arXiv:2303.04276v1 [math-ph] 7 Mar 2023

对偶性与 Macdonald 差分算子

Philippe Di Francesco 和 Rinat Kedem

摘要 本文概述了 Macdonald、Koornwinder 和 Artha monov-Shakirov q差分算子的一些共同性质，这些性质与其特征函数的对偶性或双谱性有关。由此得到的 Pieri 算子在 q-Whittaker 极限下成为相对论差分 Toda 型哈密顿量，而这类哈密顿量具有一种相关的量子簇代数结构，称为量子 Q 系统。本文阐述的亏格 2 结果是新的。

1 引言

本文汇集了若干与对偶性或双谱性相关的结果；这一性质是经典型的（亏格 1）球面双仿射 Hecke 代数（sDAHA）以及近期引入的亏格 2 DAHA[AS19] 所共有的。球面 DAHA 的函数表示包含一组特征生成元，即（广义）Macdonald/Koornwinder q差分算子。在亏格 1 情形下，Macdonald 算子自然与 $A_N^{(1)}$ 的仿射根系相关，而 Koornwinder 算子则与 BC_N 型仿射根系相关。在亏格 2 情形下，目前只定义了秩 1 双仿射 Hecke 代数 [AS19], ；我们提出一个候选对象，用以取代仿射根系，在定义差分算子和对偶性时发挥作用。对偶性将 Macdonald 或 Koornwinder$q$差分算子与 Pieri 规则算子联系起来；后者是作用于“权变量” λ的差分算子。

在 $t \to \infty$ 的 q-Whittaker 极限下，我们已证明 [DFK21]，在亏格 1 的情形中，sDAHA 的特征生成元的 Dehn 扭转是 A-型的

Philippe Di Francesco 伊利诺伊大学，数学系，MC-382，伊利诺伊州厄巴纳 61821，美国；以及法国萨克雷巴黎大学 CEA 理论物理研究所（IPhT），吉夫河畔伊韦特 91191，电子邮箱：philippe@illinois.edu Rinat Kedem 伊利诺伊大学，数学系，MC-382，伊利诺伊州厄巴纳 61821，美国，电子邮箱：rinat@illinois.edu

与每个根系相关的量子 Q-系统簇代数中的簇变量。Pieri 算子被解释为 Toda 型哈密顿量，即由适当突变序列给出的离散演化的守恒量。下面我们将证明，在此极限下，亏格 2 理论退化为三个亏格 1 $A_1^{(1)}$-型量子 Toda 理论的乘积。

我们还将讨论通用解（参见基本Harish-Chandra级数 [Sto14]）的作用。借助通用解，对偶性呈现出特别简单的形式，这在 sDAHA 框架和 q-Whittaker 极限中均是如此。

致谢。 我们感谢“量子可积性的几何与表示论方面”项目的组织者、位于石溪的西蒙斯几何与物理中心，以及 M. Shapiro 就亏格 2 DAHA 所进行的讨论。RK 感谢理论物理研究所（萨克雷）给予接待。研究经费由 NSF DMS 项目 18-02044 和 Morris 和 Gertrude Fine 捐赠基金提供。

2 A 型 Macdonald 理论的对偶性

Macdonald 理论与 $A_{N-1}^{(1)}$ 或仿射 $\mathfrak{sl}_N$ 相关。有限维代数 $\mathfrak{sl}_N$ 的单根为 $\Pi = \{\alpha_i = \epsilon_i - \epsilon_{i+1},\ i = 1, \ldots\ldots,\ N-1\}$，正根为 $R_+ = \{\epsilon_i - \epsilon_j :\ 1 \le i < j \le N\} = -R_-$。基本权为$\omega_i = \epsilon_1 + \cdots + \epsilon_i$。令 Q_+ 表示由 Π 生成的非负整数锥。Weyl 群 $W = S_N$ 通过置换 $\mathbb{C}^N$的基向量 ϵ_i 作用。设q 为满足 $|q| < 1$的一个一般复数，则量子环面或 q-Weyl 代数 $\mathbb{T}_X$由 N 个对易变量 $x_1, \ldots\ldots, x_N$ 以及 N 个对易动量$\Gamma_1, \ldots\ldots, \Gamma_N$生成，并满足以下关系

$$\Gamma_i\, x_j = q^{\delta_{i,j}}\, x_j\, \Gamma_i. \tag{1}$$

在函数表示中，x_i 通过乘法作用于$\mathbf{x} = (x_1, \ldots\ldots, x_N)$ 的函数，而 Γ_i 则通过平移 x_i 作用：$\Gamma_i f(\mathbf{x}) = f(x_1, \ldots\ldots, qx_i, \ldots\ldots, x_N)$，即 $\Gamma_i = q^{x_i \partial_{x_i}}$。

2.1 Macdonald 算子与特征函数

设 $\vartheta(x)$ 为 Jacobi theta 函数

$$\vartheta(x) = \frac{1}{2i} q^{1/8} x^{-\frac{1}{2}} (q;q)_\infty (x;q)_\infty (qx^{-1};q)_\infty,$$

因此

$$\frac{\vartheta(x;q)}{\vartheta(tx;q)} = t^{\frac{1}{2}} \prod_{n\ge 0} \frac{1-q^n x}{1-tq^n x} \prod_{n>0} \frac{1-q^n x^{-1}}{1-t^{-1}q^n x^{-1}}.$$

定义函数

$$\Theta(\mathbf{x}) = t^{-\binom{N}{2}} \prod_{\alpha\in R_+} \frac{\vartheta(\mathbf{x}^\alpha)}{\vartheta(t\mathbf{x}^\alpha)} = t^{-\binom{N}{2}}\Delta_+(\mathbf{x})\Delta(\mathbf{x}),$$

其中$\mathbf{x}^{\epsilon_i} = x_i$，且

$$\Delta_+(\mathbf{x}) = \prod_{n\geq 0}\prod_{\alpha\in R_+}\frac{1-q^n\mathbf{x}^\alpha}{1-tq^n\mathbf{x}^\alpha}, \qquad \Delta(\mathbf{x}) = \prod_{n>0}\prod_{\alpha\in R_-}\frac{1-q^n\mathbf{x}^\alpha}{1-t^{-1}q^n\mathbf{x}^\alpha}.$$

theta 函数 $qx\vartheta(qx) = \vartheta(x)$ 的模性质意味着

$$\Theta(\mathbf{x})\Gamma_{\omega_a}\Theta(\mathbf{x})^{-1} = t^{-a(N-a)}\Gamma_{\omega_a},$$

