arXiv:2303.04290v1 [physics.plasm-ph] 7 Mar 2023

电子与霍尔磁流体中的能量与磁螺度四分之三定律

王燕青* 和 Otto Chkhetiani†

摘要

本文利用霍尔项的特性，在 Duchon-Robert 型意义下，为电子磁流体动力学方程和霍尔磁流体动力学方程中的能量与磁螺度耗散率建立了一些局部形式的四分之三定律。本文首次发现了这些系统中磁螺度耗散率的新 $4/3$ 定律；针对霍尔磁流体动力学方程中能量耗散率的四分之三定律，则推广了 Galtier 的工作。

2020年数学主题分类：76F02, 76B99, 35L65, 35L67, 35Q35 关键词：四分之三定律；电子磁流体动力学；霍尔磁流体力学；能量；磁螺度；

1 引言

湍流中不同尺度间的能量分布及能量通量，可用构型空间中的三阶结构函数表示（例如参见 [1, 23, 30]）。不可压缩流体中已知的两个三阶结构函数精确关系是 Kolmogorov 的 $4/5$ 定律，即针对 [29]中纵向速度脉动的定律；以及 Yaglom 的 $4/3$ 定律，即针对 [38] 中速度场与温度场混合矩的定律。

在不可压缩欧拉方程、磁流体系统及其他湍流模型中，存在许多涉及能量、交叉螺度和螺度的广义 Kolmogorov 和 Yaglom 型定律。它们是湍流理论中少数严格的结果，并已得到数值模拟的证实（参见例如 [1, 2, 10, 12, 21, 24–27, 30–34, 37, 39]）。由于 [29, 38], 几乎所有这些定律的推导都依赖于相应的 K´arm´an–Howarth 方程。以下版本的四分之三定律和五分之四定律是在未应用 K´arm´an–Howarth 方程的情况下于 [16, 20] 中得到的：

$$S_1(v) = -\frac{4}{3}D_1(v), \tag{1.1}$$

$$S_L(v) = -\frac{4}{5}D(v), \tag{1.2}$$

*郑州轻工业大学数学与信息科学学院，中国河南郑州 450002。电子邮箱：wangyanqing20056@gmail.com

†俄罗斯科学院 A. M. 奥布霍夫大气物理研究所，俄罗斯莫斯科皮日夫斯基巷 3 号，119017。电子邮箱：ochkheti@ifaran.ru

其中

$$S(v)=-\lim_{\lambda\to 0}S(v,\lambda)=-\lim_{\lambda\to 0}\frac{1}{\lambda}\int_{\partial B}\ell\cdot\delta v(\lambda\ell)|\delta v(\lambda\ell)|^2\frac{d\sigma(\ell)}{4\pi},$$
$$S_L(v)=-\lim_{\lambda\to 0}S_L(v,\lambda)=-\lim_{\lambda\to 0}\frac{1}{\lambda}\int_{\partial B}\ell\cdot\delta v(\lambda\ell)|\delta v_L(\lambda\ell)|^2\frac{d\sigma(\ell)}{4\pi},$$

and

$$\begin{aligned}D_1(v)&=-\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{4}\int_{\mathbb{T}^3}\nabla\varphi_\varepsilon(\ell)\cdot\delta v(\ell)|\delta v(\ell)|^2d\ell,\\ D(v)&=-\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{4}\int_{\mathbb{T}^3}\nabla\varphi_\varepsilon(\ell)\cdot\delta v(\ell)|\delta v_L(\ell)|^2d\ell,\end{aligned}\tag{1.3}$$

这里， $\sigma(x)$ 表示球面 $\partial B=\{x\in\mathbb{R}^3$ 上的曲面测度： $|x|=1\}$ ，而 φ 是支撑于 $\mathbb{T}^3$ 且积分为 1 的某个光滑非负函数， $\varphi_\varepsilon(x)=\varepsilon^{-3}\varphi(\frac{x}{\varepsilon})$。$\delta v_L(r)=\delta v(r)\cdot\frac{r}{|r|}=(v(x+r)-v(x))\cdot\frac{r}{|r|}$ 表示纵向速度增量。耗散项 (1.3)$_1$ 最初由 Duchon-Robert 在 [16] 中提出。最近，受 [16], 的启发，研究者在 [37] 中推导出了 Oldroyd-B 模型的首个四分之三关系，以及湍流亚格子尺度 α 模型的六个新的 4/3 定律。此外， [37], 中温度方程、无黏性磁流体力学方程和欧拉方程中的几乎所有 4/3 关系都可以写成 (1.1) 的形式。 [37] 中各种湍流模型的相似之处在于其非线性项具有对流型形式。除标准磁流体力学方程和 Leray-α 磁流体力学方程外， [6], 中的电子磁流体动力学（EMHD）方程和霍尔磁流体力学（HMHD）方程也在等离子体理论中发挥着重要作用（例如参见 [5, 11, 25, 28, 35] 及其中的参考文献）。电子磁流体动力学（EMHD）和霍尔磁流体力学（HMHD）系统都满足能量和螺度守恒定律（参见 [11, 25]）。 [37] 的作者指出，守恒量的耗散项如 (1.3)$_1$ 会立即导出一个 4/3 关系。基于此，一个自然的问题是：电子磁流体动力学和霍尔磁流体力学中是否存在能量和螺度的 4/3 关系？本文旨在探讨这一问题。在陈述主要结果之前，我们先回顾以下 EMHD 方程

$$b_t+\mathrm{d_I}\nabla\times[(\nabla\times b)\times b]=0,\mathrm{div}b=0,\tag{1.4}$$

其中 b 表示磁场， $\mathrm{d_I}$ 表示离子惯性长度。不失一般性，我们令 $\mathrm{d_I}=1$。文献[22]研究了这种表述下的级联过程。我们将涉及电子磁流体动力学方程的结果表述如下。

定理 1.1. 设 b 是电子磁流体动力学方程 (1.4) 的一个弱解，且电流为 $\vec{j}=\nabla\times b$。假设对任意 $1<p,q,m,n<\infty$ ，若 $\frac{2}{p}+\frac{1}{m}=1,\frac{2}{q}+\frac{1}{n}=1$ 满足条件，使得 (b,v) 满足

$$b\in L^\infty(0,T;L^2(\mathbb{T}^3))\cap L^p(0,T;L^q(\mathbb{T}^3))\text{ and }\vec{j}\in L^m(0,T;L^n(\mathbb{T}^3)).\tag{1.5}$$

则函数

$$D(b,\vec{j};\varepsilon)=\frac{1}{8}\int_{\mathbb{T}^3}\nabla\varphi_\varepsilon(\ell)\cdot\delta\vec{j}(\ell)|\delta b(\ell)|^2d\ell-\frac{1}{4}\int_{\mathbb{T}^3}\nabla\varphi_\varepsilon(\ell)\cdot\delta b(\ell)|\delta\vec{j}(\ell)\cdot\delta b(\ell)|d\ell,\tag{1.6}$$

在 $\varepsilon\to 0$ 时，在分布意义下收敛到分布 $D(b,\vec{j})$，且 $D(b,\vec{j})$ 满足局部能量方程

$$\partial_t(\frac{1}{2}|b|^2)+\frac{1}{2}\mathrm{div}([\mathrm{div}(b\otimes b)\times b]-\frac{1}{4}\mathrm{div}(\vec{j}|b|^2)+\frac{1}{2}\mathrm{div}(b\vec{j}\cdot b)=D(b,\vec{j}),$$

在分布意义下。此外，以下 4/3 定律成立

$$-\frac{1}{2}S_1(\vec{j},b,b)+S_2(b,\vec{j},b)=-\frac{4}{3}D(v,\theta), \tag{1.7}$$

其中

$$S_1(\vec{j},b,b)=-\lim_{\lambda\to 0}S_1(\vec{j},b,b;\lambda)=-\lim_{\lambda\to 0}\frac{1}{\lambda}\int_{\partial B}\ell\cdot\delta\vec{j}(\lambda\ell)|\delta b(\lambda\ell)|^2\frac{d\sigma(\ell)}{4\pi},$$
$$S_2(b,\vec{j},b)=-\lim_{\lambda\to 0}S_2(b,\vec{j}b;\lambda)=-\lim_{\lambda\to 0}\frac{1}{\lambda}\int_{\partial B}\ell\cdot\delta b(\lambda\ell)|\delta\vec{j}(\lambda\ell)\cdot\delta b(\ell)|\frac{d\sigma(\ell)}{4\pi}.$$

注 1.1. Galtier 在 [24] 中推导了 Hall-MHD 方程 (1.14) 的一种带有耗散项 $D(\vec{j},\vec{j},b,\varepsilon)$ $=\frac{1}{2}\int\varphi_\varepsilon(\ell)[\delta\vec{j}\cdot\delta(\vec{j}\times b)]$ 的局部能量方程，其四三定律见 [25]。EMHD 系统 (1.4) 可视为 Hall-MHD 方程 (1.14) 的一个子系统，因此，该定理推广了相应的结果 [24, 25]。

注 1.2. 值得指出的是， [37] 中 EMHD 的能量耗散项 (1.3) 与欧拉方程中的螺度耗散项相似。与此同时，EMHD 中磁螺度耗散项 (1.12) 的结构与 [16] 中欧拉方程的能量耗散项相同。

[2]注 1.3. 可以证明，只要 $v\in L^3(0,T;B^{\frac{3}{3},q^\natural}_3)$ 且$q^\natural<\infty$ 属于 [14]，螺度就是守恒的。因此，若 $m\geq 3$ 属于 (1.5)，我们在此定理中要求 $n<9/4$ 。由于 (1.5) 的一个特殊情形是 $p=m=3$, $q=\frac{9}{2}$ 和 $n=\frac{9}{5}$，条件 (1.5) 并非空条件。

与 [16, 37], 中模型的对流型非线性项相比，电子磁流体动力学和霍尔磁流体动力学方程中的霍尔项 $\nabla\times[(\nabla\times b)\times b]$ 涉及二阶导数，而非一阶导数。为建立 (1.7)，一种自然的策略是将霍尔项 $\nabla\times[(\nabla\times b)\times b]$ 改写为对流型，以便应用以下方程

$$b_t+\mathrm{div}(b\otimes\vec{j})-\mathrm{div}(\vec{j}\otimes b)=0.$$

然而，这种形式的电子磁流体动力学方程仍无法直接与耗散项 (1.6) 相匹配。准确地说，(2.7) 的左端缺少项 $[\mathrm{div}(b\otimes b)]^\varepsilon\cdot\vec{j}+[\mathrm{div}(b\otimes b)]\cdot\vec{j}^\varepsilon$。幸运的是，当我们研究该系统中关于磁螺度的 4/3 定律时，我们注意到，如果将 (2.23) 和 (2.24) 中的磁矢势 A 替换为 B，便可立即推导出所需的这一项，这启发我们采用以下电子磁流体动力学的等价形式

$$b_t+\nabla\times[\mathrm{div}(b\otimes b)]=0.$$

基于此，我们得到临界方程 (2.15)，它适用于耗散项 (1.6)。事实上，我们将提供两种略有不同的方法来获得 (2.15)。这与 [16, 37] 中使用的技巧相结合，将帮助我们实现所需的关系 (1.7)。

