arXiv:2303.04294v1 [math.MG] 8 Mar 2023

Wasserstein 空间与 Ricci曲率下界有界的度量测度空间的超极限

ANDREW WARREN

摘要。我们研究 Wasserstein距离在度量超极限下的稳定性。Wasserstein距离是最优传输理论所引出的、定义在概率测度空间上的一种度量结构。首先，我们证明，若 $(X_i, d_i)_{i\in\mathbb{N}}$ 是一个度量空间序列，其度量超极限为 $(\hat{}X, \hat{}d)$，那么 p-Wasserstein 空间 $(\mathcal{P}_p(\hat{}X)\ W_p)$ 可通过一种典范方式等距嵌入到该序列的 p-Wasserstein 空间 $(\mathcal{P}_p(X_i)\ W_p)$ 的度量超极限中。其次，我们采用一种度量测度空间超极限的概念，该概念以 Elek 提出的概念为蓝本，并运用 Wasserstein 空间超极限的理论工具证明，$CD(K,\infty)$ 空间的超极限是一个$CD(K,\infty)$ 空间。这为证明 $CD(K,\infty)$ 性质在带基点测度 Gromov 收敛下具有稳定性提供了一种新方法。此外，我们还建立了一些关于 Loeb 测度构造如何与 Wasserstein距离及积分泛函相互作用的基本结果，这些结果本身也可能具有独立的研究价值。

本文的安排如下。第1节回顾最优传输所需的背景知识，以及度量超极限理论和 Loeb 测度等相关概念。我们还介绍了将在第3节中使用的度量测度空间超极限概念。在第 ˆ 2 节中，我们通过定理 11 证明，p-Wasserstein 空间 $(\mathcal{P}_p(X)\ W_p)$ 以一种典范的方式等距嵌入到由 p-Wasserstein 空间序列 $(\mathcal{P}_p(X_i)\ W_p)$ 的度量超极限中，并探讨该度量超极限的一些基本性质。我们还研究 Loeb 测度构造与 p-Wasserstein 空间超极限构造之间的相互作用（尤其参见定理 17、推论 24 和引理 27）。最后，在第3节中，我们运用第2节建立的工具，并证明 $CD(K,\infty)$ 空间的度量测度超极限仍是一个 $CD(K,\infty)$ 空间（定理 28）。

1. 引言

1.1. 最优传输的相关事实。设 (X,d) 为一个完备的可分度量空间。给定$p\in[1,\infty)$，在具有有限p阶矩的博雷尔概率测度空间 $\mathcal{P}_p(X)$ 上，p-Wasserstein 度量定义如下:

$$W_p(\mu,\nu) := \inf_{\gamma\in\Pi(\mu,\nu)} \left(\int_{X\times X} d(x,y)^p d\gamma(x,y)\right)^{1/p}.$$

其中 $\Pi(\mu,\nu)$ 表示测度 μ 和 ν 的所有耦合集合。

T p-Wasserstein 度量具有许多引人入胜的几何特征。例如 :

- 当（X,d）是紧致的时，W_p 度量概率测度的弱收敛；当（X,d）不一定紧致时，在 W_p 中的收敛等价于弱收敛与 p阶矩收敛同时成立。特别地，（$\mathcal{P}_p$（X） W_p）满足格利文科-坎特利定理的一个版本：如果 $\mu_n := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \delta_{x_i}$ 是关于 μ的经验测度，也就是说，点 x_i 是来自 μ 的独立同分布样本，那么 W_p（μ_n,μ） $\to 0$ 以概率 1 成立。特别地，离散测度在 W_p中稠密。

- 设（X,d）是一个测地度量空间，也就是说，对于任意 $y,z\in X$，存在连续函数 $f\colon [0,1]\to$（X,d），满足 $f(0)=y$, $f(1)=z$，并且对于所有$t,s\in[0,1]$，d（f（t） fs）$=|t-s|d$（y,z）（在这种情况下，我们称 f（t）为连接 y与 z的常速 d-测地线）。那么，（$\mathcal{P}_p$（X） W_p）也是一个测地度量空间 [4, 定理 2.10]。

- 在 $p=2$ 的情况下，$(\mathcal{P}_2(X)\ W_2)$ 配备了形式上的黎曼度量结构[37, 36], ，因此（有限维）黎曼几何中的许多对象和计算在 $(\mathcal{P}_2(X)\ W_2)$ 中都有对应物。

- 特别是，$(\mathcal{P}_2(X)\ W_2)$ 中的梯度流 理论已相当成熟 [6], ，许多抛物型偏微分方程（例如福克-普朗克方程 [27], 、多孔介质方程 [36], 等）都可以改写为如下形式的无限维常微分方程：$\dot{\mu}_t=-\nabla F(\mu_t)$，其中 F 是定义在 $\mathcal{P}_2(X)$ 上的某个泛函。

- 若 (X,d) 本身是一个连通黎曼流形，则流形 (X,d) 的几何性质与“流形”$(\mathcal{P}_2(X)\ W_2)$ 的几何性质之间存在深刻联系。例如，已知 [50, 定理 1] 指出，(X,d) 具有统一的 Ricci 曲率下界 $K\in\mathbb{R}$，当且仅当相对熵泛函 $H(\mu\mid \mathrm{vol})=\int_X \frac{d\mu}{d\ \mathrm{vol}}\log\frac{d\mu}{d\ \mathrm{vol}}d\mathrm{v}$ ol

  （其中 vol 表示 X 上的黎曼体积测度）在空间 $(\mathcal{P}_2(X)\ W_2)$ 上是 K-测地凸的，也就是说，对于连接 μ_0 和 μ_1 的任意常速 W_2-测地线曲线 $\mu_t\colon [0,1]\to\mathcal{P}_2(X)$,

$$H(\mu_t\mid \mathrm{vol})\le(1-t)H(\mu_0\mid \mathrm{vol})+tH(\mu_1\mid \mathrm{vol})-K\frac{t(1-t)}{2}W_2^2(\mu_0,\mu_1).$$

- 此外，有时也可以反过来利用空间 $(\mathcal{P}_2(X)\ W_2)$ 中流形 (X,d) 的几何性质所带来的结论，作为 (X,d) 上几何性质的替代物；这样，只要相同的几何推理在空间 $(\mathcal{P}_2(X)\ W_2)$ 中依然成立，就能以综合的方式将流形上的几何概念推广到更一般的非光滑空间。

围绕最后这一点，Lott–Sturm–Villani 合成 Ricci 曲率理论中已成功采用了这一策略 [33, 44, 45]（另见 Ambrosio 撰写的较近期综述文章 [3]），下面我们将对此作非常简要的讨论。

设 (X,d) 是一个完备可分度量测度空间，且 λ 是 (X,d) 上一个 σ-有限的博雷尔测度，并且在有界集上有限。若相对熵泛函 $H(\cdot\mid\lambda)\colon \mathcal{P}_2(X)\to\mathbb{R}\cup\{\infty\}$ 在空间 $(\mathcal{P}_2(X)\ W_2)$ 上是 K-测地凸的，则称 (X,d,λ) 为“强 $CD(K,\infty)$”空间。同样，若对任意 μ_0 和 μ_1（其中 μ_1 属于 $\mathcal{P}_2(X)$），都存在一条连接 μ_0 与μ_1 的常速 W_2-测地线 $(\mu_t)_{t\in[0,1]}$，使得对所有 $t\in[0,1]$，则称 (X,d,λ) 为“$CD(K,\infty)$”空间。

$$H(\mu_t\mid\lambda)\le(1-t)H(\mu_0\mid\lambda)+tH(\mu_1\mid\lambda)-K\frac{t(1-t)}{2}W_2^2(\mu_0,\mu_1).$$

显然，每个强 $CD(K,\infty)$ 空间也是 $CD(K,\infty)$ 空间；而对于任意两个相对于参考测度 λ 绝对连续、且属于 $\mathcal{P}_2(X)$ 的测度，若连接它们的常速 W_2-测地线唯一，则相应的 $CD(K,\infty)$ 空间（平凡地）是强 $CD(K,\infty)$ 空间。此外， [41] 已证明，每个强 $CD(K,\infty)$ 空间实际上都具有后一种性质，即“$\mathcal{P}_2$ 中的测度之间存在唯一的常速 -测地线，$ac(\lambda)(X)$”。 $CD(K,\infty)$ 性质有许多推论，其中不少已在 [49], 中综述，但这里举一个重要例子。当 $K>0$ 时，满足 $CD(K,\infty)$ 的度量测度空间满足以下

K-对数 *Sobolev* 不等式:

$$\forall \mu \in \mathcal{P}_2(X) \quad H(\mu \mid \lambda) \leq \frac{1}{2K} \int_{\frac{d\mu}{d\lambda}>0} \frac{\left|\nabla^- \left(\frac{d\mu}{d\lambda}\right)\right|^2}{\frac{d\mu}{d\lambda}} d\lambda$$

其中 $|\nabla^- f|(x) := \limsup_{y \to x} \max\{f(x)-f(y),0\}/d(x,y)$。（证明见 [49, 定理 30.22]。）合成 Ricci 曲率理论中的一个核心问题是稳定性:[d] 也就是说，给定一种“合理”的度量测度空间收敛概念（请注意，即使是构建一种度量测度空间的收敛概念，也并非易事），人们希望知道，像$CD(K,\infty)$这样的性质是否会沿着收敛序列保持不变。

本文对 Wasserstein距离标准框架所依据的“基本假设”作了小幅放宽。事实上，在本小节开头，我们在底层度量空间为波兰空间（即完备且可分）的情形下定义了 p-Wasserstein距离。下文中，若能在仅要求完备、但不一定可分的度量空间上定义 p-Wasserstein距离，将会很有用。可分性并非必需这一点并不显而易见，因为关于 p-Wasserstein距离的教学性论述（例如 [4, 43, 48] 中的论述）提出了许多论证，看起来都将可分性作为不可或缺的条件。

然而， [34] 指出，将 p-Wasserstein 距离推广到任意完备度量空间，有一种相对直接的方法。我们不再将空间 $\mathcal{P}_p(X)$ 定义为 X 上所有具有有限 p阶矩的博雷尔概率测度所构成的空间，而是将 $\mathcal{P}_p(X)$ 定义为 X 上所有具有有限 p阶矩的$Radon$ 概率测度所构成的空间。（当 X可分时，每个博雷尔概率测度也是 Radon 测度 [11, 定理 7.1。7], 因此，我们有理由使用相同的记号。[1]）关键的是，Radon 概率测度自动具有可分支撑，而这一点足以恢复若干关于 $(\mathcal{P}_p(X),\ W_p)$ 的基本事实，这些事实在可分情形下广为人知。特别是， [34] 证明了，即使 X 只是一个完备度量空间，离散概率测度仍然是 W_p-稠密的；这一事实我们将反复用到。不过请注意，关于 p-Wasserstein 距离的一般理论在完备度量空间上考察 Radon 测度时同样“适用”，这一点在更早的最优传输文献中已有提及，例如 [30, 注 2。8]

1.2. 超积预备知识。 我们简要概述度量超极限理论。我们采用非标准分析的语言来介绍[2]；定义度量超极限并不一定要明确借助超实数等概念，但作者认为，这样做会牺牲概念上的清晰性和技术上的便利性。读者可参阅 [24] 了解一般背景。此外， [16, 第 10] 章简明总结了为度量几何／几何群论应用量身定制的非标准分析概念；除未涉及 Loeb 测度（我们将在下文讨论）外，该章涵盖了本文将用到的几乎所有非标准分析内容。我们也采用了其中的一些记号。

[1]此外，即使 X 不可分，将范围“限制”到拉东概率测度，在某种意义上也是尽可能温和的限制，因为要存在一个带有非拉东博雷尔概率测度的完备度量空间，就必须存在一个实值可测基数（这可由 [22, 定理 438H]推出），因此这与 ZFC 相独立。感谢 Taras Banakh 提请我们注意这一集合论问题。[2]这里我们使用“非标准分析”一词，主要是指围绕那些通过超滤子、超积等方式“构造”出来的对象所形成的一系列专门术语和定理。这不同于例如 Nelson 风格的非标准分析，即内部集合论 [35] 及其相关方法；这些方法对 ZFC 本身作出了保守扩张。

令 ω 表示 $\mathbb{N}$上的一个非主超滤子。超实数 $\mathbb{R}^\omega$ 是通过对 $\mathbb{R}$取超幂定义的非阿基米德域：具体而言，给定两个实数序列（r_i）和（r_i'），我们在等价关系 $\sim_\omega$ 下认定（r_i）与（r_i'）等价，当且仅当 $\{i\in\mathbb{N}:\ r_i=r_i'\}\in\omega$；于是，$\mathbb{R}^\omega:=\mathbb{R}^{\mathbb{N}}/\sim_\omega$。我们将此类等价类记作 [（$r_i$）] $\in\mathbb{R}^\omega$，（有时也记作 [（r_i）$_{i\in\mathbb{N}}$]，以强调超滤子 ω作用于指标 i）。形式上，这与从 $\mathbb{Q}$构造 $\mathbb{R}$ 的柯西序列构造类似，只不过这里采用了精细得多的等价关系。通过构造单射

$$\mathbb{R}\ni r\mapsto[(r)]\in\mathbb{R}^\omega$$

（其中 (r) 是每一项都等于 r 的常值序列），我们看到 $\mathbb{R}$ 可规范地嵌入 $\mathbb{R}^\omega$；因此，我们不严谨地称 $\mathbb{R}\subset\mathbb{R}^\omega$。$\mathbb{R}^\omega$ 通过关于 ω的商继承了 $\mathbb{R}$ 的代数结构；例如，我们扩展 $+$ 的用法，将其定义为 $[(r_i)]+[(r_i')]:=[(r_i+r_i')]$。（当然，必须检查这一定义是良定义的。）我们使用符号 $\approx$（读作“近似相等”或“无穷小地接近”），如下所示：

$$\begin{aligned}[(r_i)]\approx[(r_i')]&\iff(\forall\varepsilon\in\mathbb{R}_+)(|[(r_i)]-[(r_i')]|<\varepsilon)\\&\iff(\forall\varepsilon\in\mathbb{R}_+)\{i\in\mathbb{N}\mid|r_i-r_i'|<\varepsilon\}\in\omega.\end{aligned}$$

例如，$[(10^{-i})]\approx[(0)]$，但 $[(10^{-i})]\neq[(0)]$。如果存在一个 $r\in\mathbb{R}$ 使得 $[(r_i)]\approx r$，我们就称 $[(r_i)]$ 是近标准的。这样的 r 必然唯一。在 $\mathbb{R}^\omega$的近标准元素子集上，我们定义标准部分映射 $st(\cdot)$：令 $st([(r_i)])=r$。

在下文中，我们将频繁使用一种说法，表示某个性质 p 在属于超滤子 ω的指标集 $i\in\mathbb{N}$ 上成立，即称 p 在 ω-几乎处处成立；这种说法的依据是，ω 是 $\mathbb{N}$上的有限可加概率测度。

若（X_i）是同一类型代数结构的序列，且配备了相等关系的概念，则可考虑由 $X^\omega/\sim_\omega$定义的超积 X^ω。此时，我们称（x_i）$\sim_\omega$（x_i'）当且仅当$\{i\in\mathbb{N}:\ x_i=x_i'\}\in\omega$（亦即，当且仅当 $x_i=x_i'$ ω-几乎处处成立）。我们尤其关注每个X_i 都是度量空间的情形。

给定实值函数 f_i 的一个序列：$X_i\to\mathbb{R}$，我们可以考虑如下定义的超积 f^ω：若 $x:=$ [（x_i）] $\in X^\omega$，则我们作如下逐点定义

$$f^\omega(x):=[f_i(x_i)].$$

当然，$[f_i(x_i)]\in\mathbb{R}^\omega$，因此 $f^\omega:\ X^\omega\to\mathbb{R}^\omega$。（这体现了超积构造的函子性。）同样，给定一个度量空间序列 (X_i,d_i)，我们可以考虑度量空间的超积 (X^ω,d^ω)，其中

$$d^\omega(x,x'):=[d_i(x_i,x_i')].$$

因此，空间 (X^ω,d^ω) 是一个超实数度量空间。从分析的角度来看，这个空间的性质可能不太理想，但它具有 Łoś 定理的优势（该定理以一种（非正式的）形式陈述为 [16] 中的定理 10.38），这表明从逻辑上看，(X^ω,d^ω) 是序列 (X_i,d_i) 的一个性质良好的极限。

我们现在介绍的度量超极限构造，旨在生成一个实度量空间，使其尽可能多地继承自（X^ω,d^ω）的结构。需要克服的一个问题是，空间（X^ω,d^ω）一般会包含彼此相距超有限距离的点，也就是说，对于每个 $r\in\mathbb{R}$，d^ω（x,x'）$\in\mathbb{R}^\omega\backslash\mathbb{R}$ 以及 d^ω（x,x'）$>r$。为了解决这一问题，我们转而使用带基点度量空间（X_i,d_i,e_i），其中 e_i 是 X_i的“原点”。于是，$e:=$ [（e_i）] $\in X^\omega$ 可以作为 X^ω的原点。令 $X^\omega_{lim}:=\{x\in X^\omega:\ st(d^\omega(e,x))<\infty\}$。然后，我们定义（$X_i,d_i,e_i$）的度量超极限 ^^^^，记作（$X,\hat{e},d$）或（$X,d$）（如果指定点 e_i和$\hat{e}$显然可见，或

不重要），定义为

$$(\hat{X},\hat{d},\hat{e}) := (X_{\lim}^{\omega}, d^{\omega})/\approx_{d^{\omega}}$$

其中，等价关系 $\approx_{d^{\omega}}$ 由 $x \approx_{d^{\omega}} x' \iff st(d^{\omega}(x,x')) = 0$ 给出，或者等价地，$\hat{}x \approx_{d^{\omega}} x' \iff d^{\omega}(x, x') \approx 0$。这里，$d$ 是 d^{ω} 关于 $\approx_{d^{\omega}}$ 的自然商：给定 x、$x' \in X_{\lim}^{\omega}$ 及其对应的等价类 $[x]_{\approx_{d^{\omega}}}$、$[x']_{\approx_{d^{\omega}}}$，我们定义

$$\hat{d}([x]_{\approx_{d^{\omega}}}, [x']_{\approx_{d^{\omega}}}) := st(d^{\omega}(x,x')).$$

（当然，对于某个点序列 $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$，其中每个点都属于 X_i，有 $x = [(x_i)_{i\in\mathbb{N}}]$；但若可以，我们通常会避免使用诸如 $[[(x_i)_{i\in\mathbb{N}}]]_{\approx_{d^{\omega}}}$ 这样繁琐的记号。）最后，$\hat{}e$ 是包含 $[(e_i)]$ 的等价类。结构 $(\hat{}X, \hat{}d)$ 是一个真正的（实）度量空间，而 (X^{ω}, d^{ω}) 则不是。

类比从 $\mathbb{R}^{\omega}$ 的近标准元素到 $\mathbb{R}$ 的映射 $st(\cdot)$，在下文中，我们也用 $st_{\hat{d}}(\cdot) : (X_{\lim}^{\omega}, d^{\omega}) \to (X,d)$ 表示这样一个映射：它将 $(X_{\lim}^{\omega}, d^{\omega})$ 中的点 $x^{\omega} = [(x_i)]$ 送到 $[x^{\omega}]_{\approx_{d^{\omega}}} \in X$；我们也称 $st_{\hat{d}}(x^{\omega})$ 是 x^{ω} 关于度量 d 的**下推**。反过来，给定一点 $y \in X$，如果 $y^{\omega} \in st^{-1}{}_{\hat{d}}(y)$，我们就称 $y^{\omega} = [(y_i)] \in X_{\lim}^{\omega}$ 是 y 的**提升**。

例 1. 度量超积的一个平凡例子是，取带有指定点 0 的 $\mathbb{R}$。作为带基点度量空间，常值序列 $(\mathbb{R}, |\cdot|, 0)$ 的超积是 $(\mathbb{R}^{\omega}, |\cdot|^{\omega}, 0)$；因此，常值序列 $(\mathbb{R}, |\cdot|, 0)$ 的度量超极限就是 $(\mathbb{R}, |\cdot|, 0)$。然而，可以证明，常值序列 $(\mathbb{Q}, |\cdot|_{\mathbb{R}}, 0)$ 的度量超极限不是 $(\mathbb{Q}, |\cdot|_{\mathbb{R}}, 0)$，而是 $(\mathbb{R}, |\cdot|_{\mathbb{R}}, 0)$——这与度量超极限自动成为完备度量空间这一事实有关。

