arXiv:2303.04282v1 [math.PR] 7 Mar 2023

函数-测度核、自可积性与唯一确定的随机积分

R里卡多C卡里索 V维尔加拉
racarriz@uc.cl

2023年3月

摘要

本文研究函数测度核的自积分及其在随机积分中的重要性。连续函数测度核 K over $D \subset \mathbb{R}^d$ 是一个二元函数，对第一个变量而言是连续函数，对第二个变量而言是实值拉东测度。本文研究了这类核的一些解析性质，尤其是交叉正定型核的情形。 K over 有界集合 D 上的自积分，即“ K 相对于自身的积分”，使用黎曼和定义，记作 $\int_D K(x, dx)$。本文给出了一些此类概念定义良好的例子。事实证明，这一概念对于随机积分的唯一确定性至关重要；所谓唯一确定性，是指积分与逼近方式无关。若 K 是均方连续随机过程 Z 与具有测度协方差结构 $M, \int_D K(x, dx)$ 的随机测度之间的交叉协方差核，则在两者均唯一确定时，随机积分 $\int_D Z dM$ 的期望为 Z 与 M 联合高斯时，本文还证明， K 上的自可积性是保证 $\int_D Z dM$ 唯一确定的充要条件。本文还得到了关于子集上的积分以及潜在的 σ-可加结构的结果。本文提出了三项应用：涉及高斯随机测度的张量积、研究相对于赫斯特指数为 $H > \frac{1}{2}$ 的分数布朗运动的唯一确定随机积分，以及相对于正交随机测度的非唯一确定随机积分。本文研究的随机积分对被积函数和积分器的定义都非常一般，且不使用鞅型条件，为一种基于协方差结构的无滤过随机微积分方法提供了可能。

关键词 自积分、核、随机测度、随机积分、张量积。

1 引言

据我们所知，本研究聚焦于一个在文献中鲜少受到关注的概念，无论是将其视为本身具有研究价值的数学对象，还是视为应用数学中可能具有重要意义的工具。这个概念就是函数测度核的自积分，其主要

应用领域是随机积分。函数测度核是在两个可测空间的笛卡尔积上定义的一种结构，它在一个分量上表现为函数，在另一个分量上表现为测度。自积分是一种核对其自身进行积分的形式，也就是说，是将其第一分量关于其第二分量积分。乍看之下，这种概念或许显得奇特，但不难构造出其定义良好的例子。本研究有三个目的：探讨函数测度核的一些基本解析性质，定义并研究自可积性的概念，以及展示这一概念在随机积分中的重要性；在随机积分领域，自可积性是唯一确定的随机积分的一项关键概念。

我们考虑一个函数 $K:\ D \times \mathscr{E} \to \mathbb{R}$，其中 D 是某个可测空间，$\mathscr{E}$ 是某个 σ-代数（或 δ-环），且 $K(\cdot,\ A)$ 是一个函数，$K(x,\ \cdot)$ 是一个测度。这类核在文献中被广泛使用，其中最重要的例子或许是转移或条件概率核；在这种情况下，$K(x,\ \cdot)$ 是一个概率测度，而 $K(\cdot,\ A)$ 是一个正可测函数。不过，在本研究中，核 K 将用于其他目的。首先，我们考虑不同的正则性：$K(\cdot,\ A)$ 将是定义在 D 上的连续函数，而 $K(x,\ \cdot)$ 将是实值拉东测度。我们将重点讨论 $D \subset \mathbb{R}^d$ 和 $\mathscr{E} = \mathcal{B}(\mathbb{R}^p)$的情形，不过，我们的许多结果都可以推广到使用拉东测度的经典情形（将 D 或 $\mathbb{R}^p$ 替换为任意可表示为可数个紧致子集之并的局部紧豪斯多夫拓扑空间）。这类核 K 在随机背景下的主要作用是描述交叉协方差结构。这意味着需要使用满足额外交叉正定条件的核 K，从而能够描述均方连续随机过程与二阶随机测度之间的协方差。

当 $\mathscr{E} = \mathcal{B}(D)$ 时，可以构想自积分的概念，因此 K 的左、右分量作用于同一可测空间。我们的目标是定义“K 对自身的积分”，在本文中记作

$$\int_D K(x, dx). \tag{1.1}$$

作者尚未发现有文献尝试对这一概念进行形式化。不过，一些专攻分析学的读者或许会认出，自积分就是迹算子（Ryan，2002，第 1.3 节）。事实上，张量积空间 $C(D) \otimes \mathscr{M}(D)$ 的元素，其中 $C(D)$ 是定义在 D 上的连续函数空间，而 $\mathscr{M}(D)$ 是定义在 D 上的实拉东测度空间，构成了一类特殊的函数-测度核，其自积分可以直接定义（见第 4 节）。由于对于 D 紧致 $C'(D) = \mathscr{M}(D)$（里斯表示定理），可以将 D 上的自积分定义为 $C(D) \otimes C'(D)$ 上的迹算子，并最终通过对这类张量积赋予射影拓扑后取其完备化，将其推广到更一般的情形（Ryan，2002，第 2 章）。未来的一篇论文将进一步研究这一分析学方法，届时我们将尝试通过

级数展开方法来定义自积分。本文则聚焦于一种看起来更简单的方法：使用黎曼和定义自积分。也就是说，我们采用与经典积分相同的做法：依赖积分域的黎曼分割，选取标记点来计算 K 的左分量，从而构造黎曼和的极限。这样的自积分并不总是唯一确定的：最终极限可能取决于所选的分割或标记点。因此，有必要研究该极限能够唯一确定的情形，并据此为这些情形定义自积分这一概念。

自积分的概念自然产生于这样一个问题：如何唯一地定义一般均方连续随机过程与二阶随机测度之间的随机积分（关于本文所用随机测度的确切概念，见定义 2.3）。这里的“唯一”是指积分不依赖于逼近方式。我们采用的方法，在我们看来，比文献中已有的大多数方法都简单：通过黎曼和的极限来定义积分，并通过分析被积函数与积分器之间的交叉协方差结构，研究唯一可积条件（即积分不依赖于分割和标记点）。这种交叉协方差结构可以用函数测度核来描述，也就是上文提到的同一种数学对象。本文表明，能否唯一地定义随机积分，与能否定义该交叉协方差核的自积分密切相关：这是定义随机积分的必要条件，因为随机积分的均值就是交叉协方差核的自积分。此外，当积分器与被积函数联合高斯时，唯一确定的随机积分的充要条件完全取决于交叉协方差核的自可积性。这些条件在定理 5.1 中给出，该定理是本文的主要结果。当然，仅研究二阶矩结构不足以完全刻画这些对象的分布，因此无法涵盖随机过程理论的全部丰富内涵；不过，我们认为这些结果足够有力而简洁，可以为研究这一主题提供另一种途径，并有望推广到更复杂的情形，也可用于实际应用。我们还指出，这种方法很容易应用于 $\mathbb{R}^d$ 上的随机积分，而且原则上不受对积分器施加鞅型条件或要求被积函数具备适应性的限制。

1.1 动机及部分文献回顾

让我们谈谈随机积分当前的发展情况。本文旨在为一个简单但重要的问题提供一些启发：何时可以相对于随机测度对随机过程进行积分？我们可以尝试仿照确定性情形下积分的定义，但众所周知，在随机领域，事情并没有那么简单。经典的、相对于布朗运动（的导数）进行的随机积分，直观上是通过

黎曼和和简单函数逼近构造出来的，而不同的积分逼近方式会产生不同的结果（这是 Itô 积分与 Stratonovich 积分之间的经典区别，参见（Øksendal，2003年，第3章））。那么，何时可以唯一地相对于随机测度对随机过程进行积分？为了确保极限定义良好，且不受逼近方式影响，随机过程和随机测度必须分别满足哪些性质？

事实证明，文献中似乎尚未探讨过这个问题。自 Wiener 的早期著作（Wiener，1923）问世以来的一百多年间，随机积分的研究在诸多方向上取得了丰硕成果，但关于随机积分唯一确定所需条件这一具体问题，似乎一直未受关注。在（Loève，1978年，第 37.3 节）中，作者针对一种相当一般的情形提出了随机积分的定义：被积函数是二阶过程，积分器则是某个二阶过程的增量，且该过程的协方差具有有界变差[1]。按照此定义，黎曼–斯蒂尔杰斯和的极限必须与所选标记点无关。然而，除积分器与被积函数相互独立这一特例外，作者并未给出此条件成立的一般判据；我们将在第 5.1 节重新讨论这一特例。众所周知，当被积函数或积分器是确定性的，随机积分便是唯一确定的，但这实际上是独立性的一个特例（我们将在第 2.2 节重新讨论此类构造）。除这些情况外，很难找到以相对简单的方法处理极其一般的随机积分，并且关注其定义唯一性的文献来源。例如，（Huang与Cambanis，1978年）采用基于张量积和希尔伯特空间扩张的方法，构造了具有一般高斯积分器和一般（非适应）被积函数的随机积分，但这种方法已被认为颇为复杂（Borisov & Bystrov，2006年）。另一种试图妥善定义某一特定形式随机积分的方法，不受具体处理方式影响，见（Rao，2012，第 5 章）。作者在此寻求定义两个二阶随机测度之间的卷积，这一概念隐含地使用了随机积分。大致而言，作者将两个随机测度的协方差双测度进行卷积，并将结果视为新的协方差双测度；借助柯尔莫哥洛夫定理（见（Rao，2012）中的命题5.1.3），他们据此协方差构造了一个新的随机测度。然而，这是一种抽象构造，并未直接关联初始随机测度的样本路径与最终卷积的样本路径。例如，如果采用两个相互独立的二阶随机测度的卷积，也可以得到一个类似且或许更实用的结果，而且这种卷积的定义不存在任何问题。

关于典型方法　　关于随机积分，另有一点值得一提。几乎　　y

[1]本文所采用的随机测度概念实际上与此相同，不过我们明确使用的是协方差测度，而不是其原函数的增量。

所有方法都会对被积函数和／或积分器提出某些特殊条件，而这些条件乍看之下（或许是天真的初步印象）可能比我们所能设想的更严格。积分器必须满足鞅型条件，而不能只是属于某个足够简单且一般的随机测度类。随机测度的原函数满足半鞅条件，似乎是所能找到的最一般条件（Kunita与Watanabe，1967年；Bichteler与Jacod，2006年；Dellacherie，2006年）。另一方面，被积函数必须适应于由随机测度诱导的滤过，而不能仅仅是一个具有足够正则性的过程（例如均方连续）。通常提出这些条件是为了数学上的方便（勒贝格控制收敛定理成立，见（Bichteler与Jacod，2006年；Chong与Klüppelberg，2015年）），因此数学家在这些条件的基础上构建了整套泛函理论。这些条件也可能更受青睐，因为它们符合一种“不可预知未来”的直觉（Øksendal，2003年，第3章）。它们似乎完全源自纯粹的时间视角，即针对实数轴上的随机积分，而非平面或其他空间上的随机积分。尽管如此，平面上的随机积分也通过将相同原则应用于空间轴，并据此进行迭代伊藤积分而得以发展（Itô，1951年；Cairoli与Walsh，1975年）。当然，这种做法在数学上可行且合理，但它似乎显得“人为”，因为原则上没有理由或直觉能说明空间过程为何应沿空间轴满足适应性条件[2]。因此，我们不禁想问，能否在不借助这些概念的情况下处理随机积分的一般问题。适应性是一种描述过程与测度之间依赖关系的方式，但在某些情形下，或许其他更简单的方法更便于使用。前面提到的（Rao，2012年；Huang与Cambanis，1978年）中那些并不简单的方法，就是不采用适应性条件来进行随机积分、并相对全面地处理这一问题的一些例子。斯科罗霍德积分（Skorokhod，1976年）是借助Malliavin演算发展起来的（Nualart，2006年），也是一种成功的随机积分方法；它不考虑对被积函数的适应性条件，但其构造通常局限于白噪声随机测度（布朗运动的导数）。它可以扩展到更一般的随机测度（Mocioalca与Viens，2005年），但总体而言，似乎有必要先固定随机测度，再据此构造积分理论。因此，无法同时相对自由地处理被积函数和积分器。还有一些更精巧的随机积分方法，是通过定义一般性较强的随机结构之间的随机乘积来实现的。随机积分是随机函数与随机测度之间的一种乘法，但采用更一般随机对象（例如积分器）的理论

[2]当我们要求一个随时间演变的随机过程相对于某个滤过是适应的时，这种数学直觉背后隐含着因果关系或时间箭头的观念。我们不应忘记，这些概念也是抽象的观念，我们可以选择将其纳入数学模型，也可以不纳入。原则上，我们完全可以构想不考虑这些概念的数学模型。

具有受控的 p-变差，以及随机分布的相关理论，已在过去几十年间得到发展。Wick乘积（Holden 等人，2009年）、粗糙路径理论和副控制分布（Gubinelli，2004年；Gubinelli 等人，2015年），以及正则性结构理论（Hairer，2014年），都是这类发展的例子；它们使得人们能够在适当的情境下定义抽象随机结构的乘积。然而，这些卓越理论在技术性和复杂程度上都颇高，可能会令一些应用领域的读者望而却步。

这项工作的最后一个动机来自应用数学的一个主题：地统计学中的 SPDE方法（Lindgren等人，2011；Carrizo Vergara，2018）。这种方法将空间化数据集视为某个随机偏微分方程（SPDE）解的一次实现，并对其进行分析。我们将开创性论文（Lindgren等人，2011）视为首篇广受欢迎、利用 SPDE 与空间统计技术之间这一联系的论文，并将（Lindgren等人，2022）视为近期对该主题在空间统计学界如何发展的综述。然而，迄今为止，SPDE方法仅应用于纯线性情形：线性随机偏微分方程，以及基于协方差结构的线性统计方法。因此，一项雄心勃勃的研究计划仍有待开展：系统地研究并利用非线性地统计方法与非线性随机偏微分方程之间潜在的联系。遗憾的是，非线性随机偏微分方程理论的现状似乎相当技术化且复杂，而且目前尚不清楚如何以足够一般且简洁的方式，系统地建立这种联系。在此背景下，本文尝试为实现这一目标提出一个初步方案：以协方差和交叉协方差结构——地统计学的基本工具——为基础，以足够一般而简洁的方式构建随机微积分。请注意，任何非线性随机分析的基础，都是定义随机对象之间的乘积（随机积分是其中一个基本例子）。这些乘积涉及非线性 SPDE 的定义及其潜在解的表达。因此，探索随机积分与交叉协方差结构之间的联系，或许能够为建立空间统计技术与非线性随机偏微分方程分析之间的联系开辟道路。

基于上述种种原因，我们认为，采用简单黎曼和来定义随机积分的方法值得投入时间和精力研究。该方法允许以一般的均方连续随机过程作为被积函数、以随机测度作为积分器，并由它们的交叉协方差结构决定此类积分能否定义。

1.2 论文结构

本文结构如下。第 2 节介绍本文所用的基本对象，这些对象依赖于测度论结果；同时介绍本文采用的随机测度概念：一种二阶

随机测度，其协方差可由双维空间上的一个测度确定。第 3 节介绍连续函数-测度核 K 及其相关的全变差核$|K|$。第 3.1 节针对这些核得到了一些关于迭代积分的分析结果，并给出一个富比尼定理；第 3.2 节则研究互协方差核的性质。第 4 节专门定义核 K的自积分。本文证明，某些核的自积分并非唯一确定。本文通过 K 与其自身的交叉张量积引入二阶核这一辅助概念 $K^{(2)}$，并为其定义一种较弱的自积分，称为准自积分。第 5 节是最重要的一节，专门探讨自可积性与唯一确定的随机积分之间的联系。第 5.1 节定义了均方连续过程与有界集上的随机测度之间唯一确定的随机积分。我们证明，此类积分的期望等于被积函数与积分器之间的互协方差核的自积分（因此，自可积性是唯一确定性的必要条件）。第 5.2 节给出主要结果定理 5.1：当被积函数与积分器联合高斯时，随机积分的唯一确定性等价于互协方差核的自可积性及其二阶核的准自可积性。第 5.3 节重点研究子集上的随机可积性与自可积性（这些性质不能直接由我们的定义推出）。结果表明，唯一确定时，自积分与随机积分都是可加函数。定理 5.3 综合了联合高斯情形下的这些结果，并给出随机积分的均值及其协方差公式。第 5.4 节研究自积分和随机积分的势测度结构，并给出使它们能够确定空间上的测度的充分条件。第 6 节专门介绍这些结果的一些应用。第 6.1 节构造联合高斯随机测度的张量积，并给出其均值与协方差结构。第 6.2 节聚焦于赫斯特指数为 $H > \frac{1}{2}$ 的分数布朗运动 B_H：其导数是一个随机测度（Borisov & Bystrov, 2006年），性质足够良好，因此相对于该导数的 B_H 随机积分是唯一确定的。第 6.3 节研究被积函数的导数为无原子的正交随机测度的情形。在这种情形下，相应的随机积分绝不可能唯一确定。对此可以这样理解：即使随机测度的张量积能够唯一确定，相应的二重积分也没有典范解体。最后，本文以总结性的第 7 节收尾。第 7.1 节提出一些受本文论述启发的开放问题。第 7.2 节说明，本文的结果可用于研究更一般随机结构之间更多的乘法与张量积，其方式与随机积分的情形类似。

2 记号与预备知识

我们记 $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, ...\}$。对于拓扑空间 D， $C(D)$ 表示定义在 D上的复连续函数空间，而 $C_c(D)$ 表示紧支撑复连续函数空间。如果 $D \subset \mathbb{R}^d$ 是博雷尔集，我们用 $\mathcal{B}(D)$ 表示 D上博雷尔子集所成的 σ-代数，用 $\mathcal{B}_B(D)$ 表示$\mathcal{B}(D)$ 中由有界集组成的子集族（一般而言，这是一个 δ-环）。我们用 λ 表示勒贝格测度。定义在 D 上的复（博雷尔）可测函数空间记为 $\mathcal{M}(D)$。 $\mathcal{M}_B(D)$ 和 $\mathcal{M}_{B,\ c}(D)$ 分别是 $\mathcal{M}(D)$ 中由有界函数和有界紧支撑函数组成的子空间。$\|\cdot\|_{\infty,\ A}$ 表示集合 A 上的上确界范数（如果上下文清楚，则省略A）。$\mathbb{I}^A$ 是集合 A的示性函数。LDCT指勒贝格控制收敛定理。

关于概率定义，我们始终使用一个固定的概率空间 $(\Omega\ \mathcal{A}, \mathbb{P})$。实随机过程 Z 是由非空集合 $(Z(x))_{x\in D}$ （ D 不一定是时间区间）索引的一组实值随机变量。若对每个 $x \in D$，都有 $Z(x) \in L^2(\Omega\ \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ，则称 Z 为二阶过程，函数 $m_Z(x) = \mathbb{E}(Z(x))$和 $C_Z(x, y) = \mathbb{C}ov(Z(x), Z(y))$分别称为均值函数和协方差函数。若 $D \subset \mathbb{R}^d$，则称随机过程 $(Z(x))_{x\in D}$ 在 D 上均方连续，当且仅当对每个 $x_0 \in D$, $Z(x) \overset{L^2(\Omega\longrightarrow)}{\longrightarrow} Z(x_0)$。已知 Z 是$x\to x_0$均方连续的，当且仅当 $m_Z \in C(D)$ 且 $C_Z \in C(D \times D)$ （Sobczyk，1991，第 21 节）。

2.1 测度论基本概念

我们重点讨论可测空间 $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ 及其子集。

定义 2.1. $D \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ 上的实测度是一个函数 $\mu : \mathcal{B}_B(D) \to \mathbb{R}$ ，它在$\mathcal{B}_B(D)$上满足 σ-可加性。

我们指出， μ 可能未在整个 Borel σ-代数上定义（有些作者会将 μ 称为前测度（Kupka，1978年））。定义 2.1 表明， μ 是局部有限的，因此是 Radon 测度，因为我们讨论的是欧几里得空间。 D 上实测度构成的实向量空间记作$\mathscr{M}(D)$。若 μ 取非负值，则称其为正测度。 μ 的全变差测度是由下式定义的函数 $|\mu| : \mathcal{B}_B(D) \to \mathbb{R}^+$:

$$|\mu|(A) := \sup\left\{\sum_{j\in J} |\mu(I_j)| \;\middle|\; (I_j)_{j\in J} \text{ Borel finite partition of } A\right\}. \tag{2.1}$$

$|\mu|$ 确实是一个测度（Rudin，1987年，第6章），并且它是满足以下条件的最小正测度: $|\mu(A)| \leqslant |\mu|(A)$ 对每个 $A \in \mathcal{B}_B(D)$均成立。若 D 是紧致的，则称数值 $|\mu|(D)$ 为 μ在 D上的全变差范数，它在 $\mathscr{M}(D)$ 上定义了一个范数，使其成为巴拿赫空间。

设 $f \in \mathcal{M}(D)$ 和 $\mu \in \mathscr{M}(D)$。若 $|f|$ 在 D上关于 $|\mu|$ 勒贝格可积，则勒贝格积分 $\int_D f d\mu$ 有定义，例如，可以将 μ 分解为正部和负部来定义（Rudin，1987年，第6章）。在这种情况下，我们用线性泛函记号表示该积分

$$\langle \mu, f \rangle := \int_D f d\mu := \int_D f(x) d\mu(x), \tag{2.2}$$

如果 D 根据上下文已明确。我们将根据上下文的可读性，使用括号记号或积分记号。当然，我们始终有 $|\langle \mu, f \rangle| \leqslant |\mu|(D) \|f\|_{\infty,\ D}$。

我们还可以通过布尔巴基方法（Bourbaki，1965年）研究测度，即利用黎斯表示定理，将测度解释为连续函数对偶空间中的元素。我们将在欧几里得空间上，以无拓扑版本介绍这一性质。

定理 2.1（里斯表示定理）。设 $T:\ \ C_c(\mathbb{R}^d) \to \mathbb{C}$ 为实线性泛函。则以下各条件等价

（i）对于每个 $K \subset \mathbb{R}^d$ 紧致集，都存在 $C_K > 0$ 使得

$$|\langle T, \varphi \rangle| \leqslant C_K \|\varphi\|_{\infty,K}, \quad \forall \varphi \in C_c(\mathbb{R}^d) \textit{ such that } \operatorname{supp}(\varphi) \subset K. \tag{2.3}$$