其中 $\Gamma_{\omega_a} = \Gamma_1\cdots\Gamma_a$。因此，

$$\Delta_+(\mathbf{x})^{-1}\Gamma_{\omega_a}\Delta_+(\mathbf{x}) = t^{a(n-a)}\Delta(\mathbf{x})\Gamma_{\omega_a}\Delta(\mathbf{x})^{-1} = \prod_{i=1}^{a}\prod_{j=r+1}^{N}\frac{tx_i-x_j}{x_i-x_j}\Gamma_{\omega_a} = A_a(\mathbf{x})\Gamma_{\omega_a}$$

注 *1* 乘积 $\Delta_+(\mathbf{x})$ 是 Macdonald 引入的，参见例如 [Mac01],；上述讨论表明，它可以与 $\Delta(\mathbf{x})$ 互换，相差 t 的一个幂。选择 $\Delta(\mathbf{x})$ 是为了适用于取 $t\to\infty$ q-Whittaker 极限。

Macdonald 对易差分算子为 [Mac95]:

$$\mathcal{D}_a(\mathbf{x}) = \mathrm{Sym}(A_a\Gamma_{\omega_a}) = \sum_{\substack{I\subset[1,N]\\|I|=a}}\prod_{i\in I, j\notin I}\frac{tx_i-x_j}{x_i-x_j}\prod_{i\in I}\Gamma_i \tag{2}$$

其中，Sym 表示对作用于 x_i 的 Weyl 群 S_N 进行对称化。Macdonald 多项式 $P_\lambda(\mathbf{x})$ 被定义为其共同的首一特征函数:

$$\mathcal{D}_a(\mathbf{x})\,P_\lambda(\mathbf{x}) = t^{-\binom{a}{2}}e_a(\mathbf{s})\,P_\lambda(\mathbf{x}), \qquad P_\lambda(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^\lambda(1+O(\{\mathbf{x}^{-\alpha}\}_{\alpha\in Q_+})), \tag{3}$$

由整数分拆 $\lambda = (\lambda_1\geq\lambda_2\geq\cdots\geq\lambda_N\geq 0)$ 标记。这里，$\mathbf{s} = q^\lambda t^\rho = (s_1, s_2, \ldots\ldots, s_N)$，$s_i = q^{\lambda_i}t^{N-i}$，其中 ρ 为 Weyl 向量，而 $e_a(\mathbf{s})$ 是 $s_1, \ldots\ldots, s_N$ 中的第 a 个基本对称函数。

2.2 对偶性与 Pieri 规则

Macdonald 多项式在交换变量 **x** 和**s**时具有显著的对偶性或双谱性质。当变量特化为$\mathbf{x} = q^\mu t^\rho$ 和$\mathbf{s} = q^\lambda t^\rho$，其中 μ,λ 为整数分拆时，这一对偶性质源于 Macdonald [Mac95]:

$$\frac{P_\lambda(t^\rho q^\mu)}{P_\lambda(t^\rho)} = \frac{P_\mu(t^\rho q^\lambda)}{P_\mu(t^\rho)}. \tag{4}$$

此外，分母 $P_\lambda(t^\rho)$ 可以用 $\Delta(\mathbf{x})$ 表示（参见 [Mac95](6.11)：

$$P_\lambda(t^\rho) = t^{(\rho,\lambda)} \frac{\Delta(t^\rho)}{\Delta(t^\rho q^\lambda)} \tag{5}$$

对偶性质可以推广到麦克唐纳特征值方程 (3) 的通用解 [NS12]，也称为渐近自由的 Harish-Chandra 级数 [Sto14]。多项式 $P_\lambda(\mathbf{x})$ 被形式级数解 $P(\mathbf{x};\mathbf{s}) = q^{(\lambda,\mu)} \prod_{\alpha\in Q_+} c_\alpha(\mathbf{s})\mathbf{x}^{-\alpha}$ 取代，其中 λ 和 μ 现在是一般复数N-元组，且归一化为 $c_0(\mathbf{s}) = 1$。该级数在区域$|\mathbf{x}^{-\alpha_i} = x_{i+1}/x_i| < 1$ 内收敛；当 λ 特化为一个整数分拆时，它截断为有限和，从而恢复

$$P(\mathbf{x};\mathbf{s} = q^\lambda t^\rho)\Big|_{\lambda \text{ integer partition}} = t^{-(\rho,\lambda)} P_\lambda(\mathbf{x}), \tag{6}$$

利用关系 $\mathbf{x}^\lambda = q^{(\lambda,\mu)} t^{(\rho,\lambda)}$。对偶关系 (4) 可以推广到具有一般 $\mathbf{x}$,$\mathbf{s}$ [DFK21] 的通用解：

$$\Delta(\mathbf{s})\, P(\mathbf{x};\mathbf{s}) = \Delta(\mathbf{x})\, P(\mathbf{s};\mathbf{x}). \tag{7}$$

Macdonald 多项式的 Pieri 规则可由对偶性质推出。这些规则给出了初等对称函数 $e_a(\mathbf{x})$ 与 $P_\lambda(\mathbf{x})$ 相乘的结果：

$$e_a(\mathbf{x})\, P_\lambda(\mathbf{x}) = \mathcal{H}_a(\mathbf{s})\, P_\lambda(\mathbf{x}) \tag{8}$$

这里，Ha(**s**) 是一个作用于$\mathbf{s} = (s_1, ..., s_N)$函数的差分算子：

$$\mathcal{H}_a(\mathbf{s}) = t^{\binom{a}{2}} \mathrm{Ad}_{\Delta(\mathbf{s})^{-1} t^{(\rho,\lambda)}} \mathcal{D}_a(\mathbf{s}). \tag{9}$$