举一个非平凡的例子，可以考虑一列带基点度量测度空间 (X_i, e_i, d_i, μ_i)，以及与之相关的希尔伯特空间 $L^2(X_i, \mu_i)$。这样，我们既可以研究度量超极限 $(X, d, \tilde{\mu})$（究竟什么才是“合适的”极限测度 $\tilde{\mu}$，我们将在下一小节讨论度量测度空间的超积时加以说明——事实证明，它与测度 μ_i 的超积所对应的***Loeb* 测度** 密切相关），也可以将 $L^2(X_i, \mu_i)$ 视为一个带基点度量空间，其中“原点”是恒为零的函数，当然，度量取作 $\|\cdot\|_{L^2(\mu_i)}$，然后研究度量超极限 $(L^2(X,\mu), \|\cdot\|_{L^2(\mu)})$。$L^2(\hat{}X, \tilde{\mu})$ 与 $\widehat{L^2\ X}\ (\ ,\mu)$ 之间的关系并非先验 显而易见，但 [26] 中对此作了简要讨论（参见其中的定理 5.2，了解关于 Orlicz 空间的相关陈述；但请注意，其中许多术语与我们的用法相冲突）；事实证明，$L^2(\hat{}X, \tilde{\mu})$ 等距嵌入 $\widehat{L^2\ X}\ (\ ,\mu)$，并且是一个闭子空间。下文在 Wasserstein 空间的背景下也会遇到类似情形，见定理 11。

注。（度量超极限与 Gromov–Hausdorff 极限之间的关系）我们强调，度量超极限构造应被视为 Gromov–Hausdorff 极限的一种推广。[16] 中的定理 10.46 表明（采用不同的记号），给定一个收敛到 Gromov–Hausdorff 极限 (X, e, d) 的带基点序列 (X_i, e_i, d_i)，其中各度量空间均为**适当** 的，则 (X, e, d) 与 $(\hat{}X, \hat{}d)$ 等距。另一方面，即使不存在 Gromov–Hausdorff 极限，带基点度量空间序列的度量超极限也总是存在（但取决于超滤子的选择；若不存在 Gromov–Hausdorff 极限，则相对于不同超滤子得到的不同度量超极限未必彼此等距）。与此同时，即便考虑非适当（甚至非局部紧）的度量空间，例如 $(\mathcal{P}_2(X)\ W_2)$，其中 X 是一个非紧度量空间，度量超极限仍然是定义良好的对象。

为说明其意义，我们给出三个具有一定内在意义的度量超极限示例。

例 2。（特殊度量超极限）固定一个度量空间 (X,d)。

（1）常值超极限。固定一点 $x_0 \in X$，并令我们的度量空间序列中的每一项都等于 (X,x_0,d)。然后，我们可以像处理非恒定序列那样构造空间 $(\hat{X},\hat{d})$。（这个空间也称为 X 的超幂的非标准包络。）一般而言，如果 X 是局部序列紧的（即博尔查诺-魏尔斯特拉斯定理在完备化中成立），那么 $(\hat{X},\hat{d})$ 与 (X,d) 的完备化等距。然而，如果 (X,d) 不是局部序列紧的，那么 (X,d) 将远大于 (X,d) 的完备化。事实上，若 (x_i) 是 X 中一个没有任何收敛子序列的有界序列，那么在 (X,d) 的完备化中，不存在常值 y 使得 $d(x_i,y) \to 0$，无论取哪个子序列；这意味着，当 $\varepsilon > 0$ 足够小时，不存在 $\mathbb{N}$ 的无限子集，使得 $\{i \mid d(x_i,y_i) < \varepsilon\} \in \omega$（其中 (y_i) 是一个柯西序列，且在 (X,d) 的完备化中收敛到 y），进而表明在 (X,d) 中，$\hat{}[(x_i)] \neq [(y_i)]$。另一方面，给定两个序列 (x_i) 和 (z_i)，它们均有界、在 (X,d) 中没有收敛子序列，且渐近地彼此保持正距离（更准确地说，存在某个 $\varepsilon > 0$，使得 $d(x_i,z_i) > \varepsilon$ ω-几乎处处成立），那么 (x_i) 和 (z_i) 分别属于 $\hat{X}$ 中不同的等价类 $[(x_i)]$ 和 $[(z_i)]$。因此，将 (X,d) 视为以 x_0 为基点的 (X,d) 的“局部序列紧化”是合理的。

(2) 超切空间。这是流形上一点的切空间的一种非光滑推广。给定指定点 $x_0 \in X$，我们的带基点度量空间序列为 $(X,x_0,\lambda_i d)$，其中 $\lambda_i \to +\infty$ 是一个正数序列；切锥是对象 $(\hat{X},x_0,\hat{d})$，其中

$$\hat{d}([x]_{\approx_{d^\omega}},[x']_{\approx_{d^\omega}}) := st(\lambda^\omega d^\omega(x,x')) := st([(\lambda_i d_i(x_i,x_i'))])$$

(并且其中 $x = [(x_i)]$ 和 $x' = [(x_i')]$)。关于超切空间的使用示例，请读者参见 [2, 第 11] 章； [2, 定理 3.4.1] 还表明，超切空间包含来自 Alexandrov 几何的通常（非光滑）切空间，且后者是前者的子集。

(3) 渐近锥。我们可以不再将度量空间在一点处放大，而是借用 Gromov 的说法，向无限远处缩小视野。取带基点度量空间序列 $(X,x_0,\lambda_i^{-1}d)$，其中仍有 $\lambda_i \to +\infty$。借用 [25, 第 2] 章中的两个例子：若 (X,d) 是赋有词度量的阿贝尔群（例如 $(\mathbb{Z}^d,\|\cdot\|_1)$），并且（按惯例）指定点是单位元，那么 $(X,\lambda_i^{-1}d,e)$ 的度量超极限（以及带基点的 Gromov–Hausdorff 极限）与某个有限的 $\mathbb{R}^N$ 等距（事实上，该值就是群的秩）。另一方面，若 (X,d) 是一个 δ-双曲空间，则 $(X,\lambda_i^{-1}d,e)$ 的带基点 Gromov–Hausdorff 极限不存在，但 $(X,\lambda_i^{-1}d,e)$ 的度量超极限与一棵实树等距（例如参见 [16, 定义 3.60]）。

注。 度量超极限，尤其是渐近锥这一特例，已成为度量几何及几何群论相关领域中相当标准的工具 [2, 13, 16, 29, 42]。在后者领域，这种方法的应用可追溯至 [47], , 其借助超积为 Gromov 定理提供了一条替代路径，证明多项式增长与虚幂零性等价。随后， [25] 在几何群论界推广了渐近锥。

我们以提及若干在度量超极限下保持不变的几何性质来结束本节。对于这些性质中的每一项，其证明几乎都可直接从所有相关对象的定义得出；我们列出参考文献，以说明这些事实在文献中已是标准结果。

- 若一列带基点度量空间 $(X_i,d_i,e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ 满足：对于 ω-几乎所有 $^\wedge i\in\mathbb{N}$，(X_i,d_i) 都是测地度量空间，那么度量超极限 (X,d) 也是测地度量空间 [16, 引理 10.51]。事实上，即使空间 (X_i,d_i) 仅为完备长度空间，这一结论仍然成立 [2, 推论 3.5.2]。
- 对于每个（甚至对于 ω-几乎所有的）(X_i,d_i,e_i)，假设(X_i,d_i)是一个 $CAT(K_i)$ 空间，并且假设 $^\wedge K:=st([(K_i)])\in\mathbb{R}$。那么$(X,d)$是一个 $CAT(K)$ 空间（参见 [2, 命题 8.1.6] 或 [16, 引理 10.53]）。换言之，亚历山德罗夫意义下的综合性截面曲率上界在度量超极限下保持稳定。
- 同样地，对于每个（甚至对于 ω-几乎所有的）(X_i,d_i,e_i)，假设(X_i,d_i)是一个 $CBB(K_i)$ $^\wedge$ 空间，并且假设 $K:=st([(K_i)])\in\mathbb{R}$。那么 (X,d) 是一个 $CBB(K)$ 空间 [2, 命题 7.1.7]。换言之，亚历山德罗夫意义下的综合性截面曲率下界在度量超极限下保持稳定。

另一方面，作者并不知晓此前有人直接研究过合成***Ricci***曲率下界关于超极限的稳定性，无论是在 Lott-Sturm-Villani 的意义下（前文已经提及），还是在 Bakry-Émery 的意义下（前文尚未讨论，但概述可参见 [9]，而这一概念与 Lott-Sturm-Villani 合成 Ricci 曲率界之间的关系可参见 [7, 21] ）。

1.3. **Loeb 测度与度量测度空间**。Loeb 测度理论最初由 [31], 提出，后在许多文献中得到发展，例如 [1, 15, 24, 32], ，尽管各文献之间略有差异；我们的设定与 [14] 中的设定非常相似（该文研究标准博雷尔空间上的概率测度，而我们研究完备度量空间上的拉东概率测度），并且只比 [20] 或 [10] 中的设定稍微一般一些（后两者只考虑离散测度的超积）。

像之前一样，考虑一个带基点度量空间序列 (X_i,d_i,e_i)。每个 (X_i,d_i,e_i) 都配备了一个由 d_i 生成的博雷尔 σ-代数 $\mathcal{B}_i$。当我们取超积 $(X^\omega,d^\omega,e^\omega)$ 时，也可以为 X^ω 配备超积测度代数 $\mathcal{B}^\omega:=\prod_\omega\mathcal{B}_i$。请注意，通常 $\mathcal{B}^\omega$ 在可数并下并不闭合。此处，$\mathcal{B}^\omega$ 的任意元素都具有 $\prod_\omega B_i$ 的形式，其中 $B_i\in\mathcal{B}_i$（当然，$x^\omega\in X^\omega$ 属于 B^ω 当且仅当 $x_i\in B_i$ ω-a.s）。同样，给定 X_i 上的一个博雷尔测度序列 μ_i，其中每个测度当然都是一个函数 $\mu_i:\mathcal{B}_i\to[0,1]$，满足通常的公理。因此，超积 μ^ω 是一个从 $\mathcal{B}^\omega$ 到 $[0,1]^\omega$ 的集合值函数，其中 $\mu^\omega(B^\omega):=[(\mu_i(B_i))]$。

给定一个定义在 X^ω 上的超积测度代数 $\mathcal{A}^\omega$，令 $\sigma(\mathcal{A}^\omega)$ 表示由 $\mathcal{A}^\omega$ 生成的 σ-代数。这是包含 $\mathcal{A}^\omega$ 的最小 σ-代数。若我们心中有一个特定的超积测度 μ^ω，还可以进行如下构造：函数

$$st\circ\mu^\omega:\mathcal{A}^\omega\to[0,1]$$
$$st\circ\mu^\omega(A^\omega):=st(\mu^\omega(A^\omega))$$

结果表明，这是空间 X^ω 上的一个前测度；我们利用 Carathéodory 扩张定理完成 $st\circ\mu^\omega$，并将由此得到的定义在 X 上的测度记为 μ_L，将 $L(\mathcal{A}^\omega)$ 表示为 μ_L-可测集的集合。对象 μ_L 和 $L(\mathcal{A}^\omega)$ 分别称为与 μ^ω 相关联的 ***Loeb*** 测度 以及由 $\mathcal{A}^\omega$ 生成的 $Loeb$ σ-代数。有时我们也写作 $\mu_L=$ Loeb(μ^ω)，以表明 μ_L 是与 μ^ω 相关联的 Loeb 测度。

下面给出一些动机。假设我们想要建立一套关于“带指定泛函的度量空间超极限”的理论：我们会取元组 (X_i,d_i,e_i,F_i)，并且会对超极限 $(X,d,\hat{e})$ 的自然类比感兴趣。当然，在生成超积时，

我们已经有 了函数超积的概念，因此，定义“带指定泛函的带基点度量空间超积”的朴素方法，就是也取 F^ω 的超积，并将其附加到带基点度量空间的超积上，从而得到元组 $(X^\omega, d^\omega, e^\omega, F^\omega)$。ˆ ˆ 同样，给定 $F^\omega\colon X^\omega \to \mathbb{R}^\omega$，构造函数 $F\colon X \to \mathbb{R}$ 的朴素方法是后复合标准部映射，即，

$$\hat{F}(st[(x)]) := st(F^\omega[(x)])$$

然后检查这一运算是否定义良好；如果是这样，我们就得到了所需的极限，即“带指定泛函的带基点度量空间的超极限”，也就是（$X, d, \hat{e}, F$）。

为了定义合理的“带基点测度度量空间的超积”概念，我们希望对测度进行类似操作，将定义在 X^ω 上的测度 μ^ω 向下推到 X 上的ˆ测度。但我们不再将标准部映射应用于 X^ω 中的点，而是将其应用于测度代数 $\mathcal{A}^\omega$中的集合；接下来需要检查：对于 $(\hat{}X, \hat{}d)$ 上的博雷尔集 B， $st^{-1}(B)$ 是否是 $\mathcal{A}^\omega$- 可测的；有了这一点，便可通过 $\mu(B) = \mu^\omega(st^{-1}(B))$ 在ˆX 上定义测度 μ。但问题随之出现：事实证明， st 从 $\mathcal{A}^\omega$ 到 X 上的博雷尔集并非可测—首先，后者是一个 σ-代数，因而是可列可加的，ˆ而 $\mathcal{A}^\omega$ 却不是！因此，我们需要一个作为 μ^ω 的替代对象，它能够被向下推到 X 上（至少在某些正则性条件下），而 Loeb 测度 μ_L 恰好就是完成这项工作的正确替代对象。（事实上，Loeb 测度的提出正是为了充当这样的替代对象，只是在最初的论文 [31], 中所处的背景与我们的情形略有不同。）

下文中，我们需要若干关于测度 μ^ω 和 μ_L及其相应的积分与可积函数的事实。这些事实如今在 Loeb 测度文献中都已是经典结果；例如，利用非标准分析的“底层机制”的各种构建方式，可以找到相关证明[1, 8, 15, 46], 。特别是，证明下列事实只要求内对象的“宇宙”满足 Łoś 定理以及可数饱和性质，而任何关于 $\mathbb{N}$的非主超滤子都会自动赋予后一性质。为了给读者提供更具体的参考，我们提及 [46, 第 2 章2], ；该章采用了与我们相同的基础构建方式，但术语略有不同。

事实 3. （见 [46, 命题 2.2.11 和推论 2.2.12]）设（X^ω， $\mathcal{A}^\omega$， μ^ω）为一个内测度空间，其相应的 ***Loeb*** 测度空间为（X^ω， L（$\mathcal{A}^\omega$） μ^ω）。设 $A \in L$（$\mathcal{A}^\omega$）。则：

(1) 对于每个 $\varepsilon > 0$，都存在 B^ω， $C^\omega \in \mathcal{A}^\omega$ 满足 $B^\omega \subseteq A \subseteq C^\omega$ 且 $\mu^\omega(C^\omega \backslash B^\omega) < \varepsilon$.

(2) 存在一个 $A^\omega \in \mathcal{A}^\omega$，使得 $\mu_L(A \Delta A^\omega) = 0$.

定义 4. 固定一个内测度空间 $(X^\omega, \mathcal{A}^\omega, \mu^\omega)$。设 $f^\omega\colon X^\omega \to \mathbb{R}^\omega$ 是一个 $\mathcal{A}^\omega$-可测的内函数。若 $st(f^\omega)\colon X^\omega \to \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ 是 μ_L-可积的，则称 f^ω 是 S-可积的，并且

$$st\left(\int_{X^\omega} |f^\omega| d\mu^\omega\right) = \int_{X^\omega} |st(f^\omega)| d\mu_L.$$

事实 5. （ [46, 定理 2.2。19] 中讨论了 $\mu^\omega(X^\omega) < \infty$ 的情形）设 $f^\omega\colon X^\omega \to \mathbb{R}^\omega$ 是一个 $\mathcal{A}^\omega$-可测的内函数。那么，f^ω 是 S-可积的，当且仅当

(1) $\int_{X^\omega} |f^\omega| d\mu^\omega$ 有限，(2) 若 $A \in \mathcal{A}^\omega$ 且 $\mu^\omega(A) \approx 0$，则 $\int_A |f^\omega| d\mu^\omega \approx 0$；并且(3) 若 $A \in \mathcal{A}^\omega$ 且 $f^\omega(a) \approx 0$对所有 $a \in A$都成立，则 $\int_A |f^\omega| d\mu^\omega \approx 0$。（注意，如果 $\mu^\omega(X^\omega)$ 有限，则此条件自动成立。）

定义 6. 固定一个内测度空间 $(X^\omega, \mathcal{A}^\omega, \mu^\omega)$。设 $g\colon X^\omega \to \mathbb{R}$。我们称$f^\omega\colon X^\omega \to \mathbb{R}^\omega$是 g的内部提升，如果 $st(f^\omega(x)) = g(x)$ 几乎处处关于 μ_L成立。

事实7. 函数 $g\colon X^\omega \to \mathbb{R}$ 是 μ_L-可积的，当且仅当它存在一个 S-可积的内提升 f^ω。在这种情况下，$st\left(\int_{X^\omega} |f^\omega| d\mu^\omega\right) = \int_{X^\omega} |g| d\mu_L$。

证明. 正向结论由 [46, 定理 2.2.21] 得出；逆命题则可由 S-可积性和内部提升的定义直接得到。□

此外，我们还有以下便于检验的充分条件，可判断内函数 f^ω 是否 S-可积。

事实8. （见 [46, 命题 2.2.20]）设 $p > 1$。假设 $st\left(\int_{X^\omega} |f^\omega|^p d\mu^\omega\right) < \infty$。那么，$f^\omega$ 是 S-可积的，并且还有 $st \circ f^\omega \in L^p(\mu_L)$。

注。 按照“先取超积，再取标准部，很像是在取极限”这一启发式观点（事实上，这正是例如实数的超极限的字面定义），我们看到，S-可积函数恰恰是那些满足控制收敛定理（或者更准确地说，维塔利收敛定理）的“超极限类比”成立的函数。特别地，事实8与如下事实相关：在 L^p 中有界且满足 $p > 1$的函数序列自动一致可积（由德拉瓦莱普桑定理），因此可以应用维塔利收敛定理。

至此，我们结束了对 Loeb 测度的背景讨论。不过，在给出度量测度超极限的定义之前，还存在一个难点；这或多或少是度量测度空间的所有收敛概念所共有的，例如在 [44]中就曾被指出。尽管我们可以利用某种具体构造来产生一个候选的极限度量测度空间对象，但在具体应用中，我们希望“是给定度量测度空间序列的一个度量测度空间极限”这一性质在度量测度空间的同构下保持不变。若我们对候选极限的定义具有如下形式：“底层带基点度量空间按照我们偏好的带基点度量空间收敛概念收敛，同时其上的测度也按某种相应意义收敛”，那么当测度不具有全支撑时，这种在度量测度空间同构下的不变性可能失效；在这种情况下，我们实际上只应关注底层测度空间在测度的支撑上的等距同构（以及两个空间中的指定点 e！）。

经过以上铺垫，我们现在可以给出以下定义。由于本文的研究范围有限，我们将定义限定为仅适用于 Radon 概率测度。我们指出，这一定义是 Elek 在 [19], 中提出的定义的一个变体；我们认为他是首位研究度量测度空间超极限的人。

定义 9. （带基点度量测度空间的超极限）设（X_i，d_i，e_i，μ_i）是一个元组序列，其中（X_i，d_i，e_i）是带基点度量空间，且 μ_i 是 X_i上的 ***Radon*** 概率测度。若（X_i，d_i，e_i，μ_i）按照带基点度量测度超极限的意义收敛到（X，d，e，μ）（其中 μ 也为 ***Radon*** 概率测度），则称

(1) 与 μ^ω 相关联的 ***Loeb*** 测度 μ_L 通过 ***st*** 推前，得到 ***(*** $\hat{X}$***,*** $\hat{d}$***,*** $\hat{e}$***)*** 上的拉东概率测度$\tilde{\mu}$，即 $\tilde{\mu} = \mu_L \circ st^{-1}$ $\hat{}_d$；以及 ***(2)*** 存在某个 $X_0 \subseteq X$ 与某个 $X_0 \subseteq X$之间的部分等距映射 ι，使得 ι将 e 映射到$\hat{e}$，并将$\mu($ $supp)$映射到$\tilde{\mu}($ $supp)$；对于每个博雷尔集 $B \subset supp(\tilde{\mu})$，都有$\mu($ $\iota^{-1}(B)) = \tilde{\mu}(B)$（反之亦然）。

请注意，这里的度量结构与测度结构存在一定的不对称性：虽然我们总能（在度量超积意义下）构造出一个极限度量空间，但条件 (1) 一般并不成立 [38], ，因此，带基点度量测度空间序列 (X_i, d_i, e_i, μ_i)并不总是存在带基点度量测度超极限。不过，下面的引理 22 将刻画哪些 Loeb 概率测度满足条件 (1)。

注。 在我们的工作进行期间，我们了解到近期的预印本 [38], ，该文同样研究度量测度空间的超极限。 [38] 考察了一种度量测度超极限的概念，该概念允许极限测度 μ 更为一般（甚至不一定是博雷尔测度），并探讨了度量测度超极限的许多结构性质。特别是， [38] 指出，他们所考虑的度量测度超极限概念扩展了 [23], 中的尖点测度 Gromov（pmG）收敛概念；此外，我们的定义 9 实际上与 pmG 收敛等价，确切地说，这是因为我们假设极限空间上的参考测度是 Radon 测度。（特别参见 [38, 定理 8.3、11.4 和 12.2], 以及下文引理 22 后的注。）这实际上使得 [38] 能够通过间接方式推导出各种合成几何超极限稳定性结果，包括我们的定理 28；正如他们在引言中所述，尤其是引用了诸如 [23] 等文献中关于 $CD(K,\infty)$ 在 pmG 收敛下稳定性的已有结果。

