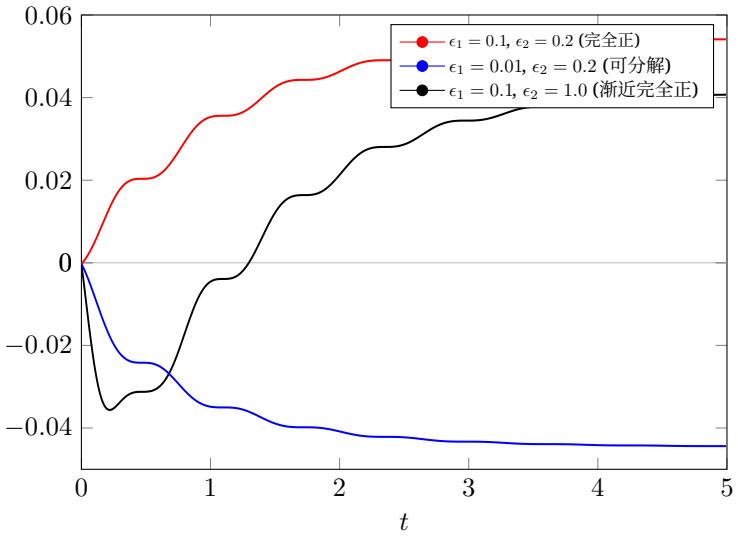

FIGURE 4. 在例 4.2 中，对于不同的 ϵ_1, ϵ_2 且固定 $\omega = 10$ 时，动力学映射 Λ_t 为完全正（$\epsilon_1 = 0.1$, $\epsilon_2 = 0.2$）、可分解（$\epsilon_1 = 0.01$, $\epsilon_2 = 0.2$）和渐近完全正（$\epsilon_1 = 0.1, \epsilon_2 = 1.0$）这三种可能情形下，$\lambda_{\min}(C_{\Lambda_t})$ 的时间依赖性（数值结果）。

APPENDIX A. MATHEMATICAL SUPPLEMENT

A.1. 厄米希尔伯特-施密特基。 设 $\{F_i\}_{i=1}^{d^2}$ 是 $\mathbb{M}_d(\mathbb{C})$ 中满足条件 (2.2) 的厄米希尔伯特-施密特标准正交基，即

$$F_j = F_j^*, \quad \operatorname{tr} F_j F_k = \delta_{jk}, \quad \operatorname{tr} F_j = \delta_{jd^2}, \quad F_{d^2} = \frac{1}{\sqrt{d}} I. \tag{A.1}$$

矩阵 $\{F_i\}$ 随后可以按以下方式显式构造 [15, 16]。再次令 E_{jk} 表示矩阵单位，即它们在位置 (j,k) 处为 1，其他位置均为 0。定义矩阵 $W_{kj}^d, K_k^d \in \mathbb{M}_d(\mathbb{C})$，使得

$$W_{jk} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}} \left(E_{jk} + E_{kj} \right), & \text{for } k < j, \\ -\frac{i}{\sqrt{2}} \left(E_{jk} - E_{kj} \right), & \text{for } k > j, \end{cases} \tag{A.2}$$

使得 $j,k \in \{1, \ldots, d^2 - 1\}$, $j \neq k$，以及

$$K_k = \frac{1}{\sqrt{k(k+1)}} \left(\sum_{j=1}^{k} E_{jj} - k E_{k+1,k+1} \right), \tag{A.3}$$

其中 $k \in \{1, \ldots, d-1\}$。那么，集合 $\{W_{jk}, K_k, \frac{1}{\sqrt{d}} I_d\}$ 包含 d^2 个矩阵，且这些矩阵相互正交归一（相对于希尔伯特-施密特内积）并且完备，构成了 $\mathbb{M}_d(\mathbb{C})$ 的一组基。随后，其元素对于 $1 \leqslant i \leqslant d^2$ 被标记为 F_i。矩阵 W_{jk} 为对称非对角矩阵或反对称矩阵，而矩阵 K_k 为零迹对角矩阵。简单计数可得，对称非对角矩阵和反对称矩阵各有 $\frac{1}{2} d(d-1)$ 个，另有 d 个对角矩阵（包括 $F_{d^2} = \frac{1}{\sqrt{d}} I$）。

接下来引入所谓的结构常数 f_{ijk} 和 g_{ijk}，它们分别定义矩阵 F_i之间的对易关系和反对易关系，

$$[F_i, F_j] = \sum_{k=1}^{d^2-1} f_{ijk} F_k, \quad \{F_i, F_j\} = \sum_{k=1}^{d^2-1} g_{ijk} F_k, \tag{A.4}$$

定义为

$$f_{ijk} = \operatorname{tr} F_k [F_i, F_j], \quad g_{ijk} = \operatorname{tr} F_k \{F_i, F_j\}. \tag{A.5}$$