作为 [16, 37], ，我们应用耗散项 (1.6)，为推出 EMDH 方程 (1.4) 弱解的磁螺度守恒建立新的充分条件。

推论 1.2。我们采用定理 1.1 中的记号。假设 b 和 $\vec{j}$ 满足

$$\begin{aligned}
&\Big(\int_{\mathbb{T}^3}|b(x+\ell,t)-b(x,t)|^{\frac{9}{2}}dx\Big)^{\frac{2}{9}}\le C(t)^{\frac{1}{r_1}}|\ell|^{\alpha}\sigma^{\frac{1}{3}}(\ell),\\
&\Big(\int_{\mathbb{T}^3}|\vec{j}(x+\ell,t)-\vec{j}(x,t)|^{\frac{9}{5}}dx\Big)^{\frac{5}{9}}\le C(t)^{\frac{1}{r_2}}|\ell|^{\beta}\sigma^{\frac{1}{3}}(\ell),\\
&with\ \frac{2}{r_1}+\frac{1}{r_2}=1, 1<r_1,r_2<\infty, 2\alpha+\beta\ge 1,
\end{aligned}\tag{1.8}$$

其中，对于 $i=1,\ C_i(t)$ 的两个函数在 $[0,T]$ 上均为可积函数，而对于 $i=1,\ \sigma_i(\ell)$ 的两个函数在原点的某个邻域内均为有界函数。假设 $\sigma_i(\ell)$ 中至少有一个满足 $\sigma_i(\ell)\to 0$ 当 $\ell\to 0$。那么能量守恒。

注 1.4。推论 1.2 表明，满足 $2\alpha+\beta>1$ 和 $\frac{2}{r_1}+\frac{1}{r_2}=1$ 的 $b\in L^{r_1}(0,T;B^{\alpha}_{\frac{9}{2},\infty})$ 与 $\vec{j}\in L^{r_1}(0,T;B^{\beta}_{\frac{9}{5},\infty})$ 可保证电子磁流体动力学弱解的能量不变。这与 Chae 在 [8] 中证明的螺度守恒判据相近。

接下来，我们考虑第二个守恒量——磁螺度

$$\int_{\mathbb{T}^d}A\cdot\operatorname{curl}A\,dx,\tag{1.9}$$

作为等离子体运动的一个拓扑不变量，其中 $A=\operatorname{curl}^{-1}b$ 表示磁矢势。由电子磁流体动力学方程 (1.4)，我们推导出磁矢势方程

$$A_t+(\nabla\times b)\times b+\nabla\pi=0,\operatorname{div}A=0.\tag{1.10}$$

定理 1.3. 设 b 是 EMDH 方程 (1.4) 的一个弱解，磁矢势 A 满足 (1.10)。假设

$$\vec{j}\in L^{\infty}(0,T;L^{\frac{3}{2}}(\mathbb{T}^3))\text{ and }A\in C((0,T)\times\mathbb{T}^3).\tag{1.11}$$

则函数

$$D_{mh}(b,\varepsilon)=-\frac{1}{2}\int_{\mathbb{T}^3}\nabla\varphi_{\varepsilon}(\ell)\cdot\delta b(\ell)|\delta b(\ell)|^2d\ell,\tag{1.12}$$

当 $\varepsilon\to 0$ 时，收敛到分布意义下的分布 $D_{mh}(b)$，且 $D_{mh}(b)$ 满足局部能量平衡

$$\partial_t(bA)+\operatorname{div}([\operatorname{div}(b\otimes b)]\times A)+\operatorname{div}[\pi b]+\operatorname{div}(b|b|^2)=D_{mh}(b)$$

在分布意义下成立。此外，以下 $4/3$ 定律成立

$$S(b,b,b)=-\frac{4}{3}D_{mh}(b),\tag{1.13}$$

其中

$$S(b,b,b)=-\lim_{\lambda\to 0}S(b,b,b;\lambda)=-\lim_{\lambda\to 0}\frac{1}{\lambda}\int_{\partial B}\ell\cdot\delta b(\lambda\ell)|\delta b(\lambda\ell)|^2\frac{d\sigma(\ell)}{4\pi}.$$

注 1.5。与能量的 4/3 定律 (1.7) 不同，据作者所知，系统 (1.4) 中磁螺度的四分之三关系式 (1.13) 是全新的。通过 K´arm´an-Howarth 方程推导 (1.13) 是一个有趣的问题。

注 1.6。根据推论 (1.2)，耗散项 (1.12) 意味着，如果 $b \in L^{r_1}(0,T;B^{\alpha}_{3,\infty})$ 且 $\alpha > 1/3$，那么电子磁流体动力学的弱解会保持磁螺度。

我们将注意力转向以下霍尔磁流体力学方程

$$\begin{cases} u_t + u\cdot\nabla u - b\cdot\nabla b + \nabla\Pi = 0, \\ b_t + u\cdot\nabla b - b\cdot\nabla u + \nabla\times[(\nabla\times b)\times b] = 0, \\ \operatorname{div} u = \operatorname{div} b = 0, \end{cases} \tag{1.14}$$

其中，v 和 Π 分别表示流动的速度场和流体的压强。接下来的目标是将电子磁流体动力学系统 (1.4) 中的能量和螺度四分之三定律推广至霍尔磁流体动力学方程 (1.14)。

定理 1.4。设二元组 (u,b) 是霍尔磁流体动力学方程 (1.14) 的一个弱解。假设对任意的 $1<p$、q、m、$n<\infty$，其中 $\frac{2}{p}+\frac{1}{m}=1$、$\frac{2}{q}+\frac{1}{n}=1$，使得 (θ,v) 满足

$$\begin{aligned} &u \in L^{\infty}(0,T;L^2(\mathbb{T}^3))\cap L^3(0,T;L^3(\mathbb{T}^3)), \\ &b \in L^{\infty}(0,T;L^2(\mathbb{T}^3))\cap L^p(0,T;L^q(\mathbb{T}^3)) \text{ and } \vec{j}\in L^m(0,T;L^n(\mathbb{T}^3)). \end{aligned} \tag{1.15}$$

则函数

$$\begin{aligned} D(u,b,\vec{j};\varepsilon) =& -\frac{1}{4}\int_{\mathbb{T}^3}\nabla\varphi_\varepsilon(\ell)\cdot\delta u(\ell)|\delta u(\ell)|^2 d\ell - \frac{1}{4}\int_{\mathbb{T}^3}\nabla\varphi_\varepsilon(\ell)\cdot\delta b(\ell)|\delta u(\ell)\cdot\delta b(\ell)|d\ell \\ &+\frac{1}{2}\int_{\mathbb{T}^3}\nabla\varphi_\varepsilon(\ell)\cdot\delta u(\ell)|\delta b(\ell)\cdot\delta b(\ell)|d\ell \\ &+\frac{1}{8}\int_{\mathbb{T}^3}\nabla\varphi_\varepsilon(\ell)\cdot\delta\vec{j}(\ell)|\delta b(\ell)|^2 d\ell - \frac{1}{4}\int_{\mathbb{T}^3}\nabla\varphi_\varepsilon(\ell)\cdot\delta b(\ell)|\delta\vec{j}(\ell)\cdot\delta b(\ell)|d\ell \end{aligned}$$

当 $\varepsilon\to 0$ 时，在分布意义下收敛于一个分布 $D(u,b,\vec{j})$，且 $D(u,b,\vec{j})$ 满足局部能量方程

$$\begin{aligned} &\partial_t(\frac{u^2+b^2}{2}) + \operatorname{div}\Big[u\Big(\frac{1}{2}(|u|^2+|b|^2)+\Pi\Big) - b(b\cdot u)\Big] \\ &+\frac{1}{2}\operatorname{div}([\operatorname{div}(b\otimes b)\times b] - \frac{1}{4}\operatorname{div}(\vec{j}|b|^2) + \frac{1}{2}\operatorname{div}(b\vec{j}\cdot b) = D(u,b,\vec{j}), \end{aligned}$$

在分布意义下。此外，以下 4/3 定律成立

$$S_3(u,u,u) + S_4(u,b,b) - 2S_5(b,u,b) - \frac{1}{2}S_1(\vec{j},b,b) + S_2(b,\vec{j},b) = -\frac{4}{3}D(u,b,\vec{j}), \tag{1.16}$$

其中

$$\begin{aligned} S_3(u,u,u) &= -\lim_{\lambda\to 0} S_1(u,u,u;\lambda) = -\lim_{\lambda\to 0}\frac{1}{\lambda}\int_{\partial B}\ell\cdot\delta u(\lambda\ell)|\delta u(\lambda\ell)|^2\frac{d\sigma(\ell)}{4\pi}, \\ S_4(u,b,b) &= -\lim_{\lambda\to 0} S_2(u,b,b;\lambda) = -\lim_{\lambda\to 0}\frac{1}{\lambda}\int_{\partial B}\ell\cdot\delta u(\lambda\ell)|\delta b(\lambda\ell)|^2\frac{d\sigma(\ell)}{4\pi}, \\ S_5(b,u,b) &= -\lim_{\lambda\to 0} S_3(b,u,b;\lambda) = -\lim_{\lambda\to 0}\frac{1}{\lambda}\int_{\partial B}\ell\cdot\delta b(\lambda\ell)|\delta u(\lambda\ell)\cdot\delta b(\ell)|\frac{d\sigma(\ell)}{4\pi}. \end{aligned}$$

注 1.7. 我们想指出，关系式 (1.16) 与 [21, 27] 中证明的结果一致。

除总能量守恒外，霍尔磁流体力学方程 (1.14) 的光滑解还满足磁螺度守恒。对于霍尔磁流体动力学方程 (1.14)，由以下磁矢势方程和 (2.1)$_2$ 可推得

$$A_t - u \times b + (\nabla \times b) \times b + \nabla \pi = 0, \mathrm{div} A = 0. \tag{1.17}$$