这由通用解的特征值方程和式（7）得出：

$$\Delta(\mathbf{x})^{-1}\mathcal{D}_a(\mathbf{x})\,\Delta(\mathbf{s})P(\mathbf{x};\mathbf{s}) = \Delta(\mathbf{x})^{-1}\,\mathcal{D}_a(\mathbf{x})\,\Delta(\mathbf{x})\,P(\mathbf{s};\mathbf{x}) = t^{-\binom{a}{2}} e_a(\mathbf{s})\,P(\mathbf{s};\mathbf{x}),$$

交换变量$\mathbf{x} \leftrightarrow \mathbf{s}$的名称后，再特化为整数分拆 λ 并使用式（6）。具体而言，方程（9）为 [Mac95]

$$\mathcal{H}_a(\mathbf{s}) = \sum_{\substack{I\subset[1,N]\\|I|=a}} \prod_{\substack{i\in I,\ j\notin I\\ j<i}} \frac{t^{i-j-1}\Lambda_j - \Lambda_i}{t^{i-j}\Lambda_j - \Lambda_i} \frac{t^{i-j+1}\Lambda_j - q\Lambda_i}{t^{i-j}\Lambda_j - q\Lambda_i} \prod_{i\in I} T_i,$$

以量子环面变量 $\mathbb{T}_\Lambda$ 和 $\Lambda = q^\lambda$ 表示，它们生成另一个带有 $T_i\Lambda_j = q^{\delta_{ij}}\Lambda_j T_i$ 的 q-Weyl 代数。

2.3 作用于 sDAHA 的 Dehn 扭曲

算子 (2) 是 sDAHA 的函数表示中的生成元，即 DAHA 生成元的初等对称函数 Y_i。这自然带有一个环面模群 $\mathsf{SL}2(\mathbb{Z})$-作用，由两个 Dehn 扭转（a 圈和 b 圈）生成。Dehn 扭曲 τ_+ 在定义表示中对应于 $\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$，并通过

Cherednik高斯函数 $\gamma(\mathbf{x})$[Che05] 的伴随作用在函数表示上作用：

$$\gamma(\mathbf{x}) = \exp\left\{\frac{\sum_{i=1}^{N}(\log x_i)^2}{2\log q}\right\}. \tag{10}$$

对 Macdonald 算子的作用允许为$n \in \mathbb{Z}$定义离散时间演化：

$$\mathcal{D}_{a,n}(\mathbf{x}) = q^{-na/2}\,\mathrm{Ad}_{\gamma^{-n}}(\mathcal{D}_a(\mathbf{x})) = \sum_{\substack{I\subset[1,N]\\|I|=a}}\prod_{i\in I,\,j\notin I}\frac{tx_i - x_j}{x_i - x_j}\prod_{i\in I}x_i^n\prod_{i\in I}\Gamma_i \tag{11}$$

在极限 $N \to \infty$ 下，这些对象可被识别为 $\mathfrak{g}l_1$ [DFK19]的量子环面代数中的元素。

3 Koornwinder 理论的对偶性

Koornwinder 理论所基于的根系是非约化的 BC_N 系统：

$$R_+ = \left\{\epsilon_i \pm \epsilon_j (1 \le i \le j \le N); \epsilon_i, 2\epsilon_i (1 \le i \le N)\right\}.$$

我们将由 C_N 型有限正根生成的非负整数锥记为 Q_+。Weyl 群 $W \simeq \mathbb{Z}_2^{\times N} \rtimes S_N$ 通过置换和变量求逆作用于变量 $\mathbf{x} = (x_1, ..., x_N)$。Weyl不变初等对称函数记为 $\hat{e}_a(\mathbf{x}) = e_a(x_1, x_1^{-1}, ..., x_N, x_N^{-1})$。

3.1 广义Koornwinder算子

该理论由六个非零复数 a, b, c, d, q, t 参数化。令

$$\sigma = \sqrt{\frac{abcd}{q}}, \quad t^\rho = (\sigma t^{N-i})_{i=1}^N. \tag{12}$$

以下函数在类型 A 中取代 Δ：

$$\Delta^{(a,b,c,d)}(x) = \prod_{i=1}^{N} \prod_{\alpha\in\{a,b,c,d\}} \frac{(\frac{q}{x_i^2};q)_\infty}{(\frac{q}{\alpha x_i};q)_\infty} \prod_{1\le i<j\le N} \prod_{\epsilon=\pm 1} \frac{(\frac{qx_j^\epsilon}{x_i};q)_\infty}{(\frac{qx_j^\epsilon}{tx_i};q)_\infty}. \tag{13}$$

Koornwinder差分算子[1] 定义为

$$\mathcal{D}_1^{(a,b,c,d)}(\mathbf{x}) = \sigma^2\,\mathrm{Sym}\left\{\Delta^{(a,b,c,d)}(\mathbf{x})\Gamma_1\Delta^{(a,b,c,d)}(\mathbf{x})^{-1}\right\} + \varphi^{(a,b,c,d)}(\mathbf{x}) \tag{14}$$

其中，对称化是在 Weyl 群上进行的， W 且 $\varphi^{(a,b,c,d)}(\mathbf{x})$ 是一个 Weyl 对称有理函数，使得 $\mathrm{D}_{(a,b,c,d)}\mathbf{1}(\mathbf{x})\cdot 1 = \frac{1-t^N}{1-t}\left(1+\sigma^2 t^{N-1}\right)$。具体地，

$$\mathcal{D}_1^{(a,b,c,d)}(\mathbf{x}) = \frac{1-t^N}{1-t}\left(1+\sigma^2 t^{N-1}\right) + \sum_{i=1}^{N}\sum_{\epsilon=\pm 1} \Phi_{i,\epsilon}^{(a,b,c,d)}(x)\ (\Gamma_i^\epsilon - 1) \tag{15}$$

其中

$$\Phi_{i,\epsilon}^{(a,b,c,d)}(x) = \frac{(1-ax_i^\epsilon)(1-bx_i^\epsilon)(1-cx_i^\epsilon)(1-dx_i^\epsilon)}{(1-x_i^{2\epsilon})(1-qx_i^{2\epsilon})} \prod_{j\neq i} \frac{tx_i^\epsilon - x_j}{x_i^\epsilon - x_j}\frac{tx_i^\epsilon x_j - 1}{x_i^\epsilon x_j - 1}.$$