值得注意的是，结构常数刻画了 $\mathbb{M}_d(\mathbb{C})$作为李代数的特征。利用这些结构常数，我们可以导出如下复合规则

$$F_a F_b = \sum_{c=1}^{d^2} \xi_{abc} F_c \tag{A.6}$$

对于系数 $\xi_{ijk} = \frac{1}{2}(f_{ijk} + g_{ijk}) = \operatorname{tr} F_i F_j F_k$。

A.1.1. 情形 $d = 2$，3。当 $d = 2$ 时，矩阵 F_i 与通常的泡利矩阵成比例：

$$F_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad F_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad F_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \tag{A.7}$$

以及 $F_4 = \frac{1}{\sqrt{2}} I$。对于 $d = 3$，所得矩阵具有如下形式

$$\begin{aligned} F_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad F_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ F_3 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad F_4 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ F_5 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad F_6 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \\ F_7 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad F_8 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{A.8}$$

以及 $F_9 = \frac{1}{\sqrt{3}} I$，也就是说，它们与盖尔曼矩阵成比例。

A.2. 向量化与矩阵化。回顾一下，$\mathbb{M}_d(\mathbb{C})$ 与 $\mathbb{C}^{d^2}$ 同构地对应，而 $B(\mathbb{M}_d(\mathbb{C}))$ 与 $\mathbb{M}_{d^2}(\mathbb{C})$ 同构地对应。因此，利用这些对应关系，将矩阵表示为（列）向量，并将 $\mathbb{M}_d(\mathbb{C})$ 上的线性映射表示为大小为 d^2 的矩阵，是非常常见且方便的做法。

每个双射 $\mathbb{M}_d(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}^{d^2}$ 都定义了一种所谓的向量化方案 [17, 18]。一种方便的向量化方案（此处记为 vec）是将矩阵展平的操作——也就是说，对于矩阵 $[m_{ij}] \in \mathbb{M}_d(\mathbb{C})$，我们通过 [18] 定义唯一的向量 $\mathbf{m} = \mathbf{vec}([m_{ij}]) \in \mathbb{C}^{d^2}$

$$\mathbf{m} = \mathbf{vec}([m_{ij}]) = (m_{11}, m_{12}, \ldots, m_{1d}, m_{21}, m_{22}, \ldots, m_{dd})^{\mathrm{T}}, \tag{A.9}$$

也就是说，将 $[m_{ij}]$ 的各行依次排列，或按字典序排列。这里需要说明的是，本文采用的向量化约定并非

普遍适用。例如，有些作者偏好按列而非按行进行矩阵展平，这有时也称为重塑。详情请参见 [17] 及其中的参考文献。逆运算 $\mathsf{vec}^{-1}:\ \mathbb{C}^{d^2}\ \to\ \mathbb{M}_d(\mathbb{C})$ 通过将向量拆分为d元组并依次堆叠，将向量还原为矩阵；这种运算有时称为矩阵化。于是，每个作用于 $\mathbb{M}_d(\mathbb{C})$ 上的线性映射 T 都有唯一的矩阵表示 $\hat{}$，记作矩阵 $T\in\mathbb{M}_{d^2}(\mathbb{C})$，使得对于任意 $m\in\mathbb{M}_d(\mathbb{C})$，矩阵 $T(m)$ 都可与 $\hat{}Tm$ 等同，即 $T(m)\ =\mathsf{vec}^{-1}(\hat{}Tm)$。

A.3. 矩阵代数上的线性映射。

A.3.1. 算子和表示。设 $T:\ \mathbb{M}_n(\mathbb{C})\ \to\mathbb{M}_m(\mathbb{C})$ 为线性映射。那么，存在两个非唯一的有限矩阵族 $\{A_i\}$,$\{B_i\}\in\mathbb{M}_{m,n}(\mathbb{C})$，使得 T 对任意 $a\in\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ 的作用可以表示为

$$T(a)=\sum_i A_iaB_i^*,\tag{A.10}$$

其中，通常将矩阵 B_i 的厄米共轭记为该形式。式 (A.10) 称为 T 的算子和表示。例如，任何保持厄米性的映射都具有如下形式

$$T(a)=\sum_i\lambda_iA_iaA_i^*\tag{A.11}$$

对于某个矩阵族 $\{A_i\}$ 和实系数 λ_i [19]。此外，如果所有 $\lambda_i\geqslant 0$，那么 T 就是完全正的。

设 T 是 $\mathbb{M}_d(\mathbb{C})$ 上的自同态。将矩阵 A_i, B_i 在基 $\{F_i\}$ 中展开后，很容易验证 (A.10) 等价地可表示为

$$T(a)=\sum_{i,j=1}^{d^2}t_{ij}F_iaF_j\tag{A.12}$$

对于某些系数 $t_{ij}\in\mathbb{C}$。于是，我们很容易看出，T 保持厄米性，当且仅当 $[t_{ij}]$ 是厄米矩阵；而 T 完全正，当且仅当 $[t_{ij}]\geqslant 0$。下面给出