关于霍尔磁流体力学 (1.14) 中螺度四分之三定律的研究，相关文献并不多。最终结果表述如下。

定理1.5. 设 b 是 HMDH 方程 (1.14) 的一个弱解，磁矢势 A 满足 (1.17)。假设

$$\vec{j} \in L^\infty(0,T;L^{\frac{3}{2}}(\mathbb{T}^3)),\ u \in L^3(0,T;L^3(\mathbb{T}^3)) \text{and } A \in C((0,T)\times\mathbb{T}^3). \tag{1.18}$$

则函数

$$D_{mh}(b,\varepsilon) = -\frac{1}{2}\int_{\mathbb{T}^3} \nabla \varphi_\varepsilon(\ell)\cdot \delta b(\ell)|\delta b(\ell)|^2 d\ell,$$

在 $\varepsilon \to 0$ 时收敛到分布 $D_{mh}(b)$，这里的收敛是在分布意义下的；并且 $D_{mh}(b)$ 满足局部能量方程

$$\partial_t(bA) + \mathrm{div}([\mathrm{div}(b\otimes b)]\times A) + \mathrm{div}[\pi b] + \mathrm{div}(b|b|^2) = D_{mh}(b)$$

在分布意义下成立。此外，还成立以下 $4/3$ 定律

$$S(b,b,b) = -\frac{4}{3} D_{mh}(b,\varepsilon), \tag{1.19}$$

其中

$$S(b,b,b) = -\lim_{\lambda\to 0} S(b,b,b;\lambda) = -\lim_{\lambda\to 0}\frac{1}{\lambda}\int_{\partial B} \ell\cdot\delta b(\lambda\ell)|\delta b(\lambda\ell)|^2 \frac{d\sigma(\ell)}{4\pi}.$$

注1.8. 关系 (1.19) 似乎是霍尔磁流体动力学方程中首个关于磁螺度的 4/3 定律。读者可参阅 [3]，了解 HMHD 方程中磁螺度的其他精确关系。

最后，我们介绍本文将用到的一些记号。首先，对于 $p \in [1,\infty]$，记号 $L^p(0,T;X)$ 表示定义在区间 $(0,T)$ 上、取值于 X 且 $\|f\|_X$ 属于 $L^p(0,T)$ 的可测函数f的集合。其次，我们将使用标准磨光核，即当 $|x|<1$ 时，$\varphi(x) = C_0 e^{-\frac{1}{1-|x|^2}}$；当$|x|\geq 1$时，$\varphi(x) = 0$，其中 C_0 是满足 $\int_{\mathbb{R}^3}\varphi(x)dx = 1$ 的常数。最后，对于 $\varepsilon>0$，我们将缩放磨光子记为 $\varphi_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^3}\varphi(\frac{x}{\varepsilon})$，对于任意函数 $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^3)$，其磨光版本定义为

$$f^\varepsilon(x) = \int_{\mathbb{R}^3}\varphi_\varepsilon(x-y)f(y)dy,\ \ x\in\mathbb{R}^3.$$

本文的组织结构如下。第2节讨论电子磁流体力学方程中能量和磁螺度的精确关系。第3节建立霍尔磁流体力学方程中的四分之三定律。最后，第4节给出总结。

2 电子磁流体动力学系统中的四分之三定律

本节旨在研究电子磁流体力学方程 (1.4) 中能量和磁螺度耗散率的 4/3 定律。在开始证明之前，我们先回顾一些向量恒等式，如下所示，

$$\begin{aligned}
&\nabla(\vec{A}\cdot\vec{B}) = \vec{A}\cdot\nabla\vec{B} + \vec{B}\cdot\nabla\vec{A} + \vec{A}\times\mathrm{curl}\vec{B} + \vec{B}\times(\nabla\times\vec{A}),\\
&\nabla\times(\vec{A}\times\vec{B}) = \vec{A}\mathrm{div}\vec{B} - \vec{B}\mathrm{div}\vec{A} + \vec{B}\cdot\nabla\vec{A} - \vec{A}\cdot\nabla\vec{B},\\
&\vec{A}\cdot(\nabla\times\vec{B}) = \mathrm{div}(\vec{B}\times\vec{A}) + \vec{B}\cdot(\nabla\times\vec{A}),
\end{aligned} \tag{2.1}$$

本文将频繁用到这一结果。结合这一结果与无散条件$\vec{\mathrm{div}}\, j = 0$，可得

$$\begin{aligned}
&b\cdot\nabla b = \frac{1}{2}\nabla|b|^2 + \vec{j}\times b,\\
&\nabla\times(\vec{j}\times b) = b\cdot\nabla\vec{j} - \vec{j}\cdot\nabla b,
\end{aligned} \tag{2.2}$$

由此可得

$$\nabla\times[(\nabla\times b)\times b] = \nabla\times[\vec{j}\times b] = \mathrm{div}(b\otimes\vec{j}) - \mathrm{div}(\vec{j}\otimes b), \tag{2.3}$$

$$\nabla\times[(\nabla\times b)\times b] = \nabla\times[\vec{j}\times b] = \nabla\times[\mathrm{div}(b\otimes b) - \nabla\frac{1}{2}|b|^2] = \nabla\times[\mathrm{div}(b\otimes b)]. \tag{2.4}$$

因此，我们得到 EMDH 方程 (1.4) 的两种等价形式

$$b_t + \mathrm{div}(b\otimes\vec{j}) - \mathrm{div}(\vec{j}\otimes b) = 0, \tag{2.5}$$

$$b_t + \nabla\times[\mathrm{div}(b\otimes b)] = 0. \tag{2.6}$$

2.1 EMHD 系统中能量的精确关系

定理 1.1 的证明。通过对方程 (2.5) 进行磨光，我们得到

$$b_t^\varepsilon + \mathrm{div}(b\otimes\vec{j})^\varepsilon - \mathrm{div}(\vec{j}\otimes b)^\varepsilon = 0.$$

将上述方程分别乘以 b，将方程 (2.5) 乘以 b^ε，然后将两式相加，得到

$$\partial_t(bb^\varepsilon) + \mathrm{div}(b\otimes\vec{j})^\varepsilon b + \mathrm{div}(b\otimes\vec{j})b^\varepsilon - \mathrm{div}(\vec{j}\otimes b)^\varepsilon b - \mathrm{div}(\vec{j}\otimes b)b^\varepsilon = 0. \tag{2.7}$$

同理,

$$\partial_t(bb^\varepsilon) + b\cdot\{\nabla\times[\mathrm{div}(b\otimes b)]^\varepsilon\} + b^\varepsilon\cdot\{\nabla\times[\mathrm{div}(b\otimes b)]\} = 0. \tag{2.8}$$

借助恒等式 $(2.1)_3$，我们可知

$$\begin{aligned}
b\cdot\{\nabla\times[\mathrm{div}(b\otimes b)]^\varepsilon\} =& \mathrm{div}([\mathrm{div}(b\otimes b)]^\varepsilon\times b) + [\mathrm{div}(b\otimes b)]^\varepsilon\cdot(\nabla\times b)\\
=& \mathrm{div}([\mathrm{div}(b\otimes b)]^\varepsilon\times b) + [\mathrm{div}(b\otimes b)]^\varepsilon\cdot\vec{j}
\end{aligned}$$

and

$$b^\varepsilon\cdot\{\nabla\times[\mathrm{div}(b\otimes b)]\} = \mathrm{div}([\mathrm{div}(b\otimes b)]\times b^\varepsilon) + [\mathrm{div}(b\otimes b)]\cdot\vec{j}^\varepsilon.$$

将后两个方程代入 (2.8)，可知

$$\begin{aligned}&\partial_t(bb^\varepsilon)+\mathrm{div}([\mathrm{div}(b\otimes b)]^\varepsilon\times b)+\mathrm{div}([\mathrm{div}(b\otimes b)]^\varepsilon\times b)\\&+[\mathrm{div}(b\otimes b)]^\varepsilon\cdot\vec{j}+[\mathrm{div}(b\otimes b)]\cdot\vec{j}^\varepsilon=0.\end{aligned}\tag{2.9}$$

将 (2.7) 和 (2.9) 合并，可得

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\partial_t(bb^\varepsilon)+\frac{1}{4}\{\mathrm{div}([\mathrm{div}(b\otimes b)]^\varepsilon\times b)+\mathrm{div}([\mathrm{div}(b\otimes b)]\times b^\varepsilon)\\&+[\mathrm{div}(b\otimes b)]^\varepsilon\cdot\vec{j}+[\mathrm{div}(b\otimes b)]\cdot\vec{j}^\varepsilon+\mathrm{div}(b\otimes\vec{j})^\varepsilon b+\mathrm{div}(b\otimes\vec{j})b^\varepsilon\\&-\mathrm{div}(\vec{j}\otimes b)^\varepsilon\cdot b-\mathrm{div}(\vec{j}\otimes b)^\varepsilon\cdot b\}=0.\end{aligned}\tag{2.10}$$

容易验证

$$\begin{aligned}\partial_k(\vec{j}_kb_i)^\varepsilon b_i+\partial_k(\vec{j}_kb_i)b_i^\varepsilon=&\partial_k(\vec{j}_kb_ib_i^\varepsilon)+\partial_k(\vec{j}_kb_i)^\varepsilon b_i-(\vec{j}_kb_i)\partial_kb_i^\varepsilon\\=&\mathrm{div}(\vec{j}b\cdot b^\varepsilon)+\partial_k(\vec{j}_kb_i)^\varepsilon b_i-(\vec{j}_kb_i)\partial_kb_i^\varepsilon,\end{aligned}$$

这意味着

$$\mathrm{div}(\vec{j}\otimes b)^\varepsilon\cdot b+\mathrm{div}(\vec{j}\otimes b)\cdot b^\varepsilon=\mathrm{div}(\vec{j}b\cdot b^\varepsilon)+\partial_k(\vec{j}_kb_i)^\varepsilon b_i-(\vec{j}_kb_i)\partial_kb_i^\varepsilon.\tag{2.11}$$

直接计算可得

$$\begin{aligned}\partial_k(b_kb_i)^\varepsilon\vec{j}_i+\partial_k(b_kb_i)j_i^\varepsilon&=\partial_k(b_kb_ij_i^\varepsilon)+\partial_k(b_kb_i)^\varepsilon\vec{j}_i-(b_kb_i)\partial_kj_i^\varepsilon,\\\partial_k(b_k\vec{j}_i)^\varepsilon b_i+\partial_k(b_kj_i)b_i^\varepsilon&=\partial_k(b_kj_ib_i^\varepsilon)+\partial_k(b_k\vec{j}_i)^\varepsilon b_i-(b_kj_i)\partial_kb_i^\varepsilon.\end{aligned}\tag{2.12}$$