（ii）存在唯一的 $\mu \in \mathscr{M}(\mathbb{R}^d)$ 使得

$$\langle T, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^d} \varphi d\mu, \quad \forall \varphi \in C_c(\mathbb{R}^d). \tag{2.4}$$

注 2.1。定理 2.1 的一个推论是，如果 $D \subset \mathbb{R}^d$ 是紧致的，并且 $C(D)$ 赋予上确界范数（因而是一个巴拿赫空间），那么 $C'(D) = \mathscr{M}(D)$ 以一种类似于（2.4）的方式成立。此时，$\mathscr{M}(D)$ 上的全变差范数与 $C'(D)$上的算子范数一致。

证明参见（Tao，2022，第1.10节）。在本文中，定理 2.1 主要用于证明某些结构实际上是测度，因为它们可与满足（2.3）的线性泛函相对应。下面的辅助定义将被广泛使用。

定义 2.2. 设 $D \in \mathcal{B}_B(\mathbb{R}^d)$。对于每个 $n \in \mathbb{N}$，我们考虑一个有限指标集 J_n，使得 $|J_n| \nearrow \infty$[3] 是 D 的一个（有限）博雷尔划分，$(I_j^n)_{j \in J_n}$ 满足 $\max_{j \in J_n} \operatorname{diam}(I_j^n) \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$，并取任意标记点 $x_j^n \in I_j^n$。如此构造的序列 $\left((I_j^n)_{j \in J_n} (x_j^n)_{j \in J_n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ 称为 D 的黎曼系统。

[3] $|J|$ 表示指标集 J 的基数。

若 $D \in \mathcal{B}_B(\mathbb{R}^d)$、 $f \in C(\mathbb{R}^d)$ 和 $\mu \in \mathscr{M}(\mathbb{R}^d)$，则勒贝格积分 $\int_D f d\mu$ 可计算为黎曼和的极限

$$\int_D f d\mu = \lim_{n\to\infty} \sum_{j\in J_n} f(x_j^n)\mu(I_j^n), \tag{2.5}$$

其极限与所选用的 D 黎曼系统无关。这种构造积分的方法是本文的主要研究重点。注意，任何子黎曼系统，也就是序列 $\left((I_j^n)_{j\in J_n},(x_j^n)_{j\in J_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ 的任何子序列，同样是一个黎曼系统，且相应的黎曼和应收敛到同一个积分。

2.2 随机测度

文献中可以找到许多不同的随机测度概念。或许最直观的一种，是取值于测度空间的随机变量。围绕这一概念已有大量研究（Horowitz，1986；Kallenberg，2017；Baccelli 等人，2020年）。一种稍弱但同样直观且便于概率论处理的定义，是考虑几乎必然取值于测度空间的随机变量。泊松点过程及其他点过程便属于这种情形。然而，其他类型随机测度的一些重要例子并不满足这些要求。最重要的例子是 $\mathbb{R}^d$ 上的高斯白噪声，其实现几乎必然在有界集上具有无限变差（Dalang 等人，2009年，习题 3.16）。

另一种常用的随机测度概念（Morando，1969年；Rao，2012年）是取值于随机变量的（拓扑）向量空间中的向量测度，例如 $L^p(\Omega\ \mathcal{A},\mathbb{P})$ for$p \in [0,\infty]$。更准确地说，若 $(E,\mathscr{E})$ 是一个可测空间（其中 $\mathscr{E}$为一个 σ-代数或 δ-环），则定义在 E 上的 $L^p(\Omega\ \mathcal{A},\mathbb{P})$-随机测度 M 是一个 σ-可加函数 $M\colon\ \mathscr{E} \to L^p(\Omega\ \mathcal{A},\mathbb{P})$。最常见的情形是$p = 2$，此时 M 也称为二阶随机测度（Thornett，1979；Åberg 与 Podgórski，2011）。定义在 $\mathbb{R}^d$ 上的高斯白噪声属于这一定义。对于二阶随机测度，可以定义由函数 $A \in \mathscr{E} \mapsto \mathbb{E}(M(A))$ 和 $(A,B) \in\mathscr{E} \times \mathscr{E} \mapsto \mathbb{C}ov(M(A), M(B))$分别给出的均值与协方差结构。前者定义了 $(E$上的一个测度，记为 m_M，称为均值测度。后者定义了 $\mathscr{E} \times \mathscr{E}$上的一个双测度，也就是说，当固定 B 时，该结构在 A 上定义一个测度，反之亦然。需要特别指出的是，协方差结构未必能在交叉空间 $(E \times E, \mathscr{E} \otimes \mathscr{E})$上定义测度。也就是说，存在一些二阶随机测度 M，使得不存在 $(E\times E,\mathscr{E}\otimes\mathscr{E})$上的测度 Λ 满足 $\Lambda(A \times B) = \mathbb{C}ov(M(A),M(B))$（Rao，2012年，第 2 章，例 2）。因此，使用二阶随机测度时必须格外谨慎。为避免这些问题，我们将采用以下简化定义。

定义 2.3。在 $D \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ 上的二阶测度协方差随机测度（下文简称随机测度）是一个二阶随机测度 $M\colon \mathcal{B}_B(D) \to L^2(\Omega\ \mathcal{A}, \mathbb{P})$，且存在一个测度 $C_M \in \mathscr{M}(D \times D)$，使得

$$C_M(A \times B) = \mathbb{C}ov(M(A), M(B)), \quad \forall A, B \in \mathcal{B}_B(D). \tag{2.6}$$

定义 2.3 是本文中"随机测度"一词唯一采用的含义。一些作者已经指出，这种关于测度与协方差的假设对不同目的都很方便（Borisov & Bystrov，2006年；Carrizo Vergara，2022）。测度 C_M 称为M的协方差测度。谨慎的读者会发现，在本文中，假设 C_M 是一个测度，将有助于证明大部分结果。

若 $\varphi \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$ 满足

$$\langle |m_M|, |\varphi| \rangle < \infty, \quad \text{and} \quad \langle |C_M|, |\varphi| \otimes |\varphi| \rangle < \infty, \tag{2.7}$$

则随机积分

$$\langle M, \varphi \rangle := \int_{\mathbb{R}^d} \varphi dM \tag{2.8}$$

可以定义。这不过是关于 $L^2(\Omega\ \mathcal{A}, \mathbb{P})$ 值测度 M 的邓福德-施瓦茨积分（Dunford & Schwartz，1958，第 IV.10 节）。若 φ, ϕ 满足（2.7），则（（Borisov & Bystrov，2006年）或（Carrizo Vergara，2018，命题 3.3.1））

$$\mathbb{E}(\langle M, \varphi \rangle) = \langle m_M, \varphi \rangle \quad \text{and} \quad \mathbb{C}ov\left(\langle M, \varphi \rangle \langle M, \phi \rangle\right) = \langle C_M, \varphi \otimes \overline{\phi} \rangle. \tag{2.9}$$

与确定性测度的情形类似，可以通过布尔巴基方法研究随机测度。下面的定理是黎斯表示定理 2.1 的随机版本，也是开展此类研究的基本工具。该定理指出，只需研究随机测度对连续函数的作用，就可以定义随机测度；进而可以通过延拓论证，定义相对于更一般的可测函数的积分。我们将在 $C(D)$ with$D$ 紧致[4] 的情形下陈述该定理。

定理 2.2。设 $D \subset \mathbb{R}^d$ 紧致。设 $M\colon C(D) \to L^2(\Omega\ \mathcal{A}, \mathbb{P})$ 满足以下条件：存在测度 $m_M \in \mathscr{M}(D)$ 和 $C_M \in \mathscr{M}(D \times D)$，使得对于每个 $\varphi, \phi \in C(D)$，式 (2.9) 都成立。那么，存在唯一的随机测度 $\tilde{M}\colon \mathcal{B}(D) \to L^2(\Omega\ \mathcal{A}, \mathbb{P})$，使得

$$\langle M, \varphi \rangle = \int_D \varphi d\tilde{M}, \quad \forall \varphi \in C(D). \tag{2.10}$$

[4]它可以推广到 $C_c(D)$ 的情形，证明只需运用一些简单论证，故略去。

˜显然，定理 2.2 中 M 的均值和协方差测度分别为 m_M 和 C_M。该定理还意味着， M 的定义可以线性且连续地扩展到 $\mathcal{M}_B(D)$（关于上确界范数）。尽管该定理功能强大，但它并非本文的重点，仅作为辅助工具使用。因此，其证明见附录 A。

W我们明确给出两个符合定义 2 意义下的随机测度示例。 3.

示例 2.1. 高斯白噪声 W在 $\mathbb{R}^d$上是一个中心高斯随机过程 $(W(A))_{A\in\mathcal{B}_B(\mathbb{R}^d)}$，满足 $\mathbb{C}ov(W(A)$、$W(B)) = \lambda(A\cap B)$。注意， C_W是与线性泛函$\psi \in C_c(\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d) \mapsto \langle C_W$相关的测度， $\psi\rangle$：$= \int_{\mathbb{R}^d}\psi(x,\ x)dx$。随机积分 $\langle W$、 $\varphi\rangle$实际上可以扩展到 $\varphi \in L^2(\mathbb{R}^d)$，因为在这种情况下有 $\langle C_W$、 $\varphi\otimes\overline{\varphi}\rangle = \int_{\mathbb{R}^d}|\varphi|^2dx < \infty$，因此条件 (2.9) 成立。 ▫

示例 2.2. 考虑 Z 上的均方连续过程 $\mathbb{R}^d$，并令 $\mu \in \mathscr{M}(\mathbb{R}^d)$。然后，可以通过黎曼和（（Soong & TT，1973，定理 4.5.2 ）或（ Carrizo Vergara，2018，3.2.1 ））无歧义地定义映射 $A \in \mathcal{B}_B(\mathbb{R}^d) \mapsto \int_A Z(x)d\mu(x)$。有

$$\mathbb{E}\left(\int_A Z(x)d\mu(x)\right) = \int_A m_Z d\mu \quad ; \quad \mathbb{C}ov\left(\int_A Z(x)d\mu(x), \int_B Z(x)d\mu(x)\right) = \int_{A\times B} C_Z d(\mu\otimes\mu). \tag{2.11}$$

因此， $A \mapsto \int_A Z d\mu$ 的均值与协方差结构由测度决定，所以它是 $\mathbb{R}^d$上的随机测度。 ▫

稍后将讨论的其他例子包括赫斯特指数为 $H > \frac{1}{2}$ 的分数布朗运动（第 6.2 节）以及正交随机测度（第 6.3 节）。

3 函数-测度核

本节研究函数-测度核的基本分析性质及其运算，并初步阐述它们在随机积分中的重要性。我们从主要定义开始。

定义 3.1. 设 K： $\mathbb{R}^d\times\mathcal{B}_B(\mathbb{R}^p)\to\mathbb{R}$ 是一个映射，满足 $K(x$，对所有 $x\in\mathbb{R}^d$均成立，且$K(\cdot$，对所有 $A\in\mathcal{B}_B(\mathbb{R}^p)$均成立。那么， K 称为 $\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^p$上的连续函数-–测度核（以下简称 cf-m 核）。

在本节其余部分， K 均表示 $\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^p$上的 cf-m 核。

K 的全变差核是核 $|K|$： $\mathbb{R}^d\times\mathcal{B}_B(\mathbb{R}^p)\to\mathbb{R}^+$，定义为$|K|(x,\ A)$：$= |K(x,\ \cdot)|(A)$。

$|K|$ 可使用公式 (2.1) 计算。注意，若 $(I_j)_j$ 是 A 的有限划分，则和式$\sum_j |K(\cdot,\ I_j)|$ 定义了一个连续函数。因此，$|K|(\cdot,\ A)$ 是连续函数族的上确界，故为下半连续，进而可测。不过，目前尚不清楚它是否局部有界；我们将在下一节提出并研究这一正则性问题。

3.1 局部有界性与部分积分

定义 3.3. 若 K 满足以下条件，则称其局部有界：

$$\sup_{x\in A} |K|(x,B) < \infty, \quad \forall A \in \mathcal{B}_B(\mathbb{R}^d), B \in \mathcal{B}_B(\mathbb{R}^p). \tag{3.1}$$

在这种情况下，我们定义$\|K\|_{A,\ B,\ \varepsilon} := \sup_{x\in A} |K|(x,B)$。

记号$\|K\|_{A,\ B,\ \varepsilon}$的灵感来自赋范空间张量积的内射范数，但我们不打算对此多作讨论。局部有界性的额外要求使我们在对 K 进行运算时能够获得一些正则性。注意，对每个$\psi \in \mathcal{M}_{B,\ c}(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^p)$ 和每个 x，形如 $\int_{\mathbb{R}^p} \psi(x,y)dK(x,\cdot)(y)$ 的积分都有定义。

命题 3.1. 设 $\psi \in C_c(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^p)$。若 K 局部有界，则函数 $x \mapsto \int_{\mathbb{R}^p} \psi(x,y)dK(x,\cdot)(y)$ 连续且具有紧支撑。

证明：设 $\operatorname{supp}(\psi) \subset D_d \times D_p$，其中 $D_d \subset \mathbb{R}^d$ 和 $D_p \subset \mathbb{R}^p$ 为紧致集。若 $\left((I_j^n)_{j\in J_n}, (y_j^n)_{j\in J_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ 是 D_p 的一个黎曼系统，则我们有连续函数的逐点极限

$$\int_{\mathbb{R}^p} \psi(x,y)dK(x,\cdot)(y) = \lim_{n\to\infty} \sum_{j\in J_n} \psi(x,y_j^n)K(x,I_j^n), \quad \forall x \in \mathbb{R}^d. \tag{3.2}$$

(3.2) 对 $x \notin D_d$ 为零，因此极限具有紧支撑。下面证明该收敛是一致收敛。令$\epsilon > 0$。由于 ψ在 $D_d \times D_p$ 上一致连续，存在 $\delta > 0$，使得若 $|x-u| + |y-v| \leqslant \delta$,$|\psi(x,y) - \psi(u,v)| \leqslant \epsilon \|K\|^{-1}_{D_d,\ D_p,\ \varepsilon}$。如果 n 足够大，使得 $\max_{j\in J_n} \operatorname{diam}(I_j^n) \leqslant \delta$，那么

$$\begin{aligned}
\sup_{x\in D_d} \left| \int_{D_p} \psi(x,y)dK(x,\cdot)(y) - \sum_{j\in J_n} \psi(x,y_j^n)K(x,I_j^n) \right| &= \sup_{x\in D_d} \left| \sum_{j\in J_n} \int_{I_j^n} \left(\psi(x,y) - \psi(x,y_j^n)\right) dK(x,\cdot)(y) \right| \\
&\leqslant \sup_{x\in D_d} \sum_{j\in J_n} \underbrace{\sup_{y\in I_j^n} |\psi(x,y) - \psi(x,y_j^n)|}_{\leqslant \epsilon \|K\|^{-1}_{D_d,D_p,\varepsilon}} |K|(x,I_j^n) \\
&\leqslant \sup_{x\in D_d} \epsilon \|K\|^{-1}_{D_d,D_p,\varepsilon} \underbrace{\sum_{j\in J_n} |K|(x,I_j^n)}_{=|K|(x,D_p)} = \epsilon
\end{aligned} \tag{3.3}$$

Thi这证明了一致收敛，因此极限函数 (3.2) 连续。 ■

当 ψ 与 x 独立时，也有类似的正则性结果。

命题 3.2. 设 $\phi \in \mathcal{M}_{B,\ c}(\mathbb{R}^p)$。若 K 局部有界，则函数 $x \mapsto \int_{\mathbb{R}^p} \phi(y) dK(x,\cdot)(y)$ 连续。

证明：设 $D_p \subset \mathbb{R}^p$ 紧致且 $\mathrm{supp}(\phi) \subset D_p$。由于 ϕ 有界，它可以表示为一列简单函数 $(\phi_n)_n$ 在 D_p 上的一致极限。对于简单函数 ϕ_n，显然 $x \mapsto \int_{\mathbb{R}^p} \phi_n(y) dK(x,\cdot)(y)$ 连续。现在，对每个紧致集 $D \subset \mathbb{R}^d$,

$$\sup_{x\in D} \left| \int_{D_p} \phi(y) - \phi_n(y) dK(x,\cdot)(y) \right| \leqslant \|K\|_{D,D_p,\varepsilon} \|\phi - \phi_n\|_\infty \xrightarrow[n\to\infty]{} 0. \tag{3.4}$$

因此，函数 $x \mapsto \int_{\mathbb{R}^p} \phi(y) dK(x,\cdot)(y)$ 是一列连续函数的紧集上一致极限，故连续。 ■

现在，对任意给定的 $\mu \in \mathscr{M}(\mathbb{R}^d)$，考虑迭代积分

$$\int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^p} \psi(x,y) dK(x,\cdot)(y) d\mu(x), \tag{3.5}$$

它有定义，适用于 r $\psi \in C_c(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^p)$。这便从 $C_c(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^p)$ 到 $\mathbb{C}$ 诱导出一个实线性泛函 .

命题 3.3。设 $\mu \in \mathscr{M}(\mathbb{R}^d)$。若 K 局部有界，则存在唯一的 $\tilde{K}_\mu \in \mathscr{M}(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^p)$，使得

$$\int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^p} \psi(x,y) dK(x,\cdot)(y) d\mu(x) = \langle \tilde{K}_\mu, \psi \rangle, \quad \forall \psi \in C_c(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^p). \tag{3.6}$$

证明：若 $\mathrm{supp}(\psi) \subset D_d \times D_p \subset \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^p$、$D_d$ 和 D_p 均为紧致集，则

$$\left| \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^p} \psi(x,y) dK(x,\cdot)(y) d\mu(x) \right| \leqslant |\mu|(D_d) \|K\|_{D_d,D_p,\varepsilon} \|\psi\|_\infty. \tag{3.7}$$

˜ 根据黎斯表示定理 2.1，存在唯一的测度 K_μ，它对应于线性泛函 $\psi \mapsto \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^p} \psi(x、y) dK(x、\cdot)(y) d\mu(x)$。 ■

由此可知，利用测度 K_μ，迭代积分 (3.5) 可唯一地扩展到 $\mathcal{M}_{B,\ c}(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^p)^{\tilde{}}$ 中的任意函数，因此

$$\int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^p} \psi(x,y) dK(x,\cdot)(y) d\mu(x) = \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^p} \psi(x,y) d\tilde{K}_\mu(x,y), \quad \forall \psi \in \mathcal{M}_{B,c}(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^p). \tag{3.8}$$

注意，对于固定的 $\psi \in \mathcal{M}_{B,c}(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^p)$，函数 $x \mapsto \int_{\mathbb{R}^p} \psi(x,y) dK(x,\cdot)(y)$ 紧支撑且有界于 $\|\psi\|_\infty \|K\|_{D_d,D_p,\varepsilon}$，它不过是测度 $A \in \mathcal{B}_B(\mathbb{R}^d) \mapsto \int_{A\times\mathbb{R}^p} \psi(x,y) d\tilde{K}_\mu(x,y)$ 相对于 μ 的拉东-尼科迪姆导数。因此它属于 $\mathcal{M}_{B,c}(\mathbb{R}^d)$。

现在我们来研究“另一种意义下”的迭代积分：先对 $\mathbb{R}^d$ 积分，再对 $\mathbb{R}^p$ 积分。这意味着要为积分赋予意义

$$\text{“}\int_{\mathbb{R}^p} d\left(\int_{\mathbb{R}^d}\psi(x,\cdot)K(x,\cdot)d\mu(x)\right)(y)\text{”}. \tag{3.9}$$

对于一般的 ψ，这种记法到现在还没有进一步的意义。注意，ψ 的第二分量充当对 $\mathbb{R}^p$ 积分的测度的一部分。赋予它意义的一种方法是使用 ˜测度解体 K_μ，并采用与 (3.8) 相反的顺序。我们不采用这种方法，而是从 ψ 的简单情形出发，直接按新的顺序构造迭代积分，然后逐步推广。令 $\varphi\in\mathcal{M}_{B,\ c}(\mathbb{R}^d)$ 且 $\mu\in\mathscr{M}(\mathbb{R}^d)$。我们考虑对象

$$\text{“}\int_{\mathbb{R}^d}\varphi(x)K(x,\cdot)d\mu(x)\text{”}. \tag{3.10}$$

直观上，这个积分应当定义一个关于 $\mathbb{R}^p$ 的测度。事实上，映射 $A\in\mathcal{B}_B(\mathbb{R}^p)\mapsto\int_{\mathbb{R}^d}\varphi(x)K(x,A)d\mu(x)$ 显然定义良好且具有可加性。

命题 3.4. 若 K 局部有界，则 $A\mapsto\int_{\mathbb{R}^d}\varphi(x)K(x,A)d\mu(x)$ 在 $\mathbb{R}^p$ 上定义一个测度。

证明：我们需要证明 σ-可加性。考虑 $\mathbb{R}^p$ 的一列有界博雷尔集 $(D_n)_{n\in\mathbb{N}}$，其中 $D_n\searrow\varnothing$。设函数 $f_n:=K(\cdot,D_n)$。$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 逐点收敛到 0，且由 $x\mapsto|K|(x,D_0)$ 控制；由于 K 局部有界，该函数也是局部有界的。由勒贝格控制收敛定理可得

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^d}K(x,D_n)\varphi(x)d\mu(x)=\int_{\mathrm{supp}(\varphi)}\lim_{n\to\infty}f_n(x)\varphi(x)d\mu(x)=0. \tag{3.11}$$

这证明了 $\sigma-A\mapsto\int_{\mathbb{R}^d}\varphi(x)K(x,A)d\mu(x)$ 的可加性。 ■

由于 (3.10) 是一个测度，迭代积分

$$\int_{\mathbb{R}^p}\phi(y)d\left(\int_{\mathbb{R}^d}K(x,\cdot)\varphi(x)d\mu(x)\right)(y),\quad \varphi\in\mathcal{M}_{B,c}(\mathbb{R}^d),\phi\in\mathcal{M}_{B,c}(\mathbb{R}^p) \tag{3.12}$$

有意义。由线性，我们可以为张量积空间 $\psi\ \mathcal{M}_{B,\ c}(\mathbb{R}^d)\otimes\mathcal{M}_{B,\ c}(\mathbb{R}^p)$中的每个元素赋予 (3.9) 一个含义。现在，我们要问，这样的迭代积分是否与迭代积分 (3.5) 一致。我们从连续情形开始。