命题 3. 分解式 (A.12) 中的矩阵 $[t_{ij}]\in\mathbb{M}_{d^2}(\mathbb{C})$ 可计算为

$$t_{ij}=\mathrm{tr}\left[(F_i\otimes\overline{F_k})^*\hat{T}\right],\tag{A.13}$$

其中，$\hat{}T\in\mathbb{M}_{d^2}(\mathbb{C})$ 是 T 在 A.2节所述向量化方案下的矩阵表示。

证明. 可以证明 [17, 18]，对于 a，映射 $a\mapsto AaB\,A\,B\in\mathbb{M}_d(\mathbb{C})$ 在向量化方案 (A.9) 下可表示为矩阵 $A\otimes B^{\mathrm{T}}$，其中 $\otimes$ 是矩阵的通常克罗内克积，即

$$\mathbf{vec}\,(AaB)=(A\otimes B^{\mathrm{T}})\mathbf{a}.\tag{A.14}$$

这意味着，线性映射的一般表达式 (A.12) 等价地表示为一个大小为 d^2 、形式如下的矩阵 $\hat{}T$

$$\hat{T}=\sum_{i,j=1}^{d^2}t_{ij}(F_i\otimes F_j^{\mathrm{T}}).\tag{A.15}$$

注意， $\{F_i^{\mathrm{T}}\}$ 仍是空间 $\mathbb{M}_d(\mathbb{C})^{\mathrm{T}} \simeq \mathbb{M}_d(\mathbb{C})$中的希尔伯特-施密特正交归一基，因此集合 $\{F_i \otimes F_{\mathrm{T}_j}\}$张成空间 $\mathbb{M}_d(\mathbb{C}) \otimes \mathbb{M}_d(\mathbb{C})^{\mathrm{T}} \simeq \mathbb{M}_{d^2}(\mathbb{C})$，且仍为厄米希尔伯特-施密特基。这一点与 F_i 的厄米性结合起来，立即得出

$$t_{ij} = \langle F_i \otimes F_j^{\mathrm{T}}, \hat{T} \rangle_2 = \mathrm{tr}\left[(F_i \otimes \overline{F_j})^* \hat{T}\right], \tag{A.16}$$

这就是所要证明的结论。 □

A.3.2. 转置映射。我们特别关注转置映射，即一个线性、具有厄米性且保迹的映射 $\theta: \mathbb{M}_d(\mathbb{C}) \to \mathbb{M}_d(\mathbb{C})$，其作用方式由规则 $\theta([a_{ij}]) = [a_{ji}]$给出。再次设空间 $\mathbb{M}_d(\mathbb{C})$ 由满足性质 (2.2) 的希尔伯特－施密特正交归一基 $\{F_i\}$ 张成。于是我们有以下结果：

命题4. 设

$$\hat{\theta} = \mathrm{diag}\{\theta_1, \ldots, \theta_{d^2}\} = I_{\frac{1}{2}d(d-1)} \oplus \left(-I_{\frac{1}{2}d(d-1)}\right) \oplus I_d, \tag{A.17}$$

再定义集合

$$\mathcal{J} = \{1 + \frac{1}{2}d(d-1), \ldots, d(d-1)\}. \tag{A.18}$$

那么，转置映射 θ 存在如下形式的算子和表示

$$\theta(a) = a^{\mathrm{T}} = \sum_{i=1}^{d^2} \theta_i F_i a F_i \tag{A.19}$$

系数 $\theta_i \in \{-1, 1\}$ 明确给出如下

$$\theta_i = \begin{cases} -1, & for\ i \in \mathcal{J}, \\ +1, & otherwise, \end{cases} \tag{A.20}$$

因此得到

$$\theta(a) = \sum_{i=1}^{d^2} F_i a F_i - 2 \sum_{i \in \mathcal{J}} F_i a F_i. \tag{A.21}$$