注意

$$\begin{aligned}&[\mathrm{div}(b\otimes b)]^\varepsilon\cdot\vec{j}+[\mathrm{div}(b\otimes b)]^\varepsilon\cdot\vec{j}+\mathrm{div}(b\otimes\vec{j})^\varepsilon b+\mathrm{div}(b\otimes\vec{j})b^\varepsilon\\=&\partial_k(b_kb_i)^\varepsilon\vec{j}_i+\partial_k(b_kb_i)j_i^\varepsilon+\partial_k(b_k\vec{j}_i)^\varepsilon b_i+\partial_k(b_kj_i)b_i^\varepsilon.\end{aligned}\tag{2.13}$$

将 (2.11) 代入 (2.13)，可写为

$$\begin{aligned}&[\mathrm{div}(b\otimes b)]^\varepsilon\cdot\vec{j}+[\mathrm{div}(b\otimes b)]^\varepsilon\cdot\vec{j}+\mathrm{div}(b\otimes\vec{j})^\varepsilon b+\mathrm{div}(b\otimes\vec{j})b^\varepsilon\\=&\mathrm{div}[b(b\cdot j^\varepsilon)]+\partial_k(b_kb_i)^\varepsilon\vec{j}_i-(b_kb_i)\partial_kj_i^\varepsilon+\mathrm{div}[b(b^\varepsilon\cdot j)]+\partial_k(b_kb_i)^\varepsilon\vec{j}_i-(b_kb_i)\partial_kj_i^\varepsilon\\=&\mathrm{div}[b(b\cdot j^\varepsilon)]+\mathrm{div}[b(b^\varepsilon\cdot j)]+\partial_k(b_kb_i)^\varepsilon\vec{j}_i-(b_kb_i)\partial_kj_i^\varepsilon+\partial_k(b_k\vec{j}_i)^\varepsilon b_i-(b_kj_i)\partial_kb_i^\varepsilon\end{aligned}\tag{2.14}$$

将（2.11）和（2.14）代入（2.10），得到

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\partial_t(bb^\varepsilon)+\frac{1}{4}\mathrm{div}([\mathrm{div}(b\otimes b)]^\varepsilon\times b)+\frac{1}{4}\mathrm{div}([\mathrm{div}(b\otimes b)]\times b^\varepsilon)\\&+\frac{1}{4}\mathrm{div}[b(b\cdot j^\varepsilon)]+\frac{1}{4}\mathrm{div}[b(b^\varepsilon\cdot j)]-\frac{1}{4}\mathrm{div}(\vec{j}b\cdot b^\varepsilon)\\&=\frac{1}{4}[\partial_k(\vec{j}_kb_i)^\varepsilon b_i-(\vec{j}_kb_i)\partial_kb_i^\varepsilon]\\&-\frac{1}{4}[\partial_k(b_kb_i)^\varepsilon\vec{j}_i-(b_kb_i)\partial_kj_i^\varepsilon+\partial_k(b_k\vec{j}_i)^\varepsilon b_i-(b_kj_i)\partial_kb_i^\varepsilon].\end{aligned}\tag{2.15}$$

在进一步讨论之前，我们先定义

$$\delta\vec{j}_i(\ell)=\vec{j}_i(x+\ell)-\vec{j}_i(x)=J_i-\vec{j}_i\text{ and }\delta b_i(\ell)=b_i(x+\ell)-b_i(x)=B_i-b_i.$$

我们注意到

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{T}^3} \nabla\varphi_\varepsilon(\ell)\cdot\delta\vec{j}(\ell)|\delta b(\ell)\cdot\delta b(\ell)|d\ell\\
=&\int_{\mathbb{T}^3} \partial_{l_k}\varphi_\varepsilon(\ell)[\vec{J}_k(x+\ell)-\vec{j}_k(x)][B_i(x+\ell)-b_i(x)]^2 d\ell\\
=&\int_{\mathbb{T}^3} \partial_{l_k}\varphi_\varepsilon(\ell)[\vec{J}_k B_i^2-2\vec{J}_k B_i b_i+\vec{J}_k b_i^2-\vec{j}_k b_i^2-\vec{j}_k B_i^2+2\vec{j}_k B_i b_i^2]d\ell.
\end{aligned}$$

考虑到变量变换，我们推导得出

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{T}^3} \partial_{l_k}\varphi_\varepsilon(\ell)J_k B_i^2 d\ell =&\int_{\mathbb{T}^3} \partial_{l_k}\varphi_\varepsilon(\ell)\vec{j}_k(x+\ell)b_i^2(x+\ell)d\ell\\
=&\int_{\mathbb{T}^3} \partial_{\eta_k}\varphi_\varepsilon(\eta-x)\vec{j}_k(\eta)b_i^2(\eta)d\eta\\
=&-\int_{\mathbb{T}^3} \partial_{x_k}\varphi_\varepsilon(\eta-x)\vec{j}_k(\eta)b_i^2(\eta)d\eta\\
=&-\partial_k(\vec{j}_k b_i^2 * \varphi_\varepsilon)\\
=&-\partial_k(\vec{j}_k b_i^2)^\varepsilon.
\end{aligned}$$

按照上述推导中的相同方法进行论证，我们发现

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{T}^3} \partial_{l_k}\varphi_\varepsilon(\ell)[\vec{J}_k B_i^2-2\vec{J}_k B_i b_i+\vec{J}_k b_i^2-\vec{j}_k B_i^2+2\vec{j}_k B_i b_i^2-\vec{j}_k b_i^2]d\ell\\
=&-\partial_k(\vec{j}_k b_i^2)^\varepsilon+2\partial_k(\vec{j}_k\theta)^\varepsilon b_i-\partial_k\vec{j}_k^\varepsilon b_i^2+\vec{j}_k\partial_k(b_i^2)^\varepsilon-2\vec{j}_k\partial_k b_i^\varepsilon b_i-\vec{j}_k b_i^2\int_{\mathbb{T}^3}\partial_{l_k}\varphi_\varepsilon(\ell)d\ell\\
=&\partial_k\Big(\vec{j}_k(b_i^2)^\varepsilon-(\vec{j}_k b_i^2)^\varepsilon\Big)+2\partial_k(\vec{j}_k b_i)^\varepsilon b_i-2\vec{j}_k\partial_k b_i^\varepsilon b_i,
\end{aligned}$$

这由此得出

$$\int_{\mathbb{T}^3}\nabla\varphi_\varepsilon(\ell)\cdot\delta\vec{j}(\ell)|\delta b(\ell)\cdot\delta b(\ell)|d\ell=\partial_k\Big(\vec{j}_k(b_i^2)^\varepsilon-(\vec{j}_k b_i^2)^\varepsilon\Big)+2\partial_k(\vec{j}_k b_i)^\varepsilon b_i-2\vec{j}_k\partial_k b_i^\varepsilon b_i. \tag{2.16}$$

重复上述推导过程，由无散条件 $\operatorname{div}\ v=0$ 和 $\operatorname{div} b=0$，我们推导得出

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{T}^3}\nabla\varphi_\varepsilon(\ell)\cdot\delta b(\ell)|\delta j(\ell)\cdot\delta b(\ell)|d\ell\\
=&-\partial_k(b_k\vec{j}_i b_i)^\varepsilon+\partial_k(b_k\vec{j}_i)^\varepsilon b_i+\partial_k(b_k b_i)^\varepsilon\vec{j}_i-\partial_k b_k^\varepsilon b_i\vec{j}_i+b_k\partial_k(\vec{j}_i b_i)^\varepsilon-b_k b_i\partial_k\vec{j}_i^\varepsilon-b_k\vec{j}_i\partial_k b_i^\varepsilon\\
=&-\partial_k(b_k\vec{j}_i b_i)^\varepsilon+\partial_k(b_k\vec{j}_i)^\varepsilon b_i+\partial_k(b_k b_i)^\varepsilon\vec{j}_i+b_k\partial_k(\vec{j}_i b_i)^\varepsilon-b_k b_i\partial_k\vec{j}_i^\varepsilon-b_k\vec{j}_i\partial_k b_i^\varepsilon\\
=&\partial_k\Big(b_k(\vec{j}_i v_i)^\varepsilon-(b_k\vec{j}_i b_i)^\varepsilon\Big)+\partial_k(b_k b_i)^\varepsilon\vec{j}_i-b_k b_i\partial_k\vec{j}_i^\varepsilon+\partial_k(b_k\vec{j}_i)^\varepsilon b_i-b_k\vec{j}_i\partial_k b_i^\varepsilon.
\end{aligned} \tag{2.17}$$

条件 (1.5) 确保 (2.16) 和 (2.17) 右端的第一项在 $(0,T)\times\mathbb{T}^3$ 上按分布意义收敛于 0，当 $\varepsilon\to 0$ 时。因此，极限

$$D(v,\vec{j};\varepsilon)=\frac{1}{8}\int_{\mathbb{T}^3}\nabla\varphi_\varepsilon(\ell)\cdot\delta\vec{j}(\ell)|\delta b(\ell)|^2 d\ell-\frac{1}{4}\int_{\mathbb{T}^3}\nabla\varphi_\varepsilon(\ell)\cdot\delta b(\ell)|\delta j(\ell)\cdot\delta b(\ell)|d\ell,$$

与下式相同

$$\frac{1}{4}[\partial_k(\vec{j}_k b_i)^\varepsilon b_i - (\vec{j}_k b_i)\partial_k b_i^\varepsilon] - \frac{1}{4}[\partial_k(b_k b_i)^\varepsilon \vec{j}_i - (b_k b_i)\partial_k j_i^\varepsilon + \partial_k(b_k \vec{j}_i)^\varepsilon b_i - (b_k j_i)\partial_k b_i^\varepsilon].$$