命题 3 .5. 设 $\mu\in\mathscr{M}(\mathbb{R}^d)$、$\varphi\in C_c(\mathbb{R}^d)$ 和 $\phi\in C_c(\mathbb{R}^p)$。若 K 局部有界，则

$$\int_{\mathbb{R}^d}\varphi(x)\int_{\mathbb{R}^p}\phi(y)dK(x,\cdot)(y)d\mu(x)=\int_{\mathbb{R}^p}\phi(y)d\left(\int_{\mathbb{R}^d}K(x,\cdot)\varphi(x)d\mu(x)\right)(y). \tag{3.13}$$

证明：设 D_d、D_p 紧致，且 $\mathrm{supp}(\varphi) \subset D_d$ 和 $\mathrm{supp}(\phi) \subset D_p$。设 $\left((I_j^n)_{j\in J_n}、(y_j^n)_{j\in J_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ 是 D_p 的一个黎曼系统。由于 $\sum_{j\in J_n}\phi(y_j^n)K(x、I_j^n) \to \int_{K_p}\phi(y)dK(x、\cdot)(y)$ 的收敛在 $x \in D_d$ 上是一致的（命题 3.1 的证明），我们可以交换积分与极限符号：

$$\begin{aligned}\int_{D_p}\phi(y)d\left(\int_{D_d}\varphi(x)K(x,\cdot)d\mu(x)\right)(y) &= \lim_{n\to\infty}\sum_{j\in J_n}\phi(y_j^n)\int_{D_d}\varphi(x)K(x,I_j^n)d\mu(x)\\ &= \int_{D_d}\varphi(x)\lim_{n\to\infty}\sum_{j\in J_n}\phi(y_j^n)K(x,I_j^n)d\mu(x) \qquad (3.14)\\ &= \int_{D_d}\varphi(x)\int_{D_p}\phi(y)dK(x,\cdot)(y)d\mu(x). \quad \blacksquare\end{aligned}$$

由线性性，对所有 $\psi \in C_c(\mathbb{R}^d)\otimes C_c(\mathbb{R}^p)$，我们有

$$\int_{\mathbb{R}^p} d\left(\int_{\mathbb{R}^d}\psi(x,\cdot)K(x,\cdot)d\mu(x)\right)(y) = \int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^p}\psi(x,y)dK(x,\cdot)(y)d\mu(x) = \langle\tilde{K}_\mu,\psi\rangle. \qquad (3.15)$$

但由于 $\tilde{K}_\mu$ 是一个测度，其定义可以利用 $C_c(\mathbb{R}^d)\otimes C_c(\mathbb{R}^p)$ 在 $C_c(\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^p)$（赋予紧集上一致拓扑）中的稠密性，唯一地扩展到任意 $\psi \in C_c(\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^p)$。因此，将 (3.15) 中的三个积分扩展到任意 $\psi \in \mathcal{M}_{B,\,c}(\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^p)$ 都有唯一确定的含义，而且它们必定相等，从而为积分 (3.9) 提供了完整且严谨的定义。由此得到以下定理。

定理 3.1（富比尼）。若 K 是局部有界的，则对每个 $\psi \in \mathcal{M}_{B,\,c}(\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^p)$ 迭代积分 (3.9) 都有定义，且等式 (3.15) 成立。

正如我们将在第 4 节中看到的，我们在 (3.9) 中定义的积分，是本工作中所用自积分的第一个非平凡例子。

3.2 交叉正定核

本工作中我们使用的定义在 $\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^p$ 上最重要的一类 cf-m 核，是如下类型的核

$$K_{Z,M}(x,A) := \mathbb{C}ov(Z(x),M(A)), \qquad (3.16)$$

Z 是定义在 $\mathbb{R}^d$ 上的均方连续随机过程，而 M 是定义在 $\mathbb{R}^p$ 上的随机测度。事实上，$K_{Z,\,M}$ 确实是一个 cf-m 核，这可由 Z 的连续性以及 M 的 σ-可加性推出。核 $K_{Z,\,M}$ 称为 Z 与 M 之间的交叉协方差核。我们将看到，这类核具有特殊的额外正则性。

我们回顾一下，协方差函数 C_Z 和协方差测度 C_M 必须具有正定性。具体而言，C_Z 满足：若 $(x_1,...,x_n) \in (\mathbb{R}^d)^n$ 且若 $(\alpha_1,...,\alpha_n) \in \mathbb{C}^n$，则

$\sum_{j,\ k=1}^{n} \alpha_j C_Z(x_j, x_k)\overline{\alpha_k} \geqslant 0$.类似地， C_M满足：若 $(E_1, ..., E_n) \in (\mathcal{B}_B(\mathbb{R}^p))^n$且若 $(\alpha_1, ..., \alpha_n) \in \mathbb{C}^n$，则 $\sum_{j,\ k=1}^{n} \alpha_j C_M(E_j \times E_k)\overline{\alpha_k} \geqslant 0$。 C_Z和 C_M分别大致描述了 Z和M的统计性质，而 $K_{Z,\ M}$则也大致描述了它们之间的依赖交互。基于此，我们给出交叉正性的以下定义和判据。

定义 3.4. 若存在协方差函数 $C_Z \in C(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)$ 和协方差测度 $C_M \in \mathscr{M}(\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p)$，使得 K 满足下式，则称 K 为交叉正定核（简称交叉正定核），或称其为交叉协方差核

$$\left| \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} \alpha_j \beta_k K(x_j, E_k) \right| \leqslant \frac{1}{2} \left[\sum_{i,j=1}^{n} \alpha_j C_Z(x_i, x_j)\overline{\alpha_k} + \sum_{k,l=1}^{m} \beta_k C_M(E_k \times E_l)\overline{\beta_l} \right]. \tag{3.17}$$

对于任意 n、 $m \geqslant 1$、 $(\alpha_1$、 ...、 α_n、 β_1、 ...、 $\beta_m) \in \mathbb{C}^{n+m}$、 $(x_1$、 ...、 $x_n) \in (\mathbb{R}^d)^n$ 以及 $(E_1$、 ...、 $E_m) \in \mathcal{B}_B(\mathbb{R}^p)^m$，均成立。

命题 3.6. K 是交叉正定的，当且仅当对于定义在 $\mathbb{R}^d$ 上的均方连续过程 Z 和定义在 $\mathbb{R}^p$ 上的随机测度 M，有 $K(x$、 $A) = \mathbb{C}ov(Z(x)$、 $M(A))$。

证明：对于充分性，条件 (3.17) 实际上等价于随机向量 $(Z(x_1)$、 ...、 $Z(x_n)$、 $M(E_1)$、 ...、 $M(E_m))$ 的协方差矩阵为半正定。对于必要性，可以使用经典的柯尔莫哥洛夫存在定理构造一个概率空间，使得 Z 和 M 是定义良好的联合高斯过程，其协方差分别为 C_Z 和 C_M，交叉协方差为 K。条件 (3.17) 保证在构造有限维高斯随机向量的协方差矩阵时满足柯尔莫哥洛夫相容条件。细节留给读者。 ■

由此得到的第一个显而易见的推论（证明略）如下。

命题 3.7（柯西-施瓦茨不等式）。若 K 是交叉正定的，且 C_Z、 C_M 如定义 3.4 所述，则

$$\left| \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} \alpha_j \beta_k K(x_j, E_k) \right| \leqslant \sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} \alpha_j C_Z(x_i, x_j)\overline{\alpha_k}} \sqrt{\sum_{k,l=1}^{m} \beta_k C_M(E_k \times E_l)\overline{\beta_l}}, \tag{3.18}$$

对任意 n、 $m \geqslant 1$、 $(\alpha_1$、 ...、 α_n、 β_1、 ...、 $\beta_m) \in \mathbb{C}^{n+m}$、 $(x_1$、 ...、 $x_n) \in (\mathbb{R}^d)^n$ 和 $(E_1$、 ...、 $E_m) \in \mathcal{B}_B(\mathbb{R}^p)^m$，均有。

关于交叉正定核的第一个真正重要的结果如下。

定理 3.2。若 K 是交叉正定的，则它是局部有界的。

证明：令 $A \in \mathcal{B}_B(\mathbb{R}^p)$ 和 $D \in \mathcal{B}_B(\mathbb{R}^d)$。那么，根据定义

$$\sup_{x \in D} |K|(x, A) = \sup_{x \in D} \sup_{(E_j)_j \in \mathscr{P}_F(A)} \sum_j |K(x, E_j)|, \tag{3.19}$$

其中 $\mathscr{P}_F(A)$ 表示 A的所有有限博雷尔分割的集合。对于任意 $x \in D$ 和任意 $(E_j)_j \in \mathscr{P}_F(A)$, 我们令 $\alpha_{x,\ j} := \operatorname{sgn}(K(x, E_j))$。这些系数满足，因此 $|\alpha_{x,\ j}| = 1$ 且 $|K(x, E_j)| = \alpha_{x,\ j} K(x, E_j)$。由柯西-施瓦茨不等式 (3.18)，我们得到

$$\begin{aligned}
\sup_{x\in D} |K|(x, A) &= \sup_{x\in D} \sup_{(E_j)_j \in \mathscr{P}_F(A)} \left| \sum_j \alpha_{j,x} K(x, E_j) \right| \\
&\leqslant \sup_{x\in D} \sup_{(E_j)_j \in \mathscr{P}_F(A)} \sqrt{C_Z(x,x)} \sqrt{\sum_{j,k} \alpha_{j,x} C_M(E_j \times E_k) \alpha_{k,x}} \\
&\leqslant \sup_{x\in D} \sqrt{C_Z(x,x)} \sup_{(E_j)_j \in \mathscr{P}_F(A)} \sqrt{\sum_{j,k} |C_M|(E_j \times E_k)} \\
&\leqslant \sup_{x\in D} \sqrt{C_Z(x,x)} \sqrt{|C_M|(A \times A)} < \infty,
\end{aligned} \tag{3.20}$$

其中我们用到了 C_Z 是连续的，且 C_M 是测度。 ■

因此，第 3.1 节得到的结果适用于交叉正定核。这种情况下也有新的惊喜。如上所述，一般来说，尚不清楚函数 $|K|(\cdot, A)$ 是否连续。事实证明，对于交叉正定核，甚至具有更强的正则性。为介绍这一性质，我们将引入以下辅助定义。

定义 3.5。我们将 K 的增量核定义为 $(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d) \times \mathbb{R}^p$ 上的核 K_I，其定义为$K_I((x, y), A) := K(x, A) - K(y, A)$。

如果 K 是交叉正定的，那么 K_I 也交叉正定。这是因为如果 K 是 Z 与 M之间的交叉协方差核，那么 K_I 就是增量过程之间的交叉协方差核

$$I_Z(x, y) := Z(x) - Z(y) \tag{3.21}$$

以及 M。在交叉协方差情形下，我们将用记号 $K_{I_{Z,M}}$ 表示 $K_{Z,M}$ 的增量核。注意， I_Z 的协方差函数由下式给出

$$C_{I_Z}((x, y), (u, v)) := C_Z(x, u) - C_Z(x, v) - C_Z(y, u) + C_Z(y, v), \tag{3.22}$$

它在 $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ 上连续，因此 I_Z 均方连续。

定理 3.3。设 $D \subset \mathbb{R}^d$ 紧致且 $A \in \mathcal{B}_B(\mathbb{R}^p)$。若 K 交叉正定，则对每个 $\epsilon > 0$，存在 $\delta > 0$ 使得

$$\sup_{\substack{x,y\in D \\ |x-y|\leqslant\delta}} \sup_{B\in\mathcal{B}(A)} |K(x, \cdot) - K(y, \cdot)|(B) \leqslant \epsilon. \tag{3.23}$$

特别地，函数族 $\{|K|(\cdot, B) \,\big|\, B \in \mathcal{B}(A)\}$ 在 D上一致等度连续。

证明：令 $\epsilon > 0$。注意到 $K = K_{Z,\ M}$。由于增量核 $K_{I_Z,\ M}$ 是交叉正定的，我们可以使用柯西-施瓦茨不等式 (3.18)。若 $B \in \mathcal{B}(A)$，则

$$\begin{aligned}\sup_{x,y\in D} |K_{I_Z,M}((x,y),\cdot)|(B) &\leqslant \sup_{x,y\in D} \sqrt{C_{I_Z}((x,y),(x,y))}\sqrt{|C_M|(B\times B)} \\ &\leqslant \sup_{x,y\in D} \sqrt{C_{I_Z}((x,y),(x,y))}\sqrt{|C_M|(A\times A)}.\end{aligned} \tag{3.24}$$

由于 C_{I_Z} 连续且 D 紧致，我们可以利用 C_{I_Z} 在 $D\times D\times D\times D$ 上的一致连续性，并取 $\delta > 0$，使得若 $|x-y| \leqslant \delta$，则 $C_{I_Z}((x,y),(x,y)) \leqslant \epsilon^2 \frac{1}{|C_M|(A\times A)}$。于是，不等式 (3.23) 立即由 (3.24) 得出。族 $\{|K|(\cdot,B) \mid B \in \mathcal{B}(A)\}$的一致等度连续性来自$||K_{Z,\ M}|(x,B) - |K_{Z,\ M}|(y,B)| \leqslant |K_{Z,\ M}(x,\cdot) - K_{Z,\ M}(y,\cdot)|(B)$，这只是在 B 上的全变差范数中应用三角不等式的结果。 ■

最后，我们考察第 3.1 节中研究的迭代积分，以及在交叉正定核的情形下，它们与 Z 和 M 的关系。

命题 3.8. 设 $K_{Z,M}$ 是 Z 与 M 之间的交叉协方差核。那么，对于每个 $\mu \in \mathscr{M}(\mathbb{R}^d)$、$\varphi \in \mathcal{M}_{B,\ c}(\mathbb{R}^d)$ 和 $\phi \in \mathcal{M}_{B,c}(\mathbb{R}^p)$，有

$$\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^p} \varphi(x)\overline{\phi}(y)dK_{Z,M}(x,\cdot)(y)d\mu(x) = \mathbb{C}ov\left(\int_{\mathbb{R}^d} Z(x)\varphi(x)d\mu(x), \int_{\mathbb{R}^p}\phi(y)dM(y)\right). \tag{3.25}$$

证明：先考虑 $\phi = \mathbb{I}^A$, $A \in \mathcal{B}_B(\mathbb{R}^p)$ 的情形。设 $\left((I_j^n)_{j\in J_n},(x_j^n)_{j\in J_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ 是 $\mathrm{supp}(\varphi)$ 的一个黎曼系统。那么，

$$\begin{aligned}\mathbb{C}ov\left(\int_{\mathbb{R}^d}\varphi(x)Z(x)d\mu(x), M(A)\right) &= \lim_{n\to\infty}\mathbb{C}ov\left(\sum_{j\in J_n} Z(x_j^n)\int_{I_j^n}\varphi d\mu\ ,\ M(A)\right) \\ &= \lim_{n\to\infty}\sum_{j\in J_n} K_{Z,M}(x_j^n,A)\int_{I_j^n}\varphi d\mu \\ &= \int_{\mathbb{R}^d}\varphi(x)K_{Z,M}(x,A)d\mu(x).\end{aligned} \tag{3.26}$$

对于一般的 $\phi \in \mathcal{M}_{B,\ c}(\mathbb{R}^p)$，我们使用一列$(\phi_n)_n \subset \mathcal{M}_{B,\ c}(\mathbb{R}^p)$ 一致收敛于 g

ϕ的简单函数列，记作 $\phi_n = \sum_{j\in\tilde{J}_n} a_j^n \mathbb{1}_{A_j^n}$。
于是，

$$\begin{aligned}
\mathbb{C}ov\left(\int_{\mathbb{R}^d} Z(x)\varphi(x)d\mu(x), \int_{\mathbb{R}^p}\phi(y)dM(y)\right) &= \lim_{n\to\infty}\mathbb{C}ov\left(\int_{\mathbb{R}^d} Z(x)\varphi(x)d\mu(x), \sum_{j\in\tilde{J}_n} a_j^n M(A_j^n)\right)\\
&= \lim_{n\to\infty}\sum_{j\in\tilde{J}_n}\overline{a_j^n}\int_{\mathbb{R}^d} K_{Z,M}(x,A_j^n)\varphi(x)d\mu(x)\\
&= \lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^p}\overline{\phi_n}(y)d\left(\int_{\mathbb{R}^d}\varphi(x)K_{Z,M}(x,\cdot)d\mu(x)\right)(y)\\
&= \int_{\mathbb{R}^p}\overline{\phi}(y)d\left(\int_{\mathbb{R}^d}\varphi(x)K_{Z,M}(x,\cdot)d\mu(x)\right)(y).
\end{aligned} \tag{3.27}$$

最终结　　果来自富比尼定理 (3.1)。请注意，我们使用了测度 (3.10)。 ■

4 自积分

本节主要致力于引入新的概念。我们考虑一个作用于$\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ 上的 cf-m 核 K （两个分量位于同一空间）。在这种情况下，我们将简单地说， K 是定义在 $\mathbb{R}^d$上的 cf-m 核。令 $D \in \mathcal{B}_B(\mathbb{R}^d)$。我们希望在 D上对 K 关于其自身进行积分，即对其第一分量关于第二分量积分。若该数定义良好，则记为

$$\text{“}\int_D K(x,dx)\text{”}. \tag{4.1}$$

这种特殊想法能够成立的一个简单例子如下：考虑形如 $K(x$的 K ， $A) = f(x)\mu(A)$，其中 $f \in C(\mathbb{R}^d)$ 且 $\mu \in \mathscr{M}(\mathbb{R}^d)$。在这种情况下，我们只需作

$$\int_D K(x,dx) := \int_D f d\mu. \tag{4.2}$$

若 K 是这种形式的核$K = \sum_j f_j \otimes \mu_j$的有限线性组合，即 $C(D)\otimes\mathscr{M}(D)$的元素，也可以应用同样的想法；对于这些核，自积分可以明确无歧义地定义为

$$\int_D K(x,dx) := \sum_j \int_D f_j d\mu_j. \tag{4.3}$$

分析学家或许会本能地尝试将定义扩展到带有适当拓扑的空间 $C(D)\otimes\mathscr{M}(D)$的完备化。我们将在一篇即将发表的论文中探讨这种方法。目前，我们将使用

黎曼和来尝试定义自积分。令 $\left((I_j^n)_{j\in J_n},(x_j^n)_{j\in J_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ 为 D的黎曼系统。基于黎曼–斯蒂尔切斯积分的定义，我们要问极限是否

$$\int_D K(x,dx) := \lim_{n\to\infty}\sum_{j\in J_n} K(x_j^n, I_j^n), \tag{4.4}$$

存在，并且它是否独立于黎曼系统。许多人都知道一个事实，但可能未曾以这种方式表述过：这样的极限并非总是定义良好的。

命题 4.1. 存在一些交叉正定核，使得自积分 (4.4) 并非唯一确定。

证明：我们以布朗运动 $d=1$ (Brownian motion)[5] 中白噪声与其原函数之间的交叉协方差核为反例。考虑 $D=[0、\ 1)$ 和核 $K(x、\ A)=\lambda(A\cap[0、\ x])$。那么，若我们将 $[0、\ 1)$ 分割为由 n 个等长区间 $I_j^n=[\frac{j-1}{n}、\ \frac{j}{n})、\ j\in J_n=\{1、...、\ n\}$ 组成的分割，并将区间左端点作为标记点，就得到

$$\int_{[0,1)} K(x,dx) = \lim_{n\to\infty}\sum_{j\in J_n}\lambda\left([\frac{j-1}{n},\frac{j}{n})\cap[0,\frac{j-1}{n}]\right)=0. \tag{4.5}$$

但如果我们将中点作为标记点，就得到

$$\int_{[0,1)} K(x,dx) = \lim_{n\to\infty}\sum_{j\in J_n}\lambda\left([\frac{j-1}{n},\frac{j}{n})\cap[0,\frac{2j-1}{2n}]\right)=\lim_{n\to\infty}\sum_{j\in J_n}\lambda\left([\frac{j-1}{n},\frac{2j-1}{2n}]\right)=\frac{1}{2}. \tag{4.6}$$

因此，极限取决于所采用的黎曼系统。 ■

前面的结果引出了下一个定义。

定义 4.1。 K 称为在 D 上自可积，如果存在唯一的 $\ell_D\in\mathbb{R}$，使得对于 D的每个黎曼系统，例如 $\left((I_j^n)_{j\in J_n}、(x_j^n)_{j\in J_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$，都有

$$\ell_D = \lim_{n\to\infty}\sum_{j\in J_n} K(x_j^n, I_j^n). \tag{4.7}$$

在这种情况下，ℓ_D 称为 K 在 D上的自积分，记作

$$\int_D K(x,dx) := \ell_D. \tag{4.8}$$

关于这一概念可以提出许多问题，但我们只会在最后的第 7.1 节提及其中一些，因为本文将聚焦于这一概念在随机积分中的应用。为了与命题 4.1 中非自可积的情形形成对比，我们给出以下一个定义良好的自积分的非平凡例子。

[5]这就是 Itô 积分与斯特拉托诺维奇积分之间的经典区别

例 4.1。考虑这个记号古怪的积分 (3.9)，我们通过˜使用命题 3.3 中得到的测度 K_μ 为它赋予了严格的含义。我们将说明它可以被视为一个自积分。考虑 $\psi \in C_c(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^p)$ 满足 supp $(\psi) \subset D_d \times D_p$ 的情形。于是，我们可以考虑如下核$K_{\psi,\ \mu}\colon\ \mathbb{R}^p \times \mathcal{B}_B(\mathbb{R}^p) \to \mathbb{R}$

$$K_{\psi,\mu}(y, A) = \int_{\mathbb{R}^d} \psi(x, y)K(x, A)d\mu(x), \tag{4.9}$$

若 K 局部有界，则它是一个 cf-m 核。注意，$K_{\psi,\ \mu} = 0$ 对 $x \notin D_p$成立。我们声称，$K_{\psi,\ \mu}$ 在 D_p上自可积，且有

$$\int_{D_p} K_{\psi,\mu}(y, dy) = \int_{\mathbb{R}^p} d\left(\int_{\mathbb{R}^d} \psi(x, \cdot)K(x, \cdot)d\mu(x)\right). \tag{4.10}$$

事实上，若 $\left((I_j^n)_{j\in J_n},(y_j^n)_{j\in J_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$是 D_p的任意黎曼系统，则