由于我们对“度量测度超极限”的定义规定 $\hat{}\mu$ 是 Loeb 测度，因此，若能知道在 (X,d) 上的任意 合理测度 μ 都可以视为 Loeb 测度，将会很有帮助。文献中已经有类似结果，例如：

定理 10。 （*Anderson* [8]）设 ν 是 *Hausdorff* 空间$(X, \mathcal{T})$上的 *Radon* 测度。那么，测度空间 $(X, \sigma(\mathcal{T}) \nu)$ 可以表示为一个 *Loeb*测度空间，其中 $\sigma(\mathcal{T})$ 是由 $\mathcal{T}$生成的 *Borel* σ-代数的完备化。

$\hat{}$ 因此，我们旨在证明 Anderson 定理的一个变体，其中 ν 定义在 X 上，而其 Loeb 测度表示定义在 X^ω上。我们将在下文的定理 17 中完成这一点。

2. Wasserstein 空间的超极限

给定一个带有指定点的度量空间序列 (X_i, d_i, e_i)（我们不总是明确记下这些指定点 $\hat{}\hat{}$），如前一节所述，我们可以构造度量超极限空间 (X,d)。同时，对于每个 $i \in \mathbb{N}$，我们可以考虑，对于 $p \in [1,\infty)$，定义在 (X_i, d_i, e_i) 之上的（带指定点的） p-Wasserstein 空间 $\hat{}\hat{}$，即 $(\mathcal{P}_p(X_i)\ W_p, \delta_{e_i})$；以及定义在 (X,d) 之上的 p-Wasserstein 空间，即 $\hat{}(\mathcal{P}_p(X)\ W_p)$——回顾前一节，这表示在（完备）度量空间 X 上的、具有有限 p 阶矩的 Radon 概率 $\hat{}$ 测度空间，并赋予度量

$$W_p(\mu,\nu) := \left(\inf_{\gamma \in \Pi(\mu,\nu)} \int_{\hat{X}\times\hat{X}} \hat{d}(x,y)^p d\gamma(x,y) \right)^{1/p}$$

其中， $\Pi(\mu,\nu)$ 是测度 μ 和 ν 的耦合空间。

与此同时，序列 $(\mathcal{P}_p(X_i)\ W_p, \delta_{e_i})_{i\in\mathbb{N}}$ 也是一个度量空间序列（事实上，如果每个 (X_i, d_i) 都是完备的，那么它就是一个完备度量空间序列），因此我们也可以考虑序列 $(\mathcal{P}_p(X_i)\ W_p)_{i\in\mathbb{N}}$ 的度量超极限，我们将其记为 $(\mathcal{P}_p(X)\ W_p)$。让我们回顾上一节介绍的度量超积构造。在这个具体例子中，该空间的构造过程如下：首先构造超积 $(\mathcal{P}_p(X)^\omega, W_P^\omega, [(\delta_{e_i})])$，其中

$$\mathcal{P}_p(X)^\omega := \{[(\mu_i)_{i\in\mathbb{N}}] : \forall i \in \mathbb{N}, \mu_i \in \mathcal{P}_p(X_i)\}$$

and

$$W_p^\omega\left([(\mu_i)_{i\in\mathbb{N}}],[(\nu_i)_{i\in\mathbb{N}}]\right):=[(W_p(\mu_i,\nu_i))].$$

接着，我们取 $\mathcal{P}_p(X)^\omega$ 的“有限”子集，即由点 $[(\mu_i)]\in\mathcal{P}_p(X)^\omega$ 组成的子集；这些点到指定点 $[(\delta_{e_i})]$，的距离是近标准的。我们将该子集记为 $\mathcal{P}_p(X)^\omega_{\lim}$:

$$\mathcal{P}_p(X)^\omega_{\lim}:=\left\{[(\mu_i)]\in\mathcal{P}_p(X)^\omega : st\left(W_p^\omega\left([(\mu_i)],[(\delta_{e_i})]\right)\right)<\infty\right\}.$$

最后，通过对 $\mathcal{P}_p(X)^\omega_{\lim}$ 关于等价关系$W_p^\omega([(\mu_i)],[(\nu_i)])\approx 0$取商，得到 $(\mathcal{P}_p(X)\ W_p)$:

$$\widehat{\mathcal{P}_p(X)}:=\mathcal{P}_p(X)^\omega_{\lim}/\approx_{W_p^\omega}.$$

$\mathcal{P}_p(X)$ 中的点（即点 $[(\mu_i)]\in\mathcal{P}_p(X)^\omega_{\lim}$ 的等价类）记作 $\hat{}\mu$ 或 $st_{\hat{}W_p}[(\mu_i)]$，并且

$$\hat{W}_p(\hat{\mu},\hat{\nu}):=st\left(W_p^\omega\left([(\mu_i)],[(\nu_i)]\right)\right)\ \text{where}\ st_{\hat{W}_p}[(\mu_i)]=\hat{\mu}, st_{\hat{W}_p}[(\nu_i)]=\hat{\nu}.$$

（如果愿意，也可以自然地将空间 $(\mathcal{P}_p(X)\ W_p)$ 视为带基点度量空间：只需添加指定点 $st_{\hat{}W_p}[(\delta_{e_i})],$，即包含指定点的超积的等价类 δ_{e_i}。）

下述定理阐述了 $(\mathcal{P}_p(X)\ W_p)$ 与 $(\mathcal{P}_p(X)\ W_p)$ 之间的关系。

定理 11. 设 $p\in[1,\infty)$。假设 (X_i,d_i) 是一个带基点完备度量空间序列，其度量超极限为 $(\hat{}X,\hat{}d)$。那么，存在一个从 $(\mathcal{P}_p(\hat{}X)\ W_p)$ 到$(\widehat{\mathcal{P}_p\ X}(),\hat{}W_p)$的典范等距嵌入，并且它延拓了映射

$$(\mathcal{P}_p(\hat{X}),W_p)\ni\delta_{st_{\hat{d}}[(x_i)]}\longmapsto st_{\hat{W}_p}[(\delta_{x_i})]\in(\widehat{\mathcal{P}_p(X)},\hat{W}_p).$$

证明。固定一个 $N\in\mathbb{N}$；令 $\mu=\frac{1}{N}\sum_{j=1}^N\delta_{\hat{x}_j}$和 $\mu'=\frac{1}{N}\sum_{j=1}^N\delta_{\hat{x}'_j}$，其中 $\hat{}x_j$ 和 $\hat{}x'_j$ 是 $\hat{}X$ 中任意的点；显然 $\mu,\mu'\in\mathcal{P}_p(\hat{}X)$。对于每个这样的点，令 $[(x_{i,j})]\in X^\omega$为 $\hat{}x_j$ 的一个提升（对于 $[(x'_{i,j})]$ 和 $\hat{}x'_j$，同样处理）。于是我们还可以在每个 X_i 上考虑形如 $\mu_i:=\frac{1}{N}\sum_{j=1}^N\delta_{x_{i,j}}$ 的 Dirac测度，其中 $x_{i,j}\in X_i$，并类似地考虑 $\mu'_i:=\frac{1}{N}\sum_{j=1}^N\delta_{x'_{i,j}}$ 接着，我们可以在 $\widehat{\mathcal{P}_p\ X}()$ 中考虑$[(\mu_i)],[(\mu'_i)]\in\mathcal{P}_p(X)^\omega$，以及 $\hat{}\mu=st\hat{}_{W_p}[(\mu_i)]$ 和 $\hat{}\mu'=st\hat{}_{W_p}[(\mu'_i)]$；并且有

$$\hat{W}_p(\hat{\mu},\hat{\mu'}):=st(W_p^\omega([(\mu_i)],[(\mu'_i)]):=st([(W_p(\mu_i,\mu'_i))]).$$

另一方面，我们希望证明 $W_p(\mu,\mu')=\hat{}W_p(\hat{}\mu,\hat{}\mu')$。事实上，这足以证明该定理：考虑 (μ_k)，这是 $(\mathcal{P}_p(X)\ W_p)$ 中的一个柯西序列，收敛于 ν，且其中每个 μ_k 都是狄拉克质量的平均值。于是（必要时可将 μ_k 和 $\mu_{k'}$ 表示为由人为扩充、数量相同的狄拉克质量构成的平均值；取最小公倍数即可），我们有$W_p(\mu_k,\mu_{k'})=\hat{}W_p(\hat{}\mu_k,\hat{}\mu_{k'})$，这意味着 $(\hat{}\mu_k)$ 是 $(\widehat{\mathcal{P}_p\ X}(),\hat{}W_p)$ 中的柯西序列。由于 $(\mathcal{P}_p(\hat{}X)\ W_p)$ 和 $(\widehat{\mathcal{P}_p\ X}(),\hat{}W_p)$ 都是完备度量空间，因此我们可以扩展映射

$$\mathcal{P}_p(\hat{X})\ni\mu\mapsto\hat{\mu}\in\widehat{\mathcal{P}_p(X)}$$

由 $\mathcal{P}_p(\hat{}X)$ 中狄拉克云集合上的等距同构，根据密度可得 $\mathcal{P}_p(\hat{}X)$ 上的等距同构。

特别地，在此嵌入下，$\mathcal{P}_p(X)$ 在 $\mathcal{P}_p(X)$ 中的像自动是 W_p-闭的。

然而，很容易看出，$W_p(\mu,\mu')=\hat{W}_p(\hat{\mu},\hat{\mu}')$ 这一事实可由关于凸多胞体的 Birkhoff定理推出（参见 [39] 中的命题2.1）。也就是说，

$$W_p^p(\mu,\mu')=\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\hat{d}^p(\hat{x}_j,\hat{x}'_{\sigma(j)})$$

其中 $\sigma\colon\ \{N\}\to\{N\}$ 是某个排列。但根据定义，$d(\hat{x}_j,\hat{x}'_{\sigma(j)})=st((d^\omega([(x_{i,\ j})],[(x'_{i,\ \sigma(j)})])$。与此同时，对于每个 $i\in\mathbb{N}$,

$$W_p^p(\mu_i,\mu_i')=\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}d_i^p(x_{i,j},x'_{i,\sigma_i(j)})$$

其中 $\sigma_i:\ \{N\}\to\{N\}$ 又是一个排列。由 Łoś 定理（实际上只是对函数超积的定义进行仔细处理）可得

$$\left(W_p^\omega([(\mu_i)],[(\mu_i')])\right)^p=\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\left(d^\omega(x^\omega,x'^\omega_{\sigma^\omega(j)})\right)^p$$

其中 σ^ω 是 σ_i 的超积（但由于 $\{N\}$ 是有限集，σ^ω 只是 N 个元素上的某个排列；特别地，它是 σ_i 中具有测度 1 的那个排列）。根据 d 和 W_2 的定义可得

$$\hat{W}_p^p(\hat{\mu},\hat{\mu}')=\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\hat{d}^p(\hat{x}_j,\hat{x}'_{\sigma^\omega(j)}).$$

此外，由 Łoś 定理也可得

$$\left(W_p^\omega([(\mu_i)],[(\mu_i')])\right)^p\le\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\left(d^\omega(x^\omega,x'^\omega_{\tilde{\sigma}(j)})\right)^p$$

对任意 $\tilde{\sigma}\neq\sigma^\omega$，这意味着

$$\hat{W}_p^p(\hat{\mu},\hat{\mu}')\le\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\hat{d}^p(\hat{x}_j,\hat{x}'_{\tilde{\sigma}(j)})$$

对任意 $\tilde{\sigma}\neq\sigma^\omega$。特别地,

$$\hat{W}_p^p(\hat{\mu},\hat{\mu}')\le\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\hat{d}^p(\hat{x}_j,\hat{x}'_{\sigma(j)})=W_p^p(\mu,\mu').$$

但我们也知道

$$\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\hat{d}^p(\hat{x}_j,\hat{x}'_{\tilde{\sigma}(j)})\ge W_p^p(\mu,\mu')$$

对于任意 $\tilde{\sigma}\neq\sigma$。将 σ^ω 代入上式中的 $\tilde{\sigma}$，可得 $\hat{W}_p^p(\hat{\mu},\hat{\mu}')\ge W_p^p(\mu,\mu')$。因此，所需的 $\hat{W}_p^p(\hat{\mu},\hat{\mu}')=W_p^p(\mu,\mu')$ 成立。□

定义 12. 设 $\iota : (\mathcal{P}_p(\hat{}X)\ W_p) \hookrightarrow (\widehat{\mathcal{P}_p\ X}(\ ), \hat{}W_p)$ 表示在前一定理的证明中构造的等距嵌入 ^：也就是说，若 $\mu \in \mathcal{P}_p(X)$ 是形如$\mu = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\delta_{\hat{x}_j}$ 的离散测度，其中 $\hat{}x_j = st_{\hat{d}}[(x_j,\ _i)],$ ，则

$$\iota\left(\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\delta_{\hat{x}_j}\right) = st_{\hat{W}_p}\left[\left(\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\delta_{x_{j,i}}\right)_{i\in\mathbb{N}}\right].$$

然后利用密度将映射 ι 扩展到整个 $(\mathcal{P}_p(\hat{}X)\ W_p)$。

我们已经证明 $(\mathcal{P}_p(\hat{}X)\ W_p) \hookrightarrow (\widehat{\mathcal{P}_p\ X}(\ ), \hat{}W_p)$，但这两个空间何时等距？下面的命题给出了一个充分条件。我们指出，也可以间接证明该命题，即借助关于其与 Gromov-Hausdorff 极限等价性的已有结果。不过，我们在下面给出这样一个直接的“内在”论证，因为事实证明，这样做能为我们后续的讨论提供更多信息。

回顾一下，若度量空间 (X,d) 对于每个 $\varepsilon>0$，都存在某个整数$k(\varepsilon)$，使得 X 可以用 k 个半径为 ε 的 d-球覆盖，则称它是全有界的。称 $k(\varepsilon)$ 为 X 的 ε-覆盖数；换言之，若 (X,d) 对每个 $\varepsilon>0$ 都有有限的 ε-覆盖数，则它是全有界的。

更一般地，我们可以讨论 X 的子集的 ε 覆盖数，甚至可以讨论属于不同空间的集合族。特别地，若 $(F_i)_{i\in I}$ 是一个集合族，其中每个 F_i 都包含于度量空间 (X_i,d_i) 中，那么如果存在一个统一的 $k(\varepsilon)$，它同时是所有 F_i 的 ε 覆盖数（对每个 $\varepsilon>0$ 均成立），我们就称 $(F_i)_{i\in I}$ 是一致全有界的。

例如，度量空间中的紧集是全有界的（逆命题是，闭的全有界集是紧致的），而无限维巴拿赫空间中的球并非全有界。注意，全有界集自动具有有限直径。它们也自动是可分的：取一个趋于零的小量序列 $\varepsilon_n>0$；则集合

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{x\in X : x \text{ is a center of an } \varepsilon_n\text{-ball in an } \varepsilon_n\text{-covering of } X\}$$

是稠密的，并且可以取为可数集。

^^命题 *13.* 设 (X_i,d_i,e_i) 是一列带基点度量空间，其度量超极限为 (X,d)。^设 F 是 X 中的一个紧集，并设 $(F_i)_{i\in\mathbb{N}}$ 是一列集合，每个集合都包含于 X_i，且满足$st_{\hat{d}}(F^\omega) = F$。那么，序列 $(F_i)_{i\in\mathbb{N}}$ 自动是^ω-几乎处处一致全有界的；并且，子空间 $(\mathcal{P}_p(F)\ W_p)$ 在 $(\mathcal{P}_p(X)\ W_p)$ 中关于 ι 的等距像，与 $(\widehat{\mathcal{P}_p\ F}(\ ), \hat{}W_p)$ 相同，后者是空间 $(\mathcal{P}_p(F_i)\ W_p)$ 的度量超极限。

^证明。 $F\subseteq X$ 是紧致的，当且仅当它既是闭的又是全有界的；后者意味着，对于每个$\varepsilon>0$，都存在某个整数 $k(\varepsilon)$，使得^X 可以被 k 个半径为 ε的^d-球覆盖（称 $k(\varepsilon)$为 F的 ε-覆盖数）。也就是说，对于每个 $\varepsilon>0$，都存在^x_1，.....，^$x_{k(\varepsilon)}$，使得

$$(\forall \hat{x}\in F)\qquad \bigvee_{j=1}^{k(\varepsilon)} \hat{d}(\hat{x}_j,\hat{x}) < \varepsilon$$

因此，我们可以对指定点 $\hat{}x_1,\dots,\hat{}x_{k(\varepsilon)}$ 进行任意提升，得到 $x_1^\omega,\dots,x_{k(\varepsilon)}^\omega$，它们都属于 $st^{-1}{}_{\hat{d}}(F)$；事实上，我们总能选取 $x_1^\omega,\dots,x_{k(\varepsilon)}^\omega$ 使其属于 $F^\omega := [(F_i)]$。提升

所有其他点 $\hat{x} \in F$，我们看到

$$(\forall x^\omega \in st_{\hat{d}}^{-1}(F)) \qquad \bigvee_{j=1}^{k(\varepsilon)} d^\omega(x_j^\omega, x^\omega) < \varepsilon$$

因此，特别是

$$(\forall x^\omega \in F^\omega) \qquad \bigvee_{j=1}^{k(\varepsilon)} d^\omega(x_j^\omega, x^\omega) < \varepsilon.$$

对每个 $j \in \{1, \ldots, k(\varepsilon)\}$，令 $x_j^\omega = [(x_{j,i})]$，这意味着对于几乎所有的 $i \in \mathbb{N}$（相对于 ω），

$$(\forall x_i \in F_i) \qquad \bigvee_{j=1}^{k(\varepsilon)} d_i(x_{j,i}, x_i) < \varepsilon.$$

也就是说，对于几乎所有的 F_i（相对于 ω），$k(\varepsilon)$ 都是一个 ε-覆盖数。对所有 $\varepsilon > 0$ 进行量化可知，几乎所有的 F_i（相对于 ω）必然都是全有界的，且覆盖数一致为 $k(\varepsilon)$。

现在注意到，中空间 $(F_i, \hat{d}_i)$ 的度量超积等于 $(F, \hat{d})$。（这不失一般性，因为环境空间 $(\hat{X}, \hat{d})$ 不受指定点的改变影响，只要这不会改变 X^ω 中哪个集合是 X_{lim}^ω；而这里我们只是将 $\hat{e}$ 移动了有限距离，例如 $dist(F, \hat{e})$，因此 e^ω 也只移动了有限距离，所以 $X_{\lim}^\omega$ 保持不变。）同时，令 $D > diam(F)$。注意到

$$(\forall x^\omega, y^\omega \in st_{\hat{d}}^{-1}(F)) \qquad d^\omega(x^\omega, y^\omega) < D$$

这意味着（因为 $\hat{e} \in K$，从而 $e^\omega \in K^\omega$）

$$(\forall x^\omega \in F^\omega) \qquad d^\omega(x^\omega, e^\omega) < D$$

这进而意味着，在这种情况下，$F^\omega = F^\omega{}_{\lim}$，即 F^ω 中与 e^ω 的距离有限的点集。

现在，考察 [12, 命题 1。1] 可知[3]，由于 F_i 的直径在 ω-几乎处处小于 D，并且具有某个 ω-几乎处处均匀的 ε-覆盖数：对于每个 $\delta > 0$，存在一个 $uniform N(\delta)$（仅取决于覆盖数函数 $k(\varepsilon)$ 和 D），使得对于每个 $i \in I$ 以及每个 $\nu_i \in \mathcal{P}_p(F_i)$，都存在一个具有均匀权重的狄拉克云 $\mu_{\delta,i} := \frac{1}{N(\delta)} \sum_{\ell=1}^{N(\delta)} \delta_{x_{\ell,i}}$ 满足 $W_p(\mu_i, \nu_i) < \delta$。

因此，令 $\hat{\nu} \in (\mathcal{P}_p(F)\ W_p)$，其代表元为 $[(\nu_i)] \in (\mathcal{P}_p(F)^\omega, W_p^\omega)$，其中 ν_i 可以任意取值；给定 $\delta > 0$，令 $\hat{\mu}_\delta$ 表示 $[(\mu_{\delta,i})] \in \mathcal{P}_p(F)_{\lim}^\omega$ 在 $\mathcal{P}_p(F)$ 中的像，其中 $\mu_{\delta,i}$ 如上所述。同样，令 $\mu_\delta \in \mathcal{P}_p(F)$ 表示 $\frac{1}{N(\delta)} \sum_{\ell=1}^{N} \delta_{\hat{x}_\ell}$，其中对于每个 $\ell = 1, \ldots\ldots, N$，均有 $\hat{x}_\ell = st_{\hat{d}}[(x_{\ell,i})]$。在定理 11 中，我们证明了等距嵌入 ι 将 μ_δ 映射到 $\hat{\mu}_\delta$。