现在还需要考察（2.15）左端各项的极限。事实上，再次利用（1.5），我们知道，$\frac{1}{4}\mathrm{div}[b(b\cdot j^\varepsilon)] + \frac{1}{4}\mathrm{div}[b(b^\varepsilon\cdot j)] - \frac{1}{4}\mathrm{div}(\vec{j}b\cdot b^\varepsilon)$在分布意义下于 $(0,T)\times\mathbb{T}^3$ as $\varepsilon\to 0$上趋于 $\frac{1}{2}\mathrm{div}[b(b\cdot j)] - \frac{1}{4}\mathrm{div}(\vec{j}b\cdot b)$。根据众所周知的毕奥-萨伐尔定律，我们由 $\vec{j}\in L^m(0,T;\ L^n(\mathbb{T}^3))$ 推得$\nabla b\in L^m(0,T;\ L^n(\mathbb{T}^3))$。因此，我们断言，$\frac{1}{4}\mathrm{div}([\mathrm{div}(b\otimes b)]^\varepsilon\times b)+\frac{1}{4}\mathrm{div}([\mathrm{div}(b\otimes b)]\times b^\varepsilon)$在分布意义下于 $(0,T)\times\mathbb{T}^3$ as $\varepsilon\to 0$As 上收敛于 $\frac{1}{4}\mathrm{div}([\mathrm{div}(b\otimes b)]^\varepsilon\times b)$。由此，定理 1.1 第一部分的证明完成。其余部分旨在证明（1.7）。利用极坐标并多次进行变量代换后，我们得到

$$\begin{aligned}
&D(b,\vec{j};\varepsilon)\\
=&\frac{1}{8}\int_{\mathbb{T}^3}\nabla\varphi_\varepsilon(\ell)\cdot\delta\vec{j}(\ell)|\delta b(\ell)|^2 d\ell - \frac{1}{4}\int_{\mathbb{T}^3}\nabla\varphi_\varepsilon(\ell)\cdot\delta b(\ell)|\delta\vec{j}(\ell)\cdot\delta b(\ell)|d\ell\\
=&\frac{1}{8}\int_0^\infty\int_{\partial B}\frac{r^2}{\varepsilon}\varphi'(|\zeta r|)\frac{\zeta}{|\zeta|}\cdot[\vec{j}(x+\zeta r\varepsilon)-\vec{j}(x)][b(x+\zeta r\varepsilon)-b(x)]^2 d\sigma(\zeta)dr\\
&-\frac{1}{4}\int_0^\infty\int_{\partial B}\frac{r^2}{\varepsilon}\varphi'(|\zeta r|)\frac{\zeta}{|\zeta|}\cdot[b(x+\zeta r\varepsilon)-b(x)][(\vec{j}(x+\zeta r\varepsilon)-\vec{j}(x))(b(x+\zeta r\varepsilon)-b(x))]d\sigma(\zeta)dr\\
=&\frac{1}{2}\pi\int_0^\infty r^3\varphi'(r)dr\int_{\partial B}\frac{\zeta\cdot[\vec{j}(x+\zeta r\varepsilon)-\vec{j}(x)][b(x+\zeta r\varepsilon)-b(x)]^2\frac{d\sigma(\zeta)}{4\pi}}{r\varepsilon}\\
&-\pi\int_0^\infty r^3\varphi'(r)dr\int_{\partial B}\frac{\zeta\cdot[b(x+\zeta r\varepsilon)-b(x)][(\vec{j}(x+\zeta r\varepsilon)-\vec{j}(x))(b(x+\zeta r\varepsilon)-b(x))]\frac{d\sigma(\zeta)}{4\pi}}{r\varepsilon}.
\end{aligned}\tag{2.18}$$

由分部积分可得

$$\int_0^\infty r^3\varphi'(r)dr = -3\int_0^\infty r^2\varphi(r)dr = -\frac{3}{4\pi}\int_{\mathbb{R}^3}\varphi(\ell)d\ell = -\frac{3}{4\pi}.\tag{2.19}$$

将 (2.19) 代入 (2.18)，可得

$$\begin{aligned}
&D(v,\vec{j})\\
=&\lim_{\varepsilon\to 0}D(v,\vec{j};\varepsilon)\\
=&\frac{\pi}{2}\pi\int_0^\infty r^3\varphi'(r)dr\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\partial B}\frac{\zeta\cdot[\vec{j}(x+\zeta r\varepsilon)-\vec{j}(x)][b(x+\zeta r\varepsilon)-b(x)]^2\frac{d\sigma(\zeta)}{4\pi}}{r\varepsilon}\\
&-\pi\int_0^\infty r^3\varphi'(r)dr\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\partial B}\frac{\zeta\cdot[b(x+\zeta r\varepsilon)-b(x)][(\vec{j}(x+\zeta r\varepsilon)-\vec{j}(x))(b(x+\zeta r\varepsilon)-b(x))]\frac{d\sigma(\zeta)}{4\pi}}{r\varepsilon}\\
=&\frac{3}{8}S_1(\vec{j},b,b)-\frac{3}{4}S_2(b,\vec{j},b).
\end{aligned}$$

因此，我们得出 Yaglom 型关系 (1.7)。 □

下面我们将对式 (2.15) 给出一种略有不同的推导方法。

式 (2.15) 的另一种证明。显然,

$$\begin{aligned}&\nabla\times[(\nabla\times b)\times b]\cdot b^\varepsilon+\nabla\times[(\nabla\times b)\times b]^\varepsilon\cdot b\\=&\frac{1}{2}\{2\nabla\times[(\nabla\times b)\times b]\cdot b^\varepsilon+2\nabla\times[(\nabla\times b)\times b]^\varepsilon\cdot b\}.\end{aligned}$$

由 (2.3) 和 (2.4)，我们观察到

$$\begin{aligned}&2\nabla\times[(\nabla\times b)\times b]\cdot b^\varepsilon]\\=&[\mathrm{div}(b\otimes\vec{j})-\mathrm{div}(\vec{j}\otimes b)]\cdot b^\varepsilon+\nabla\times[\mathrm{div}(b\otimes b)]\cdot b^\varepsilon\\=&[\mathrm{div}(b\otimes\vec{j})-\mathrm{div}(\vec{j}\otimes b)]\cdot b^\varepsilon+\mathrm{div}([\mathrm{div}(b\otimes b)]\times b^\varepsilon)+[\mathrm{div}(b\otimes b)]\cdot\vec{j}^\varepsilon.\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}&2\nabla\times[(\nabla\times b)\times b]^\varepsilon\cdot b\\=&[\mathrm{div}(b\otimes\vec{j})-\mathrm{div}(\vec{j}\otimes b)]^\varepsilon\cdot b+\nabla\times[\mathrm{div}(b\otimes b)]^\varepsilon\cdot b\\=&[\mathrm{div}(b\otimes\vec{j})-\mathrm{div}(\vec{j}\otimes b)]^\varepsilon\cdot b+\mathrm{div}([\mathrm{div}(b\otimes b)]^\varepsilon\times b)+[\mathrm{div}(b\otimes b)]^\varepsilon\cdot\vec{j}.\end{aligned}$$

因此，我们得到

$$\begin{aligned}&\nabla\times[(\nabla\times b)\times b]\cdot b^\varepsilon+\nabla\times[(\nabla\times b)\times b]^\varepsilon\cdot b\\=&\frac{1}{2}\{\mathrm{div}([\mathrm{div}(b\otimes b)]^\varepsilon\times b)+\mathrm{div}([\mathrm{div}(b\otimes b)]\times b^\varepsilon)\}\\&+\frac{1}{2}\{\mathrm{div}(b\otimes\vec{j})\cdot b^\varepsilon+[\mathrm{div}(b\otimes b)]\cdot\vec{j}^\varepsilon+\mathrm{div}(b\otimes\vec{j})^\varepsilon\cdot b+[\mathrm{div}(b\otimes b)]^\varepsilon\cdot\vec{j}\\&-\mathrm{div}(\vec{j}\otimes b)^\varepsilon\cdot b-\mathrm{div}(\vec{j}\otimes b)\cdot b^\varepsilon\}.\end{aligned}\tag{2.20}$$

利用这一点以及 $\partial_t(bb^\varepsilon)+\nabla\times[(\nabla\times b)\times b]\cdot b^\varepsilon+\nabla\times[(\nabla\times b)\times b]^\varepsilon\cdot b=0$，可立即得到 (2.15)。虽然这种方法可能比较简单，但实际上我们在准备这篇稿件时最早得到的就是这一证明。□

我们利用定理 1.1 中的耗散项 (1.6)，得到电子磁流体动力学方程新的能量守恒判据。

推论 1.2 的证明。由 H¨older 不等式可得

$$\int_{\mathbb{T}^3}|D_\varepsilon(v,\omega)|dx\le\int_{\mathbb{T}^3}|\nabla\varphi_\varepsilon(\ell)|d\ell\Big(\int_{\mathbb{T}^3}|\delta b(\ell)|^{\frac{9}{2}}dx\Big)^{\frac{4}{9}}\Big(\int_{\mathbb{T}^3}|\delta\vec{j}(\ell)|^{\frac{9}{5}}dx\Big)^{\frac{5}{9}}.$$

根据 (1.6) 中的 $D(b,\vec{j};\varepsilon)$，我们得到

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{T}^3}|D(b,\vec{j};\varepsilon)|dx\le&\int_{\mathbb{T}^3}|\nabla\varphi_\varepsilon(\ell)|d\ell\Big(\int_{\mathbb{T}^3}|\delta b(\ell)|^{\frac{9}{2}}dx\Big)^{\frac{4}{9}}\Big(\int_{\mathbb{T}^3}|\delta\vec{j}(\ell)|^{\frac{9}{5}}dx\Big)^{\frac{5}{9}}\\\le&\int_{\mathbb{T}^3}|\nabla\varphi_\varepsilon(\ell)|C(t)^{\frac{2}{r_1}+\frac{1}{r_2}}|\ell|^{2\alpha+\beta}\sigma(\ell)d\ell.\end{aligned}$$

最后，我们通过进行时间积分并作变量替换，得到

$$\begin{aligned}\int_0^T\int_{\mathbb{T}^3}|D_\varepsilon(v,\omega)|dxdt\le&\int_0^T C(t)^{\frac{2}{r_1}+\frac{1}{r_2}}dt\int_{\mathbb{T}^3}|\nabla\varphi_\varepsilon(\ell)||\ell|^{2\alpha+\beta}\sigma(\ell)d\ell\\\le&C\varepsilon^{2\alpha+\beta-1}\int_{|\xi|<1}|\nabla\varphi(\xi)||\xi|^{2\alpha+\beta}\sigma(\varepsilon\xi)d\xi.\end{aligned}$$

由此可得所需结果。□

2.2 电子磁流体动力学方程中的磁螺度精确关系

定理 1.3 的证明。借助 (2.2)，我们将 (1.10) 改写为

$$A_t + (\nabla \times b) \times b + \nabla \pi = A_t + \vec{j} \times b + \nabla \pi = A_t + \operatorname{div}(b \otimes b) + \nabla(-\frac{1}{2}|b|^2 + \pi) = 0.$$