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \sum_{j\in J_n} K_{\psi,\mu}(y_j^n, I_j^n) &= \lim_{n\to\infty} \sum_{j\in J_n} \int_{\mathbb{R}^d} \psi(x, y_j^n)K(x, I_j^n)d\mu(x)\\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \lim_{n\to\infty} \sum_{j\in J_n} \psi(x, y_j^n)K(x, I_j^n)d\mu(x)\\ &= \int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^p} \psi(x, y)dK(x, \cdot)(y)d\mu(x) = \int_{\mathbb{R}^p} d\left(\int_{\mathbb{R}^d} \psi(x, \cdot)K(x, \cdot)d\mu(x)\right),\end{aligned} \tag{4.11}$$

这里用到了 LCDT 和 Fubini 定理 3.1。黎曼系统 D_p 是任意的，因此核 $K_{\psi,\ \mu}$ 在 D_p 上自可积，且其自积分与迭代积分 (3.9) 一致。 □

现在我们将引入一个辅助概念，它在后续发展中发挥着重要作用。

定义 4.2。设 K 是 $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^p$上的一个 cf-m 核。二阶核 $K^{(2)}$ 定义为 $(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d) \times (\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p)$ 上的核，由 $K^{(2)}((x, y), E) := (K(y, \cdot) \otimes K(x, \cdot))(E)$给出。

二阶核是一类交叉张量积测度（注意定义 4.2 中的顺序是 (y, x) ，而不是 (x, y) ）。显然，它作为函数测度核是定义良好的，但一般而言它是否关于 (x, y) 连续尚不明确。我们稍后将看到，对于交叉正定核，这一点成立；而这正是接下来几节我们要关注的情形。现在，我们先给出下一个定义。

定义 4.3. 假设 K 使得 $K^{(2)}$ 是一个 cf-m 核。令 $A, B \in \mathcal{B}_B(\mathbb{R}^d)$。我们称 $K^{(2)}$在 $A \times B$ 上准自可积，如果存在 $\ell_{A,B} \in \mathbb{R}$ ，使得对于 A, $\left((A_j^n)_{j\in J_n^A}, (a_j^n)_{j\in J_n^A}\right)_{n\in\mathbb{N}}$的每个黎曼系统，以及 B, $\left((B_j^n)_{j\in J_n^B},(b_j^n)_{j\in J_n^B}\right)_{n\in\mathbb{N}}$的每个黎曼系统，以下双重极限成立

$$\lim_{(n,m)\to\infty} \sum_{j\in J_n} \sum_{k\in J_m^B} K^{(2)}((a_j^n, b_k^m), A_j^n \times B_k^m) = \ell_{A,B}. \tag{4.12}$$

在此 在每种情况下，我们称 $\ell_{A,B}$ 为 $K^{(2)}$ 在 $A \times B$上的准自积分，并记为 *it*

$$\tilde{\int}_{A\times B} K^{(2)}(x, dx) := \ell_{A,B}. \tag{4.13}$$

定义 4.3 弱于 $K^{(2)}$ 的适当自积分定义，因为它只考虑黎曼系统的一个特定类别：由乘积 $A_j^n \times B_k^m$ 构造的分割。此外，定义 4.3 只考虑对形如 $A \times B$ 的集合进行积分，而非 $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ 的一般有界博雷尔集。因此，若 $K^{(2)}$ 在 $E \in \mathcal{B}_B(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^p)$ 上自可积，且满足 $E = A \times B$，则它在 E 上准自可积。在这种情况下，准自积分与自积分相同。准自可积性是否意味着自可积性，目前尚不清楚。

5 自可积性与随机积分

本节将说明，自可积性的概念在随机积分的定义中起着核心作用。本节始终设 Z 是 $\mathbb{R}^d$ 上的中心化均方连续随机过程， M 是 $\mathbb{R}^d$ 上的中心化随机测度，并且 $D \in \mathcal{B}_B(\mathbb{R}^d)$。

5.1 一种初步方法

首先要问的一个简单问题是，我们能否定义随机积分

$$\text{“}\int_D Z(x)dM(x)\text{”}. \tag{5.1}$$

与确定性情形类似，我们研究随机变量的极限 s

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{j\in J_n} Z(x_j^n)M(I_j^n), \tag{5.2}$$

其中 $\left((I_j^n)_{j\in J_n}, (x_j^n)_{j\in J_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ 是 D 的黎曼系统。因此，我们引入以下定义。

定义5.1. 如果对于给定的 $p \in [1, \infty]$ ， 极限(5.2)以 $L^p(\Omega\ \mathcal{A}, \mathbb{P})$ 的意义存在，且不依赖于所使用的 D 的黎曼系统，则称 Z 关于 M 在 D 上的随机积分是唯一确定的。在这种情况下，我们记作

$$\int_D ZdM := \int_D Z(x)dM(x) := \lim_{n\to\infty} \sum_{j\in J_n} Z(x_j^n)M(I_j^n). \tag{5.3}$$

在本文中，我们将使用 $p = 1$ 或 $p = 2$。注意，(5.2)中的随机变量始终属于$L^1(\Omega\ \mathcal{A}, \mathbb{P})$，因此讨论它们是否以 $L^1(\Omega\ \mathcal{A}, \mathbb{P})$ 的意义收敛是有意义的。不过，在某些情况下，以 $L^2(\Omega\ \mathcal{A}, \mathbb{P})$ 的意义收敛更容易分析（当然，这种收敛蕴含$L^1(\Omega\ \mathcal{A}, \mathbb{P})$ 意义下的收敛）。我们将始终明确说明所讨论的收敛意义。

第一个链接 b 由下一个命题给出 n.

命题 5.1. 若对于任意 $p \in [1, \infty]$，$\int_D ZdM$ 在 $L^p(\Omega\ \mathcal{A}, \mathbb{P})$ 意义下有唯一确定的定义，则交叉协方差核 $K_{Z,\ M}$ 在 D 上自可积。

证明：若极限 (5.2) 在 $L^p(\Omega\ \mathcal{A}, \mathbb{P})$ 中收敛到某个随机变量，则其期望也收敛到某个实数极限 $\ell \in \mathbb{R}$。因此

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left(\sum_{j\in J_n} Z(x_j^n)M(I_j^n)\right) = \lim_{n\to\infty} \sum_{j\in J_n} K_{Z,M}(x_j^n, I_j^n) = \ell. \tag{5.4}$$

由于这对 D, $K_{Z,\ M}$ 的每个黎曼系统都成立，$_M$ 必须在 D 上自可积。 ■

上一个命题不仅告诉我们，为了唯一地定义随机积分，我们需要 $K_{Z,\ M}$ 的自可积性；它还给出了期望公式

$$\mathbb{E}\left(\int_D ZdM\right) = \int_D K_{Z,M}(x, dx). \tag{5.5}$$

在一些简单情形下，随机积分是唯一确定的，因此相应的交叉协方差核是自可积的。我们列举三个重要的例子，供后文使用。

例 5.1. 设 Z 和 M 相互独立。我们来证明黎曼和 (5.2) 在 $L^2(\Omega\ \mathcal{A}, \mathbb{P})$中构成一个柯西序列。利用 M的测度结构，我们将柯西差写为

$$\sum_{j\in J_n} Z(x_j^n)M(I_j^n) - \sum_{k\in J_m} Z(x_k^m)M(I_k^m) = \sum_{j\in J_n}\sum_{k\in J_m} (Z(x_j^n) - Z(x_k^m))M(I_j^n \cap I_k^m). \tag{5.6}$$

对其取 $\mathbb{E}\left[(\cdot)^2\right]$，可得多重求和

$$\sum_{j,j'\in J_n}\sum_{k,k'\in J_m} \mathbb{E}\left[(Z(x_j^n) - Z(x_k^m))(Z(x_{j'}^n) - Z(x_{k'}^m))M(I_j^n \cap I_k^m)M(I_{j'}^n \cap I_{k'}^m)\right]. \tag{5.7}$$

根据独立性 条件，并利用增量过程 I_Z（见 (3.21) 和 (3.22)），我们得到

$$\sum_{j,j'\in J_n}\sum_{k,k'\in J_m} C_{I_Z}((x_j^n, x_k^m), (x_{j'}^n, x_{k'}^m))C_M((I_j^n \cap I_k^m) \times (I_{j'}^n \cap I_{k'}^m)). \tag{5.8}$$

现在我们考察 C_{I_Z}在 $\overline{D}^4$上的一致连续性。注意，$C_{I_Z}((x、\ x)、\ (y、\ y)) = 0$。因此，对于每个 $\epsilon > 0$，都存在 $\delta > 0$，使得若 $|x - u| + |y - v| < \delta$，则 $|C_{I_Z}((x、\ u)、\ (y、\ v))| < \epsilon$。考虑

因此， n_0，使得若 n， $m \geqslant n_0$，$\mathrm{diam}(I_j^n) + \mathrm{diam}(I_k^m) < \frac{\delta}{2}$ 对每个 $(j、\ k) \in J_n \times J_m$均成立。因此，我们断言，若 $n、\ m \geqslant n_0$，则对于每个 $j、\ j \in J_n$ 以及每个 $k、\ k' \in J_m$，均有

$$|C_{I_Z}((x_j^n, x_k^m), (x_{j'}^n, x_{k'}^m))C_M((I_j^n \cap I_k^m) \times (I_{j'}^n \cap I_{k'}^m))| < \epsilon |C_M|((I_j^n \times I_k^m) \cap (I_j^n \times I_k^m)). \tag{5.9}$$

这是成立的，因为若 $I_j^n \cap I_k^m = \varnothing$，则 (5.9) 等于 0；若 $I_j^n \cap I_k^m \neq \varnothing$，利用 $\mathrm{diam}(I_j^n) + \mathrm{diam}(I_k^m) < \frac{\delta}{2}$，我们可得 $|x_j^n - x_k^m| < \frac{\delta}{2}$，同样的思路也可用于$|x_{j'}^n - x_{k'}^m|$。因此，$|C_{I_Z}((x_j^n, x_k^m), (x_{j'}^n, x_{k'}^m))| < \epsilon$。由此可知，(5.8) 被以下式子所界定：

$$\sum_{j,j' \in J_n} \sum_{k,k' \in J_m} \epsilon |C_M|((I_j^n \cap I_k^m) \times (I_{j'}^n \cap I_{k'}^m)) = \epsilon |C_M|(D \times D). \tag{5.10}$$

因此，黎曼和在 $L^2(\Omega\ \mathcal{A}, \mathbb{P})$ 中构成一个柯西序列，并收敛到一个有限方差的随机变量。若 $\left((D_j^n)_{j \in \tilde{J}_n}, (y_j^n)_{j \in \tilde{J}_n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ 是 D 的另一个黎曼系统，我们可以考虑它们之间的差：

$$\sum_{j \in J_n} Z(x_j^n) M(I_j^n) - \sum_{k \in \tilde{J}_n} Z(y_k^n) M(D_k^n) = \sum_{j \in J_n} \sum_{k \in \tilde{J}_n} (Z(x_j^n) - Z(y_k^n)) M(I_j^n \cap D_k^n). \tag{5.11}$$

可以用类似的论证证明，当 $n \to \infty$ 时，(5.11) 的 $L^2(\Omega\ \mathcal{A}, \mathbb{P})$-范数趋于 0。因此，极限与所选的黎曼系统无关，所以随机积分 $\int_D Z dM$ 在 $L^2(\Omega\ \mathcal{A}, \mathbb{P})$ 的意义下是唯一确定的。当然，在这种情况下 $K_{Z,\ M} = 0$，它显然是自可积的。□

例5.2. 假设 Z 或 M 在 $L^2(\Omega\ \mathcal{A}, \mathbb{P})$中具有有限维像。例如，假设 Z 具有如下形式

$$Z = \sum_{\alpha \leqslant m} X_\alpha f_\alpha, \tag{5.12}$$

其中 $(X_\alpha)_{\alpha \leqslant m} \subset L^2(\Omega\ \mathcal{A}, \mathbb{P})$ 和 $(f_\alpha)_{\alpha \leqslant m} \subset C(\mathbb{R}^d)$。那么，随机积分 $\int_D Z dM$ 是唯一确定的，因为对于每个黎曼系统 $\left((I_j^n)_{j \in J_n}, (x_j^n)_{j \in J_n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$，我们都有

$$\int_D Z dM = \lim_{n \to \infty} \sum_{j \in J_n} Z(x_j^n) M(I_j^n) = \sum_{\alpha \leqslant m} X_\alpha \lim_{n \to \infty} \sum_{j \in J_n} f_\alpha(x_j^n) M(I_j^n) = \sum_{\alpha \leqslant m} X_\alpha \int_D f_\alpha(x) dM(x). \tag{5.13}$$

在此情形下，交叉协方差核 $K_{Z,M}$ 具有简单形式。令 $\sigma_{X_\alpha}^2 = \mathbb{V}ar(X_\alpha) > 0$，并令$\nu_\alpha(A)$：$= \sigma_{X_\alpha}^{-1} \mathbb{E}(X_\alpha M(A))$。由 M, ν_α的 σ-可加性可定义 $\mathbb{R}^d$上的一个测度。因此，

$$K_{Z,M}(x, A) = \mathbb{E}(Z(x) M(A)) = \sum_{\alpha \leqslant m} \sigma_{X_\alpha} f_\alpha(x) \nu_\alpha(A). \tag{5.14}$$

$K_{Z,\ M}$ 因此是张量的线性组合。于是，它在 D 上自可积。类似地，当随机测度 M 满足以下条件时，也会出现同样的情况：

$$M = \sum_{\beta \leqslant m} Y_\beta \mu_\beta, \tag{5.15}$$

其中 $(Y_\beta)_{\beta\leqslant m} \in L^2(\Omega\ \mathcal{A}、\ \mathbb{P})$ 和 $(\mu_\beta)_{\beta\leqslant m} \in \mathscr{M}(\mathbb{R}^d)$。我们将在即将发表的论文中更详细地阐述这类构造。 ▫

例 5.3. 考虑这样的情形： M 相对于实值确定性测度 $\mu \in \mathscr{M}(\mathbb{R}^d)$ 绝对连续，也就是说，存在一个足够正则的过程 U（例如，在μ几乎处处意义下均方连续且局部有界），使得

$$M(A) = \int_A U(y)d\mu(y), \quad \forall A \in \mathcal{B}_B(\mathbb{R}^d). \tag{5.16}$$

趋近于随机积分的黎曼和为

$$\sum_{j\in J_n} Z(x_j^n) \int_{I_j^n} U(y)d\mu(y) \tag{5.17}$$

分析柯西差 (5.6) 的 $L^1(\Omega\ \mathcal{A},\mathbb{P})$-范数时，我们得到

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\Big(\Big|\sum_{j\in J_n}\sum_{k\in J_m}(Z(x_j^n)-Z(x_k^m))\int_{I_j^n\cap I_k^m}U(y)d\mu(y)\Big|\Big) &\leqslant \sum_{j\in J_n}\sum_{k\in J_m}\mathbb{E}\Big(|Z(x_j^n)-Z(x_k^m)|\Big|\int_{I_j^n\cap I_k^m}U(y)d\mu(y)\Big|\Big)\\
&\leqslant \sum_{j\in J_n}\sum_{k\in J_m}\sqrt{\mathbb{E}(|Z(x_j^n)-Z(x_k^m)|^2)}\sqrt{\mathbb{E}\Big(\Big|\int_{I_j^n\cap I_k^m}U(y)d\mu(y)\Big|^2\Big)}\\
&= \sum_{j\in J_n}\sum_{k\in J_m}\sqrt{C_{I_Z}((x_j^n,x_k^m),(x_j^n,x_k^m))}\sqrt{\int_{I_j^n\cap I_k^m}\int_{I_j^n\cap I_k^m}C_U(y,z)d\mu(y)d\mu(z)},
\end{aligned} \tag{5.18}$$

其中， C_U 是 U的协方差函数。我们可以对 C_U 应用柯西-施瓦茨不等式，得到

$$\begin{aligned}
\int_{I_j^n\cap I_k^m}\int_{I_j^n\cap I_k^m}C_U(y,z)d\mu(y)d\mu(z) &\leqslant \int_{I_j^n\cap I_k^m}\int_{I_j^n\cap I_k^m}\sqrt{C_U(y,y)}\sqrt{C_U(z,z)}d|\mu|(y)d|\mu|(z)\\
&= \left(\int_{I_j^n\cap I_k^m}\sqrt{C_U(y,y)}d|\mu|(y)\right)^2.
\end{aligned} \tag{5.19}$$

使用与 (5.9) 相同的论证，对于任意 $\epsilon>0$，且当 n、 m 足够大时，(5.18) 有如下上界

$$\sum_{j\in J_n}\sum_{k\in J_m}\epsilon\int_{I_j^n\cap I_k^m}\sqrt{C_U(y,y)}d|\mu|(y) = \epsilon\int_D\sqrt{C_U(y,y)}d|\mu|(y). \tag{5.20}$$

因此，黎曼和在 $L^1(\Omega\ \mathcal{A},\mathbb{P})$ 上构成一个柯西序列，故它们收敛。类似的代数计算可确保该极限与所选的黎曼系统无关。因此，$L^1(\Omega\ \mathcal{A},\mathbb{P})$ 意义下的极限为$\int_D ZdM$。在这种情况下，交叉协方差核$K_{Z,M}$具有如下形式

$$K_{Z,M}(x,A) = \int_A C_{Z,U}(x,y)d\mu(y), \tag{5.21}$$

其中 $C_{Z,\ U}$ 是 cro　ss-协方差函数，表示 Z 与 U之间的协方差函数。$K_{Z,M}$ 的自积分为

$$\int_D K_{Z,M}(x, dx) = \int_D C_{Z,U}(x, x)d\mu(x). \tag{5.22}$$

请注意，通过这一分析，我们可以定义 $\int_D Z(x)U(x)d\mu(x) := \int_D ZdM$，这应当与构造此类积分的其他直观方法相一致。▫

5.2 高斯情形：充要条件

考虑 Z与 M联合高斯的情形。也就是说，对于每个 $(x_1, ..., x_n) \in (\mathbb{R}^d)^n$ 以及每个$(A_1, ..., A_m) \in (\mathcal{B}_B(\mathbb{R}^d))^m$，向量 $(Z(x_1), ..., Z(x_n), M(A_1), ..., M(A_m))$ 都是一个高斯向量。在这种情况下，C_Z, C_M和 $K_{Z,\ M}$完全描述了我们利用 Z和 M构造的随机向量的有限维分布。关于 $\int_D ZdM$的唯一确定，注意到例 5.2 和 5.3 中，Z 或 M 上的额外正则性条件发挥了作用。在例 5.1 中，Z 或 M无需满足正则性要求，但采用了一个较强的独立性条件。因此可以预期，在不要求 Z或 M具有更多正则性的情况下，定义 $\int_D ZdM$的条件将完全取决于 Z与 M之间的依赖关系，而这完全由 $K_{Z,\ M}$决定。本文的主要结果是定理 5.1，它表明这一直觉是正确的。为了引入该定理，我们需要将定义 4.3 应用于核 $K_{Z,\ M}$。下一个命题将对此有所帮助。

命题 5.2. 如果 K 是交叉正定的，那么 $K^{(2)}$ 也是交叉正定的。

命题 5.2 和定理 3.3 表明，$K_Z^{(2)},\ _M$ 是一个 cf-m 核，因此可以对其应用拟自积分的定义 4.3。为了证明命题 5.2，我们将使用以下引理，该引理介绍了独立随机测度的张量积。

引理 5.1. 设 M_1 和 M_2 分别是定义在 $\mathbb{R}^d$ 和 $\mathbb{R}^p$ 上的两个独立随机测度。那么，存在唯一的定义在 $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^p$ 上的随机测度 $M_1 \otimes M_2$，满足

$$(M_1 \otimes M_2)(A \times B) = M_1(A)M_2(B), \quad \forall A \in \mathcal{B}_B(\mathbb{R}^d), B \in \mathcal{B}_B(\mathbb{R}^p). \tag{5.23}$$

引理 5.1 的证明：我们通过迭代随机积分定义随机测度 $M_1 \otimes M_2$，它作用于 $C_c(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^p)$ 中的函数：

$$\langle M_1 \otimes M_2, \psi \rangle := \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^p} \psi(x, y)dM_2(y)dM_1(x), \quad \forall \psi \in C_c(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^p). \tag{5.24}$$

注意，随机过程 $x \mapsto \int_{\mathbb{R}^p} \psi(x, y)dM_2(y)$ 均方连续且独立于 M_1，因此我们属于例 5.1 中唯一确定的随机积分这一情形。该

a映射 $\psi \mapsto \langle M_1 \otimes M_2, \psi \rangle$ 的期望为零（式 (5.5)），其协方差为

$$\mathbb{C}ov(\langle M_1 \otimes M_2, \psi_1 \rangle, \langle M_1 \otimes M_2, \psi_2 \rangle) = \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p} \psi_1(x,u)\overline{\psi_2}(y,v) dC_{M_2}(u,v) dC_{M_1}(x,y), \quad (5.25)$$

它在 $(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^p) \times (\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^p)$ 上定义了一个测度，因为 C_{M_1} 和 C_{M_2} 都是测度。根据定理 2.2，$M_1 \otimes M_2$ 在 $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^p$ 上定义了一个唯一的随机测度，使其满足 (5.23)（使用 $\psi = \mathbb{1}_A \otimes \mathbb{1}_B$）。 ■

命题 5.2 的证明：设 Z_1、Z_2 是 $\mathbb{R}^d$ 上的中心化均方连续过程，M_1 和 M_2 是 $\mathbb{R}^p$ 上的中心化随机测度，使得 (Z_1, M_1) 与 (Z_2, M_2) 相互独立，并且 K 是两对对象的交叉协方差核，$K = K_{Z_1,\, M_1} = K_{Z_2,\, M_2}$。因此，考虑中心化均方连续过程 $U(x, y) := Z_2(x)Z_1(y)$ 以及随机测度 $M_1 \otimes M_2$。那么，

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\big(U(x,y)(M_1 \otimes M_2)(A \times B)\big) &= \mathbb{E}\big(Z_1(y)M_1(A)\big)\mathbb{E}\big(Z_2(x)M_2(B)\big) \\ &= K(y,A)K(x,B) \\ &= K^{(2)}((x,y), A \times B), \end{aligned} \quad (5.26)$$