现在我们选取一个由小量组成的递减序列 $\delta_k > 0$：对于每个 $i \in I$，令 (μ_{i,δ_k}) 表示 $(\mathcal{P}_p(F_i)\ W_p)$ 中一个由 $N(\delta)$ 个原子组成的狄拉克云的柯西序列，该序列收敛于 ν_i，使得

[3]这是对 [12] 中误差估计的一种粗略运用：这里我们并不关心随机独立同分布样本，而只需要任意一个具有均匀权重、能够逼近给定测度的狄拉克云。具体而言，之所以需要均匀逼近，是因为若没有这一条件，任意一个 $\mathcal{P}_p(X)^\omega$ 中的元素都可能只能通过含有超有限多个原子的“狄拉克云”来逼近，或者通过权重中含有无穷小量的狄拉克云来逼近。在这种情况下，我们的证明就无法继续。我们还指出，论文 [12] 假设底层空间是波兰空间。这对我们没有影响，因为我们将范围限制在一个 F 紧致、因而可分的集合上。

$W_p(\mu_{i,k},\nu_i) < \delta_k$。于是，$\hat{}\mu_{\delta_k}$ 是 $(\widehat{\mathcal{P}_p\ F}(\ ),\hat{}W_p)$ 中的一个柯西序列，收敛于 $\hat{}\nu$，且具有相同的性质。但 (μ_{δ_k}) 也是 $(\mathcal{P}_p(F)\ W_p)$ 中的一个柯西序列（将其极限记为 ν）；因此，根据定义 12 中描述的等距嵌入，有 $\iota\nu = \hat{\nu}$。但由于 $\hat{}\nu$ 的选取是任意的，我们得出该嵌入实际上是一个满射。□

注。在上一命题的设定中，存在一个显然的典范单射，将 $\widehat{\ }\hat{}\widehat{\ }\hat{}(\mathcal{P}_p(F)\ W_p)$映入$(\mathcal{P}_p(X)\ W_p)$，具体如下：空间$(\mathcal{P}(F)^\omega_{\lim},W^\omega_p)$是支撑于 F^ω 且具有近标准 p阶矩的内概率测度所构成的空间，并配备超实度量$\widehat{\ }\hat{}W^\omega_p$；该空间是 $\mathcal{P}(X)^\omega_{\lim},W^\omega_p)$的子集。随后，$(\mathcal{P}_p(F)\ W_p)$到$(\widehat{\mathcal{P}_p\ X}(\ ),\hat{}W_p)$的单射由以下图表诱导：

$$\begin{array}{ccc}(\mathcal{P}(F)^\omega_{\lim},W^\omega_p) & \subseteq & \mathcal{P}(X)^\omega_{\lim},W^\omega_p) \\ \downarrow{\scriptstyle st_{\hat{W}_p}} & & \downarrow{\scriptstyle st_{\hat{W}_p}} \\ (\widehat{\mathcal{P}_p(F)},\hat{W}_p) & \dashrightarrow & (\widehat{\mathcal{P}_p(X)},\hat{W}_p)\end{array}$$

到目前为止，我们几乎没有用到距离 W^ω_p 和$\hat{}W_p$的详细结构，现在正好可以进一步说明一些。按字面理解，$\widehat{\ }$空间 $\mathcal{P}_p(X)$的“精细结构”如下。首先，$\mathcal{P}_p(X)^\omega$ 中的一个点是概率测度的超积。换言之，若(X_i,d_i)配备博雷尔 σ-代数 $\mathcal{B}_i$，则有 μ^ω： $\mathcal{B}^\omega \to [0,1]^\omega$是一个有限可加、但不一定可列可加的内函数。其次，$\widehat{\ }\mu^\omega = [(\mu_i)] \approx_{W^\omega_p} \nu^\omega = [(\nu_i)],$，因此，当且仅当存在一个耦合序列$(\gamma_i)_{i\in\mathbb{N}}$，其中 $\gamma_i \in \Pi(\mu_i,\nu_i)$，使得 μ^ω 和 ν^ω 在 $\mathcal{P}_p(X)$中映射到同一点

$$\left[\left(\left(\int_{X_i\times X_i}(d_i(x,y))^p\,d\gamma_i(x,y)\right)^{1/p}\right)\right]\approx 0.$$

事实上，作如下定义在概念上会更方便。

定义 14.（内耦合空间）给定 $\mu^\omega,\nu^\omega \in \mathcal{P}_p(X)^\omega$，定义 $\Pi^\omega(\mu^\omega,\nu^\omega)$ 为 μ^ω 与 ν^ω 的内耦合 空间，如下所示：

$$[(\gamma_i)] := \gamma^\omega \in \Pi^\omega(\mu^\omega,\nu^\omega) \iff \gamma_i \in \Pi(\mu_i,\nu_i)\ \omega\text{-almost surely.}$$

有了这个定义，我们看到 $W^\omega_2(\mu^\omega,\nu^\omega) \approx 0$ 当且仅当存在一个内耦合 $\gamma^\omega \in \Pi^\omega(\mu^\omega,\nu^\omega)$，使得 $\int_{X^\omega\times X^\omega}(d^\omega(x,y)^p d\gamma^\omega(x,y) \approx 0$。

$\widehat{\ }$另一方面，虽然 $\mathcal{P}_p(X)$ 中的一个点带有这样的结构：它是彼此 W^ω_2-无穷小接近的测度超积的等价类；但若要将 $\mathcal{P}_p(X)$ 中的一个点视为测度，该如何操作并不完全显而易见（除了 $\widehat{\mathcal{P}_p\ X}(\ )$ 中可与 $\mathcal{P}_p(\hat{}X)$！相识别的部分）。这尤其棘手，因为我们希望在 $\mathcal{P}_p(\hat{}X)$ 中的点与它们在 $\mathcal{P}_p(X)^\omega$ 中的提升之间传递测度论数据（或者，基本等同地，在空间序列 $(\mathcal{P}_p(X_i))_{i\in\mathbb{N}}$ 中传递测度序列）；而表面看来，这类数据$\widehat{\ }$必须“经过”空间 $\mathcal{P}_p(X)$（参见图 2.1(b)）。事实证明，在某种程度上，可以用 Loeb 测度作为一种“变通办法”，本节余下部分将对此作出解释。

我们到顾$(X^\omega_{\lim},d)$，并概念中所述。类似地，$\hat{}\mu$，若 $\mu^\omega \in (\mathcal{P}(X)^\omega_{\lim},W^\omega_p)$ 是 $\mu \in (\mathcal{P}_p(\hat{}X)\ W_p)$ 的一个提升，则要求 $\iota\mu = st_{\hat{}W_p}(\mu^\omega)$，其中 ι

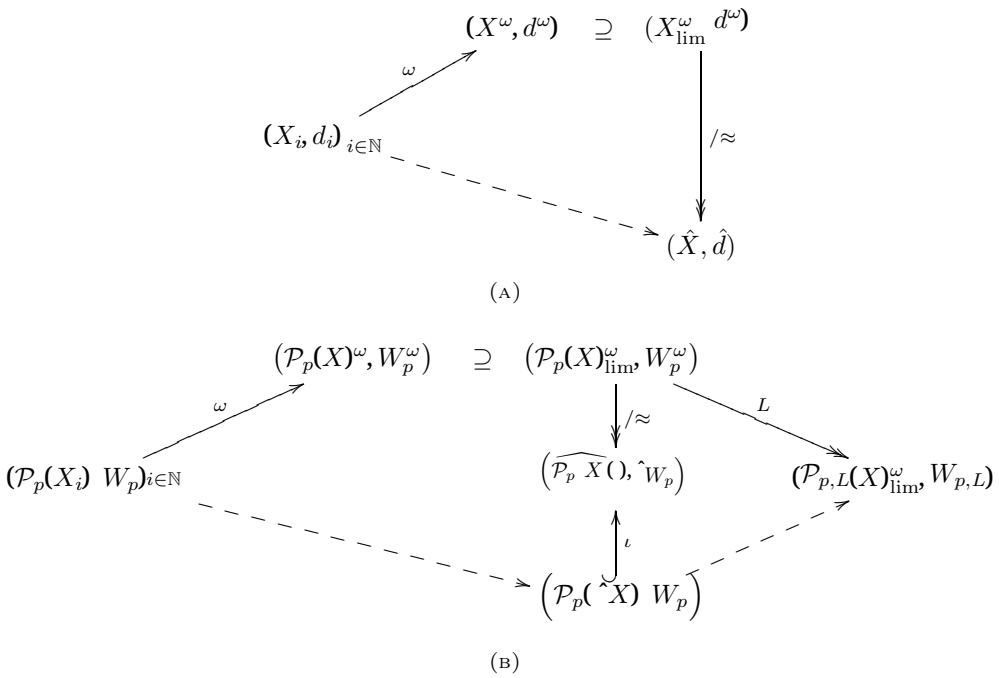

图 2.1。以交换图风格绘制的示意图，描绘了使用度量超积构造时的一般证明策略。(A) 箭头 $\xrightarrow{\omega}$ 表示超滤子商映射，它将一个序列 $(x_i)_{i\in\mathbb{N}} \in (X_i, d_i)_{i\in\mathbb{N}}$ 映为一点 $x^\omega \in (X^\omega, d^\omega)$；该箭头旨在表明使用 Łoś 定理，从度量空间序列 $(X_i, d_i)_{i\in\mathbb{N}}$ 推导出关于超积 (X^ω, d^ω) 的事实。当空间 (X_i, d_i) 还是带基点度量空间时，如引言所讨论的，便可以讨论 (X^ω, d^ω) 的有限子集 $(X^\omega_{\lim}, d^\omega)$；由 $(X^\omega_{\lim}, d^\omega)$ 出发，我们通过按等价类$x^\omega \sim y^\omega \iff d^\omega(x^\omega, y^\omega) \approx 0$取商，构造度量超极限 $(\hat{}X, \hat{}d)$。通过对该商映射进行解析研究，我们最终推导出关于 $(\hat{}X, \hat{}d)$ 的事实；这由虚线箭头 $\dashrightarrow$ 表示。(B) 此处我们考虑 Wasserstein 空间的超积。由于 Wasserstein 空间本身就是度量空间，所以在许多方面情形是相似的。然而，还存在一个额外的复杂性：如定理 11 所示，我们最终感兴趣的极限 $\hat{}$ 空间，即 $(\mathcal{P}_p(X)\ W_p)$，一般并非 $(\mathcal{P}_p(X_i)\ W_p)_{i\in\mathbb{N}}$ 的度量超极限，而只是等距嵌入（如箭头 $\overset{\iota}{\hookrightarrow}$ 所示）到度量超极限 $(\widehat{\mathcal{P}_p\ X}(\ ), \hat{}W_p)$ 中。此外，在图的最右列中，我们纳入了空间 $(\mathcal{P}_{p,L}(X)^\omega_{\lim}, W_{p,L})$，它是与 $\mathcal{P}_p(X)^\omega_{\lim}$ 中各点相关联的 Loeb 测度空间，其“距- 离” $W_{p,L}$ 由耦合 γ_L 定义，而这些耦合本身也是 Loeb 测度，见定义 20。注意，空间 $(\mathcal{P}_{p,L}(X)^\omega_{\lim}, W_{p,L})$ 是一个带有可能具有病态性质的“度量”的测度$\widehat{\ \ \ }$ $\hat{}$ 空间，而 $(\mathcal{P}_p(X)\ W_p)$ 是一个度量空间，但其点一般并不具有显然的测度结构。从 $(\mathcal{P}_p(X)\ W_p)$ 到 $(\mathcal{P}_{p,L}(X)^\omega_{\lim}, W_{p,L})$ 的虚线 $\hat{}$ 箭头由定理 17 加以证明。

是从 $(\mathcal{P}_p(\hat{X}), W_p)$ 到 $(\widehat{\mathcal{P}_p(X)}, \hat{W}_p)$ 的等距嵌入，而 $st^{\wedge W_p}(\cdot)$ 是从 $(\mathcal{P}(X)^\omega_{\lim}, W_p^\omega)$ 到 $(\widehat{\mathcal{P}_p(X)}, \hat{W}_p)$ 的商映射。对偶地，如果 μ^ω 属于 $st^{\wedge W_p}(\cdot)$ 的定义域，且 $st^{\wedge W_p}(\mu^\omega)$ 属于 ι 的值域，我们就称 $\mu = \iota^{-1} st^{\wedge W_p}(\mu^\omega)$ 是 μ^ω 在 $\hat{}(\mathcal{P}_p(X), W_p)$ 上的下推。

同时，给定 $\mu^\omega \in (X^\omega_{\lim}, d^\omega)$，我们可以构造与 μ^ω 相关联的 Loeb 测度，记作 μ_L，如第1节所述。注意，μ_L 是 $\hat{}(X^\omega_{\lim}, d^\omega)$ 上的一个（实值）概率测度。利用映射 $st_{\hat{d}}\colon X^\omega_{\lim} \to X$，我们还可以考虑 μ_L 的推前，即 $\mu_L \circ st^{-1}{}^{\wedge d}$；它是 $(\hat{}X, \hat{}d)$ 上的概率测度，前提是 $st_{\hat{d}}$ 可测。已有研究 [19] 指出，作为从 $X^\omega_{\lim}$（配备 Loeb σ-代数 $\sigma(\mathcal{B}^\omega)$）到 X（配备由 d 生成的博雷尔 σ-代数）的映射，当 X 不可分时，$st_{\hat{d}}$ 的可测性可能失效；因此，有必要检查 $st_{\hat{d}}$ 在限制到 μ_L 和μ 的支撑上时是否可测。

引理15。假设 $A \subset (\hat{}X, \hat{}d)$ 是可分且闭的。令 $\widehat{\mathcal{B}}$ 表示由 d 在 X上生成的博雷尔 σ-代数$\hat{}\hat{}$。那么 $st_{\hat{d}}\colon X^\omega_{\lim} \to X$ 相对于 σ- 代数 $\sigma(\mathcal{B}^\omega)$ 和 $\mathcal{B} \cap A$ 是可测的。

证明。论证只是在 [19, 引理3.1]基础上的小幅推广。事实上，令 $\{x_j\}_{i=1}^\infty$ 为 A中的一个可数稠密集。那么对所有 $n \in \mathbb{N}$, $A \subseteq \bigcup_j B(x_j, 1/n)$，有

$$A \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{\infty} B(x_j, 1/n).$$

另一方面，$\overline{\{x_j\}_{j=1}^\infty} \subseteq A$ 因为 A 是闭的。因此

$$A = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{\infty} B(x_j, 1/n).$$

因此，根据 [19, 引理3.1]，$st^{-1}(A) \in \sigma(\mathcal{B}^\omega)$。此外，对于 X中的每个 $\hat{}$ 球 $B(x, \varepsilon)$，都有 $st^{-1}(A \cap B(x, \varepsilon)) \in \sigma(\mathcal{B}^\omega)$，因为球的原像相对于 $st(\cdot)$是 $\sigma(\mathcal{B}^\omega)$-可测的，这同样可由 [19, $\widehat{}$引理3.1]得出。由此（根据 π-λ 定理），$\mathcal{B} \cap A$ 中的每个集合都有一个 $st(\cdot)$-原像，该原像属于 $\sigma(\mathcal{B}^\omega)$，因为 $\mathcal{B} \cap A$ 由形如 $B(x_j, 1/n) \cap A$ 的集合可数生成。□

$\hat{}\hat{}$注。设 μ 是 (X, d) 上的拉东概率测度。那么，$supp(\mu)$ 是闭且可分的，因此由前述引理可知，只要将范围限制在某个相关 Radon 测度的支撑上，我们总可以使用 $st^{-1}{}^{\wedge d}$。

接下来，我们有时会希望考虑给定 $\mu \in (\mathcal{P}_p(\hat{}X), W_p)$ 的提升 μ^ω，但有时也会使用 Loeb 测度 μ_L，其 $st_{\hat{d}}$-推前为 μ；更理想的是，若 μ_L 是与某个 μ^ω 相关联的 Loeb 测度，而 μ^ω 是 μ 的提升。下面我们将证明，这些做法都可行。

引理 16。设$(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{P}_p(\hat{}X)$ 是一个 W_p-柯西序列，极限为 μ。对于每个 μ_n，固定一个测度序列$(\mu_{n,i})$，其中各项属于 $\mathcal{P}_p(X_i)$，且满足 $\iota^{-1} \circ st_{\hat{W}_p}[(\mu_{n,i})] = \mu_n$。则有以下结论：

(1) 对每个 $\varepsilon > 0$，都存在一个 $N(\varepsilon)$，使得对于所有 $n, m \geq N(\varepsilon)$，以及 ω-几乎所有的 $i \in \mathbb{N}$，$W_{p,i}(\mu_{n,i}, \mu_{m,i})$，$< \varepsilon$. 事实上，$N(\varepsilon)$ 是 (μ_n) 在 $(\mathcal{P}_p(\hat{}X), W_2)$ 中的收敛模。

(2) （对角序列）令 $N(\varepsilon)$ 为 *(1)* 中的收敛模。则， $[(\mu_{N(1/i),i})] \in \mathcal{P}_p(X)^\omega$ 是 μ 的一个提升。此外，任何满足 $\Phi(i) \geq N(1/i)$ 的序列 $[(\mu_{\Phi(i),i})]$ （对ω-几乎所有 $i \in \mathbb{N}$）也都是如此。

证明。 (1) 首先，由构造可知， $W_p(\mu_n,\mu_m) < \varepsilon$ 当且仅当对于 $\mathcal{P}_p(X)^\omega$ 中任意两个提升 $\mu_n^\omega = [(\mu_{n,i})]$ 和 $\mu_m^\omega = [(\mu_{m,i})]$ ，同样的结论成立。而这又当且仅当 (1) 成立。

(2) 下文中，不失一般性，我们取 (1) 中的函数 $N(\varepsilon)$ 关于 $\varepsilon \to 0$ 单调不减。

考虑测度的对角序列 $(\mu_{N(1/i),i})$。任取 $\varepsilon > 0$ 。取充分大的 i_0 ，使得 $\varepsilon > 1/i_0$。然后注意，若 $i \geq i_0$，则若 $n,m \geq N(1/i)$，也有 $n,m \geq N(1/i_0)$。因此，由于

$$\{i \in \mathbb{N} \mid \forall n,m \geq N(1/i_0), W_{p,i}(\mu_{n,i},\mu_{m,i}) < 1/i_0\} \in \omega$$

成立的是

$$\{i \in \mathbb{N} \mid i \geq i_0\} \cap \{i \in \mathbb{N} \mid \forall n,m \geq N(1/i_0), W_{p,i}(\mu_{n,i},\mu_{m,i}) < 1/i_0\} \in \omega$$

并且由于

$$\{i \in \mathbb{N} \mid i \geq i_0 \wedge \forall n,m \geq N(1/i_0), W_{p,i}(\mu_{n,i},\mu_{m,i}) < 1/i_0\} \subseteq \{i \in \mathbb{N} \mid i \geq i_0 \wedge \forall n \geq N(1/i_0) \forall m \geq N(1/i), W_{p,i}(\mu_{n,i},\mu_{m,i}) < 1/i_0\}$$

对于 ω-几乎所有 $i \in \mathbb{N}$，也成立 $W_{p,i}(\mu_{n,i},\mu_{m,i}) < 1/i_0$，只要 $n \geq N(1/i_0)$ 且$m \geq N(1/i)$。特别地， ω-几乎必然成立

$$\forall n \geq N(1/i_0), W_{p,i}(\mu_{n,i},\mu_{N(1/i),i}) < 1/i_0.$$

因此，根据构造，我们有

$$\forall n \geq N(1/i_0), W_p^\omega([(\mu_{n,i})],[(\mu_{N(1/i),i})]) < 1/i_0.$$

现在，令 μ 为 (μ_n) 在 $(\mathcal{P}_p(\hat{}X)\ W_p)$ 中的极限，并令 $[(\mu_{-,i})] \in \mathcal{P}(X)^\omega$ 为 μ 的任意提升。注意，由于 $N(\varepsilon)$ 是 (μ_n) 的收敛模，我们有

$$\forall n \geq N(1/i_0), W_p^\omega([(\mu_{n,i})],[(\mu_{-,i})]) < 1/i_0.$$

因此，根据 $(\mathcal{P}_p(X)^\omega, W_p^\omega)$ 中的三角不等式，

$$W_p^\omega([(\mu_{-,i})],[(\mu_{N(1/i),i})]) < 2/i_0.$$

但我们对 $\varepsilon > 0$ （从而对 i_0）的选择是任意的，因此 $W_p^\omega([(\mu_{-,i})],[(\mu_{N(1/i),i})])$ 小于任意正标准实数，因此 $W_p^\omega([(\mu_{-,i})],[(\mu_{N(1/i),i})]) \approx 0$。因此， $[(\mu_{N(1/i),i})]$ 也是 μ 的一个提升。