差分算子 (15) 是一个 N 差分算子对易族中的第一个，其中高阶算子可以选取为 [DFK21], 使用[vD95, Rai05], , 使得其公共特征函数——以整数分拆标记、编码其首项的首一Koornwinder多项式 $P_\lambda^{(a,b,c,d)}(\mathbf{x})$——的特征值为

$$\mathcal{D}_m^{(a,b,c,d)}(\mathbf{x})\,P_\lambda^{(a,b,c,d)}(\mathbf{x}) = \sigma^m\, t^{m(N-\frac{m+1}{2})}\,\hat{e}_m(\mathbf{s})\,P_\lambda^{(a,b,c,d)}(\mathbf{x}), \tag{16}$$

对于 $m = 1, 2, \ldots\ldots, N$，其中 $\mathbf{s} = q^\lambda t^\rho$，且 σ， ρ 如 (12) 中所示。

将参数 a、 b、 c、 d （见表 3.1）特化后，Koornwinder 理论便约化为适用于仿射型和扭曲经典型的 Macdonald 理论 [Mac01] 。

3.2 对偶性与 Pieri 规则

Koornwinder 多项式满足 Macdonald 多项式（4）对偶性质的一个广义版本 [vD96, Sah99] 。令 $*$ 表示作用于参数 (a,b,c,d) 的以下对合：

$$a^* = \left(\frac{abcd}{q}\right)^{1/2}, \quad b^* = -\left(q\frac{ab}{cd}\right)^{1/2}, \quad c^* = \left(q\frac{ac}{bd}\right)^{1/2}, \quad d^* = -\left(q\frac{ad}{bc}\right)^{1/2}. \tag{17}$$

[1] 与 [DFK21], 中一样，我们在 [Koo92], 的原始定义中加上一个常数，使其与我们对特征值的选取相适应。

$\mathfrak{g}$	$\mathfrak{g}^*$	a	b	c	d	R	S	R^*	$\xi_{\mathfrak{g}}$
$D_N^{(1)}$	$D_N^{(1)}$	1	-1	$q^{\frac{1}{2}}$	$-q^{\frac{1}{2}}$	D_N	D_N	D_N	0
$B_N^{(1)}$	$C_N^{(1)}$	t	-1	$q^{\frac{1}{2}}$	$-q^{\frac{1}{2}}$	B_N	B_N	C_N	$\frac{1}{2}$
$C_N^{(1)}$	$B_N^{(1)}$	$t^{\frac{1}{2}}$	$-t^{\frac{1}{2}}$	$t^{\frac{1}{2}}q^{\frac{1}{2}}$	$-t^{\frac{1}{2}}q^{\frac{1}{2}}$	C_N	C_N	B_N	1
$A_{2N-1}^{(2)}$	$A_{2N-1}^{(2)}$	$t^{\frac{1}{2}}$	$-t^{\frac{1}{2}}$	$q^{\frac{1}{2}}$	$-q^{\frac{1}{2}}$	C_N	B_N	C_N	$\frac{1}{2}$
$D_{N+1}^{(2)}$	$D_{N+1}^{(2)}$	t	-1	$tq^{\frac{1}{2}}$	$-q^{\frac{1}{2}}$	B_N	C_N	B_N	1
$A_{2N}^{(2)}$	$A_{2N}^{(2)}$	t	-1	$t^{\frac{1}{2}}q^{\frac{1}{2}}$	$-t^{\frac{1}{2}}q^{\frac{1}{2}}$	BC_N	–	BC_N	1

表 1 对应于仿射代数 $\mathfrak{g}$ 的 Koornwinder 参数 a、b、c、d 的特化。数对 (R, S) 指的是一对经典根系，对应于 Macdonald 记号 [Mac01], , 但 $A_{2n}^{(2)}$ 除外。

这意味着 $\sigma^* = a$，且 $(\sigma t^{\rho})^* = a\, t^{\rho}$。Koornwinder 多项式的对偶性质为

$$\frac{P_{\lambda}^{(a,b,c,d)}(q^{\mu}t^{\rho^*})}{P_{\lambda}^{(a,b,c,d)}(t^{\rho^*})} = \frac{P_{\mu}^{(a^*,b^*,c^*,d^*)}(q^{\lambda}t^{\rho})}{P_{\mu}^{(a^*,b^*,c^*,d^*)}(t^{\rho})}. \tag{18}$$

其中 μ，λ 均为整数分拆。

定理 1 [DFK21] (18) 中的分母可以用式 (13) 中的$\Delta^{(a,b,c,d)}(\mathbf{x})$ 表示为：

$$P_{\lambda}^{(a,b,c,d)}(t^{\rho^*}) = t^{(\rho^*,\lambda)}\frac{\Delta^{(a^*,b^*,c^*,d^*)}(t^{\rho})}{\Delta^{(a^*,b^*,c^*,d^*)}(q^{\lambda}t^{\rho})},$$
$$P_{\mu}^{(a^*,b^*,c^*,d^*)}(t^{\rho}) = t^{(\rho,\mu)}\frac{\Delta^{(a,b,c,d)}(t^{\rho^*})}{\Delta^{(a,b,c,d)}(q^{\mu}t^{\rho^*})}.$$

与 Macdonald 理论中一样，方程 (18) 可以推广到特征值方程的通用解：$P^{(a,b,c,d)}(\mathbf{x};\mathbf{s}) = q^{(\lambda,\mu)}\prod_{\alpha\in Q_+} c_{\alpha}^{(a,b,c,d)}(\mathbf{s})\,\mathbf{x}^{-\alpha}$，其中 $\mathbf{x} = q^{\mu}t^{\rho^*}$ 和 $\mathbf{s} = q^{\lambda}t^{\rho}$ 为一般参数，且 $c_0^{(a,b,c,d)}(\mathbf{s}) = 1$。级数 $P^{(a,b,c,d)}(\mathbf{x};\mathbf{s})$ 在将 λ 特化为整数分拆 [2] 后，化为 Koornwinder 多项式：

$$P^{(a,b,c,d)}(\mathbf{x};\mathbf{s})\Big|_{\mathbf{s}=q^{\lambda}t^{\rho},\,\lambda\text{ integer}} = t^{-(\rho,\lambda)}\,P_{\lambda}^{(a,b,c,d)}(\mathbf{x}) \tag{19}$$