对每个 $A \in \mathcal{B}_B(\mathbb{R}^d)$、$B \in \mathcal{B}_B(\mathbb{R}^p)$ 均成立。因此，$K^{(2)}$ 只不过是 U 与 $M_1 \otimes M_2$ 之间的交叉协方差核，故它是交叉正定的。 ■

现在陈述定理 5.1。

定理 5.1. 若 Z 和 M 联合高斯，则当且仅当 $K_{Z,\, M}$ 在 D 上自可积，且 $K_Z^{(2)},\, M$ 在 $D \times D$ 上准自可积时，$\int_D Z dM$ 在 $L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ 意义下有唯一确定的定义。

接下来我们将使用概率论基础中的两个简单引理。

引理 5.2. 若 (X_1, X_2, X_3, X_4) 是一个中心高斯向量，则

$$\mathbb{C}ov(X_1X_2, X_3X_4) = \mathbb{E}(X_1X_3)\mathbb{E}(X_2X_4) + \mathbb{E}(X_1X_4)\mathbb{E}(X_2X_3). \quad (5.27)$$

引理 5.2 的证明：这是伊瑟利斯-维克定理的一个特例（Isserlis，1918；Wick，1950）。 ■

引理 5.3. 设 $(X_n)_n, (Y_n)_n$ 是 $L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ 中的两个序列。那么，

(i) $(X_n)_n$ 在 $L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ 中收敛，当且仅当 $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(X_n)$ 和 $\lim_{(n,m)\to\infty} \mathbb{C}ov(X_n, X_m)$ 存在。

(ii) 若 $X_n \xrightarrow{L^2(\Omega)} X$，则 $Y_n \xrightarrow{L^2(\Omega)} X$ 当且仅当 $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(Y_n) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(X_n)$ 且 $\lim_{(n,m)\to\infty} \mathbb{C}ov(Y_n, Y_m) = \lim_{(n,m)\to\infty} \mathbb{C}ov(X_n, X_m) = \lim_{(n,m)\to\infty} \mathbb{C}ov(Y_n, X_m)$。

引理 5.3 的证明：对于 (i)，均值的必要性显而易见；对于协方差，只需考虑 $\mathbb{C}ov(X_n, X_m) = \frac{1}{2}\left(\mathbb{V}ar(X_n) + \mathbb{V}ar(X_m) - \mathbb{V}ar(X_n - X_m)\right)$，它收敛到极限的方差，其中 $(n,\ m) \to \infty$。对于充分性，协方差双重极限的收敛尤其意味着（利用 $n = m$）方差 $\mathbb{V}ar(X_n)$ 收敛，其极限与 $\lim_{(n,\ m)\to\infty} \mathbb{C}ov(X_n,\ X_m)$ 相同。利用 $\mathbb{E}(|X_n - X_m|^2) = \mathbb{V}ar(X_n) + \mathbb{V}ar(X_m) - 2\mathbb{C}ov(X_n, X_m) + |\mathbb{E}(X_n) - \mathbb{E}(X_m)|^2$，可知 $(X_n)_n$ 是柯西序列，因此收敛。

对于 (ii) 均值情形的必要性同样显而易见，且等式 $\lim_{(n,m)\to\infty} \mathbb{C}ov(Y_n, Y_m) = \lim_{(n,m)\to\infty} \mathbb{C}ov(X_n, X_m)$（极限为 $\mathbb{V}ar(X)$）成立；涉及 $\mathbb{C}ov(Y_n, X_m)$ 的等式可利用 $\lim_{(n,m)\to\infty} \mathbb{E}(|X_m - Y_n|^2) = 0$ 并展开得到。对于充分性，由于 (i) $(Y_n)_n$ 收敛，展开 $\mathbb{E}(|Y_n - X_n|^2)$ 可证明其当 $n \to \infty$时趋于 0，因此 $(Y_n)_n$ 和 $(X_n)_n$ 具有相同的极限。细节留给读者。 ■

定理 5.1 的证明：设 $\left((I_j^n)_{j\in J_n}, (x_j^n)_{j\in J_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$, $\left((E_j^n)_{j\in \tilde{J}_n}, (y_j^n)_{j\in \tilde{J}_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ 是 D的两个黎曼系。趋近于 $\int_D Z dM$ 的黎曼和之间的协方差为（引理 5.2）

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{C}ov\Big(\sum_{j\in J_n} Z(x_j^n)M(I_j^n), \sum_{k\in \tilde{J}_m} Z(y_k^m)M(E_k^m)\Big) \\
&\quad= \sum_{j\in J_n}\sum_{k\in \tilde{J}_m} \mathbb{E}(Z(x_j^n)Z(y_k^m))\mathbb{E}(M(I_j^n)M(E_k^m)) + \mathbb{E}(Z(x_j^n)M(E_k^m))\mathbb{E}(Z(y_k^m)M(I_j^n)) \\
&\quad= \sum_{j\in J_n}\sum_{k\in \tilde{J}_m} C_Z(x_j^n, y_k^m)C_M(I_j^n \times E_k^m) + K_{Z,M}(x_j^n, E_k^m)K_{Z,M}(y_k^m, I_j^n) \\
&\quad= \sum_{j\in J_n}\sum_{k\in \tilde{J}_m} C_Z(x_j^n, y_k^m)C_M(I_j^n \times E_k^m) + \sum_{j\in J_n}\sum_{k\in \tilde{J}_m} K_{Z,M}^{(2)}((x_j^n, y_k^m), I_j^n \times E_k^m).
\end{aligned}
\tag{5.28}
$$

注意到

$$
\lim_{(n,m)\to\infty} \sum_{j\in J_n}\sum_{k\in \tilde{J}_m} C_Z(x_j^n, y_k^m)C_M(I_j^n \times E_k^m) = \int_{D\times D} C_Z dC_M, \tag{5.29}
$$

这成立是因为所涉及的双重和不过是积分$\int_{D\times D} C_Z dC_M$的黎曼近似。[6] 由此可得

$$
\begin{aligned}
&\lim_{(n,m)\to\infty} \mathbb{C}ov\Big(\sum_{j\in J_n} Z(x_j^n)M(I_j^n)\,, \sum_{k\in \tilde{J}_m} Z(y_k^m)M(E_k^m)\Big) \\
&\qquad\qquad= \int_{D\times D} C_Z dC_M + \lim_{(n,m)\to\infty} \sum_{j\in J_n}\sum_{k\in \tilde{J}_m} K_{Z,M}^{(2)}((x_j^n, y_k^m), I_j^n \times E_k^m).
\end{aligned}
\tag{5.30}
$$

由此我们得出，(5.30) 中两个双重极限的收敛性等价（若一个收敛，则另一个也收敛，反之亦然）。关于期望，利用 (5.4) 可知，

[6]如果读者需要更多细节，可以利用 C_Z 在 $\overline{D} \times \overline{D}$ 上的一致连续性，证明函数$\sum_{j\in J_n}\sum_{k\in \tilde{J}_m} C_Z(x_j^n\, y_k^m)_{\mathbb{I}_j^n \times E_k^m}$ 在 $D \times D$ 上随着 $(n\, m) \to \infty$ 一致收敛于 C_Z，然后得出结论。

$K_{Z,\ M}$ 的自可积性等价于黎曼和的期望收敛到一个与所选黎曼系统无关的极限。

由此可知，若 $\int_D ZdM$ 有唯一确定的定义，根据引理 5.3，(5.30) 左侧收敛至 $\mathbb{V}ar(\int_D ZdM)$，因此右侧也收敛至相同的值，且该值与所选的两个黎曼系统均无关，故 $K_Z^{(2)},\ _M$ 是准自可积的。反之，若 $K_Z^{(2)},\ _M$ 是准自可积的，则 (5.30) 左侧的双重极限收敛至相同的值，且该值与黎曼系统无关。接着应用引理 5.3 的结论 (i)，通过在方程 (5.30) 中使用相同的黎曼系统 $\left((I_j^n)_{j\in J_n},(x_j^n)_{j\in J_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}=\left((E_j^n)_{j\in \tilde{J}_n},(y_j^n)_{j\in \tilde{J}_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$，可证明与该系统相对应的黎曼和在 $L^2(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})$ 中收敛到一个随机变量。因此，在 (5.30) 中使用两个不同的黎曼系统，再应用引理 5.3 的结论 (ii)，即可推出黎曼系统的独立性，从而得出相应的黎曼和收敛到同一个随机变量。因此，$\int_D ZdM$在 $L^2(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})$ 中作为极限有唯一确定的定义。 ■

值得一提的是，定理 5.1 在非高斯情形下未必成立。考虑以下反例：$D=[0,1)$，$Z(t)=B^2(t)$，其中 B 是高斯布朗运动，$M=B'$ 是 B的分布导数，而 B是高斯白噪声。于是，我们可以利用伊藤积分 $\int_{[0,\ 1)} B^2(t)dB(t)$ 与 Stratonovich积分 $\int_{[0,\ 1)} B^2(t)\circ dB(t)$之间的显式关系：

$$\int_{[0,1)} B^2(t)\circ dB(t)-\int_{[0,1)} B^2(t)dB(t)=\int_{[0,1)} B(t)dB(t), \tag{5.31}$$

这里我们采用了伊藤积分和 Stratonovich积分的传统记法（Kloeden & Platen，1995，公式 5.5）。伊藤积分 $\int_{[0,\ 1)} B(t)dB(t)$ 不为零，因此这两个积分存在差异，所以 $\int_D ZdM$ 并非唯一确定。然而，在此情形下，$K_{B^2,\ B'}=0$ （涉及中心高斯向量的偶数阶矩，它们恒为零），因而显然是自积分；$K^{(2)}_{B^2,\ B'}$也同样如此。

5.3 子集上的随机积分与自积分

我们使用的自积分和唯一确定的随机积分的两种定义都针对固定的积分域 D。从这些定义中，并不能明确看出这是否意味着可以在 D 的子集上进行积分。本节将探讨这一问题。

定理 5.2. 设 $D\in\mathcal{B}_B(\mathbb{R}^d)$。如果随机积分 $\int_D ZdM$ 按 $L^p(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})$ 的意义对某个 $p\in[1,\infty]$ 唯一确定，那么对于每个 $A\in\mathcal{B}(D)$，随机积分 $\int_A ZdM$ 按 $L^p(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})$ 的意义唯一确定，并且满足可加性：

$$\int_A ZdM+\int_{D\setminus A} ZdM=\int_D ZdM. \tag{5.32}$$

我们将1 使用以下关于巴拿赫空间中的序列和子序列的引理 .

引理 5.4. 设 $(E,\|\cdot\|_E)$ 是一个巴拿赫空间。设 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 和 $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 是 E 中满足以下性质的两个序列：存在唯一的 $\ell\in E$，使得对于每个递增函数 $\sigma:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$,

$$\lim_{n\to\infty} a_n + b_{\sigma(n)} = \ell. \tag{5.33}$$

那么，$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 和 $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 都收敛。

引理 5.4 的证明：对于任意两个递增函数 $\sigma,\sigma':\mathbb{N}\to\mathbb{N}$，由性质 (5.33) 可得

$$\lim_{n\to\infty} b_{\sigma(n)} - b_{\sigma'(n)} = \lim_{n\to\infty} a_n + b_{\sigma(n)} - (a_n + b_{\sigma'(n)}) = \ell - \ell = 0. \tag{5.34}$$

现在假设 $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 不收敛。由于 E 是巴拿赫空间，$(b_n)_n$ 必不是柯西序列。因此存在 $\epsilon>0$，使得对于每个 $n\in\mathbb{N}$，都能找到 $\tilde{n},\tilde{m}\geqslant n$，满足 $\|b_{\tilde{n}}-b_{\tilde{m}}\|_E\geqslant\epsilon$。于是我们可以构造两个递增函数 σ_1,σ_2：$\mathbb{N}\to\mathbb{N}$，如下所示。对于 $n=0$，我们取 $\sigma_1(n),\sigma_2(n)\geqslant 1$，使得 $\|b_{\sigma_1(0)}-b_{\sigma_2(0)}\|_E\geqslant\epsilon$。然后，对于每个 $n\geqslant 1$，我们取 $\sigma_1(n),\sigma_2(n)>$，使得它们等于 $\max\{\sigma_1(n-1),\sigma_2(n-1)\}$，且满足 $\|b_{\sigma_1(n)}-b_{\sigma_2(n)}\|_E\geqslant\epsilon$。由此可知，$\sigma_1$ 和 σ_2 都是递增的，并且对于所有 $n\in\mathbb{N}$，都有 $\|b_{\sigma_1(n)}-b_{\sigma_2(n)}\|_E\geqslant\epsilon$。但这与结果 (5.34) 矛盾。因此，$(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 必为柯西序列，进而收敛，因为 E 属于巴拿赫空间。由性质 (5.33) 可立即推出，$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 也必收敛。 ■

定理 5.2 的证明：设 $A\in\mathcal{B}(D)$。令 $\left((A_j^n)_{j\in J_n^A},(a_j^n)_{j\in J_n^A}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ 为 A 的任意黎曼系统，并令 $\left((\tilde{A}_j^n)_{j\in J_n^{\tilde{A}}},(\tilde{a}_j^n)_{j\in J_n^{\tilde{A}}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ 为 $D\backslash A$ 的任意黎曼系统。于是，可以构造一个 D 的新黎曼系统，记为 $\left((I_j^n)_{j\in J_n},(x_j^n)_{j\in J_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$，如下：

$$J_n = J_n^A\cup J_n^{\tilde{A}};\quad I_j^n=\begin{cases}A_j^n & \text{if } j\in J_n^A\\ \tilde{A}_j^n & \text{if } j\in J_n^{\tilde{A}}\end{cases};\quad x_j^n=\begin{cases}a_j^n & \text{if } j\in J_n^A\\ \tilde{a}_j^n & \text{if } j\in J_n^{\tilde{A}}\end{cases}. \tag{5.35}$$

与该系统相关的黎曼和是 A 和 $D\backslash A$ 上黎曼和的和：

$$\sum_{j\in J_n} Z(x_j^n)M(I_j^n) = \sum_{j\in J_n^A} Z(a_j^n)M(A_j^n) + \sum_{j\in J_n^{\tilde{A}}} Z(\tilde{a}_j^n)M(\tilde{A}_j^n). \tag{5.36}$$

若 $\sigma:\ \mathbb{N}\to\mathbb{N}$ 是一个递增函数，则 $\left((\tilde{A}_j^{\sigma(n)})_{j\in J_{\sigma(n)}^{\tilde{A}}},(\tilde{a}_j^{\sigma(n)})_{j\in J_{\sigma(n)}^{\tilde{A}}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ 是 $D\backslash A$的一个子黎曼系统。将其与 $\left((A_j^n)_{j\in J_n^A},(a_j^n)_{j\in J_n^A}\right)_{n\in\mathbb{N}}$结合，类似于 (5.36) 构造 D的一个新黎曼系统。由于随机积分 $\int_D ZdM$ 是唯一确定的，我们必有

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{j\in J_n^A} Z(a_j^n)M(A_j^n) + \sum_{j\in J_{\sigma(n)}^{\tilde{A}}} Z(\tilde{a}_j^{\sigma(n)})M(\tilde{A}_j^{\sigma(n)}) = \int_D ZdM. \tag{5.37}$$

根据引理 5.4，利用巴拿赫空间 $L^p(\Omega\ \mathcal{A},\mathbb{P})$，黎曼和 $\sum_{j\in J_n^A} Z(a_j^n)M(A_j^n)$ 必收敛。设 $\ell_A := \lim_{n\to\infty}\sum_{j\in J_n^A} Z(a_j^n)M(A_j^n)$。若 $\left((\tilde{A}_j^n)_{j\in J_n^{\tilde{A}}},(\tilde{a}_j^n)_{j\in J_n^{\tilde{A}}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ 现在表示 $D\backslash A$的任意一个黎曼系统，则通过如 (5.35) 那样构造 D的一个黎曼系统，可得

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{j\in J_n^{\tilde{A}}} Z(\tilde{a}_j^n)M(\tilde{A}_j^n)=\lim_{n\to\infty}\sum_{j\in J_n} Z(x_j^n)M(I_j^n)-\sum_{j\in J_n^A} Z(a_j^n)M(A_j^n)=\int_D ZdM-\ell_A. \tag{5.38}$$

由于 $D\backslash A$ 的黎曼系统是任意的，因此随机积分 $\int_{D\backslash A} ZdM$ 有唯一确定的值，且等于 $\int_D ZdM-\ell_A$。通过对 A 和 $D\backslash A$ 取任意黎曼系统，并利用 (5.35) 构造相应的 D 的黎曼系统，可知随机积分$\int_A ZdM$ 也有唯一确定的值，且等于 ℓ_A。由 (5.38) 可得可加性 (5.32)。 ■

下一个定理概述了迄今为止阐述的主要结果，因此也涵盖了交叉协方差核在子集上的自可积性。该定理还明确了随机积分之间期望与协方差的重要关系。

定理 5.3. 假设 Z 和 M 是联合高斯且中心化的。令 $D\in\mathcal{B}_B(\mathbb{R}^d)$。那么，以下陈述等价：

(i) $K_{Z,\ M}$ 在 D 上自可积，且 $K_Z^{(2)},\ _M$ 在 $D\times D$ 上准自可积。

(ii) $K_{Z,\ M}$ 在每个 $A\in\mathcal{B}(D)$ 上都是自可积的，而 $K_Z^{(2)},\ _M$ 在每个形如 $A\times B$ 且满足 A, $B\in\mathcal{B}(D)$ 的集合上都是准自可积的。

(iii) 随机积分 $\int_D ZdM$ 被唯一确定为 $L^2(\Omega\ \mathcal{A},\mathbb{P}$ 中的一个极限).

(iv) 对每个 $A\in\mathcal{B}($ $D)$，随机积分 $\int_A ZdM$ 被唯一确定为 $L^2(\Omega\ \mathcal{A},\mathbb{P}$ 中的一个极限).

此外，若这些陈述中任意一条成立，则期望和协方差公式成立：

$$\mathbb{E}\left(\int_A ZdM\right)=\int_A K(x,dx),\quad \forall A\in\mathcal{B}(D), \tag{5.39}$$

$$\mathbb{C}ov\left(\int_A ZdM,\int_B ZdM\right)=\int_{A\times B} C_Z dC_M+\tilde{\int}_{A\times B} K^{(2)}(x,dx),\quad \forall A,B\in\mathcal{B}(D). \tag{5.40}$$

定理 5.3 的证明：$(i)\Leftrightarrow(iii)$ 是定理 5.1。$(iii)\Leftrightarrow(iv)$ 是定理 5.2。$(ii)\Rightarrow(i)$ 显然。我们只需证明 $(iv)\Rightarrow(ii)$ 以及公式 (5.39) 和 (5.40)。$K_{Z,\ M}$在 A 上的自可积性以及公式 (5.39) 可由命题 5.1 得出。对于 $K_Z^{(2)},\ _M$，设 $\left((A_j^n)_{j\in J_n^A},(a_j^n)_{j\in J_n^A}\right)_{n\in\mathbb{N}}$和$\left((B_j^n)_{j\in J_n^B},(b_j^n)_{j\in J_n^B}\right)_{n\in\mathbb{N}}$分别是 A和 B的任意两个黎曼系统。由于相应的

趋近随机积分的黎曼和分别收敛到 $\int_A ZdM$ 和 $\int_B ZdM$，我们沿用 (5.28) 中的论证，得出

$$\mathbb{C}ov\Big(\int_A ZdM, \int_B ZdM\Big) = \int_{A\times B} C_Z dC_M + \lim_{(n,m)\to\infty} \sum_{j\in J_n^A} \sum_{k\in J_m^B} K^{(2)}_{Z,M}((a_j^n, b_k^m), A_j^n \times B_k^m). \tag{5.41}$$

那么，右侧的双重极限对任意的 A 和 B 的黎曼系统都成立。因此，$K_Z^{(2)}$，M 在 $A\times B$ 上准自可积，且其准自积分满足等式 (5.40)。■

现在我们来证明，自可积核 K 在子集上也自可积，无需对 $K^{(2)}$ 要求交叉正定性质或任何其他条件。

定理 5.4。设 K 是 $\mathbb{R}^d$ 上任意的 cf-m 核，并设 $D\in\mathcal{B}_B(\mathbb{R}^d)$。若 K 在 D 上自可积，则它在每个子集 $A\in\mathcal{B}(D)$ 上也自可积，且满足可加性：

$$\int_A K(x,dx) + \int_{D\setminus A} K(x,dx) = \int_D K(x,dx), \quad \forall A\in\mathcal{B}(D). \tag{5.42}$$

定理 5.4 的证明：论证与定理 5.2 中的相同，因此这里只给出证明纲要，细节留给读者：取 A 的任意黎曼系统和 $D\setminus A$ 的任意黎曼系统。通过 (5.35) 构造 D 的黎曼系统。相应黎曼和的和收敛至 $\int_D K(x、\ dx)$；从 $D\setminus A$ 的黎曼和中取子序列时，相应的和也收敛。对 $E=\mathbb{R}$ 的情形应用引理 5.4，以证明 A 和 $D\setminus A$ 上的黎曼和收敛。然后通过改变 $D\setminus A$ 的黎曼系统进行论证，得出 K 在 $D\setminus A$ 上自可积；进而得出 K 在 A 上自可积，且可加性 (5.42) 成立。■

对于 $K^{(2)}$，我们仅指出：如果 K 是交叉正定的，在 D 上自可积，并且 $K^{(2)}$ 在 $D\times D$ 上准自可积，那么 $K^{(2)}$ 在每个 $A\times B$、A、$B\in\mathcal{B}(D)$ 上都是准自可积的。这直接来自定理 5.3。在这种情况下，准自积分具有可加性

$$\tilde{\int}_{A\times A} K^{(2)}(x,dx) + \tilde{\int}_{A\times(D\setminus A)} K^{(2)}(x,dx) + \tilde{\int}_{(D\setminus A)\times A} K^{(2)}(x,dx) + \tilde{\int}_{(D\setminus A)\times(D\setminus A)} K^{(2)}(x,dx) = \tilde{\int}_{D\times D} K^{(2)}(x,dx), \tag{5.43}$$

这可以通过方程 (5.40) 得到，使用 $\int_D ZdM = \int_A ZdM + \int_{D\setminus A} ZdM$ 并相应地消去其中出现的 $\int C_Z dC_M$ 形式的积分。