证明。根据命题 3，我们知道转置映射可以写成算子和表示

$$\theta(a) = \sum_{i,j=1}^{d^2} \theta_{ij} F_i a F_j \tag{A.22}$$

矩阵 $[\theta_{ij}] \in \mathbb{M}_{d^2}(\mathbb{C})$ 根据公式 (A.13) 计算，其中 $\hat{}T$ 被选作 θ 在该向量化方案下的矩阵表示。不难 $\hat{}$ 看出， T 的一般结构为

$$\hat{T} = \sum_{i,j=1}^{d} E_{ij} \otimes E_{ji} \tag{A.23}$$

其中 E_{ij} 是矩阵单位。$\hat{}T$ 由 d^2 个方块矩阵组成，每个方块中只有一个位置为 1，其余位置均为 0；事实上，它是一个置换矩阵（在

文献中，这类矩阵有时称为 SWAP 矩阵）。下面我们以 $d=2$ 和 3 为例，展示相应的矩阵：

$$\hat{T}_{2\times 2}=\left(\begin{array}{cc|cc} 1&0&0&0\\ 0&0&1&0\\ \hline 0&1&0&0\\ 0&0&0&1 \end{array}\right), \tag{A.24a}$$

$$\hat{T}_{3\times 3}=\left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 1&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&1&0&0\\ \hline 0&1&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&1&0\\ \hline 0&0&1&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&1 \end{array}\right). \tag{A.24b}$$

现在，由于 F_i 的厄米性，我们有

$$\begin{aligned}\theta_{ij}&=\operatorname{tr}\left[(F_i\otimes\overline{F_j})^*\hat{T}\right]=\operatorname{tr}\left[(F_i\otimes F_j^{\mathrm{T}})\hat{T}\right] \\ &=\sum_{k,l=1}^{d}\operatorname{tr}\left(F_iE_{kl}\otimes F_j^{\mathrm{T}}E_{lk}\right)=\sum_{k,l=1}^{d}\operatorname{tr}F_iE_{kl}\cdot\operatorname{tr}F_j^{\mathrm{T}}E_{lk} \\ &=\sum_{k,l=1}^{d}\langle F_i,E_{kl}\rangle_2\langle E_{kl},F_j^{\mathrm{T}}\rangle_2=\langle F_i,\sum_{k,l=1}^{d}\langle E_{kl},F_j^{\mathrm{T}}\rangle_2E_{kl}\rangle_2 \\ &=\langle F_i,F_j^{\mathrm{T}}\rangle_2,\end{aligned} \tag{A.25}$$

因为典范基 $\{E_{ij}\}$ 是另一组（非厄米）希尔伯特-施密特正交归一基。注意，$F_j^{\mathrm{T}}=\pm F_j$ 取决于 F_j 的对称性，因此

$$\theta_{ij}=\pm\delta_{ij} \tag{A.26}$$

且矩阵 $[\theta_{ij}]$ 是对角矩阵，$\theta_{ij}=\mathsf{diag}\ \{\theta_i\}$ 对于 $\theta_i=\pm 1$。若 $1\leqslant i\leqslant\frac{1}{2}d(d-1)$，即 F_i 是对称的，则有 $\theta_i=1$；另一方面，若 $\frac{1}{2}d(d-1)+1\leqslant i\leqslant d^2-d$，即 F_i 是反对称的，则有 $\theta_i=-1$。在其余情况下，$d^2-d+1\leqslant i\leqslant d^2$ 所得的对角矩阵 F_i 自然也对称，因此仍有 $\theta_i=1$，如所述。□

命题 5。以下陈述成立：

(1) 对于每个（不一定是厄米的）希尔伯特–施密特基 $\{G_i\}$，存在这样的一个与 θ(A.17) 酉等价的厄米矩阵 $[m_{ij}]\in\mathbb{M}_{d^2}(\mathbb{C})$，使得映射 $a\mapsto\sum_i^{d^2}{}_{j=1}m_{ij}G_iaG_j^*$ 是一个转置。ˆ (2) 对于每个与矩阵 θ (A.17) 酉等价的矩阵 $[m_{ij}]\in\mathbb{M}_{d^2}(\mathbb{C})$，存在这样的一个（不一定是厄米的）希尔伯特–施密特基 $\{G_i\}$，使得映射 $a\mapsto\sum_i^{d^2}{}_{j=1}m_{ij}G_iaG_j^*$ 是一个转置。

证明。（1）。设 $\{G_i\}$ 是某个正交归一希尔伯特–施密特基。则存在一个酉变换矩阵 $U=[u_{ij}]\in\mathbb{M}_{d^2}(\mathbb{C})$，使得

$$G_i=\sum_j u_{ji}F_j \quad \text{and} \quad F_i=\sum_j \overline{u_{ij}}G_j. \tag{A.27}$$

将矩阵 $[m_{ij}]$ 设为

$$[m_{ij}]=U^*\hat{\theta}U, \quad m_{ij}=\sum_{kl}\theta_k\delta_{kl}\overline{u_{ki}}u_{lj}, \tag{A.28}$$