完全相同的推理也使我们能够为每个 i 选取不同的 $n_i \geq N(1/i)$，因此，(2) 的陈述中剩下的结论成立。□

定理 17. 设 $p \in [1,\infty)$。设 μ 是定义在 $\hat{}X$ 上的 ***Radon*** 测度，且满足 $\mu \in \mathcal{P}_p(\hat{}X)$。那么存在一个定义在 $X_{\lim}^\omega$ 上的 ***Loeb*** 测度 μ_L ，其 $st_{\hat{d}}$-推前为 μ。此外，我们可以令 μ_L 为与 μ 的一个提升 μ^ω 相关联的 ***Loeb*** 测度，其中该提升是超有限的（即离散测度的超积）。

证明. 设 (μ_n) 是一个离散概率测度序列，在 W_p 下收敛到 $\mu \in \mathcal{P}_p(\hat{}X)$，且满足 $supp(\mu_n) \subseteq supp(\mu)$，并且每个 μ_n 都具有如下形式

$$\mu_n = \frac{1}{k_n}\sum_{j=1}^{k_n} c_{j,n}\delta_{\hat{x}_{j,n}}; \quad \hat{x}_{j,n} \in supp(\mu).$$

例如，可以取 μ_n 为 μ 的第 n 个经验测度（在此情况下 $c_{j,\ n} = 1$）。$\hat{}$ 我们用 $N(\varepsilon)$ 表示 $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 在 $(\mathcal{P}_p(X)\ W_p)$ 中的收敛模。对于每个 $\hat{}x_{j,\ n}$，选取一列 $(x_{j,\ n,\ i})$，其中各点属于 (X_i, d_i)，使得 $st_{\hat{d}}[(x_{j,\ n,\ i})] = \hat{}x_{j,\ n}$。将 μ_n 提升为支撑于 $X^{\omega}_{\lim}$ 内的内测度，定义如下：

$$\tilde{\mu}_n = \frac{1}{k_n}\sum_{j=1}^{k_n} c_{j,n}\delta_{[(x_{j,n,i})]} := \left[\left(\frac{1}{k_n}\sum_{j=1}^{k_n} c_{j,n}\delta_{x_{j,n,i}}\right)_{i\in\mathbb{N}}\right] := [(\tilde{\mu}_{n,i})].$$

令 $\mathcal{B}^{\omega}$ 表示内博雷尔集的内测度代数。出于显而易见的原因，$\tilde{\mu}_n$ 可直接从 $\mathcal{B}^{\omega}$ 延拓到 $\sigma(\mathcal{B}^{\omega})$，并且只为集合赋予标准实数测度，因此 $\tilde{\mu}_n$ 很容易与其对应的 Loeb 测度 $\tilde{\mu}_{n,\ L}$ 混淆（但我们避免这种滥用式的认同）。

令 B 为 $\hat{}\ X \cap supp(\mu)$ 中任意一个博雷尔集。显然，$\mu_n(B) = \tilde{\mu}_{n,L}(st^{-1}(B))$，这是因为 $\tilde{\mu}_n$ 的构成原子（因而 $\tilde{\mu}_{n,L}$）的位置与 μ_n 的位置完全对应，只需在每个原像 $st^{-1}\hat{}_{d}\ \{\hat{}x_{j,n}\}$ 中任意选取一个点即可。同时，对于每个连续集 $B \subset X \cap supp(\mu)$（即 $X \cap supp(\mu)$ 中满足 $\mu(\partial B) = 0$ 的博雷尔集），都有 $\mu_n(B) \to \mu(B)\ \hat{}\ \hat{}$；这是因为 W_p 所诱导的拓扑强于概率测度弱收敛所对应的拓扑。特别地，对于每个这样的 B，序列 $\{\tilde{\mu}_{n,L}(st^{-1}(B))\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是柯西序列，因为对于每个 $n \in \mathbb{N}$，都有 $\mu_n(B) = \tilde{\mu}_{n,L}(st^{-1}(B))$。

可以按如下方式进行：将对象序列 $\tilde{\mu}_n$ 扩展到非标准扩张中，我们发现，对于所有严格超有限的 N、M，都有 $\tilde{\mu}_N(st^{-1}(B)) \approx \tilde{\mu}_M(st^{-1}(B))$，此外还有 $\tilde{\mu}_N(st^{-1}(B)) \approx \mu(B)$；因此，只需取与任意此类内测度 $\tilde{\mu}_N$ 相关联的 Loeb 测度，作为 μ 的代表即可。然而，本文并未建立非标准扩张理论，因此为了使论述自成一体，我们改为通过前一条引理中的对角提升构造来进行推理。

也就是说，的支撑上的限制，其中该支撑是对象（因此序列有 $\hat{\mu}(\partial B(x_0,\delta)) = 0$）。令

$$\Psi_{(x_0,\delta)}(\varepsilon) := \operatorname*{argmin}_{N\in\mathbb{N}} \{(\forall n, m \geq N)|\mu_n(B(x_0,\delta)\cap supp(\mu)) - \mu_m(B(x_0,\delta)\cap supp(\mu))| < \varepsilon\}.$$

换言之，$\Psi_{(x_0,\delta)}(\varepsilon)$ 是序列 $(\mu_n(B(x_0,\delta)\cap supp(\mu)))_{n\in\mathbb{N}}$ 的收敛模。由引理 16 的第 (2) 部分可知，若 $\Phi\colon \mathbb{N}\to\mathbb{N}$ 在 ω-几乎处处意义下大于 $(\max\{N(1/i)\,\Psi_{(x_0,\delta)}(1/i)\})_{i\in\mathbb{N}}$，则有 $[(\mu_{\Phi(i)})]$ 是 μ 的提升。同时，令 $\mu_{\Phi,L} :=$Loeb$[(\mu_\Phi)]$, ，我们断言 $\mu_{\Phi,L}(st^{-1}\hat{}_{\hat{d}}(B(x_0,\delta)\cap supp(\mu))) = \mu(B(x_0,\delta)\cap supp(\mu))$。

Let 我们来说明该断言为何成立。固定 $\varepsilon > 0$。那么，若 $n,m \geq \Psi_{(x_0,\delta)}(\varepsilon)$，则有 t

$$|\mu_n(B(x_0,\delta)\cap supp(\mu)) - \mu_m(B(x_0,\delta)\cap supp(\mu))| < \varepsilon$$

因此

$$|\tilde{\mu}_{n,L}(st_{\hat{d}}^{-1}(B(x_0,\delta)\cap supp(\mu))) - \tilde{\mu}_{m,L}(st_{\hat{d}}^{-1}(B(x_0,\delta)\cap supp(\mu)))| < \varepsilon.$$

由于对每个 $n \in \mathbb{N}$，μ_n 都支撑于有限个点，因此边界 $\partial(B(x_0,\delta)\cap supp(\mu))$ 与 μ_n 中任意原子之间存在某个最小距离。因此，

若 $\eta := [(\eta_i)]$ 是任意一个正无穷小量，则（由于 $st^{-1}{}_{\hat{d}}(B(x_0,\delta)\cap supp(\mu)) = st^{-1}{}_{\hat{d}}(B(x_0,\delta))\cap st^{-1}{}_{\hat{d}}\ supp(\mu)$）

$$\tilde{\mu}_{n,L}(st_{\hat{d}}^{-1}(B(x_0,\delta)\cap supp(\mu))) = \tilde{\mu}_{n,L}(B(x_0^\omega,\delta+\eta)\cap st_{\hat{d}}^{-1}supp(\mu));$$

$$\tilde{\mu}_{m,L}(st_{\hat{d}}^{-1}(B(x_0,\delta)\cap supp(\mu))) = \tilde{\mu}_{m,L}(B(x_0^\omega,\delta+\eta)\cap st_{\hat{d}}^{-1}(supp(\mu))$$

其中，x_0^ω 是 x_0 的任意提升，并且

$$B(x_0^\omega,\delta+\eta) := \{x^\omega\in X^\omega \mid d^\omega(x_0^\omega,x^\omega)<\delta+\eta\}.$$

注意，$B(x_0^\omega,\delta+\eta)$ 是开球序列 $B(x_{0,\ i},\delta+\eta_i)\subseteq X_i$ 的超积。

设 $S^\omega := [(S_i)]$ 是任意一个包含 $st^{-1}{}_{\hat{d}}\ supp(\mu)$ 的内可测集。我们推得（利用 $\tilde{\mu}_n$ 在 $st^{-1}{}_{\hat{d}}\ supp(\mu)$ 之外没有质量这一事实）

$$(\forall n,m\geq\Phi_{(x_0,\delta)}(\varepsilon))|\tilde{\mu}_n(B(x_0^\omega,\delta+\eta)\cap S^\omega)-\tilde{\mu}_m(B(x_0^\omega,\delta+\eta)\cap S^\omega)|<\varepsilon.$$

反过来，这成立当且仅当

$$\{i\in\mathbb{N}\mid(\forall n,m\geq\Phi_{(x_0,\delta)}(\varepsilon))|\tilde{\mu}_{n,i}(B(x_{0,i},\delta+\eta_i)\cap S_i)-\tilde{\mu}_{m,i}(B(x_{0,i},\delta+\eta_i)\cap S_i)|<\varepsilon\}\in\omega.$$

由引理 16 第 2 部分证明中的相同推理可知，若 $\Phi(i)\geq\Phi_{(x_0,\delta)}(1/i)$，则有

$$\{i\in\mathbb{N}\mid n\geq\Phi_{(x_0,\delta)}(\varepsilon)|\tilde{\mu}_{\Phi(i),i}(B(x_{0,i},\delta+\eta_i)\cap S_i)-\tilde{\mu}_{n,i}(B(x_{0,i},\delta+\eta_i)\cap S_i)|<\varepsilon\}\in\omega$$

因此，

$$|\tilde{\mu}_\Phi(B(x_0^\omega,\delta+\eta)\cap S^\omega)-\tilde{\mu}_n(B(x_0^\omega,\delta+\eta)\cap S^\omega)|<\varepsilon.$$

由此可得

$$|\tilde{\mu}_\Phi(B(x_0^\omega,\delta+\eta)\cap S^\omega)-\tilde{\mu}_{n,L}(B(x_0^\omega,\delta+\eta)\cap S^\omega)|<\varepsilon$$

从而

$$|\tilde{\mu}_\Phi(B(x_0^\omega,\delta+\eta)\cap S^\omega)-\tilde{\mu}_{n,L}(st_{\hat{d}}^{-1}(B(x_0,\delta)\cap supp(\mu)))|<\varepsilon.$$

令 $\varepsilon\to 0$，我们推得，对于任意无穷小量 $\eta>0$，

$$\tilde{\mu}_\Phi(B(x_0^\omega,\delta+\eta)\cap S^\omega)\approx\lim_{n\to\infty}\tilde{\mu}_{n,L}(st_{\hat{d}}^{-1}(B(x_0,\delta)\cap supp(\mu))).$$

现在，我们可以将 $\tilde{\mu}_\Phi(B(x_0^\omega,\delta+\eta)\cap S^\omega)$ 视为关于 η 的内函数，也就是说，是从 $\mathbb{R}_+^\omega$ 到 $\mathbb{R}_+^\omega$ 的函数；由第 11 章中的溢出原理 [24, ，即定理 11.9，1] 可知，对于任意 $\varepsilon_0\in\mathbb{R}_+$，存在某个 $\eta_0\in\mathbb{R}_+$，使得对于所有正超实数 $\eta<\eta_0$，

$$|\tilde{\mu}_\Phi(B(x_0^\omega,\delta+\eta)\cap S^\omega)-\lim_{n\to\infty}\tilde{\mu}_{n,L}(st_{\hat{d}}^{-1}(B(x_0,\delta)\cap supp(\mu)))|<\varepsilon_0$$

同样，因此

$$|\tilde{\mu}_{\Phi,L}(B(x_0^\omega,\delta+\eta)\cap S^\omega)-\lim_{n\to\infty}\tilde{\mu}_{n,L}(st_{\hat{d}}^{-1}(B(x_0,\delta)\cap supp(\mu)))|<\varepsilon_0.$$

取 $\eta_1\approx 0$ 和 $\eta_2=\frac{\eta_0}{2}$；利用

$$(B(x_0^\omega,\delta+\eta_1)\cap S^\omega)\subset\left(st_{\hat{d}}^{-1}(\bar{B}(x_0,\delta))\cap S^\omega\right)\subset(B(x_0^\omega,\delta+\eta_2)\cap S^\omega)$$

我们推得

$$|\tilde{\mu}_{\Phi,L}(st_{\hat{d}}^{-1}(\bar{B}(x_0,\delta))\cap S^\omega)-\lim_{n\to\infty}\tilde{\mu}_{n,L}(st_{\hat{d}}^{-1}(B(x_0,\delta)\cap supp(\mu)))|<\varepsilon_0.$$

由于 $\varepsilon_0>0$ 是任意的，我们推得

$$\tilde{\mu}_{\Phi,L}(st_{\hat{d}}^{-1}(\bar{B}(x_0,\delta))\cap S^\omega)=\lim_{n\to\infty}\tilde{\mu}_{n,L}(st_{\hat{d}}^{-1}(B(x_0,\delta)\cap supp(\mu)))$$

但由于 $\mu(\delta B(x_0,\delta))=0$，有

$$\lim_{n\to\infty}\tilde{\mu}_{n,L}(st_{\hat{d}}^{-1}(B(x_0,\delta)\cap supp(\mu)))=\lim_{n\to\infty}\tilde{\mu}_{n,L}(st_{\hat{d}}^{-1}(\bar{B}(x_0,\delta)\cap supp(\mu))).$$

最后，我们选取 S^ω 使得 $\tilde{\mu}_{\Phi,L}(st^{-1}{}_{\hat{d}}\ supp(\mu)\Delta S^\omega)=0$。因此，

$$\begin{aligned}\tilde{\mu}_{\Phi,L}(st_{\hat{d}}^{-1}(\bar{B}(x_0,\delta))\cap S^\omega)&=\tilde{\mu}_{\Phi,L}(st_{\hat{d}}^{-1}(\bar{B}(x_0,\delta))\cap st_{\hat{d}}^{-1}supp(\mu))\\&=\tilde{\mu}_{\Phi,L}(st_{\hat{d}}^{-1}(\bar{B}(x_0,\delta)\cap supp(\mu)))\end{aligned}$$

于是 $\tilde{\mu}_{\Phi,L}\circ st^{-1}{}_{\hat{d}}(B(x_0,\delta))=\mu(B(x_0,\delta))$，命题得证。

我们通过考虑 μ 的一族可数连续集来完成证明，这些连续集具有 $B(x_0,\delta)\cap supp(\mu)$ 的形式，并生成 μ 的支撑上的博雷尔集的 σ-代数；由于 μ 具有可分支撑，这样的可数族˜确实存在。选取函数 $\Phi(i)$，使其几乎必然大于 $N(\varepsilon)$，并且选取收敛模数 $\Phi_{B(x_0,\delta)\cap supp(\mu)}$，使其对可数族中的每个 $B(x_0,\delta)$均成立（例如，对所有这些收敛模数作对角化），我们便得出$\tilde{\mu}_{\tilde{\Phi},L}\circ st^{-1}{}_{\hat{d}}=\mu$。□

事实上，可以对前述论证稍作修改，从而得到一个表面上更强的结果，即:

推论18. 设 μ 是 σ-有限的 *Radon* 测度，定义在ˆX 上（也就是说，μ 可以写成可数个 *Radon* 概率测度之和）。那么，存在一个定义在 X^ω 上的内测度 μ^ω，其 *Loeb* 测度 μ_L 推前为 μ。

证明. （略述）若要去掉 $\mu\in\mathcal{P}_p($ˆ$X)$这一假设，只需将 W_p 的度量结构ˆ替换为一种在整个 $\mathcal{P}(X)$ 上都有定义、且离散测度稠密的度量，例如 Lévy-Prokhorov度量 d_{LP}；也就是说，考虑空间$(\mathcal{P}($ˆ$X)\ d_{LP})$和$(\mathcal{P}(X)^\omega,d_{LP}^\omega)$。除此之外，前述引理和定理中的论证仍可照常进行，由此可推出前一个定理的一个版本，该版本适用于 X上的任意 Radon 概率测度。随后，通过整体化即可立即得到 X 上的 σ-有限 Radon 测度的情形。□

此时，值得简要谈谈当 X 不紧致时，空间 $(\mathcal{P}_p(X)\ W_p)$ˆˆ严格大于 $(\mathcal{P}_p(X)\ W_p)$ 会出现“什么问题”，因为我们现在可以这样做。特别考虑 (X_i,d_i) 为常值序列、且每个 (X_i,d_i) 都是带欧几里得范数的 $\mathbb{R}^d$ 的情形。集中紧性现象是：如果我们有 $\mathbb{R}^d$ 上的一个（Radon）测度序列（取子序列后），可能出现以下三种情况之一：该序列是紧的，该序列向无穷远扩散，或者只有一部分质量是紧的，而其余质量的行为更为复杂。若测度序列 (μ_i) 渐近弥散，或者甚至有有限比例的质量向无穷远扩散，则在超积中，$W_p^\omega(\delta_e^\omega,\mu^\omega)$ 是一个严格超有限超实数量（因为第 p 阶矩是一个严格超实数量），因此在构造 $\mathcal{P}_p(X)$ 时，(μ_i^ω) 被排除在定义域之外。然而，即使 $W_p^\omega(\delta_{e_i}^\omega,\mu_i^\omega)$ 有限，$st^{-W_p}(\mu^\omega)\in\mathcal{P}_p(X)$ 仍可能不属于ˆ（嵌入像）$(\mathcal{P}_p(X)\ W_p)$，下一个例子将对此加以说明。

ˆˆ**例 19。典型实例**（展示 $(\mathcal{P}_2(X)\ W_2)\subsetneq(\mathcal{P}_2(X)\ W_2)$ 的情形）。考虑超极限 (X,d) 的构造：对所有 $i\in\mathbb{N}$，取 $X_i=\mathbb{R}$，并采用通常度量。注意，在这种情况下，$X=\mathbb{R}$。显然，前述定理的第 (3) 部分

不适用于此情形，因为 $\mathbb{R}$ 不是紧致的。我们考虑 $\mathcal{P}(\mathbb{R})^\omega$ 中的测度 δ_0 和 $(1-N^{-1})\delta_0+N^{-1}\delta_{N^{1/2}}$（及其超积），其中 $N=[(N_i)]\in\mathbb{N}^\omega\backslash\mathbb{N}$。于是，

$$W_2^\omega(\delta_0,(1-N^{-1})\delta_0+N^{-1}\delta_{N^{1/2}})=\left(N^{-1}d^2(0,N^{1/2})\right)^{1/2}=1.$$

更一般地，测度 $(1-N^{-1})\delta_0+N^{-1}\delta_{N^{1/2}}$ 与任何支撑于 $\mathbb{R}^\omega_{\lim}$ 内的 $\mathcal{P}(\mathbb{R})^\omega$ 测度之间的距离有限。事实上，设 $\mu^\omega=[(\mu_i)]$ 支撑于 $[-R,R]$ 内，其中 $R\in\mathbb{R}$；注意，在这种情况下，μ_i 几乎必然支撑于 $[-R,R]$ ω 内。于是，根据定义，

$$W_2^\omega(\mu^\omega,(1-N^{-1})\delta_0+N^{-1}\delta_{N^{1/2}})=\left[\left(\left(\inf_{\gamma_i\in\Pi(\mu_i,(1-N_i^{-1})\delta_0+N_i^{-1}\delta_{N_i^{1/2}}}\int|x-y|^2d\gamma_i(x,y)\right)^{1/2}\right)_{i\in\mathbb{N}}\right].$$

注意，对每个 $i\in\mathbb{N}$，原子 $N_i^{-1}\delta_{N_i^{1/2}}$ 必须被输运到区域 $[-R,R]$，其代价介于 $N_i^{-1/2}|N_i^{1/2}+R|$ 和 $N_i^{-1/2}|N_i^{1/2}-R|$ 之间。但 $|N_i|\to\infty$，因此特别地，

$$W_2^\omega(\mu^\omega,(1-N^{-1})\delta_0+N^{-1}\delta_{N^{1/2}})\geq\left[\left(\min\left\{N_i^{-1/2}|N_i^{1/2}+R|,N_i^{-1/2}|N_i^{1/2}-R|\right\}\right)_{i\in\mathbb{N}}\right]\approx 1.$$

另一方面，由于 $W_2^\omega(\delta_0,(1-N^{-1})\delta_0+N^{-1}\delta_{N^{1/2}})=1$，我们知道 $(1-N^{-1})\delta_0+N^{-1}\delta_{N^{1/2}}\in(\mathcal{P}(\mathbb{R})^\omega_{\lim},W_2^\omega)$。同时，给定任意一个具有紧支撑的 $\nu\in(\mathcal{P}_2(\mathbb{R})\ W_2)$（例如支撑在 $[-R,R]$ 内），我们可以考虑 ν 的一个提升 ν^ω。根据命题 13，该提升支撑于一个全有界集内，该集合向下映射到 $[-R,R]$，因此也具有有界直径。这意味着

$$W_2^\omega(\nu^\omega,(1-N^{-1})\delta_0+N^{-1}\delta_{N^{1/2}})\lessapprox 1.$$