5.4 测度结构

第 5.3 节的结果使我们得以在 D 上满足适当的自可积性条件时，定义应用 $A\in\mathcal{B}(D)\mapsto\int_A K(x,dx)$ 和 $(A,B)\in\mathcal{B}(D)\times\mathcal{B}(D)\mapsto\int_{A\times B}K^{(2)}(x,dx)$。正如我们所见，第一个应用具有可加性，而且不难证明，当另一个分量固定时，第二个应用在每个分量上都具有可加性

然而，目前尚不清楚能否得出这些应用具有 σ-可加性，也就是说，第一个应用是否在 D 上定义了一个测度，或者第二个应用是否在 $D \times D$ 上定义了一个测度（或某种双测度）。这个问题并非毫无用处，因为在这种情况下，可以构造出确定随机测度的随机积分。特别地，以下推论可由方程 (5.39) 和 (5.40) 立即得出。

推论 5.1. 假设 Z 和 M 是联合高斯的。那么，映射 $A \mapsto \int_A Z dM$ 确定了定义在 D 上的唯一随机测度，当且仅当自积分 $A \mapsto \int_A K_{Z,M}(x, dx)$ 和准自积分 $(A, B) \mapsto \tilde{\int}_{A\times B} K_Z^{(2)},_M(x, dx)$ 均定义良好，并分别确定定义在 D 和$D \times D$ 上的测度。

因此，确定哪些情况下自积分过程中会诱导出测度结构十分重要。我们先考虑 K的自积分。我们不证明 σ-可加性，而是直接构造相对于势测度的可测函数积分。假设 D 是紧致的，且 K 在 D上自可积。若 $\varphi \in \mathcal{M}_B(D)$ 是一个简单函数，例如具有形式 $\varphi = \sum_i a_i \mathbb{1}_{A_i}$，那么我们可以利用定理 5.4 定义：

$$\int_D \varphi(x) K(x, dx) := \sum_{i\in I} a_i \int_{A_i} K(x, dx). \tag{5.44}$$

为了将此推广到更一般的 φ，我们仿照经典测度的情形，从 D 上的 K 为正核的情况开始，也就是说，对于每个 $(x$，都有 $K(x, A) \geqslant 0$。在这种情况下，对于 φ，有简单

$$\left|\int_D \varphi(x) K(x, dx)\right| \leqslant \sum_i |a_i| \int_{A_i} K(x, dx) \leqslant \|\varphi\|_\infty \int_D K(x, dx). \tag{5.45}$$

对于 $\varphi \in C(D)$，我们将其表示为简单函数 $(\varphi_n)_n$ 的一致极限，并定义 $\int_D \varphi(x) K(x, dx) = \lim_{n\to\infty} \int_D \varphi_n(x) K(x, dx)$。由 (5.45) 可知，该极限定义良好，且不依赖于趋近 φ 的序列。因此，方程 (5.45) 对 $\varphi \in C(D)$ 也成立，而映射$\varphi \in C(D) \mapsto \int_D \varphi(x) K(x, dx)$ 在上确界范数下定义了一个线性连续映射。根据黎斯表示定理（注 2.1），存在唯一的测度表示该映射，因此其定义可推广到任意 $\varphi \in \mathcal{M}_B(D)$。我们得出下一个命题。

命题 5.3. 如果 $K \geqslant 0$ 在 D 紧致集上自可积，那么映射 $A \mapsto \int_A K(x, dx)$ 定义了一个（正）测度。

对于 K 不是正的情形，我们考虑一个关于全变差核 $|K|$自可积性的直观充分条件。我们指出，自积分的定义 4.1

仅适用于 cf-m 核，因此通常不能将其应用于 $|K|$，因为据我们所知，$|K|$可能不连续。因此，我们需要增加这一额外要求。注意，这一要求对于 K交叉正定的情形（定理 3.3）本来就成立。

命题 5.4. 假设 D 是紧致的。若 K 是一个 cf-m 核，且 $|K|$ 也是一个 cf-m 核，并且 K 和 $|K|$ 在 D 上均自可积，则 $A \mapsto \int_A K(x,dx)$ 定义了一个满足以下条件的测度

$$\left|\int_D \varphi(x)K(x,dx)\right| \leqslant \|\varphi\|_\infty \int_D |K|(x,dx), \quad \forall \varphi \in \mathcal{M}_B(D). \tag{5.46}$$

证明：若 $\left((A_j^n)_{j\in J_n^A},(a_j^n)_{j\in J_n^A}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ 是 A 的任意一个黎曼系统，则

$$\left|\int_A K(x,dx)\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\sum_{j\in J_n^A} K(a_j^n,A_j^n)\right| \leqslant \lim_{n\to\infty}\sum_{j\in J_n^A}|K|(a_j^n,A_j^n) = \int_A |K|(x,dx). \tag{5.47}$$

由此可知，对于简单函数 $\varphi = \sum_i a_i \mathbb{I}_{A_i}$，有

$$\left|\int_D \varphi(x)K(x,dx)\right| = \left|\sum_i a_i \int_{A_i} K(x,dx)\right| \leqslant \sum_i |a_i| \int_{A_i} |K|(x,dx) \leqslant \|\varphi\|_\infty \int_D |K|(x,dx). \tag{5.48}$$

因此，线性映射 $\varphi \mapsto \int_D \varphi(x)K(x,dx)$ 在上确界范数意义下是连续的。因此，它确定了一个测度，其作用可扩展到任意 $\varphi \in \mathcal{M}_B(D)$。 ■

关于 K 的自可积性是否蕴含或被 $|K|$ 的自可积性所蕴含，这个一般性问题仍未解决。现在，我们可以给出关于 $K^{(2)}$ 的准自积分的类似结果。

命题 5.5. 设 $D \subset \mathbb{R}^d$ 紧致。若 K 是正的、交叉正定的，并且在 D上自可积，且 $K^{(2)}$ 在 $D\times D$ 上准自可积，则 $(A,B) \mapsto \int_{A\times B} K^{(2)}(x,dx)$ 在 $D\times D$上定义了一个测度。

证明：我们采用与命题 5.3 类似的方法。当然，K 正意味着 $K^{(2)}$ 正。根据定理 5.3，$K^{(2)}$ 在每个子集 $A\times B, A,B \in \mathcal{B}(D)$上都准自可积。因此，我们可以在每个形如 $\psi = \sum_i \sum_j a_{i,j} \mathbb{I}_{A_i} \otimes \mathbb{I}_{B_k}$ 的简单函数上定义一个线性映射，其定义如下

$$\tilde{\int}_{D\times D} \psi(x)K^{(2)}(x,dx) := \sum_{i\in I}\sum_{j\in J} a_{i,j} \tilde{\int}_{A_i\times B_j} K(x,dx). \tag{5.49}$$

并且，沿用（5.45）中的相同思路，很容易也能证明，对于这样的 ψ

$$\left|\tilde{\int}_{D\times D} \psi(x)K^{(2)}(x,dx)\right| \leqslant \|\psi\|_\infty \tilde{\int}_{D\times D} K^{(2)}(x,dx). \tag{5.50}$$

由于 $C(D\times D)$ 中的每个函数都可以由形如 ψ 的函数一致逼近，因此可以应用相同的逼近论证和黎斯表示定理，证明映射$\psi \mapsto \int_{D\times D}\psi(x)K^{(2)}(x,dx)$ 定义了一个测度，并且可以唯一地扩展到任意 $\psi\in\mathcal{M}_B(D\times D)$。 ■

下一个命题可通过类似的论证得出，细节留给读者。

命题 5.6. 假设 D 紧致。设 K 为交叉正定，且 K 和 $|K|$ 在 D 上自可积， $K^{(2)}$ 和 $|K^{(2)}|$ 在 $D\times D$上准自可积。那么，映射 $(A,B)\mapsto\int_{A\times B}K^{(2)}(x,dx)$ 在 $D\times D$上定义了一个测度。

我们以接下来的推论结束本节，该推论可由命题 5.4、命题 5.6 和定理 5.3 直接得出。

推论 5.2. 假设 Z 和 M 联合高斯，且 D 紧致。若 $K_{Z,M}$ 和$|K_{Z,M}|$ 在 D上自可积，且若 $K_Z^{(2)},_M$ 和 $|K_Z^{(2)},_M|$ 在 $D\times D$上准自可积，则 $A\mapsto\int_A ZdM$定义了一个在 D 上的唯一随机测度，其均值测度和协方差测度分别由 (5.39) 和 (5.40) 给出。

注 5.1. 当推论 5.1 或 5.2 中的条件成立时，由于 $\int_A ZdM$ 定义了一个随机测度，因此每个 $\varphi\in\mathcal{M}_B(D)$ 关于该测度的积分都是定义良好的随机变量，从而为随机积分提供了唯一的定义

$$\int_D Z(x)\varphi(x)dM(x), \tag{5.51}$$

而且，这样的随机变量应当与定义该积分的其他直观形式一致。我们指出，除许多其他用途外，这使得在使用具有紧支撑的光滑 φ 时，可以恰当地定义乘积“ZM”的分布导数。

6 应用

本节应用我们的结果。我们首先讨论两个情形：定理 5.1 中的条件以出乎意料的简便方式成立，从而可以唯一地定义涉及随机积分的一些概念。我们还介绍一个没有唯一确定的随机积分的重要例子，以展示我们的方法的一些局限性。

6.1 高斯随机测度的张量积

在引理 5.1 中，我们定义了两个独立随机测度的张量积。现在，我们将放宽独立性假设，但要求满足高斯性条件。设 M_1 和 M_2 是两个

分别定义在 $\mathbb{R}^d$ 和 $\mathbb{R}^p$ 上的实值中心联合高斯随机测度。此外，假设它们之间的交叉协方差由测度 $C_{M_1,\ M_2} \in \mathscr{M}(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^p)$确定，即$\mathbb{E}(M_1(A)M_2(B)) = C_{M_1,\ M_2}(A \times B)$ 对任意 $A \in \mathcal{B}_B(\mathbb{R}^d)$、$B \in \mathcal{B}_B(\mathbb{R}^p)$均成立。那么， $M_1 \otimes M_2$ 应当是定义在 $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^p$ 上的一个新随机测度，并满足 $(M_1 \otimes M_2)(A \times B) = M_1(A)M_2(B)$。

我们采用与引理 5.1 的证明相同的方法。设 $\psi \in C_c(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^p)$，其中 $\mathrm{supp}(\psi) \subset D_d \times D_p$、$D_d$ 和 D_p 均为紧致集。我们拟仿照 (5.24)，通过迭代随机积分来定义 $M_1 \otimes M_2$ 在 ψ 上的作用。为验证该随机积分定义良好，我们考虑 $Z_{M_2}(x) \coloneqq \int_{\mathbb{R}^p} \psi(x,y)dM_2(y)$ 是定义在 $\mathbb{R}^d$ 上且在 D_d 外为零的均方连续过程。 Z_{M_2} 与 M_1 之间的交叉协方差核为

$$K_{Z_{M_2},M_1}(x,A) = \int_{A\times\mathbb{R}^p} \psi(x,v)dC_{M_1,M_2}(u,v) = \int_{D_d\times D_p} \psi(x,v)\mathbb{1}_A(u)dC_{M_1,M_2}(u,v). \tag{6.1}$$

若 $\left((I_j^n)_{j\in J_n},(x_j^n)_{j\in J_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ 是 D_d 的黎曼系统，则趋向于 $K_{Z_{M_2},M_1}$ 的潜在自积分的相应黎曼和为

$$\sum_{j\in J_n} \int_{D_d\times D_p} \psi(x_j^n,v)\mathbb{1}_{I_j^n}(u)dC_{M_1,M_2}(u,v) = \int_{D_d\times D_p} \left(\sum_{j\in J_n} \psi(x_j^n,v)\mathbb{1}_{I_j^n}(u)\right) dC_{M_1,M_2}(u,v). \tag{6.2}$$

由 ψ 在 $D_d\times D_p$ 上的一致连续性可知，$\sum_{j\in J_n} \psi(x_j^n,v)\mathbb{1}_{I_j^n}(u) \to \psi(u,v)$ 在 $D_d \times D_p$ 上一致成立。由于 C_{M_1,M_2} 是测度，这意味着这些积分收敛到一个与所用黎曼系统无关的极限。因而，$K_{Z_{M_2},\ M_1}$ 在 D_d 上自可积，其自积分为

$$\int_{D_d} K_{Z_{M_2},M_1}(x,dx) = \int_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^p} \psi(x,y)dC_{M_1,M_2}(x,y). \tag{6.3}$$

二阶核由下式给出（计算留给读者）

$$K^{(2)}_{Z_{M_2},M_1}((x,y),E) = \int_{D_d\times D_p}\int_{D_d\times D_p} \psi(x,\tilde{v})\mathbb{1}_E(u,\tilde{u})\psi(y,v)dC_{M_1,M_2}(u,v)dC_{M_1,M_2}(\tilde{u},\tilde{v}). \tag{6.4}$$

$K^{(2)}_{Z_{M_2},\ M_1}$ 实际上在 $D_d \times D_d$ 上具有定义 4.1 意义下的自可积性，这当然意味着准自可积性。为此，我们采用与证明 $K_{Z_{M_2},\ M_1}$ 的自可积性类似的方法，利用 ψ 的一致连续性，从而得出对于 $D_d \times D_d$ 的任意黎曼系统$\left((E_j^n)_{j\in J_n}、\ (e_j^n)_{j\in J_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$（例如 $e_j^n = (x_j^n、\ y_j^n) \in D_d \times D_d$），有

$$\sum_{j\in J_n} \psi(x_j^n,\tilde{v})\mathbb{1}_{E_j^n}(u,\tilde{u})\psi(y_j^n,v) \xrightarrow[n\to\infty]{} \psi(u,\tilde{v})\psi(\tilde{u},v) \tag{6.5}$$

对 $(u、\ v、\ \tilde{u}、\ \tilde{v}) \in D_d \times D_p \times D_d \times D_p$ 一致成立。因此， $K^{(2)}_{Z_{M_2},\ M_1}$ 的自积分为

$$\int_{D_d\times D_d} K^{(2)}_{Z_{M_2},M_1}(x,dx) = \int_{D_d\times D_p\times D_d\times D_p} \psi(u,\tilde{v})\psi(\tilde{u},v)d(C_{M_1,M_2}\otimes C_{M_1,M_2})((u,v),(\tilde{u},\tilde{v})). \tag{6.6}$$

因此可以应用定理 5.1。形式为

$$\langle M_1 \otimes M_2, \psi \rangle := \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^p} \psi(x,y) dM_2(y) dM_1(x) \tag{6.7}$$

对于 $\psi \in C_c(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^p)$，它们是唯一确定的。下面描述这类变量的均值和协方差。对于均值，由 (6.3) 可知

$$\mathbb{E}\left(\langle M_1 \otimes M_2, \psi \rangle\right) = \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^p} \psi(x,y) dC_{M_1,M_2}(x,y). \tag{6.8}$$

对于协方差，为简单起见，考虑实数 ψ_1 和 ψ_2。接着我们通过黎曼和，并利用引理 5.2，计算得

$$\begin{aligned}
&\mathbb{C}ov\left(\langle M_1 \otimes M_2, \psi_1 \rangle, \langle M_1 \otimes M_2, \psi_2 \rangle\right) \\
&\quad = \lim_{(n,m)\to\infty} \sum_{j \in J_n} \sum_{k \in \tilde{J}_m} \mathbb{C}ov\left(\int_{\mathbb{R}^p} \psi_1(x_j^n, v) dM_2(v) M_1(I_j^n), \int_{\mathbb{R}^p} \psi_2(y_k^m, \tilde{v}) dM_2(\tilde{v}) M_1(E_k^m) \right) \\
&\quad = \lim_{(n,m)\to\infty} \sum_{j \in J_n} \sum_{k \in \tilde{J}_m} \int_{\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p} \psi_1(x_j^n, v) \psi_2(y_k^m, \tilde{v}) dC_{M_2}(v,\tilde{v}) C_{M_1}(I_j^n \times E_k^m) \\
&\qquad + \sum_{j \in J_n} \sum_{k \in \tilde{J}_m} \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^p} \psi_1(x_j^n, v) \mathbb{1}_{E_k^m}(u) dC_{M_1,M_2}(u,v) \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^p} \psi_2(y_k^m, v) \mathbb{1}_{I_j^n}(\tilde{u}) dC_{M_1,M_2}(\tilde{u},\tilde{v}) \\
&\quad = \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p} \psi_1(\tilde{u}, v) \psi_2(u, \tilde{v}) d(C_{M_1} \otimes C_{M_2})(u,\tilde{u},v,\tilde{v}) \\
&\qquad + \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^p} \psi_1(\tilde{u}, v) \psi_2(u, \tilde{v}) d(C_{M_1,M_2} \otimes C_{M_1,M_2})(u,v,\tilde{u},\tilde{v}).
\end{aligned} \tag{6.9}$$

最后的双重极限可用与 (6.5) 中类似的一致逼近论证来证明。由于 C_{M_1}、C_{M_2} 和 $C_{M_1,\ M_2}$ 都是测度，因此表达式 (6.9) 定义了 $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^p$ 上的一个测度。我们可以用更简洁的方式表述这些结果：

$$m_{M_1 \otimes M_2} := C_{M_1,M_2} \quad ; \quad C_{M_1 \otimes M_2} = C_{M_1} \text{“}\otimes\text{”} C_{M_2} + C_{M_1,M_2} \text{“}\otimes\text{”} C_{M_1,M_2}, \tag{6.10}$$

其中 C_{M_1}“⊗”C_{M_2} 和 $C_{M_1,\ M_2}$“⊗”$C_{M_1,\ M_2}$ 分别表示 $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^p$ 上仅有的测度，使得对所有 A_1、$A_2 \in \mathcal{B}_B(\mathbb{R}^d)$、$B_1$、$B_2 \in \mathcal{B}_B(\mathbb{R}^p)$，均有

$$(C_{M_1} \text{“}\otimes\text{”} C_{M_2})(A_1 \times B_1 \times A_2 \times B_2) = C_{M_1}(A_1 \times A_2) C_{M_2}(B_1 \times B_2); \tag{6.11}$$

$$(C_{M_1,M_2} \text{“}\otimes\text{”} C_{M_1,M_2})(A_1 \times B_1 \times A_2 \times B_2) = C_{M_1,M_2}(A_1 \times B_2) C_{M_1,M_2}(A_2 \times B_1). \tag{6.12}$$

注意，测度 C_{M_1}“ ⊗”C_{M_2} 并不是测度 $C_{M_1} \otimes C_{M_2}$，因为后者定义在$\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p$上。同样，测度 $C_{M_1,\ M_2}$“ ⊗”$C_{M_1,\ M_2}$ 并不是 $C_{M_1,\ M_2} \otimes C_{M_1,\ M_2}$，因为前者具有交叉乘积性质，将 A_1 与 B_2 相联系，而不是与 B_1相联系。利用定理 2.2，并由此将 $M_1 \otimes M_2$ 的定义扩展到 $\mathcal{M}_{B,c}(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^p)$中的函数，我们得出以下定理。

定理 6.1。设 M_1 和 M_2 分别是定义在 $\mathbb{R}^d$ 和 $\mathbb{R}^p$ 上的联合高斯随机测度。假设 M_1 与 M_2 之间的交叉协方差结构由测度 $C_{M_1,\ M_2} \in \mathscr{M}(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^p)$确定。那么，存在一个定义在 $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^p$上的唯一随机测度，记作 $M_1 \otimes M_2$，满足

$$(M_1 \otimes M_2)(A \times B) = M(A)M(B), \quad \forall A \in \mathcal{B}_B(\mathbb{R}^d), B \in \mathcal{B}_B(\mathbb{R}^p). \tag{6.13}$$

考虑（6.7）中的迭代积分，采用另一种次序 $\int_{\mathbb{R}^p}\int_{\mathbb{R}^d} \psi(x,y)dM_1(x)dM_2(y)$。沿用前面的论证，可以得出这类迭代积分是唯一确定的。应用 $\psi \mapsto \int_{\mathbb{R}^p}\int_{\mathbb{R}^d} \psi(x,y)dM_1(x)dM_2(y)$ 的均值和协方差结构可以像计算（6.10）那样进行计算，从而得出这两种结构都由测度确定。此外，显然对于每个 $\psi \in C_c(\mathbb{R}^d)\otimes C_c(\mathbb{R}^p)$，$\int_{\mathbb{R}^p}\int_{\mathbb{R}^d} \psi(x,y)dM_1(x)dM_2(y)$ 与 $\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^p} \psi(x,y)dM_2(y)dM_1(x)$ 一致。由于 $C_c(\mathbb{R}^d)\otimes C_c(\mathbb{R}^p)$ 在紧集上一致拓扑下稠密于 $C_c(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^p)$，且这两个应用都定义了从 $C_c(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^p)$ 到 $L^2(\Omega\ \mathcal{A}, \mathbb{P})$的连续线性函数，因此它们在整个空间 $C_c(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^p)$上必定一致。由此得到以下富比尼定理。

定理 6.2（随机测度的富比尼定理）。设 M_1 和 M_2 分别是定义在 $\mathbb{R}^d$ 和 $\mathbb{R}^p$ 上的联合高斯随机测度，并且 M_1 与 M_2 之间的交叉协方差结构由测度 $C_{M_1,\ M_2} \in \mathscr{M}(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^p)$确定。那么，对每个 $\psi \in C_c(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^p)$，三重等式

$$\int_{\mathbb{R}^p}\int_{\mathbb{R}^d} \psi(x,y)dM_1(x)dM_2(y) = \langle M_1 \otimes M_2, \psi\rangle = \int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^p} \psi(x,y)dM_2(y)dM_1(x) \tag{6.14}$$

均成立，且迭代积分是唯一确定的。

值得一提的是，定理 6.2 仅适用于具有紧支撑的 ψ 连续函数。虽然它也适用于 $\mathcal{M}_{B,\ c}(\mathbb{R}^d) \otimes \mathcal{M}_{B,\ c}(\mathbb{R}^p)$中的函数（这是显然的），但一般而言，它并不适用于任意$\psi \in \mathscr{M}_{B,\ c}(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^p)$。我们将在第 6.3 节给出一个反例。主要问题在于，在这种情况下，即使广义张量积测度是唯一确定的，迭代积分也未必是唯一确定的。对此，一种表述方式是：高斯随机测度的张量积没有典范随机分解。