定理 2 [DFK21] 通用解满足对偶关系

[2] 在表 3.1 的特化情形中，当 λ 取为根系 R 的整权时，还会出现进一步的截断，从而恢复完整的广义 Macdonald 多项式内容。

$$\Delta^{(a^*,b^*,c^*,d^*)}(\mathbf{s})\, P^{(a,b,c,d)}(\mathbf{x};\mathbf{s}) = \Delta^{(a,b,c,d)}(\mathbf{x})\, P^{(a^*,b^*,c^*,d^*)}(\mathbf{s};\mathbf{x}). \tag{20}$$

再次，这意味着 Koornwinder 多项式的 Pieri 规则：

$$\hat{e}_m(\mathbf{x})\, P_\lambda^{(a,b,c,d)}(\mathbf{x}) = \mathcal{H}_m^{(a,b,c,d)}(\mathbf{s})\, P_\lambda^{(a,b,c,d)}(\mathbf{x}). \tag{21}$$

Pieri 算子由针对对偶参数的广义 Koornwinder 多项式计算得出：

$$\mathcal{H}_m^{(a,b,c,d)}(\mathbf{s}) = a^{-m} t^{m(\frac{m+1}{2}-N)}\, \mathrm{Ad}_{\Delta^{(a^*,b^*,c^*,d^*)}(\mathbf{s})^{-1}\, t^{(\rho^*,\lambda)}} \left\{ \mathcal{D}_m^{(a,b,c,d)}(\mathbf{s}) \right\}. \tag{22}$$

4 亏格二广义 Macdonald 理论的对偶性

“秩-1”的亏格 2 DAHA 最近由 Arthamonov 和 Shakirov 借助精化 Chern-Simons 理论引入 [AS20, AS19]。下面我们给出一种与上述讨论类似的对偶性表述。尽管这种情形并不直接关联于某个特定的根格，但请注意，以下向量在这里起着类似的作用。定义 $\mathbb{C}^3$ 中的三个向量：

$$\alpha_1 = (1,1,-1), \quad \alpha_2 = (1,-1,1), \quad \alpha_3 = (-1,1,1),$$

以及根系型集合 $R_\pm^{(2)}$：

$$R_+^{(2)} = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_1+\alpha_2, \alpha_1+\alpha_3, \alpha_2+\alpha_3, \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3\} = -R_-^{(2)}$$

再加上正锥 $Q_+^{(2)} = \oplus \mathbb{Z}_{\geq 0}\alpha_i$。未归一化的对偶基记作

$$\omega_1 = (1,1,0), \quad \omega_2 = (1,0,1), \quad \omega_3 = (0,1,1).$$

Weyl 向量的类似物取为

$$\rho = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = (1,1,1).$$

整数分拆的类似物是集合中的元素

$$\mathcal{P}^{(2)} = \left\{ \lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{Z}^3 | (\alpha_i, \lambda) \in 2\mathbb{Z}_{\geq 0}, i = 1,2,3 \right\}.$$

我们使用记号 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$。Weyl 群（由 $\alpha_i + \alpha_j$ 的反射生成）的类似结构是直积群 $W \simeq S_2 \times S_2 \times S_2$，它通过取逆作用于 $\mathbf{x}$ 变量 $x_i \mapsto x_i^{\pm 1}$。

4.1 差分算子

设 q, t 为两个非零复参数。[3] 引入无穷乘积:

$$\Delta^{(2)}(\mathbf{x}) = \frac{\displaystyle\prod_{1\le i<j\le 3}(q^2\mathbf{x}^{-\alpha_i-\alpha_j};q^2)_\infty}{(q^2t^{-1}\mathbf{x}^{-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3};q^2)_\infty\displaystyle\prod_{i=1}^{3}(q^2t^{-1}\mathbf{x}^{-\alpha_i};q^2)_\infty}$$
$$= \prod_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1-\dfrac{q^{2n}}{t\,x_1x_2x_3}}\prod_{i=1}^{3}\frac{1-\dfrac{q^{2n}}{x_i^2}}{1-\dfrac{q^{2n}}{t}\dfrac{x_i^2}{x_1x_2x_3}}.$$

属 2 交换算子针对每一对 $(i,\ j)$ 定义，其中 $1 \le i < j \le 3$由[4]

$$\mathcal{D}^{(2)}_{i,j} = t\,\mathrm{Sym}\left\{\Delta^{(2)}(\mathbf{x})\,\Gamma_i\Gamma_j\,\Delta^{(2)}(\mathbf{x})^{-1}\right\}$$
$$= \frac{1}{t}\sum_{\epsilon_i,\epsilon_j=\pm1}\frac{(tx_i^{\epsilon_i}x_j^{\epsilon_j}x_k-1)(tx_i^{\epsilon_i}x_j^{\epsilon_j}x_k^{-1}-1)}{(x_i^{2\epsilon_i}-1)(x_j^{2\epsilon_j}-1)}\Gamma_i^{\epsilon_i}\Gamma_j^{\epsilon_j}, \tag{23}$$

其中 k 满足 $\{i,\ j,\ k\} = \{1,\ 2,\ 3\}$。这里，对称化是相对于$W$而言的。

属 2 Macdonald 多项式 $P^{(2)}_\lambda(\mathbf{x})$ 是三个算子 $\mathrm{D}^{(2)}_{i,\ j}$ 的首一[5] 公共特征函数，算子以属 2 分拆 $\lambda \in \mathrm{P}(2)$为索引，其首项满足

$$P^{(2)}_\lambda(\mathbf{x}) = \prod_{i=1}^{3}x_i^{\frac{1}{2}(\alpha_i,\lambda)}\Big(1+O(\mathbf{x}^{-\alpha})_{\alpha\in Q_+}\Big).$$

$1 \le i < j \le 3$ 对应的特征值方程为

$$\mathcal{D}^{(2)}_{i,j}(\mathbf{x})\,P^{(2)}_\lambda(\mathbf{x}) = \hat{e}_1(s_\ell)\,P^{(2)}_\lambda(\mathbf{x}) \tag{24}$$