于是，对于 $a\in\mathbb{M}_d(\mathbb{C})$，有

$$\sum_{ij} m_{ij}G_iaG_j^*=\sum_i \theta_iF_iaF_i=a^{\mathrm{T}} \tag{A.29}$$

ˆ 经过简单的代数运算。关于（2）。类似地，再次令 $[m_{ij}]=U^*\theta U$，其中 $U=[u_{ij}]$ 是任意选取的酉矩阵。于是，若定义 $G_i=\sum_j u_{ji}F_j$，则立即有 $\sum_{ij} m_{ij}G_iaG_j^*=\sum_i\theta_iF_iaF_i=a^{\mathrm{T}}$，并且存在这样的基。□

A.3.3. 可分解映射的一些性质。

命题 6. 设 $\phi\in\mathsf{CP}(\mathbb{M}_d(\mathbb{C}))$。则 $e^\phi\in\mathsf{CP}(\mathbb{M}_d(\mathbb{C}))$ 亦成立。

证明。回顾一下，由于 ϕ 可以表示为一个大小为d^2的复方阵，因此总可以将 e^ϕ 表示为一个极限

$$e^\phi=\lim_{n\to\infty}\left(\mathrm{id}+\frac{1}{n}\phi\right)^n, \tag{A.30}$$

其中所有形如 $\left(\mathsf{id}+\frac{1}{n}\phi\right)^n$, $n\in\mathbb{N}$ 的映射也都是完全正映射。于是，该极限也定义了一个完全正映射，因为锥 $\mathsf{CP}(\mathbb{M}_d(\mathbb{C}))$ 是闭的。□

命题 7。设 $\varphi\in\mathsf{coCP}(\mathbb{M}_d(\mathbb{C}))$。则 $e^\varphi\in\mathsf{D}(\mathbb{M}_d(\mathbb{C}))$。

证明。设 $\varphi=\theta\circ\phi$对于 $\phi\neq 0$完全正（情形 $\phi=0$给出 $e^{\theta\circ\phi}=\mathsf{id}$，它显然是可分解的）。于是，只需在公式 (A.30) 中用 $\theta\circ\phi$ 替换ϕ，从而表示 e^φ，并注意到对于所有 $n\in\mathbb{N}$，极限下的所有映射都是可分解的；根据 $\mathsf{D}(\mathbb{M}_d(\mathbb{C}))$ 是闭集这一事实，极限本身也是可分解的。□

A.4. 次要引理与证明。

ˆ 引理 1. 几何张量 Ω 可重新表示为如下形式

$$\Omega^{jk}_{\mu\nu}=\langle F_k^{\mathrm{T}}F_\mu, F_\nu^{\mathrm{T}}F_j\rangle_2. \tag{A.31}$$

证明。回顾一下，转置映射的算子和表示 (3.3) 可重排为公式 (A.21) 的形式，

$$\theta(a)=\sum_{i=1}^{d^2}F_iaF_i-2\sum_{i\in\mathcal{J}}F_iaF_i, \tag{A.32}$$

其中 $\mathcal{J}=\{1+d(d-1)/2、\ldots\ldots、\ d(d-1)\}$ 枚举了基的反对称部分，即 $\{F_i$ 的线性张成：$i\in\mathcal{J}\}$ 是所有反对称矩阵的子空间 $\mathbb{M}_d(\mathbb{C})_{\mathrm{as}}$.

位于 $\mathbb{M}_d(\mathbb{C})$ 中。这一事实意味着，利用迹的循环性后，$\Omega_{\mu\nu}^{jk}$ 可以写成如下形式

$$\begin{aligned}\Omega_{\mu\nu}^{jk} &= \langle F_\mu F_j, \sum_{i=1}^{d^2} \theta_i \langle F_i, F_\nu F_k\rangle_2 F_i\rangle_2 \\ &= \langle F_\mu F_j, \left(\mathrm{id}_{\mathbb{M}_d(\mathbb{C})} - 2\mathsf{P}_{\text{as.}}\right)(F_\nu F_k)\rangle_2\end{aligned} \tag{A.33}$$

其中 $\mathrm{id}_{\mathbb{M}_d(\mathbb{C})}$ 是 $\mathbb{M}_d(\mathbb{C})$ 上的恒等映射，而 $\mathsf{P}_{\text{as.}}$ 是到 $\mathbb{M}_d(\mathbb{C})_{\text{as.}}$ 上的正交投影，其表示为

$$\mathsf{P}_{\text{as.}}(a) = \sum_{i\in\mathcal{J}} \langle F_i, a\rangle_2 F_i. \tag{A.34}$$