最后需要提及的是，通过使用张量积，可以定义两个高斯随机测度之间的卷积，至少在二者在 $\mathbb{R}^d$ 上均为有限测度的情形下（C_{M_1} 和 C_{M_2} 在 $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ 上具有有限总质量），并且测度 $C_{M_1,\ M_2}$ 描述了它们的交叉协方差。在这种情况下，应用 $\varphi \in C_c(\mathbb{R}^d) \mapsto \langle M_1 \otimes M_2, (x, y) \mapsto \varphi(x+y)\rangle$ 应定义一个新的随机测度。这推动了随机测度之间卷积代数的研究，至少在高斯情形下如此，并可能有助于解决 (Rao，2012，第 5 章) 和 (Park，2016) 中提出的问题。

6.2 分数布朗运动及其导数

具有赫斯特指数 $H \in (0、1)$ 的 $[0、1]$ 上的分数布朗运动，是一个中心化高斯过程 $(B_H(t))_{t\in[0,\ 1]}$ 其协方差函数为

$$C_{B_H}(t,s) = \frac{|t|^{2H} + |s|^{2H} - |t-s|^{2H}}{2}. \tag{6.15}$$

设 $H > \frac{1}{2}$。如果 B'_H 是 B_H 的分布导数，那么其协方差为（Borisov & Bystrov，2006年）

$$C_{B'_H} = \frac{\partial^2 C_{B_H}}{\partial t \partial s} = H(2H-1)|t-s|^{2H-2}. \tag{6.16}$$

由于 $\frac{1}{2} < H < 1$，我们有 $-1 < 2H-2 < 0$。由此可知，协方差 (6.16) 可视为定义在 $[0,1] \times [0,1]$ 上的函数，该函数可积但不连续。因此， B'_H 是一个协方差测度绝对连续的随机测度

$$C_{B'_H}(E) = H(2H-1)\int_E \frac{d(u,v)}{|u-v|^{2-2H}}, \quad \forall E \in \mathcal{B}([0,1]\times[0,1]). \tag{6.17}$$

一些作者也将 B'_H 称为长程依赖过程，参见（Gay & Heyde，1990；Anh 等人，1999）。现在，利用 $B_H(t) = B'_H([0,t])$，我们可以计算 B_H 与其导数 B'_H 之间的交叉协方差核:

$$\begin{aligned} K_{B_H,B'_H}(t,A) = \mathbb{E}\left(B'_H([0,t])B'_H(A)\right) &= H(2H-1)\int_{A\times[0,t]} \frac{d(u,v)}{|u-v|^{2-2H}} \\ &= H\int_A u^{2H-1} + |t-u|^{2H-1}\operatorname{sgn}(t-u)du. \end{aligned} \tag{6.18}$$

令 $\left((I_j^n)_{j\in J_n}, (t_j^n)_{j\in J_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ 为 $[0,1]$ 的任意黎曼系统。那么，

$$\sum_{j\in J_n} K_{B_H,B'_H}(t_j^n, I_j^n) = H\int_0^1 u^{2H-1}du + H\sum_{j\in J_n}\int_{I_j^n} |t_j^n - u|^{2H-1}\operatorname{sgn}(t_j^n - u)du. \tag{6.19}$$

对于 （6.19）右侧的第二项，我们认为 $2H-1>0$，因此 e

$$\begin{aligned} \left|\sum_{j\in J_n}\int_{I_j^n} |t_j^n - u|^{2H-1}\operatorname{sgn}(t_j^n-u)du\right| &\leqslant \sum_{j\in J_n} \operatorname{diam}(I_j^n)^{2H-1}\lambda(I_j^n) \\ &\leqslant \max_{j\in J_n}\operatorname{diam}(I_j^n)^{2H-1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0. \end{aligned} \tag{6.20}$$

由此可知，$K_{B_H,\ B'_H}$ 是自可积的，其自积分为

$$\int_{[0,1]\times[0,1]} K_{B_H,B'_H}(x,dx) = H\int_0^1 u^{2H-1}du = \frac{1}{2}. \tag{6.21}$$

另一方面，二阶核 $K^{(2)}_{B_H,\ B'_H}$ 由下式给出

$$K^{(2)}_{B_H,B'_H}((t,s),A\times B) = H^2\int_{A\times B}\left(u^{2H-1}+|s-u|^{2H-1}\operatorname{sgn}(s-u)\right)\left(v^{2H-1}+|t-v|^{2H-1}\operatorname{sgn}(t-v)\right)d(u,v). \tag{6.22}$$

若 $\left((D^n_j)_{j\in\tilde{J}_n},(s^n_j)_{j\in\tilde{J}_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ 是 $[0,1]$ 的另一个黎曼系统，则趋近于 $K^{(2)}_{B_H,\ B'_H}$ 的准自积分的双重黎曼和，由对 $[0,1]\times[0,1]$ 上的函数双重序列取积分给出

$$(u,v)\mapsto H^2\sum_{j\in J_n}\sum_{k\in\tilde{J}_m}\mathbb{I}_{I^n_j}(u)\mathbb{I}_{D^m_k}(v)\left(u^{2H-1}+|s^m_k-u|^{2H-1}\operatorname{sgn}(s^m_k-u)\right)\left(v^{2H-1}+|t^n_j-v|^{2H-1}\operatorname{sgn}(t^n_j-v)\right). \tag{6.23}$$

我们来研究 $(n,m)\to\infty$ 时函数 (6.23) 的收敛性。固定 $u\in[0,1]$，对每个 n，记 $j_u\in J_n$ 为 J_n 中满足 $u\in I^n_{j_u}$ 的唯一元素。由此可知，当 $n\to\infty$ 时，$x^n_{j_u}\to u$。对任意 $v\in[0,1]$ 和 $k_v\in J_m$，我们也以类似方式处理˜。因此，(6.23) 可改写为

$$(u,v)\mapsto H^2\left(u^{2H-1}+|s^m_{k_v}-u|^{2H-1}\operatorname{sgn}(s^m_{k_v}-u)\right)\left(v^{2H-1}+|t^n_{j_u}-v|^{2H-1}\operatorname{sgn}(t^n_{j_u}-v)\right). \tag{6.24}$$

若 $u\neq v$，由于符号函数在 0 以外连续，当 $(n,m)\to\infty$ 时，表达式 (6.24) 收敛到

$$H^2\left(u^{2H-1}+|v-u|^{2H-1}\operatorname{sgn}(v-u)\right)\left(v^{2H-1}+|u-v|^{2H-1}\operatorname{sgn}(u-v)\right). \tag{6.25}$$

最后这个函数在 $[0,1]\times[0,1]$ 上可积。此外，函数 (6.24) 均由常数 $H^2(1+\sqrt{2}^{2H-1})^2$ 所界，因此它们几乎处处收敛，并由控制收敛定理收敛到函数 (6.25)。由针对双重序列的控制收敛定理（见引理 A.1）可知，(6.23) 在 $[0,1]\times[0,1]$ 上的积分双重序列收敛到

$$H^2\int_0^1\int_0^1\left(u^{2H-1}+|v-u|^{2H-1}\operatorname{sgn}(v-u)\right)\left(v^{2H-1}+|u-v|^{2H-1}\operatorname{sgn}(u-v)\right)d(u,v). \tag{6.26}$$

这个积分，也就是 $K^{(2)}_{B_H}$ 的准自积分 $_{B'_H}$，可以通过一番冗长但初等的微积分计算得出。最终结果为

$$\tilde{\int}_{[0,1]\times[0,1]}K^{(2)}_{B_H,B'_H}(x,dx)=\frac{1}{2}-H\mathbf{B}(2H,2H+1)-\frac{H}{2(4H-1)}, \tag{6.27}$$

whe其中 B 表示贝塔函数。根据定理 5.1 和 5.3，随机积分

$$\int_A B_H(t)dB'_H(t),\quad A\in\mathcal{B}([0,1]) \tag{6.28}$$

是唯一确定的。此外，$K_{B_H,\ B'_H}$ 为正，因此我们处于推论 5.2 中相当规则的情形。应用 $A\mapsto\int_A B_H(t)dB'_H(t)$ 随后在 $[0,1]$上定义了一个随机测度。

分数布朗运动的这一性质（ $H > \frac{1}{2}$ ）与布朗运动（ $(H = \frac{1}{2})$ ）的情形形成了鲜明对比，后者在命题 4.1 的证明中有简要介绍。至少就简单随机积分的定义而言，相对于 B_H 的随机微积分比相对于 B的随机微积分表现得更好。

6.3 导数为随机测度的过程

设 Z和 M满足： M是 Z的（分布意义下的）导数。第 6.2 节研究的例子是一个特例，另一个重要例子是布朗运动及其导数白噪声，这在命题 4.1 的证明中已有部分描述。设 $D = [0、 1]$。我们可以从 M出发，并定义

$$Z(t) := M([0, t]), \tag{6.29}$$

它是 M唯一的（分布意义下的）原函数，且满足 $Z(0) = M(\{0\})$。一般而言，这样的 Z是均方 càdlàg（右连续且有左极限）的。为简单起见，假设 M满足 Z均方连续，因此 M不能有原子（对每个 $t \in [0, M(\{t\}) \overset{a.s.}{=} 0, 1]$）。交叉协方差核为

$$K_{Z,M}(t, A) = C_M([0, t] \times A). \tag{6.30}$$

在这种情况下，趋近于自积分的黎曼和始终有界：

$$\left| \sum_{j \in J_n} C_M((0, x_j^n], I_j^n) \right| \leqslant \sum_{j \in J_n} |C_M|(D \times I_j^n) = |C_M|(D \times D). \tag{6.31}$$

通过取一个子序列，总能找到一个收敛的黎曼和，但一般而言，这并不意味着具有自可积性。

让我们考虑一个在理论和应用中广泛使用的重要特殊情形： M是一个正交随机测度。这里所说的是， M的协方差具有如下形式

$$C_M(A \times B) = \nu_M(A \cap B), \quad \forall A, B \in \mathcal{B}_B(\mathbb{R}^d), \tag{6.32}$$

是 ν_M $\mathbb{R}^d$上的一个正测度。正交随机测度在不相交子集上取不相关的值。一些作者将随机测度的研究限制在这一类中，有时还进一步要求在不相交子集上相互独立（Kingman，1967年；Passeggeri，2020年）。遗憾的是，在这种情况下，随机积分 $\int_{[0,1]} Z dM$ 并非唯一定义。事实上，在这种情况下，交叉协方差核（6.30）由 $K_{Z,M}(t, A) = \nu_M([0, t] \cap A)$给出，因此与命题 4.1 中相同的问题仍然存在。考虑 $[0, 1]$ 的一组分割，由左闭区间 $(I_j^n)_{j \in J_n}$构成，其中 $a_j^n :=$ 无穷下确界 I_j^n

以及 b_j^n:= 上确界 I_j^n。注意，由于 M 没有原子， ν_M 也没有原子。若取初始点 $x_j^n = a_j^n$作为标记点，则有

$$\sum_{j\in J_n} K_{Z,M}(a_j^n, I_j^n) = \sum_{j\in J_n} \nu_M([0,a_j^n]\cap I_j^n) = \sum_{j\in J_n} \nu_M(\{a_j^n\}) = 0. \tag{6.33}$$

但是，利用函数 $t\mapsto \nu_M([0,t])$ 在 $[0,1]$上的一致连续性，对于每个n，总能找到标记点 $(x_j^n)_{j\in J_n}$，使得当 $n\to\infty$时，$\sum_{j\in J_n}\nu_M(I_j^n\cap(x_j^n,b_j^n])\to 0$。因此，

$$\sum_{j\in J_n} K_{Z,M}(x_j^n, I_j^n) = \sum_{j\in J_n} \nu_M([a_j^n,x_j^n]) = \sum_{j\in J_n} \nu_M(I_j^n) - \nu_M(I_j^n\cap(x_j^n,b_j^n]) \xrightarrow[n\to\infty]{} \nu_M(D). \tag{6.34}$$

由此可知，当 M 是无原子正交测度时，形如 (6.30) 的核永远不是自可积的。这个结果揭示了针对重要随机测度发展随机微积分所面临的诸多困难之一。虽然这对某些读者来说可能令人失望，但当 M 是高斯随机测度时，我们可以进行一项有趣的分析来解释这一现象。由于$M\otimes M$是一个定义良好的随机测度（定理 6.1， C_M 在此情形下是交叉协方差测度），因此对每个 $\psi\in\mathcal{M}_B([0,1]\times[0,1])$，积分 $\langle M\otimes M,\psi\rangle$都有唯一确定的值。这包括$\psi(t,s) = {}_{\mathbb{I}^{[0,\ t]}}(s)$。因此，人们或许会想说

$$\text{“}\int_{[0,1]} M([0,t])dM(t) = \int_{[0,1]\times[0,1]} {}_{\mathbb{I}^{[0,t]}}(s)d(M\otimes M)(s,t)\text{”}. \tag{6.35}$$

但左侧的积分并非唯一确定。此外，由于 M 是正交的，始终有

$$\int_{[0,1]\times[0,1]} {}_{\mathbb{I}^{[0,t]}}(s)d(M\otimes M)(s,t) \neq \int_{[0,1]\times[0,1]} {}_{\mathbb{I}^{[0,t)}}(s)d(M\otimes M)(s,t). \tag{6.36}$$

事实上，由于 $M\otimes M$ 的均值测度为 C_M，且 C_M 具有形式 (6.32)，我们有

$$\mathbb{E}\left(\int_{[0,1]\times[0,1]} {}_{\mathbb{I}^{[0,t]}}(s)d(M\otimes M)(s,t)\right) = \int_{[0,1]} {}_{\mathbb{I}^{[0,t]}}(t)d\nu_M(t) = \nu_M([0,1]), \tag{6.37}$$

而

$$\mathbb{E}\left(\int_{[0,1]\times[0,1]} {}_{\mathbb{I}^{[0,t)}}(s)d(M\otimes M)(s,t)\right) = \int_{[0,1]} {}_{\mathbb{I}^{[0,t)}}(t)d\nu_M(t) = 0. \tag{6.38}$$

这意味着，如果 w　我们尝试将关于 $[0、\ 1]\times[0、\ 1]$ 的积分解释为迭代积分，则得到

$$\int_{[0,1]} M([0,t])dM(t) \neq \int_{[0,1]} M([0,t))dM(t), \tag{6.39}$$

这并不太直观，因为过程 $t\mapsto M([0、\ t])$ 与 $t\mapsto M([0、\ t))$ 本质上是相同的。虽然 ${}_{\mathbb{I}^{[0,t]}}(s)$ 和 ${}_{\mathbb{I}^{[0,t)}}(s)$ 几乎处处相等，但这是相对于勒贝格测度而言的

在 $[0、1] \times [0、1]$ 上，但此处重要的测度是 C_M。后者集中在对角线 $\{t = s\}$ 上，因此相对于 C_M，函数 $\mathbb{I}_{[0,t]}(s)$ 和 $\mathbb{I}_{[0,t)}(s)$ 完全不同。

由此可知，张量测度 $M \otimes M$ 在有界可测函数上的良定义性，并不意味着迭代积分 (6.39) 具有唯一确定性。这是对富比尼定理 6.2 的一个反例，表明该定理无法推广到任意 ψ。当我们意识到，黎曼和虽然是求取 (6.39) 中积分的一种直观方法，却不是求取积分 $\langle M \otimes M, \psi \rangle$ 的好方法时，这一特殊结果似乎就更清楚了。事实上，当我们用黎曼和来求取积分 (6.39) 时，实际所做的是

$$\sum_{j \in J_n} M([0, x_j^n]) M(I_j^n) = \int_{[0,1]\times[0,1]} \sum_{j \in J_n} \mathbb{I}_{[0,x_j^n]}(t) \mathbb{I}_{I_j^n}(s) d(M \otimes M)(t, s). \tag{6.40}$$

函数序列 $\sum_{j \in J_n} \mathbb{I}_{[0,\ x_j^n]} \otimes \mathbb{I}_{I_j^n}$满足：对于 $(t, s) \in [0, 1] \times [0, 1]$，若 $j_s \in J_n$是满足 $s \in I_j^n$的指标，则 $\sum_{j \in J_n} \mathbb{I}_{[0,\ x_j^n]}(t) \mathbb{I}_{I_j^n}(s) = \mathbb{I}_{[0,\ x_{j_s}^n]}(t)$。由于当 $n \to \infty$时 $x_{j_s}^n \to s$，若 $t > s$，则 $\mathbb{I}_{[0,\ x_{j_s}^n]}(t) \to 1$。若 $t < s$，则 $\mathbb{I}_{[0,\ x_{j_s}^n]}(t) \to 0$。但是当 $t = s$（其中 C_M集中于此）时，极限取决于标记点 $(x_j^n)_{j \in J_n}$。若对于某个 s，$(x_{j_s}^n)_n$ 是一个序列，且其子序列分别位于 s的右侧和左侧，则 $\mathbb{I}_{[0,\ x_{j_s}^n]}(t)$ 不收敛。这种形式的函数 $\sum_{j \in J_n} \mathbb{I}_{[0,\ x_j^n]} \otimes \mathbb{I}_{I_j^n}$在收敛方面缺乏清晰性和普适性，是否正是阻碍我们按照尝试过的方式唯一确定随机积分的原因?

7 展望与评论

我们提出一些开放性问题，以及本文所述结果未来可能的应用。这些问题主要涉及核的自可积性条件，以及更一般随机结构的乘积构造。

7.1 一些开放性问题

或许一些读者首先会想到的问题之一是：我们能否找到一些实用条件，用来验证 cf-m 核的自可积性？本文着重探讨了自积分与唯一确定的随机积分之间的联系，但没有着重讨论自可积性的判据。除了引言中简要提及的 $C(D) \otimes \mathscr{M}(D)$ 及其在射影拓扑下的完备化中的核这一情形（未作详细说明）之外，我们没有给出判断一个核是否自可积的一般判据。在一篇即将发表的论文中，我们将根据 Z 和 M 的 Karhunen-Loève展开介绍其中一些判据，参见（Carrizo Vergara，2022）。

另一个有趣的问题是：对于任意给定的核，是否存在一个黎曼系统，使其对应的黎曼和收敛？若存在这样的系统，无论采用其他黎曼系统是否会得到相同的值，都可以得到一个自积分。因此，问题在于我们能否找到一种黎曼系统选择约定，使黎曼和总是收敛。对于任意核 K，能否构造出这样的黎曼系统，目前尚不明确。在某些情况下，可以保证黎曼和收敛，例如像方程（6.31）中那样运用有界性论证，但这并不普遍适用。举例来说，在附录 B 中，我们给出了一个定义在 $[-1、1]$ 上的交叉正定核；对于该核，采用等长区间构造的黎曼系统总会产生无界的黎曼和。请注意，这个问题并非无关紧要，因为它与能否为各种被积函数和积分器定义随机积分有关，即便这种定义并非唯一（Itô 和斯特拉托诺维奇构造就是黎曼系统选择约定的例子）。

二阶核 $K^{(2)}$ 的自可积性也是一个需要分析的性质。例如， K 的自可积性是否蕴含或等价于 $K^{(2)}$的准自可积性？我们尚未发现一方自可积而另一方不可积的反例。全变差核 $|K|$的自可积性也存在同样的问题。

另一个问题涉及所研究对象的测度结构。在第 5.4 节中，我们指出，要证明应用 $A \mapsto \int_A K(x、\ dx)$ 和 $A \mapsto \int_A Z dM$ 具有测度结构并不容易；即使在自可积性和唯一确定性均成立的情况下，也只能给出很强的充分条件。目前尚未发现反例。这个问题对于确定我们能否对自积分和随机积分采用与测度和随机测度相同的运算至关重要，也有助于构建一种以这些概念为基础的随机微积分。

最后，我们考虑将张量积方法用于随机积分，作为定理 6.1 的一种可能应用。在 $[0、1] \subset \mathbb{R}$ 上，若 Z 和 M 联合高斯，且 Z 是一个导数为随机测度 M_Z 的过程，那么只要交叉协方差测度 $C_{M_Z,M}$ 存在，积分 $\int_{[0,1]\times[0,1]} \mathbb{I}^{[0,t]}(s) d(M_Z \otimes M)(s,t)$ 就是唯一确定的。若如此，形如 $t \mapsto \int_{[0,t]} Z(u) dM(u)$ 的积分便可通过一种明确的约定来定义：张量积测度 $M_Z \otimes M$ 是唯一的，因此这种定义不存在歧义。所得过程很可能具有均方右连续且有左极限性质。由此可以在分布意义下发展随机微积分，其优点是对张量积形式的近似具有良好的稳定性：例如，若 $\mathbb{I}^{[0,t]}(s)$ 可由连续函数逼近，那么这些函数的随机积分将收敛到最终的随机积分。因此，可以利用这种稳定性来发展微积分和近似规则。

7.2 广义随机张量积与乘积

这项工作或可为探索更抽象随机结构之间乘积的唯一确定性打开一扇门。若 $\mu \in \mathscr{M}(\mathbb{R}^d)$ 和 $f \in C(\mathbb{R}^d)$，总可以通过 $A \mapsto \int_A f d\mu$ 将乘积 $f\mu$ 定义为 $\mathbb{R}^d$ 上的一个新测度。正如我们所指出的，当 f 和 μ 是随机的时，只有相应的随机积分唯一确定，二者的乘积才能被规范地定义。同样的思路也适用于更抽象的情形：若 T 是 $\mathbb{R}^d$ ($T \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^d)$) 上的一个分布，且 $f \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$，那么乘积 fT 是由 $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^d) \mapsto \langle T, f\varphi\rangle$ 给出的一个新分布。现在假设 T 是一个随机分布，也称为广义随机场（GeRF）（Gelfand & Vilenkin, 1964年；Itô, 1954年），也就是说，它是一个连续线性算子 $T\colon \mathscr{D}(\mathbb{R}^d) \to L^2(\Omega\ \mathcal{A}, \mathbb{P})$。假设 Z 是一个协方差函数光滑的随机过程。那么，对于任意 $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^d)$，可以尝试定义“$\langle T, Z\varphi\rangle$”，但这里也会遇到同样的非唯一性问题。仿照黎曼和的做法，可以尝试用形如 $\sum_{j\in J_n} Z(x_j^n)\varphi(x_j^n)\phi_j^n$ 的光滑过程逼近 $Z\varphi$，其中适当选取标记点 x_j^n 和函数 $(\phi_j^n)_{j\in J_n} \subset \mathscr{D}(\mathbb{R}^d)$，然后计算 $\langle T, Z\varphi\rangle := \lim_{n\to\infty} \sum_{j\in J_n} Z(x_j^n)\varphi(x_j^n)\langle T, \phi_j^n\rangle$。一般而言，这样的极限会依赖于标记点和函数 ϕ_j^n 的选取。注意，在这种情况下，我们也有一个交叉协方差核 $K_{Z\varphi,T}\colon \mathbb{R}^d \times \mathscr{D}(\mathbb{R}^d) \to \mathbb{R}$，由 $K_{Z\varphi,T}(x,\phi) = \mathbb{C}ov(Z(x)\varphi(x), \langle T, \phi\rangle)$ 给出，它满足 $K_{Z\varphi,T}(x, \cdot) \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^d)$ 和 $K_{Z\varphi,T}(\cdot, \phi) \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^d)$。因此，自积分 (4.4) 的对应物就是将 $K_{Z\varphi,T}$ 的右分量（一个分布）作用于 $K_{Z\varphi,T}$ 的左分量（一个具有紧支撑的光滑函数）。这种自作用的可能性（它也是一个迹算子）将与唯一确定随机作用 $\langle T, Z\varphi\rangle$ 的可能性相关，其方式完全类似于定理 5.1 中自积分与唯一确定的随机积分之间的联系。当其他随机结构具有定义良好的确定性对应物时，这种方法也可用于计算它们的乘积：缓增分布与导数多项式有界的光滑函数的乘积、测度的原函数与 C^1 函数的乘积，等等。