其中l 满足 $\alpha_i+\alpha_j = 2\epsilon_\ell$, $s_\ell = t\,q^{\frac{1}{2}(\alpha_i+\alpha_j,\lambda)} = t\,q^{\lambda_\ell}$，且$\hat{e}_1(x) = x + x^{-1}$。请注意，我们仍然可以写作$\mathbf{s} = q^\lambda t^\rho$，相关定义见上文。

---

[3] 我们采用了不同于 [AS19] 的约定，以避免 q, t 的分数幂。通过代入 $q \to q^{1/2}$ 和 $t \to t^{1/2}$，即可恢复 [AS19] 的结果。[4] 该定义导出的差分算子与 [AS19] 中引入的相同。[5] 原始定义 [AS19] 采用了不同的归一化：其中的多项式不是首一的，而是沿用了精细 Chern-Simons 视角中特定的归一化。

4.2 对偶性与 Pieri 规则

在 [AS19]，中，引入了亏格 2 的 Macdonald 多项式，将其定义为 Pieri 规则的唯一解，这也自动确定了它们的归一化。这些结果源自精细化 Chern-Simons 方法。现在我们证明，亏格 2 Macdonald 多项式的首一归一化所对应的 Pieri 规则，可以作为对偶关系的推论导出。所得的 Pieri 规则与 [AS19] 的规则一致，只需进行适当的归一化变换。由于篇幅所限，我们不在此给出证明，详见 [DFK23]。证明方法与 Macdonald 针对 A [Mac95] 类型所采用的方法类似。

定理 3 属 *2 Macdonald* 多项式满足以下对偶性质，这是通过将$\mathbf{x} = q^{\mu}t^{\rho}$和$\mathbf{s} = q^{\lambda}t^{\rho}$都取为 $\lambda, \mu \in \mathcal{P}_{(2)}$得到的：

$$\frac{P^{(2)}_{\lambda}(q^{\mu}t^{\rho})}{P^{(2)}_{\lambda}(t^{\rho})} = \frac{P^{(2)}_{\mu}(q^{\lambda}t^{\rho})}{P^{(2)}_{\mu}(t^{\rho})}. \tag{25}$$

定理 4 属 *2 Macdonald* 多项式的归一化因子可用乘积 $\Delta^{(2)}(\mathbf{x})$ 表示如下：

$$P^{(2)}_{\lambda}(t^{\rho}) = t^{\frac{1}{2}(\rho,\lambda)}\frac{\Delta^{(2)}(t^{\rho})}{\Delta^{(2)}(q^{\lambda}t^{\rho})}. \tag{26}$$

与亏格 1 情形一样，对偶性也适用于特征值方程 (24) 的通用解。对于$\mathbf{x} = q^{\mu}t^{\rho}$, $\mathbf{s} = q^{\lambda}t^{\rho}$ 取一般复数 λ, μ 时，该通用解定义为级数

$$P^{(2)}(\mathbf{x};\mathbf{s}) = q^{\frac{1}{2}(\lambda,\Omega\mu)}\sum_{\alpha\in Q^{(2)}_{+}} c^{(2)}_{\alpha}(\mathbf{s})\,\mathbf{x}^{-\alpha}, \qquad \Omega = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

其归一化为 $c^{(2)}_{0}(\mathbf{s}) = 1$。与之前一样，当我们将 λ 取为属 2 整数分拆时，该级数会有限截断，从而得到：

$$P^{(2)}(\mathbf{x};\mathbf{s})\Big|_{\lambda\in\mathcal{P}^{(2)}} = t^{-\frac{1}{2}(\rho,\lambda)}\,P^{(2)}_{\lambda}(\mathbf{x}), \tag{27}$$

其中我们使用了 $\hat{\mathrm{I}}_{i=1}^{3} x^{\frac{1}{2}(}{}_{i}^{\ \alpha_i\ \lambda} = t^{\frac{1}{2},)(\rho,\lambda)}q^{\frac{1}{2}(\lambda,\Omega\mu)}$。

定理 5 对偶关系(25) 可扩展到具有一般λ、μ 的通用解，其形式为

$$\Delta^{(2)}(\mathbf{s})\,P^{(2)}(\mathbf{x};\mathbf{s}) = \Delta^{(2)}(\mathbf{x})\,P^{(2)}(\mathbf{s};\mathbf{x}). \tag{28}$$

与亏格 1 中一样，对偶性蕴含属 2 Macdonald 多项式的 Pieri 规则。Pieri 算子表示将多项式乘以三个初等对称函数中任意一个所得的结果：

$$\hat{e}_1(x_\ell)\,P^{(2)}_{\lambda}(\mathbf{x}) = \mathcal{H}^{(2)}_{\ell}(\mathbf{s})\,P^{(2)}_{\lambda}(\mathbf{x}), \qquad \ell = 1,2,3. \tag{29}$$

对偶性蕴含 Pieri 算子 $\mathrm{H}^{(2)}{}_{l}(\mathbf{s})$ 为

$$\mathcal{H}^{(2)}_{\ell}(\mathbf{s}) = \mathrm{Ad}_{\Delta^{(2)}(\mathbf{s})^{-1}\, t^{\frac{1}{2}(\rho,\lambda)}}\left\{\mathcal{D}^{(2)}_{i,j}(\mathbf{s})\right\}, \qquad i<j,\ \alpha_i+\alpha_j = 2\epsilon_\ell . \tag{30}$$