设 $\{e_i\}$ 是 $\mathbb{C}^d$中的一个典范基。通过维数计算，很容易看出，空间 $\mathbb{M}_d(\mathbb{C})$ 可与希尔伯特空间张量积 $\mathbb{C}^d \otimes \mathbb{C}^d$对应起来，其中映射 $\zeta\colon \mathbb{C}^d \otimes \mathbb{C}^d \to \mathbb{M}_d(\mathbb{C})$ 由其在基元素上的作用定义为

$$\zeta(e_i \otimes e_j) = E_{ij} = |e_i\rangle\langle e_j| \tag{A.35}$$

然后通过线性性延拓，从而得到一个自然双射。在 ζ的作用下，每个向量 $x = \sum_{ij} x_{ij} e_i \otimes e_j \in \mathbb{C}^d \otimes \mathbb{C}^d$ 都可以同构地表示为矩阵$[x_{ij}] \in \mathbb{M}_d(\mathbb{C})$，反之亦然。这意味着， $\mathbb{M}_d(\mathbb{C})_{\text{as.}}$ 可与 $\mathbb{C}^d \wedge \mathbb{C}^d$对应，即与 $\mathbb{C}^d \otimes \mathbb{C}^d$的反对称子空间对应。由此，算子 $P_{\text{as.}} = \zeta^{-1} \circ \mathsf{P}_{\text{as.}} \circ \zeta$ 就是到 $\mathbb{C}^d \wedge \mathbb{C}^d$上的相应投影。然而，我们知道，这样的投影可以表示为如下形式

$$P_{\text{as.}} = \frac{1}{2}\left(\mathrm{id}_{\mathbb{C}^d\otimes\mathbb{C}^d} - V\right), \tag{A.36}$$

其中， V是定义在 $\mathbb{C}^d \otimes \mathbb{C}^d$ 上的交换算子，定义如下

$$V(x \otimes y) = y \otimes x, \quad x, y \in \mathbb{C}^d. \tag{A.37}$$

由此可得

$$\mathrm{id}_{\mathbb{M}_d(\mathbb{C})} - 2\mathsf{P}_{\text{as.}} = \zeta \circ V \circ \zeta^{-1}, \tag{A.38}$$

经直接检验，这是 $\mathbb{M}_d(\mathbb{C})$上的一个转置。因此，(A.33)可写为

$$\Omega_{\mu\nu}^{jk} = \langle F_\mu F_j, (F_\nu F_k)^{\mathrm{T}}\rangle_2 \tag{A.39}$$

经过简单变换，这等于所声称的形式 (A.31)。 □

引理2. 由表达式给出的矩阵 $[\omega_{jk}(t)] \in \mathbb{M}_{d^2}(\mathbb{C})$

$$\omega_{jk}(t) = \lim_{\epsilon\searrow 0} \frac{1}{\epsilon} y_{jk}(t+\epsilon, t) \tag{A.40}$$

对所有 $t \in [t_1, t_2]$均定义良好且为半正定。

证明。令 $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^{d^2}$ 并定义函数 $f_{\mathbf{v}}\colon [t_1, t_2]^2 \to \mathbb{R}$ 如下:

$$f_{\mathbf{v}}(t, s) = \langle \mathbf{v}, [y_{jk}(t, s)]\mathbf{v}\rangle = \sum_{j,k=1}^{d^2} y_{jk}(t, s) v_j \overline{v_k}. \tag{A.41}$$

由于矩阵 $[y_{jk}(t, s)]$ 与传播子中出现的完全正映射 $Y_{t,s}$ 唯一对应，因此它对所有 $t \geqslant s$ 都是半正定的，显然，对于每个 $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^{d^2}$ 和 $t \geqslant s$，都有 $f_{\mathbf{v}}(t, s) \geqslant 0$ 。此外，根据命题 1，我们有 $Y_{t,t} = 0$ ，因此$f_{\mathbf{v}}(t, t) = 0$。现在，任取 $t \in [t_1, t_2]$，并反设 $f_{\mathbf{v}}(\cdot, t)$ 在某个区间 $[t_0, \xi_0]$ 内递减，其中 $t_0 \geqslant t$。那么存在 $\xi \geqslant t_0$ ，使得

$f(\xi,t_0) < f(t_0,t_0) = 0$，这与假设矛盾。因此，对于每个 $t \geqslant 0$， $\xi \geqslant t$ 所在的 $\xi \mapsto f_{\mathbf{v}}(\xi,t)$ 必定是非递减的。我们将在接下来的计算中运用这一推理。矩阵 $[\omega_{jk}(t)]$ 的公式可改写为

$$\begin{aligned}\omega_{jk}(t) &= \lim_{\epsilon \searrow 0} \frac{1}{\epsilon} y_{jk}(t+\epsilon,t) \\ &= \lim_{\epsilon \searrow 0} \frac{y_{jk}(t+\epsilon,t) - y_{jk}(t,t)}{\epsilon} = \left.\frac{\partial y_{jk}(\xi,t)}{\partial \xi}\right|_t ,\end{aligned} \tag{A.42}$$