因此，（令 $\hat{}\nu=\iota\nu=st^{-}W_2(\nu^\omega)$）

$$\hat{W}_2(\hat{\nu},\widehat{(1-N^{-1})\delta_0+N^{-1}}\delta_{N^{1/2}})\geq 1.$$

由于具有紧支撑的测度在 $(\mathcal{P}_2(\mathbb{R})\ W_2)$ 中稠密，由稠密性可知，对于任意 $\nu\in(\mathcal{P}_2(\mathbb{R})\ W_2)$，

$$\hat{W}_2(\hat{\nu},\widehat{(1-N^{-1})\delta_0+N^{-1}}\delta_{N^{1/2}})\geq 1$$

也同样成立。

$\widehat{\quad}$ $\hat{}$注。</style>还有另外两个原因可能导致 $\hat{}()()$。首先，给定一个 $()$及其对应的 *Loeb* 测度，由于 在 的支撑上不具可测性，-推前便会出现这种情况。如果这种情况发生在 $()$中的一个等价类 $\hat{}$的整个$\frown\!\!\!\!\frown$范围内，那么该等价类中就没有任何元素是测度 $\hat{}\hat{}\mu\in\mathcal{P}_p(X)$的提升，因此尤其有 $\hat{}\mu\notin\iota\mathcal{P}_p(X)$。原则上，我们也可能确实有 $st_{\tilde{d}}$-$\hat{}$可测性，但在 X上没有可分支撑；此时，μ_L 仍会推前为 $\hat{}X$ 上的一个测度，但由于支撑不可分，μ 不是拉东测度，因此也不属于 $\mathcal{P}_p(\hat{}X)$。（但请注意，这种情况与 ZFC 无关！事实上，度量空间上非拉东概率测度的存在需要大基数公理，如上文所述。）

定义 20. 设 $\mu^\omega,\nu^\omega\in\mathcal{P}_p(X)^\omega_{\lim}$，并设 μ_L 和 ν_L 是它们对应的 Loeb 测度。设

$$\Pi_L(\mu_L,\nu_L):=\{\gamma_L\in\mathcal{P}(X^\omega_{\lim}\times X^\omega_{\lim})\mid \exists\mu'^\omega,\nu'^\omega\in\mathcal{P}_p(X)^\omega\exists\gamma^\omega\in\Pi^\omega(\mu'^\omega,\nu'^\omega)\,[\gamma_L=\mathrm{Loeb}(\gamma^\omega)\wedge\mu'_L=\mu_L\wedge\nu'_L=\nu_L]\}.$$

换句话说， $\Pi_L(\mu_L,\nu_L)$ 是 μ_L 和 ν_L 之间的耦合空间，其中的耦合是作为内测度 μ'^{ω} 和 ν'^{ω} 之间的内耦合的 Loeb 测度而得到的，而这些内测度对应的 Loeb 测度分别与 μ^{ω} 和 ν^{ω}相同。同样，定义

$$W_{p,L}(\mu_L,\nu_L):=\left(\inf_{\gamma_L\in\Pi_L(\mu_L,\nu_L)}\int_{X_{\lim}^{\omega}\times X_{\lim}^{\omega}} st\left((d^{\omega}(x^{\omega},y^{\omega}))^p\right)d\gamma_L(x^{\omega},y^{\omega})\right)^{1/p}.$$

注。设 $B^{\omega}\in\mathcal{B}^{\omega}$ 是 X^{ω} 上包含于 $X_{\lim}^{\omega}$ 内的任意内博雷尔集。那么， $1_{B^{\omega}\times X^{\omega}}$ 是关于测度 γ^{ω} 的 S-可积函数。因此，

$$\int 1_{B^{\omega}\times X^{\omega}}d\gamma_L=st\left(\int 1_{B^{\omega}\times X^{\omega}}d\gamma^{\omega}\right)=st\left(\mu^{\omega}(B^{\omega})\right)=\mu_L(B^{\omega}).$$

γ_L 的第一边缘分布在所有内可测集上都与 μ_L 一致，因此在所有 Loeb 可测集上也一致。对第二边缘分布也可用同样的推理。因此， γ_L 确实是 μ_L 与 ν_L 之间的耦合；特别地，若 $\gamma^{\omega}\in\Pi^{\omega}(\mu^{\omega},\nu^{\omega})$，那么 $\gamma_L\in\Pi_L(\mu_L,\nu_L)$ 也成立。

警告。 赋予 $X_{\lim}^{\omega}$ 上 Loeb 概率测度空间 $W_{p,L}$ 后，它显然并不是一个性质良好的空间。首先，$W_{p,L}$ 不能区分不同的点：如果我们选取两个原子相距无穷小量的狄拉克测度，那么它们是两个不同的 Loeb 测度，但它们的 $W_{p,L}$ 距离为零。然而，这个空间显然不只是空间 $\hat{}\hat{}(\mathcal{P}_p(X)\ W_p)$ 的“伪度量类比”，因为 $X_{\lim}^{\omega}$ 上可能存在不会推前到 X 的 Loeb 测度。为此，我们将仅把 $W_{p,L}$ 用作中间计算工具，避免直接研究它。

命题21. 采用与前一定义相同的记号，

$$W_{p,L}(\mu_L,\nu_L)\lessapprox W_p^{\omega}(\mu^{\omega},\nu^{\omega}).$$

证明. 设 $\gamma^{\omega}\in\Pi^{\omega}(\mu^{\omega},\nu^{\omega})$。由于函数 $(d^{\omega}(x^{\omega},y^{\omega}))^p$ 在 $X_{\lim}^{\omega}$ 上是 S-可积的，因此

$$st\left(\int_{X^{\omega}\times X^{\omega}}(d^{\omega}(x^{\omega},y^{\omega}))^p\,d\gamma^{\omega}(x^{\omega},y^{\omega})\right)=\int_{X_{\lim}^{\omega}\times X_{\lim}^{\omega}} st\left((d^{\omega}(x^{\omega},y^{\omega}))^p\right)d\gamma_L(x^{\omega},y^{\omega}).$$

对所有 $\gamma^{\omega}\in\Pi^{\omega}(\mu^{\omega},\nu^{\omega})$ 进行量化可知，

$$\inf_{\gamma^{\omega}\in\Pi^{\omega}(\mu^{\omega},\nu^{\omega})} st\left(\int_{X^{\omega}\times X^{\omega}}(d^{\omega}(x^{\omega},y^{\omega}))^p\,d\gamma^{\omega}(x^{\omega},y^{\omega})\right)$$
$$=\inf_{\gamma_L:\gamma^{\omega}\in\Pi^{\omega}(\mu^{\omega},\nu^{\omega})}\int_{X_{\lim}^{\omega}\times X_{\lim}^{\omega}} st\left((d^{\omega}(x^{\omega},y^{\omega}))^p\right)d\gamma_L(x^{\omega},y^{\omega}).$$

Si（由前面的注） $\{\gamma_L:\ \gamma^{\omega}\in\Pi^{\omega}(\mu^{\omega},\nu^{\omega})\}\subseteq\Pi_L(\mu_L,\nu_L)$，因此

$$\inf_{\gamma^{\omega}\in\Pi^{\omega}(\mu^{\omega},\nu^{\omega})} st\left(\int_{X^{\omega}\times X^{\omega}}(d^{\omega}(x^{\omega},y^{\omega}))^p\,d\gamma^{\omega}(x^{\omega},y^{\omega})\right)$$
$$\geq\inf_{\gamma_L\in\Pi_L(\mu_L,\nu_L)}\int_{X_{\lim}^{\omega}\times X_{\lim}^{\omega}} st\left((d^{\omega}(x^{\omega},y^{\omega}))^p\right)d\gamma_L(x^{\omega},y^{\omega}):=W_{p,L}^p(\mu_L,\nu_L).$$

另一方面，对于每个 $\gamma^{\omega}\in\Pi^{\omega}(\mu^{\omega},\nu^{\omega})$，根据 st 的定义，有

$$st\left(\int_{X^{\omega}\times X^{\omega}}(d^{\omega}(x^{\omega},y^{\omega}))^p\,d\gamma^{\omega}(x^{\omega},y^{\omega})\right)\approx\int_{X^{\omega}\times X^{\omega}}(d^{\omega}(x^{\omega},y^{\omega}))^p\,d\gamma^{\omega}(x^{\omega},y^{\omega})$$

这意味着

$$\inf_{\gamma^\omega\in\Pi^\omega(\mu^\omega,\nu^\omega)} st\left(\int_{X^\omega\times X^\omega}(d^\omega(x^\omega,y^\omega))^p\,d\gamma^\omega(x^\omega,y^\omega)\right)\approx \inf_{\gamma^\omega\in\Pi^\omega(\mu^\omega,\nu^\omega)}\int_{X^\omega\times X^\omega}(d^\omega(x^\omega,y^\omega))^p\,d\gamma^\omega(x^\omega,y^\omega)$$
$$=\left(W_p^\omega(\mu^\omega,\nu^\omega)\right)^p.$$

因此，$W_{p,\ L}(\mu_L,\nu_L)\lessapprox W_p^\omega(\mu^\omega,\nu^\omega)$。 □

引理 22。设 μ_L 是 $X_{\lim}^\omega$上的 ***Loeb***概率测度。那么， μ_L 的 $st_{\hat{d}}$-推前有定义且属于 $\mathcal{P}(\hat{}X)$ 当且仅当对每个 $\varepsilon>0$，都存在一个紧致的 $K_\varepsilon\subseteq\hat{}X$，使得$\mu_L(st^{-1}{}_{\hat{d}}(K_\varepsilon))>1-\varepsilon$。

注。结合此引理与命题 13，我们看到 $[(\mu_i)]=\mu^\omega\in\mathcal{P}^\omega(X^\omega)$ 具有一个 Loeb 测度 μ_L，其 $st_{\hat{d}}$-推前有定义且属于 $\mathcal{P}(\hat{}X)$，当且仅当：$\mu^\omega\in\mathcal{P}^\omega(X_{\lim}^\omega)$，并且几乎必然地，对每个 $\varepsilon>0$，概率测度 μ_i 都集中在集合 $F_{\varepsilon,\ i}$ 上，而这些集合是一致全有界的（即 $\mu_i(F_{\varepsilon,\ i})>1-\varepsilon$）。这为满足上述定义 9 中的条件 (1) 提供了一个明确的判据。（另见 [38,定理 8.3]。）

证明。一个方向显然：若存在一个 Radon 测度 μ，使得 $\mu_L\circ st^{-1}{}_{\hat{d}}=\mu$，那么我们只需利用 μ 的紧性，得到一个 K_ε，使得 $\mu(K_\varepsilon)>1-\varepsilon$，从而 $\mu_L(st^{-1}{}_{\hat{d}}(K_\varepsilon))>1-\varepsilon$ 也成立。

另一方面，固定一个 $\varepsilon>0$，并考虑满足 $\mu_L(st^{-1}{}_{\hat{d}}(K_\varepsilon))>1-\varepsilon$ 的 K_ε。根据引理15，我们知道，将 $st_{\hat{d}}$ 限制在 K_ε 上是可测的，因为 K_ε 是紧致的（因而可分）。换句话说，我们可以将 μ_L 推前到 X 上，除去 μ_L 的支撑中至多 ε 的部分。选取一个趋于零的 ε_n 序列，我们注意到 $\mu_L(st^{-1}{}_{\hat{d}}(\cup_n K_{\varepsilon_n}))=1$；又由于 $\cup_n K_{\varepsilon_n}$ 可分，因此 $st_{\hat{d}}$ 在足够大的值域上可测，从而可以将 μ_L 的全部质量推前（并且 $\mu_L\circ st^{-1}{}_{\hat{}d}$ 的支撑也是可分的）。因此，$\mu_L\circ st^{-1}{}_{\hat{}d}$ 是 X 上所需的（Radon）概率测度。□

命题23。设 $\mu,\nu\in\mathcal{P}_p(\hat{}X)$。设 μ_L 和 ν_L 是 ***Loeb*** 测度，使得 $\mu=\mu_L\circ st^{-1}{}_{\hat{}d}$ 且 $\nu=\nu_L\circ st^{-1}{}_{\hat{d}}$。那么，

$$W_p(\mu,\nu)\le W_{p,L}(\mu_L,\nu_L).$$

证明。设 $\gamma_L\in\Pi_L(\mu_L,\nu_L)$。我们断言，$\gamma_L$ 到 $\hat{}X\times\hat{}X$ 的 $st_{\hat{d}}$-推前实际上是一个（Radon）耦合 $\gamma\in\Pi(\mu,\nu)$。这一断言足以证明该命题，因为若如此，关于映射 $st_{\hat{d}}$ 作变量替换可得

$$\int_{\hat{X}\times\hat{X}}\hat{d}(\hat{x},\hat{y})^p d\gamma(\hat{x},\hat{y})=\int_{X_{\lim}^\omega\times X_{\lim}^\omega} st\left((d^\omega(x^\omega,y^\omega))^p\right)d\gamma_L(x^\omega,y^\omega)$$

（这里用到了如下事实：只要 $st_{\hat{d}}(x^\omega)=\hat{}x$ 且 $st_{\hat{d}}(y^\omega)=\hat{}y$，就有 $\hat{}d(\hat{}x,\hat{}y)^p=\left(\hat{}d(x^\omega,y^\omega)\right)^p=st(d^\omega(x^\omega,y^\omega))^p$。）然后，对所有 $\gamma_L\in\Pi_L(\mu_L,\nu_L)$ 取量词可得

$$\inf_{\gamma\in\Pi(\mu,\nu)}\int_{\hat{X}\times\hat{X}}\hat{d}(\hat{x},\hat{y})^p d\gamma(\hat{x},\hat{y})\le\inf_{\Pi_L(\mu_L,\nu_L)}\int_{X_{\lim}^\omega\times X_{\lim}^\omega} st\left((d^\omega(x^\omega,y^\omega))^p\right)d\gamma_L(x^\omega,y^\omega)$$

如所需。

我们使用前一个引理。由于 $\mu=\mu_L\circ st^{-1}{}_{\hat{d}}$ 且 $\nu=\nu_L\circ st^{-1}{}_{\hat{d}}$，我们可以在 $\hat{}X$ 中找到紧集 C_μ 和 C_ν，使得 $\mu_L(st^{-1}{}_{\hat{d}}\ C_\mu)>1-\varepsilon/2$，同理 $\nu_L(st^{-1}{}_{\hat{d}}\ C_\nu)>1-\varepsilon/2$。这意味着 $\gamma_L(st^{-1}{}_{\hat{d}}\ C_\mu\times st^{-1}{}_{\hat{d}}\ C_\nu)>1-\varepsilon$。通过与前一个引理的证明几乎完全相同的推理，我们注意到，当值域限制在紧集 $C_\mu\times C_\nu$ 上时，$st_{\hat{d}}\times st_{\hat{d}}$ 自动可测。因此，通过利用紧集的原像穷尽 γ_L 的支撑，我们看到 $st_{\hat{d}}\times st_{\hat{d}}$ 在足够大的陪域上可测，从而可将 γ_L 推前为 $X\times X$ 上的 Radon $\hat{}\,\hat{}$ 概率测度，记作 γ。

最后，我们注意到，γ_L 的推前实际上是 μ 与 ν之间的一个耦合；这是一个标准论证，但为求完整起见，我们仍将其列出。事实上，任取一个博雷尔集 $B\subseteq X$：则，$\gamma(B\times\hat{}X)=\gamma_L(st^{-1}{}_{\hat{d}}(B)\times X^\omega_{\lim})$。由于 γ_L 的第一边缘分布是 μ_L，这意味着$\gamma(B\times\hat{}X)=\mu_L(st^{-1}{}_{\hat{}d}(B))$。因此，$\gamma$ 的第一边缘分布与 $\mu_L\circ st^{-1}{}_{\hat{d}}=\mu$相同。用完全相同的论证可得，$\gamma$ 的第二边缘分布是 ν，证毕。□

推论 24. *(1)* 设 $\mu^\omega\approx_{W_p^\omega}\nu^\omega$及其对应的 *Loeb* 测度 μ_L 和 ν_L。那么，如果推前 $\mu_L\circ st^{-1}{}_{\hat{d}}$ 和 $\nu_L\circ st^{-1}{}_{\hat{d}}$ 均有定义且属于 $\mathcal{P}_p(\hat{}X)$，则它们相等。

(2) 设 $\mu^\omega\in(\mathcal{P}_p(X)^\omega_{\lim},\ W_p^\omega)$ 是 $\mu\in(\mathcal{P}_p(\hat{}X)\ W_p)$的一个提升。设 μ_L 为与 μ^ω相关联的 *Loeb* 测度。那么，如果 $\mu_L\circ st^{-1}{}_{\hat{d}}$ 定义良好且属于 $(\mathcal{P}_p(\hat{}X)\ W_p)$，则有$\mu=\mu_L\circ st^{-1}{}_{\hat{}d}$。

注。 将推论 24 与近期结果 [18, 定理 4.3] 进行比较（同一结果在更强的假设下以 [17, 定理 9]的形式出现）。该结果与我们的情形不同，但风格相似。（Duanmu 等人通过将情形限制为底空间有界且 σ-紧致，避免了类似于我们例 25 中的病态现象。）

证明。 (1) 结合命题 21 和命题 23，我们得到

$$W_p(\mu_L\circ st_{\hat{d}}^{-1},\nu_L\circ st_{\hat{d}}^{-1})\le W_{p,L}(\mu_L,\nu_L)\lessapprox W_p^\omega(\mu^\omega,\nu^\omega).$$

但是 $W_p^\omega(\mu^\omega,\nu^\omega)\approx 0$，且 $W_p(\mu_L\circ st^{-1}{}_{\hat{}d},\nu_L\circ st^{-1}{}_{\hat{}d})$ 是一个正实数，因此 $W_p(\mu_L\circ st^{-1}{}_{\hat{}d},\nu_L\circ st^{-1}{}_{\hat{}d})=0$。

(2) 令 $\tilde{\mu}^\omega$ 为 μ 的一个提升，使得 $\tilde{\mu}_L\circ st^{-1}{}_{\hat{d}}=\mu$；根据定理 17，我们知道这样的 $\tilde{\mu}^\omega$ 存在。由于 μ^ω 和 $\tilde{\mu}^\omega$ 都是 μ 的提升，因此可得 $\mu^\omega\approx_{W_p^\omega}\tilde{\mu}^\omega$。所以，由 (1) 可知 $\mu_L\circ st^{-1}{}_{\hat{}d}=\tilde{\mu}_L\circ st^{-1}{}_{\hat{d}}=\mu$。□

有人可能会问，推论 24 的某个逆命题是否成立——也就是说，如果有两个不同的 Loeb 测度 μ_L 和 μ'_L，它们的推前都等于某个 $\mu\in\mathcal{P}_p(\hat{}X)$，那么生成 μ_L 和 μ'_L 的内测度 μ^ω 和 μ'^ω 是否必定相距无穷小量 W_p^ω？下面的结果表明事实并非如此。

例 25. 设 $\mu\in(\mathcal{P}_2(\hat{}X)\ W_2)$。假设 μ_L 是定义在 X^ω 上、推前后得到 μ 的 Loeb 测度，且 μ^ω 是 $(\widehat{\mathcal{P}_2\ X}(\ ),\hat{}W_2)$ 中的一个内测度。那么，μ^ω 不一定是 μ 的 $\hat{}\,W_2$- 提升。事实上，如例 19 中所取，取内测度 $(1-N^{-1})\delta_0+N^{-1}\delta_{N^{1/2}}\hat{}$，其中 $N\in\mathbb{N}^\omega\backslash\mathbb{N}$。我们知道，该测度不是 δ_0 的 W_2-提升，但其关联的 Loeb 测度是 δ_0（底空间为 $\mathbb{R}^\omega$），推前后得到 δ_0（底空间为 $\mathbb{R}$）。

这个问题的根源大致可以表述如下：从内概率测度转到 Loeb 概率测度与全变差相容，而全变差只能控制两者都包含在某个有界直径固定集合中的概率测度之间的p-Wasserstein距离。更明确地说：

引理 26. *(1)* 设 $\mu^\omega, \nu^\omega \in \mathcal{P}(X)^\omega$. 则 $\mu_L = \nu_L$ 当且仅当 $TV^\omega(\mu^\omega, \nu^\omega) \approx 0$。

(2) 假设 μ^ω 和 ν^ω 都支撑于 X^ω 的一个内子集中，且其直径至多为 $D \in \mathbb{R}^\omega$。那么，对所有 $p \in [1,\infty)$， $W_p^\omega(\mu^\omega, \nu^\omega) \leq D \cdot TV^\omega(\mu^\omega, \nu^\omega)$。