具体而言，使用记号 $\Lambda_i = q^{\lambda_i}$ 和 $T_i = q^{\lambda_i \partial_{\lambda_i}}$,

$$\begin{aligned}\mathcal{H}^{(2)}_1(\mathbf{s}) = {} & T_1T_2 + t\frac{\Lambda_1\Lambda_2}{\Lambda_3}\frac{(1-\frac{\Lambda_2\Lambda_3}{\Lambda_1})(1-q^{-2}t^2\frac{\Lambda_2\Lambda_3}{\Lambda_1})}{(1-t^2\Lambda_2^2)(1-q^{-2}t^2\Lambda_2^2)}\,T_1T_2^{-1}\\ & + t\frac{\Lambda_1\Lambda_2}{\Lambda_3}\frac{(1-\frac{\Lambda_1\Lambda_3}{\Lambda_2})(1-q^{-2}t^2\frac{\Lambda_1\Lambda_3}{\Lambda_2})}{(1-t^2\Lambda_1^2)(1-q^{-2}t^2\Lambda_1^2)}\,T_1^{-1}T_2\\ & + \frac{(1-\frac{\Lambda_1\Lambda_2}{\Lambda_3})(1-q^{-2}t^2\frac{\Lambda_1\Lambda_2}{\Lambda_3})(1-t^2\Lambda_1\Lambda_2\Lambda_3)(1-q^{-2}t^4\Lambda_1\Lambda_2\Lambda_3)}{(1-t^2\Lambda_1^2)(1-t^2\Lambda_2^2)(1-q^{-2}t^2\Lambda_1^2)(1-q^{-2}t^2\Lambda_2^2)}T_1^{-1}T_2^{-1},\end{aligned}$$

而 $\mathrm{H}^{(2)}{}_{2}(\mathbf{s})$ 和 $\mathrm{H}^{(2)}{}_{3}(\mathbf{s})$ 则由指标 1,2,3 的循环置换得到。

这些 Pieri 规则与 [AS19] 针对多项式 $\psi_\lambda(\mathbf{x})$ 的规则一致，其归一化为

$$\psi_\lambda(\mathbf{x}) = t^{-(\rho,\lambda)}\prod_{k=1}^{3}\prod_{i=0}^{\lambda_k-1}\frac{1-t^4q^{2i}}{1-t^2q^{2i}}\,\frac{P_\lambda(\mathbf{x})}{P_\lambda(t^\rho)}.$$

5 q-Whittaker 极限与量子 Q-系统

在亏格 1 情形中，构造上述特定差分算子集及其 Dehn 扭曲类比的动机，源于一组递归关系。这些关系针对量子仿射代数有限维表示的特征，称为 Q-系统 [HKO+99]，其量子化为 [DFK14]。这些关系出现在 sDAHA 的 q-Whittaker 极限中。

5.1 亏格 1

对上述每种设定，函数 Δ 的选取使得极限 $t\to\infty$ 定义良好。我们将其称为 q-Whittaker 极限。$\mathbf{x}$ 中的每个 q-差分算子都有定义良好的极限（在乘以 t 的某个幂进行重新归一化之后）。对于类型 $A^{(1)}_N$，可以直接在 Macdonald 理论中取此极限。在 Koornwinder 理论中，我们按照表 3.1 对参数 (a,b,c,d) 进行特化后再取极限，因为这种特化取决于 t。

在此极限下，经 Dehn 扭曲的 Macdonald-Koornwinder差分算子并未大幅简化，例如 (11) 变为

$$D_{a,n}(\mathbf{x}) = \lim_{t\to\infty} t^{-a(N-a)}\mathcal{D}_{a,n}(\mathbf{x}) = \sum_{\substack{I\subset[1,N]\\|I|=a}} \prod_{i\in I, j\notin I} \frac{x_i}{x_i - x_j} \prod_{i\in I} x_i^n \prod_{i\in I}\Gamma_i.$$

Macdonald-Koornwinder 算子的特征值是**s**中的初等对称函数，在此极限下会被其主导单项式取代，因为**s** 显式依赖于 t。例如，在类型 A 中，$e_a(\mathbf{s})$ 被 Λ^{ω_a} 取代，其中 $\Lambda_i = q^{\lambda_i}$。相应的特征函数是（class-1） q-Whittaker 函数， $\Pi_\lambda(\mathbf{x})$。在类型 A 中，它们满足以下方程

$$D_{a,0}(\mathbf{x})\,\Pi_\lambda(\mathbf{x}) = \Lambda_1\Lambda_2\cdots\Lambda_a\,\Pi_\lambda(\mathbf{x}). \tag{31}$$

特征值方程的通用解也具有良定义的 q- Whittaker 极限，表现为 $\mathbf{x}^{-\alpha_i}$, $\Pi(\mathbf{x};\,\Lambda)$ 中的级数解。由于 **s** 显式依赖于 t，方程 (7)、(20) 和 (28) 中的对称性$\mathbf{x}\ \leftrightarrow \mathbf{s}$ 在极限下被打破，$\Delta(\mathbf{s})\ \to 1$ 而 $\Delta(\mathbf{x})$ 仍然是一个无穷乘积。

Pieri 规则在 type A 中具有 $e_a(\mathbf{x})\ \Pi_\lambda(x)\ = H_a(\Lambda)\ \Pi_\lambda(\mathbf{x})$ 形式的良定义极限。Pieri 算子的极限在取极限后大大简化，并且可以识别为与各根系相关的量子相对论Toda哈密顿量。它们全都是 Λ_i, T_i 中的 Laurent多项式。例如，在 A 型中，它们是

$$H_1(\Lambda) = T_1 + \sum_{i=2}^{N}\Big(1 - \frac{\Lambda_i}{\Lambda_{i-1}}\Big)T_i.$$

这些哈密顿量是离散演化的守恒量，这些离散演化称为与各仿射代数 [DFK18、DFK21] 对应的量子 Q-系统。它们是离散时间变量 n 中的非交换递归关系。取极限后的 Dehn扭曲的Macdonald-Koornwinder算子是这些方程的解。在大多数情况下，Dehn 扭曲是在量子簇代数中的一系列突变，其中元素 $D_{a,n}$ 是 A 型簇变量。这些结论的证明见 [DFK21], , 其依据是对偶性质以及“傅里叶变换”的概念；后者使我们能够在作用于通用 q-Whittaker 函数时，将 q-差分算子与其特征值互换。

5.2 亏格2情形

在亏格 2 的情形下，我们使用相同的 $t\to\infty$ 极限。在此极限下，算子 (23) 分解为亏格 1 $A_1^{(1)}$ 类型的 Macdonald 算子：

$$D^{(2)}_{i,j}(\mathbf{x}) = \lim_{t\to\infty} t^{-1}\mathcal{D}^{(2)}_{i,j}(\mathbf{x}) = \sum_{\epsilon_i,\,\epsilon_j=\pm1} \frac{x_i^{2\epsilon_i}}{x_i^{2\epsilon_i}-1}\Gamma_i^{\epsilon_i}\,\frac{x_j^{2\epsilon_j}}{x_j^{2\epsilon_j}-1}\Gamma_j^{\epsilon_j} = D_1(x_i)\,D_1(x_j) \tag{32}$$