因为 $y_{jk}(t,t) = 0$，即它是矩阵 $[y_{jk}(\xi,t)]$,关于第一个变量的导数，在 $\xi = t$处计算得到。不过，对于每个 $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^{d^2}$，这将得到:

$$\sum_{j,k=1}^{d^2} \omega_{\mu\nu}(t) v_j \overline{v_k} = \sum_{j,k=1}^{d^2} \left.\frac{\partial y_{jk}(\xi,t)}{\partial \xi}\right|_t v_j \overline{v_k} = \left.\frac{\partial f_{\mathbf{v}}(\xi,t)}{\partial \xi}\right|_t \geqslant 0 \tag{A.43}$$

这是由于 $f_{\mathbf{v}}(\cdot\,,t)$ 已证明具有单调性。这表明，对于 $t \in [t_1,t_2]$， $[\omega_{jk}(t)] \in \mathbb{M}_d(\mathbb{C})^+$。
□

A.5. 公式（3.32）的推导。以 N_t 的表达式（3.29）为起点，我们通过展开反对易子并将 $\eta_{\mu\nu}(t)$ 表示为（3.10），对其进行改写:

$$\begin{aligned}N_t(\rho) = &\sum_{j,k=1}^{d^2} \sum_{\mu,\nu=1}^{d^2-1} \Omega^{jk}_{\mu\nu} \omega_{jk}(t) F_\mu \rho F_\nu - \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^{d^2} \sum_{\mu,\nu=1}^{d^2-1} \Omega^{jk}_{\mu\nu} \omega_{jk}(t) F_\nu F_\mu \rho \\ &- \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^{d^2} \sum_{\mu,\nu=1}^{d^2-1} \Omega^{jk}_{\mu\nu} \omega_{jk}(t) \rho F_\nu F_\mu - i[K_t,\rho],\end{aligned} \tag{A.44}$$

其中，我们还在每一项中代回了（3.5）给出的 $\Omega^{jk}_{\mu\nu}$。为了将转置映射 θ 重新引入表达式中，我们将关于 μ、 ν的求和展开至 d^2，然后减去冗余项。因此，等式（A.44）右侧出现的第一项为

$$\begin{aligned}&\sum_{j,k=1}^{d^2} \sum_{\mu,\nu=1}^{d^2-1} \Omega^{jk}_{\mu\nu} \omega_{jk}(t) F_\mu \rho F_\nu \\ &= \sum_{jklm} \theta_l \omega_{jk}(t) \left(\sum_\mu \xi_{lj\mu} F_\mu - \xi_{ljd^2} F_{d^2} \right) \rho \left(\sum_\nu \xi_{lk\nu} F_\nu - \xi_{lkd^2} F_{d^2} \right)^* \\ &= \sum_{jklm} \theta_l \omega_{jk}(t) \left(F_l F_j - \frac{1}{\sqrt{d}} \xi_{ljd^2} \right) \rho \left(F_l F_k - \frac{1}{\sqrt{d}} \xi_{lkd^2} \right)^* \\ &= \sum_{jk} \omega_{jk}(t) \left[(F_j \rho F_k)^{\mathrm{T}} - A_k F_j \rho - \rho F_k A_j^* + b_{jk} \rho \right]\end{aligned} \tag{A.45}$$

对于各个量

$$A_k = \sum_l \theta_l \overline{\xi_{lkd^2}} F_l, \quad b_{jk} = \sum_l \theta_l \xi_{jld^2} \overline{\xi_{lkd^2}}, \tag{A.46}$$

其中，我们运用了转置映射 θ 的复合规则 (2.3) 和算子和表示 (3.3)（所有“无限”求和指标均从 1 取到 d^2）。接下来,

我们利用了这样一个事实：对于所有 t， $[\omega_{jk}(t)]$ 是一个半正定矩阵，即我们引入

$$\omega_{jk}(t) = \sum_{\alpha} c_{j\alpha}(t)\overline{c_{k\alpha}(t)}, \tag{A.47}$$

对于某个矩阵 $[c_{jk}(t)]$。将其代入 (A.45) 的最后一行后，可将其重新表示为

$$\begin{aligned}\sum_{j,k=1}^{d^2}\sum_{\mu,\nu=1}^{d^2-1}\Omega_{\mu\nu}^{jk}\omega_{jk}(t)F_\mu\rho F_\nu \\ = \sum_{\alpha}\left[(C_{\alpha,t}\rho C_{\alpha,t}^*)^{\mathrm{T}} - D_t\rho - \rho D_t^* + e(t)\rho\right],\end{aligned} \tag{A.48}$$

其中我们定义了

$$C_{\alpha,t} = \sum_j c_{j\alpha}(t)F_j, \quad D_t = \sum_{jk}\omega_{jk}(t)A_kF_j, \quad e(t) = \sum_{jk}\omega_{jk}(t)b_{jk} \tag{A.49}$$