证明。(1) 假设 $TV^\omega(\mu^\omega,\nu^\omega) \approx 0$。那么，对每个内博雷尔集 B^ω，都有 $\mu^\omega(B^\omega) \approx \nu^\omega(B^\omega)$，因此对每个内博雷尔集 B^ω，都有 $st\circ\mu^\omega(B^\omega) = st\circ\nu^\omega(B^\omega)$。由于 Loeb 测度是前测度 $st\circ\mu^\omega$ 的完备化，这表明 $\mu_L = \nu_L$。

反过来，假设 $TV^\omega(\mu^\omega,\nu^\omega) \not\approx 0$。那么，存在一个内博雷尔集 B^ω 和一个标准的 $\delta > 0$，使得 $|\mu^\omega(B^\omega) - \nu^\omega(B^\omega)| > \delta$，因此 $st\circ\mu^\omega(B^\omega) \neq st\circ\nu^\omega(B^\omega)$，进而有 $\mu_L \neq \nu_L$。

(2) 这直接由 Łoś 定理应用于不等式 $W_p(\mu,\nu) \leq D \cdot TV(\mu,\nu)$ 得出，该不等式在一般度量空间上成立。
□

前述引理的两部分告诉我们，如果 $\mu_L = \nu_L$ 以及 μ^ω 和 ν^ω 的支撑都具有有界直径，那么 $W_p^\omega(\mu^\omega,\nu^\omega) \approx 0$。然而，这实际上并不足以推出 μ^ω（因而 ν^ω也）必定是 $\mu_L \circ st^{-1}{}_{\hat{d}}$ 的一个提升，即使这个推前是良定义的。尽管如此，事实确实是，如果 μ^ω 具有有界支撑，且 $\mu_L \circ st^{-1}{}_{\hat{d}}$ 是良定义的（因而属于 $\mathcal{P}_p(\hat{}X)$），那么 μ^ω 确实自动是 $\mu_L \circ st^{-1}{}_{\hat{}d}$ 的一个提升，正如下一个引理所示；由此，我们得到推论 24 的第 (2) 部分的一个部分逆命题。

引理 27。 设 $p \in [1,\infty)$。设 $\mu^\omega \in \mathcal{P}_p(X)^\omega_{\lim}$，并且另外假设， μ^ω 支撑于某个 $D \in \mathbb{R}$ 的 $B(e^\omega, D)$ 内，即 $\mu^\omega(X^\omega \backslash B(e^\omega, D)) = 0$。那么，如果 $st_{\hat{d}}$-推前 *of*μ_L 有良好定义且属于 $(\mathcal{P}_p(\hat{}X)\ W_p)$，则 μ^ω 是 $\mu_L \circ st^{-1}{}_{\hat{d}}$ 的一个 $\hat{}\ W_p$-提升。

证明。我们采用半离散传输论证。具体而言，与仅使用传输计划进行推理相比，使用传输映射 进行推理更为有益。

设 $\mu := \mu_L \circ st^{-1}{}_{\hat{d}} \in \mathcal{P}_p(\hat{}X)$。令 $(X_1, X_2, \ldots)$ 为一列分布为 μ 的独立同分布随机变量，并令 $\hat{}\mu_n = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^n \delta_{x_j}$ 为 μ 的第 n 个（随机）经验测度（其中$x_j = X_j$ 对每个 $j = 1,\ldots,n$）。注意到 $W_2(\mu, \hat{}\mu_n) \to 0$ 的概率为 1；同时注意，对于任意 经验测度序列 $(\hat{}\mu_n)$，我们有

$$\begin{aligned} W_p^p(\mu,\hat{\mu}_n) &= \min_{\gamma\in\Pi(\mu,\tilde{\mu}_n)} \int_{\mathrm{supp}(\mu)\times\mathrm{supp}(\hat{\mu}_n)} \hat{d}^p(x,y)d\gamma(x,y) \\ &\geq \int_{\mathrm{supp}(\mu)\times\mathrm{supp}(\hat{\mu}_n)} \left(\min_{\tilde{y}\in\mathrm{supp}(\mu_n)} \hat{d}^p(x,\tilde{y})\right) d\gamma(x,y) \\ &= \int_{\mathrm{supp}(\mu)} \left(\min_{\tilde{y}\in\mathrm{supp}(\mu_n)} \hat{d}^p(x,\tilde{y})\right) d\mu. \end{aligned}$$

$\hat{}$ 令 τ_n 表示将 $x \in supp(\mu)$ 映射到 $\mathrm{argmin}_{\tilde{y}\in\mathrm{supp}(\hat{\mu}_n)} d^p(x,\tilde{y})$ 的映射；若 argmin 不唯一，我们就任意选取一个极小值点，使得 τ_n 可测（这很容易做到，因为 $\hat{}\mu_n$ 的支撑是有限的。例如，遇到并列时，可以按字典序映射 x：对 $\mathrm{supp}(\hat{}\mu_n)$ 中的点进行编号，并将 x 映射到使该最小值成立的编号最小的点）。注意，

$$\int_{\mathrm{supp}(\mu)} \left(\min_{\tilde{y}\in\mathrm{supp}(\hat{\mu}_n)} \hat{d}^p(x,\tilde{y})\right) d\mu = \int_{\mathrm{supp}(\mu)} \left(\hat{d}^p(x,\tau_n(x))\right) d\mu.$$

同时，若考虑推前测度 $\mu_n := \mu\circ\tau_n^{-1}$，我们会发现 μ_n 的支撑包含于 $\mathrm{supp}(\hat{}\mu_n)$ 中，并且

$$W_p^p(\mu,\mu_n) \le \int_{\mathrm{supp}(\mu)} \left(\hat{d}^p(x,\tau_n(x)\right) d\mu \le W_p^p(\mu,\hat{\mu}_n).$$

还需注意，给定任意点 $y_{j,\ n} \in \mathrm{supp}(\mu_n)$，我们有 $\mu_n(y_{j,\ n}) = \mu(\tau_n^{-1}(y_{j,\ n}))$，因此可以将 μ_n 写成如下点质量之和：

$$\mu_n = \sum_{j=1}^n \mu(\tau_n^{-1}(y_{j,n}))\delta_{y_{j,n}}.$$

在下文中，我们以事件 $W_p(\mu,\hat{}\mu_n) \to 0$发生为条件；这意味着 $W_p(\mu,\mu_n) \to 0$。令 $\varepsilon > 0$。假设 n 的选取满足

$$\int_{\mathrm{supp}(\mu)} \left(\hat{d}^p(x,\tau_n(x)\right) d\mu \le W_p^p(\mu,\hat{\mu}_n) < \varepsilon^p.$$

对每个 $y_{j,\ n}$，我们选取一个提升 $y^\omega_{j,\ n} \in {st^{-1}}_{\hat{d}}(y_{j,\ n})$；由此得到测度 μ_n的一个 $\hat{}\ W_p$-提升，即

$$\mu_n^\omega := \sum_{j=1}^n \mu(\tau_n^{-1}(y_{j,n}))\delta_{y^\omega_{j,n}}.$$

同时，令 $E^\omega_{j,\ n}$ 为一个内可测集，使得

$$E^\omega_{j,n} \subseteq st^{-1}_{\hat{d}}(\tau_n^{-1}(y_{j,n})) \text{ and } \mu_L(st^{-1}_{\hat{d}}(\tau_n^{-1}(y_{j,n}))\backslash E^\omega_{j,n}) < \frac{\varepsilon}{n}.$$

（根据事实 3，这样的 $E^\omega_{j,\ n}$ 必定存在。）换言之，$\{E^\omega_{j,n}\}_{j=1}^n$ 是一个有限族内可测集，它近似于 $\sigma(\mathcal{B}^\omega)$- 可测划分 $\{{st^{-1}}_{\hat{d}}(\tau_n^{-1}(y_{j,\ n}))\}_{j=1}^n$（该划分将 ${st^{-1}}_{\hat{d}}(\mathrm{supp}(\mu))$ 分划开）。同样，我们可以定义“部分传输映射”

$$\tilde{\tau}_n^\omega : \bigcup_{j=1}^n E^\omega_{j,n} \to X^\omega$$

$$\tilde{\tau}_n^\omega(x^\omega) = \begin{cases} y^\omega_{1,n} & x^\omega \in E^\omega_{1,n} \\ \vdots & \vdots \\ y^\omega_{j,n} & x^\omega \in E^\omega_{j,n} \\ \vdots & \\ y^\omega_{n,n} & x^\omega \in E^\omega_{j,n} \end{cases}.$$

由于 $\tilde{\tau}_n^\omega$ 的值域为有限个值，且每个 $E^\omega_{j,\ n}$ 都是内的，因此显然 $\tilde{\tau}_n^\omega$ 是内可测的。接着，我们以略显任意的方式将 $\tilde{\tau}_n^\omega$ 扩展为一个传输映射；为简便起见，我们令

$$\tau_n^\omega(x^\omega) = \begin{cases} \tilde{\tau}_n^\omega(x^\omega) & x^\omega \in \bigcup_{j=1}^n E^\omega_{j,n} \\ e^\omega & \text{else.} \end{cases}$$

根据同样的推理，τ_n^ω 是一个内可测映射。因此，我们可以考虑相对于 τ_n^ω的推前测度 μ^ω，即 $\mu^\omega\circ(\tau_n^\omega)^{-1}$。

展开定义可知,

$$W_p^\omega(\mu^\omega,\mu^\omega\circ(\tau_n^\omega)^{-1})\le\left(\int_{X^\omega}(d^\omega(x^\omega,\tau_n^\omega(x^\omega)))^p\,d\mu^\omega\right)^{1/p}.$$

事实上，由于 τ_n^ω 是内在的，它可以写成 $[(\tau_{n,i})]$，其中 $\tau_{n,i}:X_i\to X_i$ 是映射。同时，$\mu^\omega=[(\mu_i)]$，其中 $(\mu_i)_{i\in\mathbb{N}}$ 是 $\mathcal{P}(X_i)$ 中的一个测度序列。对于这些映射中的每一个，考虑其诱导的传输计划 $\gamma_i:=(Id\times\tau_{n,i})_{\#}\mu_i$，它是一个传输计划，其第一边缘分布为 μ_i，第二边缘分布为 $\mu_i\circ\tau_n^{-1},_i$。于是 $\gamma^\omega:=[(\gamma_i)]$ 是 $[(\mu_i)]:=\mu^\omega$ 与 $[(\mu_i\circ\tau_{n\,i}^{-1},)]:=[(\mu_i)]\circ[(\tau_{n\,i}^{-1},)]:=\mu^\omega\circ(\tau_n^\omega)^{-1}$ 之间的一个传输计划。只需注意到

$$\begin{aligned}W_p^\omega(\mu^\omega,\mu^\omega\circ(\tau_n^\omega)^{-1})&\le\left(\int_{X^\omega\times X^\omega}(d^\omega(x^\omega,y^\omega))^p d\gamma^\omega\right)^{1/p}\\&:=\left[\left(\left(\int_{X_i\times X_i}(d_i(x_i,y_i))^p d\gamma_i(x_i,y_i)\right)^{1/p}\right)\right]\\&=\left[\left(\left(\int_{X_i}(d_i(x_i,\tau_{n,i}(x_i)))^p d\mu_i(x_i)\right)^{1/p}\right)\right]\\&:=\left(\int_{X^\omega}(d^\omega(x^\omega,\tau_n^\omega(x^\omega)))^p d\mu^\omega\right)^{1/p}.\end{aligned}$$

Now,

$$\begin{aligned}\int_{X^\omega}(d^\omega(x^\omega,\tau_n^\omega(x^\omega)))^p\,d\mu^\omega&=\sum_{j=1}^n\int_{E_{j,n}^\omega}(d^\omega(x^\omega,\tau_n^\omega(x^\omega)))^p\,d\mu^\omega+\int_{X^\omega\setminus\bigcup_{j=1}^n E_{j,n}^\omega}(d^\omega(x^\omega,\tau_n^\omega(x^\omega)))^p\,d\mu^\omega\\&<\sum_{j=1}^n\int_{E_{j,n}^\omega}(d^\omega(x^\omega,\tau_n^\omega(x^\omega)))^p\,d\mu^\omega+D^p\varepsilon^p\\&\approx\sum_{j=1}^n\int_{E_{j,n}^\omega}st\,(d^\omega(x^\omega,\tau_n^\omega(x^\omega)))^p\,d\mu_L+D^p\varepsilon^p\\(*)\approx\sum_{j=1}^n\int_{E_{j,n}^\omega}&(st(d^\omega(x^\omega,\tau_n^\omega(x^\omega))))^p\,d\mu_L+D^p\varepsilon^p\end{aligned}$$

特别地，在第 $(*)$ 行中，我们用到了 $(\cdot)^p$ 连续这一事实，并且 $d^\omega(x^\omega,\tau_n^\omega(x^\omega))$ 是近标准的——反过来，这种近标准性源于每个 $E_{j,n}^\omega$ 都具有有限直径这一事实。

ˆ 根据定义，$st((d^\omega(x^\omega,\tau_n^\omega(x^\omega)))=d(st_{\hat{d}}(x^\omega)\ st_{\hat{d}}(\tau_n^\omega(x^\omega)))$；根据构造，

$$\begin{aligned}st_{\hat{d}}(\tau_n^\omega(x^\omega))&=y_{j,n}\\x^\omega\in E_{j,n}^\omega&=\tau_n(st_{\hat{d}}(x^\omega))\end{aligned}$$

因为 $st_{\hat{d}}(E^{\omega}_{j,n}) \subseteq \tau_n^{-1}(y_{j,n})$。因此，

$$\begin{aligned}\int_{E^{\omega}_{j,n}} (st(d^{\omega}(x^{\omega},\tau_n^{\omega}(x^{\omega}))))^p\, d\mu_L &= \int_{E^{\omega}_{j,n}} \left(\hat{d}(st_{\hat{d}}(x^{\omega}),\tau_n(st_{\hat{d}}(x^{\omega})))\right)^p d\mu_L \\ &\le \int_{st_{\hat{d}}^{-1}(\tau_n^{-1}(y_{j,n}))} \left(\hat{d}(st_{\hat{d}}(x^{\omega}),\tau_n(st_{\hat{d}}(x^{\omega})))\right)^p d\mu_L \\ &= \int_{\tau_n^{-1}(y_{j,n})} \left(\hat{d}(x,\tau_n(x))\right)^p d(\mu_L\circ st_{\hat{d}}^{-1}).\end{aligned}$$

由于 $\mu = \mu_L \circ st^{-1}{}^{\wedge_d}$，且 $\mathrm{supp}(\mu) = \bigsqcup_{j=1}^n \tau_n^{-1}(y_{j,n})$，我们推得

$$\begin{aligned}\int_{X^{\omega}} (d^{\omega}(x^{\omega},\tau_n^{\omega}(x^{\omega})))^p\, d\mu^{\omega} &< \int_{\mathrm{supp}(\mu)} \left(\hat{d}(x,\tau_n(x))\right)^p d\mu + D^p\varepsilon^p \\ &\le W_p^p(\mu,\mu_n) + D^p\varepsilon^p \\ &\le (D^p+1)\varepsilon^p.\end{aligned}$$

因此 $W_p^{\omega}(\mu^{\omega},\mu^{\omega}\circ(\tau_n^{\omega})^{-1}) < (D^p+1)^{1/p}\varepsilon$。

与此同时，我们声称

$$W_p^{\omega}(\mu_n^{\omega},\mu^{\omega}\circ(\tau_n^{\omega})^{-1}) < D\varepsilon.$$

事实上，

$$\mu_n^{\omega} = \sum_{j=1}^n \mu(\tau_n^{-1}(y_{j,n}))\delta_{y_{j,n}^{\omega}}; \qquad \mu^{\omega}\circ(\tau_n^{\omega})^{-1} = \mu^{\omega}\left(X^{\omega}\backslash\bigcup_{j=1}^n E_{j,n}^{\omega}\right)\delta_{e^{\omega}} + \sum_{j=1}^n \mu^{\omega}(E_{j,n}^{\omega})\delta_{y_{j,n}^{\omega}}.$$

由于对所有 $j = 1,\ldots,n$，

$$\mu_L\left(st_{\hat{d}}^{-1}(\tau_n^{-1}(y_{j,n}))\backslash E_{j,n}^{\omega}\right) < \frac{\varepsilon}{n}$$

and

$$\mu(\tau_n^{-1}(y_{j,n})) = \mu_L(st_{\hat{d}}^{-1}(\tau_n^{-1}(y_{j,n})))$$

我们看到

$$\mu(\tau_n^{-1}(y_{j,n})) - \frac{\varepsilon^p}{n} < \mu^{\omega}(E_{j,n}^{\omega}) \lessapprox \mu(\tau_n^{-1}(y_{j,n}))$$

and

$$\mu^{\omega}\left(X^{\omega}\backslash\bigcup_{j=1}^n E_{j,n}^{\omega}\right) < \varepsilon.$$

特别是，这意味着

$$\begin{aligned}TV^{\omega}(\mu_n^{\omega},\mu^{\omega}\circ(\tau_n^{\omega})^{-1}) &:= \frac{1}{2}\left(\sum_{j=1}^n |\mu^{\omega}(E_{j,n}^{\omega}) - \mu(\tau_n^{-1}(y_{j,n}))| + \mu^{\omega}\left(X^{\omega}\backslash\bigcup_{j=1}^n E_{j,n}^{\omega}\right)\right) \\ &\le \frac{1}{2}\left(\sum_{j=1}^n \frac{\varepsilon}{n} + \varepsilon\right) = \varepsilon.\end{aligned}$$

同时，所有点 e^ω 和 $y^\omega_{j,\ n}$（对于 $j=1,\ .....,\ n$）都位于一个直径至多为 D 的区域内。因此，根据引理 26，我们知道

$$W_p^\omega(\mu_n^\omega,\mu^\omega\circ(\tau_n^\omega)^{-1})\le D\cdot TV^\omega(\mu_n^\omega,\mu^\omega\circ(\tau_n^\omega)^{-1})<D\varepsilon.$$

因此，由三角不等式可得

$$W_p^\omega(\mu^\omega,\mu_n^\omega)<\left((D^p+1)^{1/p}+D\right)\varepsilon.$$

最后，令 $\tilde{\mu}^\omega$ 为 W_p 的任意一个 μ 提升；由 $W_p(\mu,\mu_n)<\varepsilon$，可知 $W_p^\omega(\tilde{\mu}^\omega,\mu_n^\omega)<\varepsilon$。因此，

$$W_p^\omega(\mu^\omega,\tilde{\mu}^\omega)<\left((D^p+1)^{1/p}+D+1\right)\varepsilon.$$

但 $\varepsilon>0$ 是任意的，因此我们得出 $W_p^\omega(\mu^\omega,\tilde{\mu}^\omega)\approx 0$。故 μ^ω 也是 μ 的一个提升，证毕。□

3. Ultralimits of $CD(K,\infty)$ spaces

本节旨在证明以下结果。

定理 28. 取 $\mathbb{N}$ 上的一个非主超滤子 ω。考虑一个由带基点度量测度空间组成的序列 (X_i,d_i,e_i,μ_i)，满足 $\mu_i\in\mathcal{P}(X_i)$；其中每个 (X_i,d_i,μ_i) 对于 ω-几乎所有的 $i\in\mathbb{N}$ 均满足合成 *Ricci* 曲率界“$CD(K_i,\infty)$”。令 (X,d,e,μ) 为 $(X_i,d_i,e_i,\mu_i)_{i\in\mathbb{N}}$ 按照定义 9 的意义下的度量测度超极限，从而 $\mu\in\mathcal{P}(X)$。则 (X,d,μ) 满足合成 *Ricci* 曲率下界“$CD(K,\infty)$”，且 $K=st(K^\omega)$。

注。我们提醒读者注意其中存在的若干复杂之处。我们也会说明，为什么无法采用与我们类似的策略，直接证明“强 $CD(K,\infty)$”性质的稳定性。

首先，我们担心以下问题：我们可能希望通过取 $\mathcal{P}_{2,ac(\mu_i)}(X_i)$ 中测地线的超积，来见证极限空间 $\mathcal{P}_2(X)$ 中的 $CD(K,\infty)$ 性质；这些测地线上的相对熵泛函是 K_i-测地凸的，然后再将所得曲线投影到 $\mathcal{P}_2(X)$。但实际可能发生的情况是，这些测地线的超积只能在较大的空间 $\mathcal{P}_2(X)$ 中给出一条极限$\widehat{\quad\quad\quad

“强 $CD(0,N)$”。Villani 在其中讨论的这类例子涉及一个空间序列，其极限空间拥有多得多（且性质不佳）的测地线，因此很难认为，若没有其他附加条件（例如 $RCD(K,\infty)$ 性质），那么“强 $CD(K,\infty)$ 空间的超极限是强 $CD(K,\infty)$”这一命题在一般情况下不成立是合理的。

我们先给出若干预备引理。

引理 29. 设(μ_i) 和(ν_i) 是(X_i,d_i)上的概率测度序列，其超积为μ^ω和 ν^ω，且属于$(\mathcal{P}^\omega_{\lim}(X)\ W_2^\omega)$。