$D_1(x)$ 是 q-Whittaker 极限下的 $\mathfrak{sl}_2$ Macdonald 算子

$$D_1(x) = \frac{x^2}{x_i^2 - 1}\Gamma_x + \frac{x^{-2}}{x_i^{-2} - 1}\Gamma_x^{-1} = D_1(x, x^{-1}).$$

因此，属 2 Macdonald 多项式的 q-Whittaker 极限可因式分解为：

$$\Pi_\lambda^{(2)}(\mathbf{x}) = \Pi_{\frac{1}{2}(\alpha_1,\lambda)}(x_1)\,\Pi_{\frac{1}{2}(\alpha_2,\lambda)}(x_2)\,\Pi_{\frac{1}{2}(\alpha_3,\lambda)}(x_3),$$

其中 $\Pi_m(x)$ 可表示为 A_1 Macdonald 多项式的形式：$\Pi_{\lambda_1-\lambda_2}(x) = \Pi_{\lambda_1,\,\lambda_2}(x,\ x^{-1})$。

Pieri 算子也有简单的极限：

$$H_1^{(2)}(\Lambda) = T_1T_2 + \Big(1 - \frac{\Lambda_3}{\Lambda_1\Lambda_2}\Big)T_1^{-1}T_2^{-1},$$

而 $H_2^{(2)}$，$H^{(2)}_3$ 则由指标的循环置换得到。后者与 A_1 下的 Toda 哈密顿量 $H_1(\Lambda_1,\ \Lambda_2)$ 相一致，对应关系为

$$\Lambda_1 \to \Big(\frac{\Lambda_1\Lambda_2}{\Lambda_3}\Big)^{1/2} = q^{\frac{1}{2}(\alpha_1,\lambda)}, \quad \Lambda_2 \to \Big(\frac{\Lambda_1\Lambda_2}{\Lambda_3}\Big)^{-1/2} = q^{-\frac{1}{2}(\alpha_1,\lambda)}.$$

在这种情况下，量子 Q-系统的簇代数是三个 $A_1^{(1)}$ 型系统构成的因子化系统，它们分别对应三个互不连通的 Jordan 箭图。

6 结论

我们总结了球面双仿射 Hecke 代数中几种形式的对偶性质。在每种情形下，与对偶性下 Macdonald 多项式的归一化相关的函数 $\Delta(\mathbf{x})$，在确定 Pieri 规则方面都发挥着关键作用。在亏格 1 情形下，这个函数与某个仿射李代数的仿射根系相关。我们认为，亏格2情形下存在一种结构相似性，但它并不对应于根系。关于亏格2情形下这些结论的证明将发表于一篇即将发表的论文中[DFK23]。

参考文献

AS19. S. Arthamonov 和 Sh. Shakirov。属二球面双仿射Hecke代数的推广。《*Selecta* 数学》（新系列），25(2)：第 17 号论文，29 页，2019。AS20. S. Arthamonov 和 Sh. Shakirov。属二精化 Chern-Simons 理论。*J. Knot Theory Ramifications*，29(7)：2050044，24 页，2020。Che05. Ivan Cherednik。双仿射 *Hecke* 代数，伦敦数学会讲义系列第 319 卷。剑桥大学出版社，剑桥，2005。DFK14. Philippe Di Francesco 和 Rinat Kedem。量子簇代数与融合积。《国际数学研究通知》，(10)：2593–2642，2014。

DFK18. P. Di Francesco 和 R. Kedem。由量子簇代数得到的分次特征的差分方程。《变换群》，23(2)：391–424，2018。DFK19. Philippe Di Francesco 和 Rinat Kedem。(q, t)-变形 Q-系统、双仿射 Hecke 代数与量子环面代数：通过广义麦克唐纳算子。《数学物理通讯》，369(3)：867–928，2019。DFK21. Philippe Di Francesco 和 Rinat Kedem。麦克唐纳对偶性与量子q系统猜想的证明，2021。预印本 arXiv 2112.09798。DFK23. Philippe Di Francesco 和 Rinat Kedem。准备中的手稿，2023。HKO+99. G. Hatayama、A. Kuniba、M. Okado、T. Takagi 和 Y. Yamada。关于费米子公式的几点说明。载于量子仿射代数及相关主题的最新进展（北卡罗来纳州罗利，*1998*），当代数学第 248 卷，第 243–291 页。美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，1999。Koo92. Tom H. Koornwinder。根系类型为 BC 的 Askey-Wilson 多项式。载于正性域上的超几何函数、*Jack*多项式及其应用（佛罗里达州坦帕，*1991*），当代数学第 138 卷，第 189–204 页。美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，1992。Mac01. I. G. Macdonald。与根系相关的正交多项式。《洛塔尔组合学研讨班》，45：第 B45a 号文章，40 页，2000/01。Mac95. I. G. Macdonald。对称函数与 *Hall*多项式。牛津数学专著。克拉伦登出版社、牛津大学出版社，纽约，第 2 版，1995。附有 A. Zelevinsky 的贡献，牛津科学出版物。NS12. Masatoshi Noumi 和 Jun'ichi Shiraishi。关于 Ruijsenaars-Macdonald q差分算子双谱问题的直接方法，2012。arXiv:1206.5364 [math.QA]。Rai05. Eric M. Rains。BC$_n$-对称多项式。《变换群》，10(1)：63–132，2005。Sah99. Siddhartha Sahi。非对称Koornwinder多项式与对偶性。《数学年刊》（第 *2* 辑），150(1)：267–282，1999。Sto14. Jasper V. Stokman。基本Harish-Chandra级数的连接系数。《数学进展》，250：351–386，2014。vD95. J. F. van Diejen。具有多项式特征函数的可交换差分算子。《组合数学》，95(2)：183–233，1995。vD96. J. F. van Diejen。自对偶Koornwinder-Macdonald多项式。《数学发明》，126(2)：319–339，1996。