并利用 $[\omega_{jk}(t)]$ 的厄米性得到 ρD_t^* 项。现在我们注意到，等式 (A.44) 右侧剩余的两项在结构上基本相同，且与第一项的区别仅在于矩阵 ρ、 F_μ 和 F_ν 的顺序，因此可以通过几乎完全相同的步骤进行变换。经过一些简单的代数运算，我们得到

$$\sum_{j,k=1}^{d^2}\sum_{\mu,\nu=1}^{d^2-1}\Omega_{\mu\nu}^{jk}\omega_{jk}(t)F_\nu F_\mu\rho = \sum_{\alpha}\left[C_{\alpha,t}^*C_{\alpha,t} - D_t^* - D_t + e(t)\right]\rho \tag{A.50}$$

对于第二项，以及

$$\sum_{j,k=1}^{d^2}\sum_{\mu,\nu=1}^{d^2-1}\Omega_{\mu\nu}^{jk}\omega_{jk}(t)\rho F_\nu F_\mu = \rho\sum_{\alpha}\left[C_{\alpha,t}^*C_{\alpha,t} - D_t^* - D_t + e(t)\right] \tag{A.51}$$

对于第三项。现在，将 (A.48)、(A.50) 和 (A.51) 代回 (A.44)，得到

$$\begin{aligned}N_t(\rho) = &-i[K_t,\rho] + \left(\sum_{\alpha}C_{\alpha,t}\rho C_{\alpha,t}^*\right)^{\mathrm{T}} - \frac{1}{2}[D_t - D_t^*,\rho] \\ &- \frac{1}{2}\sum_{\alpha}\{C_{\alpha,t}^*C_{\alpha,t},\rho\}\end{aligned} \tag{A.52}$$

经过一番努力。

References

[1] R. Alicki 和 K. Lendi。 *Quantum Dynamical Semigroups and Applications*。施普林格，柏林·海德堡，2006年。[2] H.-P. Breuer 和 F. Petruccione。 *The theory of open quantum systems*。牛津大学出版社，纽约，2002年。[3] ´A. Rivas 和 S. F. Huelga。 *Open Quantum Systems: An Introduction*。施普林格，柏林·海德尔堡，2012年。[4] G. Lindblad。论量子动力半群的生成元。 *Commun. Math. Phys.*，48 2 119 130，1976年（）：–。[5] V. Gorini、A. Kossakowski 和 E. C. G. Sudarshan。N 能级系统的完全正动力半群。 *J. Math. Phys.*，17(5):821–825，1976年。

[6] D. Chru
´ ´
Phys. Rev. Lett. 112 12 2014

scinski 和 S. Maniscalco。量子演化的非马尔可夫性程度。， （），。[7] D. Chru´sci´nski。超越马尔可夫区间的动力学映射。992:1–85。[8] 崔明德。复矩阵上的完全正线性映射。 *Linear Algebra Appl.*, 10 3 285（）： –290，1975年。[9] S. L. Woronowicz。低维矩阵代数上的正映射。 *Rep. Math. Phys.*，10 2 165（）： –183，1976年。[10] D. Chru
´ ´
Acta Math. Vietnam. 43 4 661 674, 2018

scinski、M. Marciniak 和 A. Rutkowski。Choi 类映射的推广。， （）： –。[11] E. Størmer。算子代数上的正线性映射。 *Acta Math.*，110:233–278，1963年。[12] H. Wolkowicz 和 G. P. H. Styan。利用迹给出的特征值界。 *Linear Algebra Appl.*，29 471:–506，1980年。[13] V. A. Franke。论密度矩阵动力学变换的一般形式。*Theor. Math. Phys.*，27(2):406–413，1976年。[14] K. Szczygielski。有限维可交换周期 Lindblad 算子的 Floquet 分析。 *Linear Algebra Appl.*，609:176–202，2021年。[15] F. T. Hioe 和 J. H. Eberly。量子光学和量子力学中的 N 能级相干向量与高阶守恒定律。 *Phys. Rev. Lett.*，47(12):838–841，1981年。[16] G. Kimura。N 能级系统的布洛赫向量。 *Phys. Lett. A*，314(5-6):339–349，2003年。[17] J. A. Miszczak。量子信息论中的奇异值分解与矩阵重排。 *Int. J. Mod. Phys. C*，22(09):897–918，2011年。[18] I. Bengtsson 和 K. ˙Zyczkowski。 *Geometry of Quantum States*。剑桥大学出版社，2017年。[19] J. de Pillis。保持厄米算子和半正定算子的线性变换。 *Pac. J. Math.*，23(1):129–137，1967年。

（K. Szczygielski） Institute of Physics, Faculty of Physics, Astronomy and Informatics, Nicolaus Copernicus University, Grudziądzka 5/7, 87–100, Toruń, Poland
Email address, K. Szczygielski: krzysztof.szczygielski@umk.pl