也可以采用这种方法来定义高斯广义随机场的张量积，这与第6.1节类似。如果 T 和 S 分别是定义在 $\mathbb{R}^d$ 和 $\mathbb{R}^p$ 上的联合高斯广义随机场，那么张量积 $T \otimes S$ 应始终是定义在 $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^p$ 上的良定义广义随机场。如果 $\psi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^p)$，过程 $x \mapsto \langle S、\ \phi(x、\ \cdot)\rangle$ 在均方意义下光滑且具有紧支撑，因此 $\langle T \otimes S、\ \psi\rangle$ 可以定义为迭代应用 $\langle T、\ x \mapsto \langle S、\ \phi(x、\ \cdot)\rangle$。根据与定理 6.1 所要求的判据类似的原理，两个广义随机场之间的交叉协方差结构总是对应于 $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^p)$ 中的一个分布（施瓦茨核定理，参见（Trèves，1967年，第51章）和（Reed & Simon，1980年，定理V.12））， 因此预期这一最后的乘积是唯一确定的。随机卷积也可以通过这种方法处理。

因此预计　　本工作将部分促进对随机乘积的分析。各种　　e

在过去几十年中，人们发展出了构造此类乘积的复杂理论（Holden 等人，2009年；Gubinelli，2004年；Gubinelli 等人，2015年；Hairer，2014年）。与这些理论相比，本工作所采用的方法以其简洁性和基础性而引人注目。然而，正如读者可能已经想到的那样，它只能应用于具有唯一可积性性质的某些特殊情形。必须指出，最有趣的应用（例如 Itô 和斯特拉托诺维奇积分）主要依赖于对非唯一确定的随机积分的构造。因此，我们的方法在某些情况下可能有所帮助，但并非总是如此。不过，本工作的核心启示——在定义随机对象之间的任何类型的乘积或非线性运算时始终可以加以考虑——如下：无法定义这类乘积，不仅取决于各因子的正则性，也取决于它们之间的相互依赖结构。

附录

定理2.2的证明

我们首先证明以下引理，该引理是针对函数双重序列的勒贝格控制收敛定理。

引理 A.1. 设 $(E, \mathscr{E}, \mu)$ 是一个测度空间 $(\mu \geqslant 0)$。设 $(f_{n,m})_{n,m\in\mathbb{N}}$ 是复函数的双重序列，满足 $\sup_{n,m\in\mathbb{N}} |f_{n,m}| \in \mathscr{L}^1(E, \mathscr{E}, \mu)$。假设双重极限 $\lim_{n,m\to\infty} f_{n,m}$ 在 μ-几乎处处存在。那么，在 $\mu-$几乎处处定义的函数 $f(x) = \lim_{n,m\to\infty} f_{n,m}(x)$ 属于 $\mathscr{L}^1(E, \mathscr{E}, \mu)$，并且

$$\lim_{(n,m)\to\infty} \int_E |f_{n,m} - f| d\mu = 0. \tag{A.1}$$

引理 A.1 的证明：[7] $f \in \mathscr{L}^1(E, \mathscr{E}, \mu)$ 显然，因为 $\sup_{n,m\in\mathbb{N}} |f_{n,m}| \in \mathscr{L}^1(E, \mathscr{E}, \mu)$。如果我们假设双重极限 (A.1) 不收敛到 0，那么存在 $\epsilon > 0$，使得对于任意 $k \in \mathbb{N}$，存在 $n_k, m_k \geqslant k$，满足

$$\int_E |f_{n_k,m_k} - f| d\mu \geqslant \epsilon. \tag{A.2}$$

由此可知，我们可以构造函数序列 $f_k := f_{n_k,\ m_k}$，使其几乎处处依 μ 收敛于 f，且 $\sup_{k\in\mathbb{N}} |f_k|$ 可积。根据传统的勒贝格控制收敛定理（Doob，1953年，VI.9），我们有$f_k \to f$属于 $\mathscr{L}^1(E、\mathscr{E}、\mu)$。但这与 (A.2) 矛盾。 ■

我们还将使用以下向量值测度扩张定理 s.

[7]此证明摘自 StackExchange 上的讨论：https://math.stackexchange.com/questions/44893 最后一次查阅时间为2023年3月6日。

定理 A.1. 设 $\mathcal{A}$ 是集合 D的子集代数， $\sigma(\mathcal{A})$ 是由 $\mathcal{A}$ 生成的 σ代数，且 X 是一个巴拿赫空间。设 $\mu\colon \mathcal{A}\to X$ 是定义在 $\mathcal{A}$上的 σ可加函数。那么，存在唯一的测度 $\mu^*\colon \sigma(\mathcal{A})\to X$，使得 $\mu=\mu^*$ 在 $\mathcal{A}$上成立，当且仅当对任意一列两两不相交的集合 $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}\subset\mathcal{A}$，均有 $\lim_{n\to\infty}\mu(E_n)=0$。

定理 A.1 的证明：关于该定理的清晰阐述，参见（Kupka，1978年）；详细证明则参见（Sion，1969年）。 ■

定理 2.2 的证明：由映射 $\varphi\in\mapsto\langle m_M,\varphi\rangle$的线性以及$(\varphi,\phi)\mapsto\langle C_M,\varphi\otimes\phi\rangle$的双线性，很容易证明 M的线性。 M也是连续的，因为

$$\mathbb{E}(|\langle M,\varphi\rangle|^2)=|\langle m_M,\varphi\rangle|^2+\langle C_M,\varphi\otimes\overline{\varphi}\rangle\leqslant\left(|m_M|(D)^2+|C_M|(D\times D)\right)\|\varphi\|_\infty^2. \tag{A.3}$$

我们将 M的定义推广到更一般的 φ。考虑一致有界序列 $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}\subset C(D)$，它逐点收敛到某个函数 φ。于是，

$$\mathbb{E}\left(|\langle M,\varphi_n-\varphi_m\rangle|^2\right)=|\langle m_M,\varphi_n-\varphi_m\rangle|^2+\langle C_M,(\varphi_n-\varphi_m)\otimes\overline{\varphi_n-\varphi_m}\rangle. \tag{A.4}$$

由于 $\lim_{n,m\to\infty}\varphi_n-\varphi_m=0$ 逐点成立且被一个常数控制，并且 m_M 和 C_M都是有限测度（因为 D 是紧致的），根据引理 A.1，表达式 (A.4) 在 $n,m\to\infty$ 时趋于 0。$(\langle M,\varphi_n\rangle)_{n\in\mathbb{N}}$因此是 $L^2(\Omega\ \mathcal{A},\mathbb{P})$ 中的柯西序列，它收敛到一个唯一的随机变量，我们将其记为 $\langle M,\varphi\rangle$。这个极限与所选序列 $(\varphi_n)_n$ 无关，因为若考虑另一个逐点收敛到 φ 且受控的序列 $(\phi_n)_n\subset C(D)$，那么根据勒贝格控制收敛定理可得 $\langle M,\varphi_n-\phi_n\rangle\to 0$。显然，这个扩张关于 φ是线性的，且均值与协方差表达式 (2.9) 成立。现在注意，任何形如$\varphi=\mathbb{I}^{R\cap D}$的函数，其中 R是 $\mathbb{R}^d$的一个矩形，即形如 $R=I_1\times\ldots\times I_d$的集合，且 I_1、...、I_d是 $\mathbb{R}$的区间，都可以通过这种方式由连续函数˜逼近。因此，对于每个矩形集合 R，我们都可以唯一地定义 $M(R):=\langle M,\mathbb{I}^{R\cap D}\rangle$。记 $\mathcal{R}(D)$ 为由形如 $R\cap D$的集合生成的代数。根据˜的线性，显然 M 在 $\mathcal{R}(D)$上定义良好；又由于均值与协方差结构由测度定义，它关于 $\mathcal{R}(D)$也是 σ-可加的。设 $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}\subset\mathcal{R}(D)$ 为一个任意的两两不相交集合序列，并令 $E:=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}E_n\in\mathcal{B}(D)$。那么，

$$\lim_{n\to\infty}\mathbb{E}(|\tilde{M}(E_n)|^2)=m_M(E_n)^2+C_M(E_n\times E_n)\leqslant|m_M|(E_n)^2+|C_M|(D\times E_n). \tag{A.5}$$

由于 m_M和 C_M都是测度，我们有

$$\sum_{n\in\mathbb{N}}|m_M|(E_n)=|m_M|(E)<\infty, \tag{A.6}$$

$$\sum_{n\in\mathbb{N}}|C_M|(D\times E_n)=|C_M|(D\times E)<\infty. \tag{A.7}$$

因此，级数 (A.6) 和 (A.7) 均收敛，故其各项必趋于 0。将此结论应用于方程 (A.5)，可得在巴拿赫空间 $L^2(\Omega\ \mathcal{A},\mathbb{P})$意义下，$\lim_{n\to\infty} M(E_n)=0$。由于$\mathcal{B}(D)=\sigma(\mathcal{R}(D))$，根据定理 A.1，存在将 M延拓到 $\mathcal{B}(D)$的唯一延拓，从而定义一个取值于 $L^2(\Omega\ \mathcal{A},\mathbb{P})$的测度。$\langle M、\ \varphi\rangle$和 $\int_D \varphi d\tilde{M}$之间的等式可由 $\int_D \varphi d\tilde{M}$的构造得到：该构造使用由矩形构成分割的黎曼系统上的黎曼和；这总是可以做到，因为任意连续函数都可以由矩形示性函数的线性组合一致逼近。 ■

B 一个无界的黎曼和

本节考虑一个交叉正定核 K，其自积分的黎曼和在使用等长区间逼近时必然无界。因此，无法通过由等长区间构成的划分来定义自积分。考虑定义在$D=[-1,1]$ 上的核

$$K(x,A)=\int_A \frac{du}{|x-u|^{\frac{1}{8}}},\quad (x,A)\in[-1,1]\times\mathcal{B}([-1,1]). \tag{B.1}$$

该核　　是 $[-1,1]$ 上的白噪声 W与过程之间的交叉协方差　　s

$$Z(x)=\int_{-1}^{1}\frac{dW(u)}{|x-u|^{\frac{1}{8}}}. \tag{B.2}$$

注意，对每个 $x\in[-1,1]$，函数 $u\mapsto|x-u|^{-\frac{1}{8}}$属于 $L^2[-1,1]$，因此关于白噪声 (B.2) 的积分是良定义的。此外， Z是均方连续的，因为

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left([Z(x)-Z(x_0)]^2\right)&=\mathbb{E}\left(\left[\int_{-1}^{1}\frac{1}{|x-u|^{\frac{1}{8}}}-\frac{1}{|x_0-u|^{\frac{1}{8}}}dW(u)\right]^2\right)\\&=\int_{-1}^{1}\left[\frac{1}{|x-u|^{\frac{1}{8}}}-\frac{1}{|x_0-u|^{\frac{1}{8}}}\right]^2du\\&=\int_{-1}^{1}\frac{\left[|x\vee x_0-u|^{\frac{1}{8}}-|x\wedge x_0-u|^{\frac{1}{8}}\right]^2}{|x\vee x_0-u|^{\frac{1}{4}}|x\wedge x_0-u|^{\frac{1}{4}}}du.\end{aligned} \tag{B.3}$$

利用函数 $u\mapsto|u|^{\frac{1}{8}}$ 在 $[-1、\ 1]$上的一致连续性，当 $x\to x_0$ 时，最后一个积分中的分子可以被任意小的 $\epsilon>0$ 所界定。对于分母，可以将积分拆分到区间 $[-1、\ \frac{x+x_0}{2}]$ 和 $[\frac{x+x_0}{2}、\ 1]$上。在第一个区间内有 $|u-x\wedge x_0|\geqslant|u-x\vee x_0|$，因此

$|u-x\wedge x_0|^{-\frac{1}{4}}\leqslant|u-x\vee x_0|^{-\frac{1}{4}}$ 因此在 $[-1、\ \frac{x+x_0}{2}]$ 上的积分可以界定为

$$\epsilon\int_{-1}^{\frac{x+x_0}{2}}\frac{du}{|u-x\vee x_0|^{\frac{1}{2}}}=\epsilon 2\left[\left(\frac{|x-x_0|}{2}\right)^{\frac{1}{2}}-(1+x\vee x_0)^{\frac{1}{2}}\right]\leqslant\epsilon 2(1+\sqrt{2}).\tag{B.4}$$

可以进行类似的分析，为$[\frac{x+x_0}{2},1]$上的积分给出任意小的上界。这证明了 Z的连续性。设 $\left((I_j^n)_{j\in J_n},(x_j^n)_{j\in J_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$是 $[-1,1]$的一个黎曼系统，其中对每个 n，集合 I_j^n都是长度相同的区间 ℓ_n （因此 $|J_n|=\frac{2}{\ell_n}$）。令 $a_j^n:=\inf(I_j^n)$，且 $b_j^n:=\sup(I_j^n)$。那么，相应的黎曼和满足

$$\begin{aligned}\sum_{j\in J_n}\int_{I_j^n}\frac{du}{|x_j^n-u|^{\frac{1}{8}}}&=\sum_{j\in J_n}\int_{a_j^n}^{x_j^n}\frac{du}{(x_j^n-u)^{\frac{1}{8}}}+\int_{x_j^n}^{b_j^n}\frac{du}{(u-x_j^n)^{\frac{1}{8}}}\\&=\sum_{j\in J_n}\frac{8}{7}\left((x_j^n-a_j^n)^{\frac{7}{8}}+(b_j^n-x_j^n)^{\frac{7}{8}}\right)\\&\geqslant\sum_{j\in J_n}\frac{8}{7}\left(\frac{\ell_n}{2}\right)^{\frac{7}{8}}=\frac{8}{7}|J_n|^{\frac{1}{8}}\nearrow\infty.\end{aligned}\tag{B.5}$$

这个结果证明，黎曼和没有界。因此，无法利用等长区间构造自积分。对于在 Z和 W之间构造随机积分，情况也相同。尽管如此，可以证明，使用长度不等的区间时，能够找到一个收敛的黎曼和。举例来说，取一个黎曼系统，其中 I_j^n是区间，满足 $|J_n|=n$，且除一个区间外，其余区间的长度都是 e^{-n}，因此那个区间的长度为 $2-(n-1)e^{-n}$。那么，相应的黎曼和有界（细节留给读者），所以它有一个收敛子序列。

参考文献

Åberg, S.，& Podgórski, K.（2011）。一类非高斯二阶随机场。《极值》，14(2)，187–222。

Anh, V.，Angulo, J.，& Ruiz-Medina, M.（1999）。分数随机场中可能存在的长程依赖关系。《统计规划与推断杂志》，80(1-2)，95–110。

Baccelli, F.，Błaszczyszyn, B.，& Karray, M.（2020年）。随机测度、点过程与随机几何。Inria。

Bichteler, K., & Jacod, J.（2006年）。随机测度与随机积分。载于《随机场理论与应用：IFIP-WG 7/1 工作会议论文集》，该会议于1982年1月在印度班加罗尔举行，由印度统计研究所共同主办（第1–18页）。

Borisov, I., & Bystrov, A. A.（2006年）。在噪声不具正交性的情况下，构造非随机函数的随机积分。《概率论及其应用》，50(1)，53–74。Bourbaki, N.（1965年）。《积分》。Hermann。Cairoli, R., & Walsh, J. B.（1975年）。平面上的随机积分。Carrizo Vergara, R.（2018）。使用随机偏微分方程构建地统计模型（博士论文，MINES ParisTech, PSL Research University）。取自 https://hal.archives-ouvertes.fr/tel-02126057。Carrizo Vergara, R.（2022）。随机测度的 Karhunen-Loève 展开。arXiv 预印本 arXiv:2203.14202。Chong, C., & Klüppelberg, C.（2015年）。时空随机积分的可积条件：理论与应用。Dalang, R. C., Khoshnevisan, D., Mueller, C., Nualart, D., & Xiao, Y.（2009年）。随机偏微分方程小课程（第1962卷）。施普林格。Dellacherie, C.（2006年）。随机积分理论概述。载于《测度论：1979年奥伯沃尔法赫会议论文集》，会议于1979年7月1–7日在德国奥伯沃尔法赫举行（第365–395页）。Doob, J. L.（1953年）。《随机过程》（第7卷）（第2期）。Wiley，纽约。Dunford, N., & Schwartz, J. T.（1958）。《线性算子第一部分：一般理论》（第7卷）。Interscience 出版社，纽约。Gay, R., & Heyde, C.（1990年）。关于一类允许长程依赖的随机场模型。《生物统计学》，401–403。Gelfand, I. M., & Vilenkin, N. I.（1964年）。《广义函数》第4卷：调和分析的应用。纽约：学术出版社。Gubinelli, M.（2004年）。控制粗糙路径。《泛函分析杂志》，216(1)，86–140。Gubinelli, M., Imkeller, P., & Perkowski, N.（2015年）。副控制分布与奇异偏微分方程。载于《Forum of Mathematics, Pi》（第3卷）。Hairer, M.（2014年）。正则性结构理论。《数学发明》，198(2)，269–504。

Holden, H., Øksendal, B., Ubøe, J. 和张, T.（2009年）。随机偏微分方程：
a
建模、白噪声泛函方法。纽约：施普林格科学与商业媒体。Horowitz, J.（1986年）。高斯随机测度。《随机过程及其应用》，22(1)
,
129–133。Huang, S. T. 和 Cambanis, S.（1978年）。高斯过程的随机维纳积分与多重维纳积分
.
《概率年刊》，585–614。Isserlis, L.（1918年）。关于任意阶正态频率
y
分布在任意多个变量中的乘积矩系数公式。《生物统计学》，12(1/2)，134–139。Itô, K.（1951年）。多重维纳积分。《日本数学会杂志》，3(1)，157–169。Itô, K.（1954年）。平稳随机分布。《京都大学理学院纪要》
.
A辑：数学，28(3)，209–223。Kallenberg，O.（2017）。随机测度：理论与应用。施普林格。Kingman，J.（1967年）。完全随机测度。《太平洋数学杂志》，21(1)，59–78。Kloeden，P. E.，& Platen，E.（1995）。《随机微分方程的数值解》（第2版）
.
施普林格出版社。Kunita，H.，& Watanabe，S.（1967年）。关于平方可积鞅。《名古屋数学杂志》
,
30，209–245。Kupka，J.（1978年）。向量值测度的Carathéodory扩张定理。《
e
美国数学会，72(1)，57–61。Lindgren，F.，Bolin，D.，& Rue，H.（2022）。高斯场和非高斯场的SPDE方法
:
10年，至今仍在继续。《空间统计》，100599。Lindgren，F.、Rue，H. 和 Lindström，J.（2011）。高斯场与高斯
n
马尔可夫随机场：随机偏微分方程方法。《皇家
l
统计学会杂志：B辑（统计方法学），73(4)，423–498。Loève，M.（1978年）。《概率论》，第二卷。数学研究生教材，46，0–387。Mocioalca，O. 和 Viens，F.（2005年）。分数阶以外的 Skorohod积分与随机微积分
l
布朗尺度。《泛函分析杂志》，222(2)，385–434。

Morando, P. (1969年). 随机测度。《斯特拉斯堡概率研讨班》，3，190–229。Nualart, D. (2006年).《Malliavin演算及相关主题》（第1995卷）。施普林格出版社。Øksendal, B. (2003年).《随机微分方程：应用导论》（第5版）。施普林格出版社。Park, J. H. J. (2016). 基于卷积的随机测度代数。《统计理论与实践杂志》，10，768–779。Passeggeri, R. (2020年). 关于符号双测度的扩张与核及其在随机积分中的作用。arXiv预印本 arXiv:2009.10657。Rao, M. (2012年).《随机测度与向量测度》。世界科技出版公司。Reed, M., & Simon, B. (1980年).《现代数学分析方法：泛函分析》。新加坡：学术出版社。Rudin, W. (1987年).《实分析与复分析》（第3版）。麦格劳-希尔图书公司。Ryan, R. A. (2002).《巴拿赫空间张量积导论》（第73卷）。施普林格出版社。Sion, M. (1969年). 取值于拓扑群的外测度。《伦敦数学会会刊》，3(1)，89–106。Skorokhod, A. V. (1976年). 关于随机积分的一种推广。《概率论及其应用》，20(2)，219–233。Sobczyk, K. (1991).《随机微分方程：物理学与工程学中的应用》。施普林格科学与商业媒体。Soong, T. T., & TT, S. (1973). 科学与工程中的随机微分方程。Tao, T. (2022).《一点余地，第一部分：实分析——数学博客第三年的篇章》（第117卷）。美国数学会。Thornett, M. (1979). 一类二阶平稳随机测度。《随机过程及其应用》，8(3)，323–334。Trèves, F. (1967年).《拓扑向量空间、分布与核》。纽约：学术出版社。Wick, G.-C. (1950). 碰撞矩阵的计算。《物理评论》，80(2)，268。Wiener, N. (1923). 微分空间。《数学与物理学杂志》，2(1-4)，131–174。