稍微滥用一下记号，我们得到

$$A_t + \operatorname{div}(b \otimes b) + \nabla \pi = 0. \tag{2.21}$$

根据（2.21）和（2.6），我们知道

$$\begin{aligned} &A_t^\varepsilon b + A_t b^\varepsilon + b_t^\varepsilon A + b_t A^\varepsilon + \operatorname{div}(b \otimes b)^\varepsilon b + \operatorname{div}(b \otimes b) b^\varepsilon + \nabla \pi^\varepsilon b \\ &+ \nabla \pi b^\varepsilon + \nabla \times [\operatorname{div}(b \otimes b)]^\varepsilon A + \nabla \times [\operatorname{div}(b \otimes b)] A^\varepsilon = 0. \end{aligned} \tag{2.22}$$

由（2.1）$_3$, 可得

$$\begin{aligned} A \cdot \{\nabla \times [\operatorname{div}(b \otimes b)]^\varepsilon\} =& \operatorname{div}([\operatorname{div}(b \otimes b)]^\varepsilon \times A) + [\operatorname{div}(b \otimes b)]^\varepsilon \cdot (\nabla \times A) \\ =& \operatorname{div}([\operatorname{div}(b \otimes b)]^\varepsilon \times A) + [\operatorname{div}(b \otimes b)]^\varepsilon \cdot b \end{aligned} \tag{2.23}$$

and

$$\begin{aligned} A^\varepsilon \cdot \{\nabla \times [\operatorname{div}(b \otimes b)]\} =& \operatorname{div}([\operatorname{div}(b \otimes b)] \times A^\varepsilon) + [\operatorname{div}(b \otimes b)] \cdot (\nabla \times A^\varepsilon) \\ =& \operatorname{div}([\operatorname{div}(b \otimes b)] \times A^\varepsilon) + [\operatorname{div}(b \otimes b)] \cdot b^\varepsilon. \end{aligned} \tag{2.24}$$

将其代入（2.22），我们进一步推得

$$\begin{aligned} &b_t^\varepsilon A + b_t A^\varepsilon + A_t^\varepsilon b + A_t b^\varepsilon + \operatorname{div}([\operatorname{div}(b \otimes b)]^\varepsilon \times A) + \operatorname{div}([\operatorname{div}(b \otimes b)] \times A^\varepsilon) + \\ &+ \operatorname{div}[\pi^\varepsilon b + \pi b^\varepsilon] = -2[\operatorname{div}(b \otimes b)^\varepsilon b + \operatorname{div}(b \otimes b) b^\varepsilon]. \end{aligned}$$

经过简单计算可得

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(b \otimes b)^\varepsilon b + \operatorname{div}(b \otimes b) b^\varepsilon =& \partial_k (b_k b_i)^\varepsilon b_i + \partial_k (b_k b_i) b_i^\varepsilon \\ =& \partial_k (b_k b_i b_i^\varepsilon) + \partial_k (b_k b_i)^\varepsilon b_i - (b_k b_i) \partial_k b_i^\varepsilon, \end{aligned} \tag{2.25}$$

这有助于我们得到

$$\begin{aligned} &\frac{(b^\varepsilon A)_t + (b A^\varepsilon)_t}{2} + \frac{1}{2}\operatorname{div}([\operatorname{div}(b \otimes b)]^\varepsilon \times A) + \frac{1}{2}\operatorname{div}([\operatorname{div}(b \otimes b)] \times A^\varepsilon) \\ &+ \frac{1}{2}\operatorname{div}[\Pi^\varepsilon b + \Pi b^\varepsilon] + \frac{1}{2}\partial_k (b_k b_i b_i^\varepsilon) = -[\partial_k (b_k b_i)^\varepsilon b_i - (b_k b_i) \partial_k b_i^\varepsilon]. \end{aligned}$$

接下来，我们证明可以在上述方程中取极限。事实上，Sobole夫嵌入与 (1.11) 保证了 $b \in L^\infty(0,T;\ L^3(\mathbb{T}^3))$。电子磁流体动力学中的压力方程 (1.10) 由下式确定：

$$-\Delta \pi = \operatorname{div}\ \operatorname{div}(b \otimes b),$$

这意味着

$$\|\pi\|_{L^{\frac{3}{2}}(0,T;L^{\frac{3}{2}}(\mathbb{T}^3))} \leq C \|b\|^2_{L^3(0,T;L^3(\mathbb{T}^3))}.$$

有了这一点，我们便可以重复前面的论证，证明该定理的第一部分。只需得到 (1.13) 即可。沿着 (2.16) 的思路，我们得出

$$\int_{\mathbb{T}^3} \nabla\varphi_\varepsilon(\ell)\cdot\delta b(\ell)|\delta b(\ell)|^2 d\ell = \partial_k\Big(b_k(b_i^2)^\varepsilon - (b_k b_i^2)^\varepsilon\Big) + 2\partial_k(b_k b_i)^\varepsilon b_i - 2b_k\partial_k b_i^\varepsilon b_i. \tag{2.26}$$

由 (2.18) 和 (2.19) 的推导可得

$$\begin{aligned} D_{mh}(b,\varepsilon) =& \lim_{\varepsilon\to 0} D_\varepsilon(\theta, v) \\ =& -2\pi\int_0^\infty r^3\varphi'(r)dr \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\partial B} \frac{\zeta\cdot[b(x+\zeta r\varepsilon)-b(x)][b(x+\zeta r\varepsilon)-b(x)]^2\frac{d\sigma(\zeta)}{4\pi}}{r\varepsilon} \\ =& -\frac{3}{2}S(b,b,b), \end{aligned}$$

其中用到了 $S(b,b,b)$ 的定义。

由此完成了该定理的证明。 □

3 Fou霍尔磁流体动力学方程中的 r 三分之一次方定律

本节建立了霍尔磁流体动力学方程中能量和磁螺度耗散率的两个 $4/3$ 定律。

3.1 霍尔磁流体动力学方程中的能量精确关系

定理 1.4 的证明。与 (2.7) 的推导类似，我们由 (1.14) 得到

$$\begin{aligned} &(u_i^\varepsilon u_i)_t + (b_i b_i^\varepsilon)_t + \partial_k(u_k u_i)^\varepsilon u_i + \partial_k(u_k u_i)u_i^\varepsilon - \partial_k(b_k b_i)^\varepsilon u_i - \partial_k(b_k b_i)u_i^\varepsilon \\ &+ \partial_i\Pi^\varepsilon u_i + \partial_i\Pi u_i^\varepsilon + \partial_k(u_k b_i)^\varepsilon b_i + \partial_k(u_k b_i)b_i^\varepsilon - \partial_k(b_k u_i)^\varepsilon b_i - \partial_k(b_k u_i)b_i^\varepsilon \\ &+ [\nabla\times[(\nabla\times b)\times b]\cdot b^\varepsilon + \nabla\times[(\nabla\times b)\times b]^\varepsilon\cdot b] = 0. \end{aligned} \tag{3.1}$$

经过几步计算，我们得到

$$\begin{aligned} &\partial_k(u_k u_i)^\varepsilon u_i + \partial_k(u_k u_i)u_i^\varepsilon = \partial_k(u_k u_i u_i^\varepsilon) + \partial_k(u_k u_i)^\varepsilon u_i - u_k u_i\partial_k u_i^\varepsilon \\ &\partial_k(b_k b_i)^\varepsilon u_i + \partial_k(b_k b_i)u_i^\varepsilon = \partial_k(b_k b_i u_i^\varepsilon) + \partial_k(b_k b_i)^\varepsilon u_i - (b_k b_i)\partial_k u_i^\varepsilon \\ &\partial_i\Pi^\varepsilon u_i + \partial_i\Pi u_i^\varepsilon = \partial_i(\Pi^\varepsilon u_i + \Pi u_i^\varepsilon) \\ &\partial_k(u_k b_i)^\varepsilon b_i + \partial_k(u_k b_i)b_i^\varepsilon = \partial_k(u_k b_i b_i^\varepsilon) + \partial_k(u_k b_i)^\varepsilon b_i - (u_k b_i)\partial_k b_i^\varepsilon \\ &\partial_k(b_k u_i)^\varepsilon b_i + \partial_k(b_k u_i)b_i^\varepsilon = \partial_k(b_k u_i b_i^\varepsilon) + \partial_k(b_k u_i)^\varepsilon b_i - (b_k u_i)\partial_k b_i^\varepsilon. \end{aligned} \tag{3.2}$$

利用式（2.20）和（2.14），可得

$$\begin{aligned} &\nabla\times[(\nabla\times b)\times b]\cdot b^\varepsilon + \nabla\times[(\nabla\times b)\times b]^\varepsilon\cdot b \\ =&\frac{1}{2}\{\mathrm{div}([\mathrm{div}(b\otimes b)]^\varepsilon\times b) + \mathrm{div}([\mathrm{div}(b\otimes b)]\times b^\varepsilon)\} \\ &+\frac{1}{2}\{\mathrm{div}(b\otimes\vec{j})\cdot b^\varepsilon + [\mathrm{div}(b\otimes b)]\cdot\vec{j}^\varepsilon + \mathrm{div}(b\otimes\vec{j})^\varepsilon\cdot b + [\mathrm{div}(b\otimes b)]^\varepsilon\cdot\vec{j} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&-\operatorname{div}(\vec{j}\otimes b)^{\varepsilon}\cdot b-\operatorname{div}(\vec{j}\otimes b)\cdot b^{\varepsilon}\}\\
=&\frac{1}{2}\operatorname{div}([\operatorname{div}(b\otimes b)]^{\varepsilon}\times b)+\frac{1}{2}\operatorname{div}([\operatorname{div}(b\otimes b)]\times b^{\varepsilon})\\
&+\frac{1}{2}\operatorname{div}[b(b\cdot j^{\varepsilon})]+\frac{1}{2}\operatorname{div}[b(b^{\varepsilon}\cdot j)]+\frac{1}{2}[\partial_k(b_kb_i)^{\varepsilon}\vec{j}_i-(b_kb_i)\partial_k j_i^{\varepsilon}+\partial_k(b_k\vec{j}_i)^{\varepsilon}b_i-(b_kj_i)\partial_k b_i^{\varepsilon}]\\
&-\frac{1}{2}\operatorname{div}(\vec{j}b\cdot b^{\varepsilon})-\frac{1}{2}[\partial_k(\vec{j}_kb_i)^{\varepsilon}b_i-(\vec{j}_kb_i)\partial_k b_i^{\varepsilon}].
\end{aligned}\tag{3.3}
$$

将式（3.1）和（3.2）代入式（3.3），可得

$$
\begin{aligned}
&\frac{(u_i^{\varepsilon}u_i)_t+(b_ib_i^{\varepsilon})_t}{2}+\frac{\partial_k(u_ku_iu_i^{\varepsilon})-\partial_k(b_kb_iu_i^{\varepsilon})+\partial_k(u_kb_ib_i^{\varepsilon})-\partial_k(u_kb_ib_i^{\varepsilon})}{2}\\
&+\frac{\partial_i(\Pi^{\varepsilon}u_i+\Pi u_i^{\varepsilon})}{2}+\frac{1}{4}\operatorname{div}([\operatorname{div}(b\otimes b)]^{\varepsilon}\times b)+\frac{1}{4}\operatorname{div}([\operatorname{div}(b\otimes b)]\times b^{\varepsilon})\\
&+\frac{1}{4}\operatorname{div}[b(b\cdot j^{\varepsilon})]+\frac{1}{4}\operatorname{div}[b(b^{\varepsilon}\cdot j)]-\frac{1}{4}\operatorname{div}(\vec{j}b\cdot b^{\varepsilon})\\
=&-\frac{1}{2}[\partial_k(u_ku_i)^{\varepsilon}u_i-u_ku_i\partial_k u_i^{\varepsilon}]+\frac{1}{2}[\partial_k(b_kb_i)^{\varepsilon}u_i-(b_kb_i)\partial_k u_i^{\varepsilon}+\partial_k(b_ku_i)^{\varepsilon}b_i-(b_ku_i)\partial_k b_i^{\varepsilon}]\\
&+\frac{1}{4}[\partial_k(\vec{j}_kb_i)^{\varepsilon}b_i-(\vec{j}_kb_i)\partial_k b_i^{\varepsilon}]\\
&-\frac{1}{4}[\partial_k(b_kb_i)^{\varepsilon}\vec{j}_i-(b_kb_i)\partial_k j_i^{\varepsilon}+\partial_k(b_k\vec{j}_i)^{\varepsilon}b_i-(b_kj_i)\partial_k b_i^{\varepsilon}].
\end{aligned}
$$

与（2.16）的推导完全相同，我们得到

$$
\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{T}^3}\nabla\varphi_{\varepsilon}(\ell)\cdot\delta u(\ell)|\delta u(\ell)|^2d\ell=\partial_k\Big[u_k(b_i^2)^{\varepsilon}-(u_ku_i^2)^{\varepsilon}\Big]+2\partial_k(u_ku_i)^{\varepsilon}u_i-2u_k\partial_k u_i^{\varepsilon}u_i,\\
&\int_{\mathbb{T}^3}\nabla\varphi_{\varepsilon}(\ell)\cdot\delta b(\ell)|\delta u(\ell)\cdot\delta b(\ell)|d\ell\\
=&\partial_k\Big[b_k(u_iv_i)^{\varepsilon}-(b_ku_ib_i)^{\varepsilon}\Big]+\partial_k(b_kb_i)^{\varepsilon}u_i-b_kb_i\partial_k u_i^{\varepsilon}+\partial_k(b_ku_i)^{\varepsilon}b_i-b_ku_i\partial_k b_i^{\varepsilon},\\
&\int_{\mathbb{T}^3}\nabla\varphi_{\varepsilon}(\ell)\cdot\delta u(\ell)|\delta b(\ell)\cdot\delta b(\ell)|d\ell=\partial_k\Big[u_k(b_i^2)^{\varepsilon}-(\vec{j}_kb_i^2)^{\varepsilon}\Big]+2\partial_k(u_kb_i)^{\varepsilon}b_i-2u_k\partial_k b_i^{\varepsilon}b_i.
\end{aligned}
$$

回顾（2.16）和（2.17），可得

$$
\int_{\mathbb{T}^3}\nabla\varphi_{\varepsilon}(\ell)\cdot\delta\vec{j}(\ell)|\delta b(\ell)\cdot\delta b(\ell)|d\ell=\partial_k\Big[\vec{j}_k(b_i^2)^{\varepsilon}-(\vec{j}_kb_i^2)^{\varepsilon}\Big]+2\partial_k(\vec{j}_kb_i)^{\varepsilon}b_i-2\vec{j}_k\partial_k b_i^{\varepsilon}b_i,
$$

and

$$
\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{T}^3}\nabla\varphi_{\varepsilon}(\ell)\cdot\delta b(\ell)|\delta j(\ell)\cdot\delta b(\ell)|d\ell\\
=&\partial_k\Big[b_k(\vec{j}_iv_i)^{\varepsilon}-(b_k\vec{j}_ib_i)^{\varepsilon}\Big]+\partial_k(b_kb_i)^{\varepsilon}\vec{j}_i-b_kb_i\partial_k\vec{j}_i^{\varepsilon}+\partial_k(b_k\vec{j}_i)^{\varepsilon}b_i-b_k\vec{j}_i\partial_k b_i^{\varepsilon}.
\end{aligned}\tag{3.4}
$$

对于 (2.18)，采用类似的步骤，我们可写出

$$
\begin{aligned}
&D(u,b,\vec{j};\varepsilon)\\
=&-\frac{1}{4}\int_{\mathbb{T}^3}\nabla\varphi_{\varepsilon}(\ell)\cdot\delta u(\ell)|\delta u(\ell)|^2d\ell-\frac{1}{4}\int_{\mathbb{T}^3}\nabla\varphi_{\varepsilon}(\ell)\cdot\delta b(\ell)|\delta u(\ell)\cdot\delta b(\ell)|d\ell\\
&+\frac{1}{2}\int_{\mathbb{T}^3}\nabla\varphi_{\varepsilon}(\ell)\cdot\delta u(\ell)|\delta b(\ell)\cdot\delta b(\ell)|d\ell
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+\frac{1}{8}\int_{\mathbb{T}^3}\nabla\varphi_\varepsilon(\ell)\cdot\delta\vec{j}(\ell)|\delta b(\ell)|^2d\ell-\frac{1}{4}\int_{\mathbb{T}^3}\nabla\varphi_\varepsilon(\ell)\cdot\delta b(\ell)|\delta\vec{j}(\ell)\cdot\delta b(\ell)|d\ell\\
=&-\pi\int_0^\infty r^3\varphi'(r)dr\int_{\partial B}\frac{\zeta\cdot[b(x+\zeta r\varepsilon)-b(x)][b(x+\zeta r\varepsilon)-b(x)]^2\frac{d\sigma(\zeta)}{4\pi}}{r\varepsilon}\\
&-\pi\int_0^\infty r^3\varphi'(r)dr\int_{\partial B}\frac{\zeta\cdot[b(x+\zeta r\varepsilon)-b(x)][b(x+\zeta r\varepsilon)-b(x)]^2\frac{d\sigma(\zeta)}{4\pi}}{r\varepsilon}\\
&+2\pi\int_0^\infty r^3\varphi'(r)dr\int_{\partial B}\frac{\zeta\cdot[b(x+\zeta r\varepsilon)-b(x)][b(x+\zeta r\varepsilon)-b(x)]^2\frac{d\sigma(\zeta)}{4\pi}}{r\varepsilon}\\
&+\frac{1}{2}\pi\int_0^\infty r^3\varphi'(r)dr\int_{\partial B}\frac{\zeta\cdot[\vec{j}(x+\zeta r\varepsilon)-\vec{j}(x)][b(x+\zeta r\varepsilon)-b(x)]^2\frac{d\sigma(\zeta)}{4\pi}}{r\varepsilon}\\
&-\pi\int_0^\infty r^3\varphi'(r)dr\int_{\partial B}\frac{\zeta\cdot[b(x+\zeta r\varepsilon)-b(x)][(\vec{j}(x+\zeta r\varepsilon)-\vec{j}(x))(b(x+\zeta r\varepsilon)-b(x))]\frac{d\sigma(\zeta)}{4\pi}}{r\varepsilon}.
\end{aligned}
$$

由 (2.19) 和 S_i 的定义可得

$$
\begin{aligned}
D(u,b,\vec{j})=&\lim_{\varepsilon\to0}D(v,\vec{j};\varepsilon)\\
=&-\frac{3}{4}S_3(u,u,u)-\frac{3}{4}S_4(u,b,b)+\frac{3}{2}S_5(b,u,b)+\frac{3}{8}S_1(\vec{j},b,b)-\frac{3}{4}S_2(b,\vec{j},b).
\end{aligned}
$$

由此得到所需结果。 □

3.2 Hall磁流体动力学系统中的磁螺度精确关系

定理1.5的证明。根据(2.1)$_2$ 和(2.4)，我们得到(1.14)$_2$的一种等价的替代表述

$$
b_t+\nabla\times(b\times u)+\nabla\times[\mathrm{div}(b\otimes b)]=0. \tag{3.5}
$$

仿照推导(2.21)时的论证，稍微滥用一下记号，由(1.17)可得

$$
A_t-u\times b+\mathrm{div}(b\otimes b)+\nabla\pi=0. \tag{3.6}
$$

由(3.5)和(3.6)，我们得到

$$
\begin{aligned}
&(A^\varepsilon b)_t+(Ab^\varepsilon)_t-(u\times b)b^\varepsilon-(u\times b)^\varepsilon b-\nabla\times(u\times b)^\varepsilon\cdot A-\nabla\times(u\times b)\cdot A^\varepsilon+\text{散度}(b\otimes b)^\varepsilon b\\
&+\text{散度}(b\otimes b)b^\varepsilon+\nabla\pi^\varepsilon b+\nabla\pi b^\varepsilon+\nabla\times[\text{散度}(b\otimes b)]^\varepsilon A+\nabla\times[\text{散度}(b\otimes b)]A^\varepsilon=0.
\end{aligned} \tag{3.7}
$$

由（2.1）$_3$ 可得

$$
\begin{aligned}
A\cdot[\nabla\times(u\times b)^\varepsilon]=&\mathrm{div}[(u\times b)^\varepsilon\times A]+(u\times b)^\varepsilon\cdot(\nabla\times A)\\
=&\mathrm{div}[(u\times b)^\varepsilon\times A]+(u\times b)^\varepsilon\cdot b.
\end{aligned}
$$

and

$$
A^\varepsilon\cdot[\nabla\times(u\times b)]=\mathrm{div}[(u\times b)\times A^\varepsilon]+(u\times b)\cdot b^\varepsilon.
$$

将式（2.23）和（2.24）代入式（3.7），可得

$$
\begin{aligned}
&(A^\varepsilon b)_t+(Ab^\varepsilon)_t-\mathrm{div}[(u\times b)^\varepsilon\times A]-(u\times b)^\varepsilon\cdot b-\mathrm{div}[(u\times b)\times A^\varepsilon]-(u\times b)\cdot b^\varepsilon\\
&+\mathrm{div}([\mathrm{div}(b\otimes b)]^\varepsilon\times A)+\mathrm{div}([\mathrm{div}(b\otimes b)]\times A^\varepsilon)+\mathrm{div}[\pi^\varepsilon b+\pi b^\varepsilon]\\
=&-2[\mathrm{div}(b\otimes b)^\varepsilon b+\mathrm{div}(b\otimes b)b^\varepsilon].
\end{aligned}
$$

结合式（2.25），可知

$$\begin{aligned}&\frac{(b^\varepsilon A)_t+(bA^\varepsilon)_t}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{div}[(u\times b)^\varepsilon\times\vec{A}]+\frac{1}{2}\mathrm{div}[(u\times b)\times\vec{A^\varepsilon}]+\frac{1}{2}\mathrm{div}([\mathrm{div}(b\otimes b)]^\varepsilon\times\vec{A})\\&+\frac{1}{2}\mathrm{div}([\mathrm{div}(b\otimes b)]\times\vec{A^\varepsilon})+\frac{1}{2}\mathrm{div}[\pi^\varepsilon b+\pi b^\varepsilon]+\frac{1}{2}\partial_k(b_kb_ib_i^\varepsilon)\\=&-[\partial_k(b_kb_i)^\varepsilon b_i-(b_kb_i)\partial_kb_i^\varepsilon]+\frac{1}{2}(u\times b)^\varepsilon\cdot b+\frac{1}{2}(u\times b)\cdot b^\varepsilon.\end{aligned}$$

只需注意，$u,b\in L^3(0,T;L^3(\mathbb{T}^3))$ 可确保极限 $\frac{1}{2}(u\times b)^\varepsilon\cdot b+\frac{1}{2}(u\times b)\cdot b^\varepsilon$ 为零，其中 $\varepsilon\to 0.$。其余证明与上一小节中的论证相同。这里省略细节。证明完毕。

□

4 结论

速度场与温度场混合矩的首个 4/3 关系由 Yaglom 在 [38] 中提出。这类四分之三定律存在于大量湍流模型中（例如参见 [1, 2, 10, 12, 21, 24–27, 31–34, 37, 39]）。这些模型中的非线性项几乎都属于对流型，而非霍尔型。充分利用霍尔项的结构，我们给出了电子磁流体动力学方程和霍尔磁流体动力学方程中能量及磁螺度耗散率的四个 4/3 定律。值得指出的是，四分之三关系 (1.16) 或 (1.7) 不同于 [3, 24, 25] 中的已知结果。尽管 Chkhetiani 在 [11] 中推导出了 EMHD 系统中磁螺度的 2/15 定律，Banerjee-Galtier 又在 [3]，中给出了霍尔磁流体动力学方程中磁螺度的其他精确关系，但本文得到的 4/3 定律并未见于已有文献。因此，定理 1.1 和 1.5 是这一方向上的首批结果。定理 1.1–1.5 中的精确定律可以视为广义 Yaglom 型定律。

理解包含对流项的标准磁流体力学方程与含有霍尔项的霍尔磁流体动力学方程之间的区别很有帮助。需要指出的是，电子磁流体动力学方程中关于能量的 4/3 关系 (1.7) 与 [37] 中欧拉方程关于螺度的关系相似，而关于磁螺度的 4/3 定律 (1.13) 则与 [16] 中欧拉方程关于能量的关系相同。此外，这些结果与广义 Onsager 猜想密切相关：弱解的临界正则性可确保守恒定律成立（见推论 1.2）。Onsager 猜想及其广义形式可参见 [4, 6–9, 13–18, 36]。

通过相应的 K´arm´an–Howarth 型方程推导 (1.13) 和 (1.19) 是一个有趣的问题。

致谢

Wang 获得了国家自然科学基金委员会项目（编号：11971446、12071113 和 11601492）的部分资助，并获河南省自然科学基金资助。

参考文献

[1] A. Alexakis 和 L. Biferale，湍流中的级联与转变。《物理学报告》，767（2018），1–101。[2] R. Antonia、M. Ould-Rouis、F. Anselmet 和 Y. Zhu，Kolmogorov 与 Yaglom 预测之间的类比。《流体力学杂志》，332（1997），395–409。[3] S. Banerjee 和 S. Galtier，Hall 磁流体力学湍流中螺度的手征精确关系。《物理评论 E》，93（2016），033120。[4] C. Bardos、P. Gwiazda、A. ´Swierczewska-Gwiazda、E. S. Titi 和 E. Wiedemann，有界区域中熵守恒及其他伴随守恒律的 Onsager 猜想。《英国皇家学会学报 A 辑》，475（2019），18 页。[5] D. Biskamp、E. Schwarz、F. Zeiler、A. Celani 和 J. F. Drake，电子磁流体力学湍流。《等离子体物理》，6（1999），751–758 页。[6] D. W. Boutros 和 E. S. Titi，湍流亚格子尺度 α模型的 Onsager 猜想。《物理学 D》，443（2023），论文编号 133553，23 页。[7] R. E. Caflisch、I. Klapper 和 G. Steele，关于理想流体力学与磁流体力学中的奇异性、维数和能量耗散的评述。《数学物理通讯》，184（1997），443–455。[8] D. Chae，关于欧拉方程与准地转方程弱解的守恒量。《数学物理通讯》，266（2006），197–210。[9] A. Cheskidov、P. Constantin、S. Friedlander 和 R. Shvydkoy，欧拉方程的能量守恒与 Onsager 猜想。《非线性》，21（2008），1233–1252。[10] O. Chkhetiani，螺旋湍流中的三阶矩。《JETP 通讯》，63（1996），808–812。[11] O. Chkhetiani，各向同性电子磁流体力学湍流中的三重关联。《JETP 通讯》，69（1999），664–668。[12] O. Chkhetiani，螺旋湍流的局部结构。《物理学报告》，53（2008），513–516。[13] P. Constantin、W. E 和 E. S. Titi，欧拉方程解的能量守恒 Onsager 猜想。《数学物理通讯》，165（1994），207–209。[14] M. Dai、J. Krol 和 H. Liu，电子磁流体力学系统弱解的唯一性与螺度守恒。《数学流体力学杂志》，24（2022），17 页。[15] L. De Rosa，关于不可压缩欧拉方程的螺度守恒。《美国数学会会刊》，148（2020），2969–2979。[16] J. Duchon 和 R. Robert，不可压缩欧拉方程与纳维–斯托克斯方程弱解的惯性能量耗散。《非线性》，13（2000），249–255。[17] T. Drivas 和 G. Eyink，可压缩欧拉方程湍流解的 Onsager 奇异性定理。《数学物理通讯》，359（2018），733–763。

[18] G. Eyink, 《理想流体力学中的无黏性耗散 I：傅里叶分析与局部能量传递》。《Physica D：非线性现象》78（1994），222–240。[19] G. Eyink, 《任意空间维数中被动标量的间歇性与反常标度》。《物理评论 E》54.2（1996），1497。[20] G. Eyink, 《湍流中的局部4/5定律与能量耗散异常》。《非线性》16（2003），137–145。[21] R. Ferrand、S. Galtier、F. Sahraoui、R. Meyrand、N. Andr´es 和 S. Banerjee, 《关于不可压缩霍尔磁流体力学湍流中的精确定律》。《天体物理学杂志》881（2019），6页。[22] P. Frick、R. Stepanov 和 V. Nekrasov, 《霍尔效应下磁场演化的壳层模型》。《磁流体力学》39（2003），327–334。[23] U. Frisch, 《湍流》。剑桥大学出版社，1995。[24] S. Galtier, 《（霍尔）磁流体力学中能量耗散异常的起源》。《物理学杂志A：数学与理论》51（2018），205501。[25] S. Galtier, 《现代磁流体力学导论》。剑桥：剑桥大学出版社，2016。[26] T. Gomez、H. Politano 和 A. Pouquet, 《螺旋流中三阶结构函数的精确关系》。《物理评论 E》61（2000），5321–5325。[27] P. Hellinger、A. Verdini、S. Landi、L. Franci 和 L. Matteini, 《霍尔磁流体力学的 von K´arm´an–Howarth 方程：混合模拟》。《天体物理学杂志快报》857（2018），5页。[28] A. S. Kingsep、K. V. Chukbar 和 V. V. Yan'kov，载于《等离子体物理学评论》第16卷，B. Kadomtsev 编（纽约：Consultants Bureau），1990。[29] A. N. Kolmogorov, 《局部各向同性湍流中的能量耗散》。《苏联科学院院刊》32（1941）。英文译本：《伦敦皇家学会会刊A辑》434（1991），15–17。[30] A. S. Monin 和 A. M. Yaglom, 《统计流体力学：湍流力学》第2卷。麻省理工学院出版社，1975。[31] H. Politano 和 A. Pouquet, 《湍流磁化流的动力学长度尺度》。《地球物理研究快报》25（1998），273。[32] H. Politano 和 A. Pouquet, 《磁流体力学的 von K´arm´an–Howarth 方程及其对三阶纵向结构函数和相关函数的影响》。《物理评论 E》57（1998），R21。[33] J. Podesta, 《均匀各向异性不可压缩磁流体湍流中的三阶矩定律》。《流体力学杂志》609（2008），171–194。[34] J. Podesta、M. Forman 和 C. Smith, 《轴对称磁流体湍流中三阶矩的各向异性形式及其与级联率的关系》。《等离子体物理学》14（2007），092305。

[35] S. I. Vainshtein, 《螺旋波频率下的强等离子体湍流》。《苏联物理学—JETP》37（1973），73–76。[36] Y. Wang 和 B. Zuo, 《有界区域中三维理想磁流体力学方程的能量与交叉螺度守恒》。《微分方程杂志》268（2020），4079–4101。[37] Y. Wang、W. Wei 和 Y. Ye, 《Yaglom 定律与湍流中的守恒量耗散》arXiv:2301.10917v2。[38] A. M. Yaglom, 《湍流流动中温度场的局部结构》。《苏联科学院院刊》69（1949），743–746。[39] T. A. Yousef、F. Rincon 和 A. A. Schekochihin, 《各向同性磁流体力学湍流的精确标度律与局部结构》。《流体力学杂志》575（2007），111–120。