(1) 我们有 $\nu_i \ll \mu_i$ ω-几乎处处成立，且拉东-尼科迪姆导数为 $\frac{d\nu_i}{d\mu_i} := h_i$，当且仅当

$$\forall B \in \mathcal{B}^\omega \quad \nu^\omega(B) = \int_B h^\omega d\mu^\omega.$$

(2) 此外，对于某个固定的 $p \in (1,\infty)$，我们有 $h_i \in L^p(\mu_i)$，且对于某个一致常数 C，$\|h_i\|_{L^p(\mu_i)} \le C$ ω-几乎处处成立，当且仅当

$$\int_{X^\omega} |h^\omega|^p d\mu^\omega < C^p.$$

类似地，若 $h_i \in L^\infty(\mu_i)$，则 $\|h_i\|_{L^\infty(\mu_i)} \le C$ ω-几乎处处成立，当且仅当

$$\mu^\omega\{x^\omega : h^\omega > C\} = 0.$$

（*3*）假设

$$\forall B \in \mathcal{B}^\omega \quad \nu^\omega(B) = \int_B h^\omega d\mu^\omega.$$

那么，如果 h^ω 关于 μ_L 是 S-可积的，

$$\forall B \in \sigma(\mathcal{B}^\omega) \quad \nu_L(B) = \int_B st \circ h^\omega d\mu_L.$$

证明。（1、2）这些都是 Łoś 定理的直接推论。

（3）假设 $\nu^\omega = \int h^\omega d\mu^\omega$ 和 h^ω 是 S-可积的。根据 S-可积函数的定义，我们有

$$\int st \circ h^\omega d\mu_L = st\left(\int h^\omega d\mu^\omega\right).$$

现在，如果 $B^\omega \in \mathcal{B}^\omega$ 是任意内可测集，且 h^ω 是任意内函数，则有

$$st\left(1_{B^\omega}(x^\omega)\cdot h^\omega(x^\omega)\right) = \begin{cases} st(h^\omega(x^\omega)) & x^\omega \in B^\omega \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

换言之，$st(1_{B^\omega}\cdot h^\omega) = 1_{B^\omega}\cdot st(h^\omega)$。因此，

$$\int_{B^\omega} st \circ h^\omega d\mu_L = st\left(\int_{B^\omega} h^\omega d\mu^\omega\right).$$

另一方面，直接根据 Loeb 测度的定义可知，对于任意内可测集 $B^\omega \in \mathcal{B}^\omega$,

$$\nu_L(B^\omega) = st\left(\nu^\omega(B^\omega)\right).$$

因此,

$$(\forall B^\omega \in \mathcal{B}^\omega) \qquad \nu_L(B^\omega) = st\left(\nu^\omega(B^\omega)\right) = st\left(\int_{B^\omega} h^\omega d\mu^\omega\right) = \int_{B^\omega} st \circ h^\omega d\mu_L.$$

然后，通过应用事实 3，这个等式可推广到所有 $B \in \sigma(\mathcal{B}^\omega)$。事实上，给定任意 $B \in \sigma(\mathcal{B}^\omega)$，取某个 $B^\omega \in \mathcal{B}^\omega$，使得 $\mu_L(B^\omega \Delta B) = 0$。然后，

$$\int_{B^\omega} st \circ h^\omega d\mu_L = \int_B st \circ h^\omega d\mu_L.$$

另一方面，假设 $\nu_L(B^\omega \Delta B) = \delta > 0$。那么（再次根据事实 3），我们可以找到某个内在的 D^ω，使得 $D^\omega \subset B^\omega \Delta B$ 且 $\nu_L(D^\omega) > \frac{\delta}{2}$，因此 $\nu^\omega(D^\omega) > \frac{\delta}{2}$ 也成立。现在计算得

$$\begin{aligned}\frac{\delta}{2} < \nu^\omega(D^\omega) &= \int_{D^\omega} h^\omega d\mu^\omega \\ &\approx \int_{D^\omega} st \circ h^\omega d\mu_L \\ &\leq \int_{B^\omega \Delta B} st \circ h^\omega d\mu_L \\ &= 0.\end{aligned}$$

因此我们得到了矛盾；由此可知 $\nu_L(B^\omega \Delta B) = 0$。

因此，

$$\nu_L(B) = \nu_L(B^\omega) = \int_{B^\omega} st \circ h^\omega d\mu_L = \int_B st \circ h^\omega d\mu_L$$

正如所需。 □

定义 30。 我们用 $\nu^\omega \ll^\omega \mu^\omega$ 表示 $\nu_i \ll \mu_i$ ω-几乎必然成立这一事实。

引理31。 *(参见 [8, 第 5])* 设 $\mu^\omega \in \mathcal{P}_2(X)^\omega$ 是一个内概率测度，其 *Loeb*ˆ测度 μ_L 推前为(X, d) 上的拉东概率测度。设 f^ω 是一个内可测函数，满足 $\int_{X^\omega} f^\omega d\mu^\omega = 1$，并进一步假设 f^ω 关于 μ 是 S-可积的。令 $\nu^\omega := f^\omega d\mu^\omega$，并用 ν_L 表示与 ν^ω相关联的 *Loeb* 测度。

ˆ那么， ν_L 也推前为 X上的 *Radon* 测度 ν，且 $\nu \ll \mu$。

证明。 设 f^ω是关于 μ^ω的 S-可积函数，且对每个内博雷尔集 $A \in \mathcal{B}^\omega$，均有 $\nu^\omega(A) = \int_A f^\omega d\mu^\omega$。那么，

$$\nu_L(A) = st\left(\int_A f^\omega d\mu^\omega\right) = \int_A st \circ f^\omega d\mu_L$$

并且，对所有 $B \in \sigma(\mathcal{B}^\omega)$，也有

$$\nu_L(B) = \int_B (st \circ f^\omega) d\mu_L.$$

令 $\mu := \mu_L \circ st^{-1}{}_{\hat{d}}$。根据假设， μ 具有可分支撑。令 $\mathbb{E}_{st^{-1}{}_{\hat{d}}}$ 表示相对于 $\sigma(\mathcal{B}^\omega)$ 的子-σ-代数对 $st \circ f^\omega$ 的条件期望；该子代数由将 $st_{\hat{d}}$- 原像 ˆ 取为限制在 $supp(\mu)$ 上的 X 的博雷尔 σ- 代数而构成。（这是一个子-σ-代数这一事实可由引理15得出。）注意，对所有博雷尔 $B \subseteq supp(\mu)$，

$$\nu_L(st_{\hat{d}}^{-1}(\tilde{B})) = \int_{st_{\hat{d}}^{-1}(\tilde{B})} (st \circ f^\omega) d\mu_L = \int_{st_{\hat{d}}^{-1}(\tilde{B})} \mathbb{E}_{st_{\hat{d}}^{-1}}(st \circ f^\omega) d\mu_L.$$

由于 $\mathbb{E}_{st^{-1}{}_{\hat{d}}}(st \circ f^\omega)$ 在 μ_L-几乎处处的 x 上，对纤维 $st^{-1}{}_{\hat{d}}(x)$ 为常数，因此我们看到 $\mathbb{E}_{st^{-1}{}_{\hat{d}}}(st \circ f^\omega) \circ st^{-1}{}_{\hat{d}} : supp(\mu) \to \mathbb{R}$ 是一个定义良好的博雷尔可测函数，而测度的变量替换表明

that

$$\begin{aligned}\int_{st_{\hat{d}}^{-1}(\tilde{B})}\mathbb{E}_{st_{\hat{d}}^{-1}}(st\circ f^{\omega})d\mu_L &= \int_{\tilde{B}}\left(\mathbb{E}_{st_{\hat{d}}^{-1}}(st\circ f^{\omega})\circ st_{\hat{d}}^{-1}\right)d(\mu_L\circ st_{\hat{d}}^{-1})\\ &= \int_{\tilde{B}}\left(\mathbb{E}_{st_{\hat{d}}^{-1}}(st\circ f^{\omega})\circ st_{\hat{d}}^{-1}\right)d\mu.\end{aligned}$$

˜因此，对所有博雷尔 $B\subseteq supp(\mu)$,

$$(\nu_L\circ st_{\hat{d}}^{-1})(\tilde{B}) = \int_{\tilde{B}}\left(\mathbb{E}_{st_{\hat{d}}^{-1}}(st\circ f^{\omega})\circ st_{\hat{d}}^{-1}\right)d\mu.$$

因此，若 $\nu^{\omega}\ll^{\omega}\mu^{\omega}$ 具有“内拉东-尼科迪姆导数” f^{ω}，且 f^{ω} 关于 μ^{ω} 是 S-可积的，而 μ_L 推前为 X 上的 Radon 测度 μ，则可知 ν_L 也推前为 ˆX 上的 Radon 测度 ν，并且 $\nu\ll\mu$ 满足 $\frac{d\nu}{d\mu}=\mathbb{E}_{st^{-1}{}_{\hat{d}}}(st\circ f^{\omega})\circ st^{-1}{}_{\hat{}d}$。□

接下来的两个引理并未采用最精确的假设，而是采用了足以进行定理 28 证明的假设。

引理 32。（积分泛函在提升下的稳定性）设 $\mathcal{F}(\nu):\ \mathcal{P}(\hat{}X)\to\mathbb{R}$ 是如下形式的积分泛函

$$\mathcal{F}(\nu)=\begin{cases}\int_{\hat{X}}\varphi\left(\frac{d\nu}{d\mu}\right)d\mu & \nu\ll\mu\\ \infty & \nu\not\ll\mu\end{cases}$$

其中 $\varphi\colon\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$ 是某个连续函数，满足 $\varphi(x)\le cx^{\alpha}+d$，其中 $c,d,\alpha>0$为常数。设 $\varphi^{\omega}:=[(\varphi)]$ 是 φ 的超实扩张，设 μ^{ω} 是一个内概率测度，其ˆ相应的 ***Loeb*** 测度 μ_L 推前为 X 上的拉东概率测度 μ，并设 $\nu\ll\mu$。假设 $\frac{d\nu}{d\mu}\in L^q(\mu)$，其中 $q>\alpha$。存在 $\frac{d\nu}{d\mu}\circ st_{\hat{d}}$ 的一个 S-可积提升，记作 H^{ω}，且对任意这样的提升，

$$\mathcal{F}(\nu)\approx\int_{X^{\omega}}\varphi^{\omega}\left(H^{\omega}\right)d\mu^{\omega}.$$

证明。令 $h(x)=\frac{d\nu}{d\mu}(x)$。根据变量替换，由以下事实可得：$\mu_L\circ st^{-1}{}_{\hat{d}}=\mu$ tha t

$$\int_{\hat{X}}\varphi\left(h(x)\right)d\mu(x)=\int_{X^{\omega}}\varphi\left(h(st_{\hat{d}}(y))\right)d\mu_L(y).$$

特别地，函数 $h\circ st_{\hat{d}}$ 是 μ_L-可测的，因此存在一个内函数 $H^{\omega}:X^{\omega}\to\mathbb{R}^{\omega}$，它是 $h\circ st_{\hat{d}}$的 S-可积提升。特别地，$H^{\omega}\approx h\circ st_{\hat{d}}$ μ_L-几乎必然成立。此外，由于 $h\in L^q(\mu)$，根据变量替换可得 $h\circ st_{\hat{d}}\in L^q(\mu_L)$，因此由事实 7 可得 $st\left(\int|H^{\omega}|^p d\mu^{\omega}\right)<\infty$。与此同时，$\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是连续的，因此 φ^{ω} 具有如下性质：对于所有（标准）$x\in\mathbb{R}$，都有 $\varphi^{\omega}(x)=\varphi(x)$；此外，只要 $x\approx y$ [24, 定理 7.1.1]，就有 $\varphi^{\omega}(x)\approx\varphi^{\omega}(y)$。因此，对于几乎所有 y（相对于 μ_L），

$$\varphi\left(h(st(y))\right)=st(\varphi^{\omega}(H^{\omega}(y))).$$

由此可得

$$\int_{X^{\omega}}\varphi\left(h(st_{\hat{d}}(y))\right)d\mu_L(y)=\int_{X^{\omega}}st\left(\varphi^{\omega}(H^{\omega}(y))\right)d\mu_L(y).$$

最后，我们来检验 $\varphi^{\omega}\circ H^{\omega}$ 是否 S-可积。利用关于 φ 的多项式上界，我们可以推得

$$\varphi^{\omega}\circ H^{\omega}\le c(H^{\omega})^{\alpha}+d.$$

由此可得 $st\left(\int |\varphi^\omega \circ H^\omega|^{q/\alpha} d\mu^\omega\right) < \infty$，这意味着（多亏了事实8），由于 $q/\alpha > 1$， $\varphi \circ H^\omega$ 是 S-可积的。

最后，由于 $\varphi^\omega(H^\omega(y))$ 是 S-可积的，且 μ_L 是有限测度，因此

$$\int st\left(\varphi^\omega(H^\omega(y))\right) d\mu_L(y) \approx \int \varphi^\omega(H^\omega(y)) d\mu^\omega(y).$$

因此，$\int_{\hat{X}} \varphi(h(x))\ d\mu(x) \approx \int_{X^\omega} \varphi^\omega(H^\omega(y)) d\mu^\omega(y)$，如所需。 □

我们还有一个类似逆命题的结果：

引理33。（下推下内部积分泛函的稳定性）设 $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ 是一个连续的凸 函数，满足 $\varphi(x) \leq cx^\alpha + d$，其中常数为 $c, d, \alpha > 0$。令 $\varphi^\omega := [(\varphi)]$ 表示 φ 的超实扩张。设 $\mu^\omega \in \mathcal{P}(X)^\omega$ 是一个内部概率测度，其$\hat{}$对应的 ***Loeb*** 测度 μ_L 下推为 X 上的一个拉东概率测度 μ 。定义

$$\mathcal{F}^\omega(\nu^\omega) := \begin{cases} \int \varphi^\omega \circ f^\omega d\mu^\omega & \nu^\omega \ll^\omega \mu^\omega; \nu^\omega = f^\omega d\mu^\omega \\ \infty^\omega & otherwise. \end{cases}$$

（这里， ∞^ω 表示形式上添加到 $\mathbb{R}^\omega$ 的一个点，使得对所有 $x^\omega \in \mathbb{R}^\omega$， $x^\omega < \infty^\omega$ 。）

那么，如果对于某个 $q >$最大值$\{1, \alpha\}$有 $st\left(\int |f^\omega|^q d\mu^\omega\right) < \infty$，则可推出 $\nu_L := \textbf{\textit{Loeb}}(\nu^\omega)$ 向前推到某个定义在 X 上的拉东概率测度 ν ，并且 $\nu \ll \mu$ ；以及

$$\mathcal{F}(\nu) := \int_{\hat{X}} \varphi\left(\frac{d\nu}{d\mu}\right) d\mu \lessapprox \mathcal{F}^\omega(\nu^\omega).$$

证明。假设 $\nu^\omega = f^\omega d\mu^\omega$，并且对于某个 $q > 1$有 $st\left(\int |f^\omega|^q d\mu^\omega\right) < \infty$（因此，根据事实8， f^ω关于 μ^ω是 S-可积的），且 $\mu_L \circ st^{-1}$ 定义良好，并且是定义在$\hat{X}$上的拉东概率测度。根据引理31，可推出 $\nu := \nu_L \circ st^{-1}$ 同样定义良好，并且是定义在 X上的拉东$\hat{}$概率测度，且 $\nu \ll \mu$。

由于 $\varphi^\omega \circ f^\omega \leq c(f^\omega)^\alpha + d$，因此如引理32的证明中所述， $\varphi^\omega \circ f^\omega \in SL^{q/\alpha}(\mu^\omega)$，其中 $q/\alpha > 1$，特别地， $\varphi^\omega \circ f^\omega$ 是 S-可积的。

因此，

$$\begin{aligned} st\left(\int \varphi^\omega \circ f^\omega d\mu^\omega\right) &= \int st(\varphi^\omega \circ f^\omega) d\mu_L \\ &= \int \varphi \circ st(f^\omega) d\mu_L. \end{aligned}$$

现在， $\varphi \circ st(f^\omega)$ 是 $\sigma(\mathcal{B}^\omega)$-可测的。与引理31中一样，我们取条件期望$\mathbb{E}_{st^{-1}}$ $\varphi \circ st(f^\omega)$；由于 φ 是凸的，命题10.1.9]中的条件期望 Jensen不等式 [11, 表明，除去一个 μ_L-测度为零的集合外， $\varphi \circ \mathbb{E}_{st^{-1}}$ $st(f^\omega) \leq \mathbb{E}_{st^{-1}}$ $\varphi \circ st(f^\omega)$。因此，

$$\begin{aligned} \int \varphi \circ \mathbb{E}_{st_{\hat{d}}^{-1}} st(f^\omega) d\mu_L &\leq \int \mathbb{E}_{st_{\hat{d}}^{-1}} \varphi \circ st(f^\omega) d\mu_L \\ &= \int \varphi \circ st(f^\omega) d\mu_L \\ &= \int st(\varphi^\omega \circ f^\omega) d\mu_L \\ &\approx \mathcal{F}^\omega(\nu^\omega). \end{aligned}$$

按照引理31中的做法进行变量替换，我们得到

$$\int_{X^\omega} \varphi \circ \mathbb{E}_{st_{\hat{d}}^{-1}} st(f^\omega) d\mu_L = \int_{\hat{X}} \varphi \circ \left(\mathbb{E}_{st_{\hat{d}}^{-1}} st(f^\omega) \circ st_{\hat{d}}^{-1} \right) d\mu_L \circ st_{\hat{d}}^{-1}.$$

由于 $\mu = \mu_L \circ st^{-1}{}_{\hat{d}}$ 且 $\frac{d\nu}{d\mu} = \mathbb{E}_{st^{-1}{}_{\hat{d}}}\ {}^{st}(f^\omega) \circ st^{-1}{}_{\hat{d}}$，这就证明了该引理。 □

注。特别地，我们将在 $\varphi(x) = x\log\ x - x + 1$ 的情形下应用引理32和引理33。这是一个从 $\mathbb{R}_+$ 到 $\mathbb{R}_+$ 的凸函数，且是多项式有界的；采用这样的 φ，我们有（假设 ν 和 μ 是概率测度）

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\nu) &= \int \left(\frac{d\nu}{d\mu} \log \frac{d\nu}{d\mu} - \frac{d\nu}{d\mu} + 1 \right) d\mu \\ &= \int \frac{d\nu}{d\mu} \log \frac{d\nu}{d\mu} d\mu = H(\nu \mid \mu). \end{aligned}$$

引理*34*。（有界密度的特殊提升）设 $\mu \in \mathcal{P}_2(\hat{}X)$，且 $\nu \in \mathcal{P}_{2、ac(\mu)}(\hat{}X)$ 的密度为 $f = \frac{d\nu}{d\mu}$。假设 f 有界，且 $E = supp(f) \subseteq supp(\mu)$ 的直径有界。那么，对于任意满足 $Loeb(\mu^\omega)$ 推前为 μ 的 $\mu^\omega \in \mathcal{P}_2(X)^\omega$，存在一个 S-可积提升 $\check{f}^\omega$，使得 $f \circ st_{\hat{d}}$：$st^{-1}{}_{\hat{d}}(supp(\nu)) \to \mathbb{R}$，且内测度

$$\nu^\omega(A) := \int_A \check{f}^\omega d\mu^\omega \quad \forall A \in \mathcal{B}^\omega$$

是一个内概率测度，属于 $\mathcal{P}_2(X)^\omega_{\lim}$，并且 ν^ω 的 $\hat{}\ W_2$-下推为ν。

证明。这可由引理 27 和引理 29 一并推出。

令 μ_L 表示 Loeb(μ^ω)，并假设 $\mu = \mu_L \circ st^{-1}{}_{\hat{}d}$。通过变量替换，我们知道，对于所有博雷尔 $B \subset supp(\mu) \subseteq \hat{}X$，

$$\nu(B) = \int_B f d(\mu_L \circ st_{\hat{d}}^{-1}) = \int_{st_{\hat{d}}^{-1}(B)} (f \circ st_{\hat{d}}) d\mu_L.$$

由 $f \circ st_{\hat{d}}$ 是 μ_L-可积且有界这一事实，我们知道存在一个 $f \circ st_{\hat{}d}$ 的提升 f^ω，使得 f^ω 除了在一个 μ_L-测度为零的集合上之外都是有界的。这对我们来说还不完全够用，因此我们以几种方式调整 f^ω。

首先，我们限制 f^ω，使其仅在一个有限直径的集合上严格为正。（$f \circ st_{\hat{d}}$ 仅在 $st^{-1}{}_{\hat{d}}(E)$ 上严格为正这一事实并不能保证这一点！在该集合之外，f^ω 可能取非零的无穷小量值。）因此，令 E^ω 为一个包含$st^{-1}{}_{\hat{d}}(E)$ 的有界直径内集（这样的集合存在，因为 E，从而 $st^{-1}{}_{\hat{d}}(E)$，具有有界直径）；定义

$$f^\omega \restriction_{E^\omega}(x^\omega) = \begin{cases} f^\omega(x^\omega) & x^\omega \in E^\omega \\ 0 & \text{else.} \end{cases}$$

我们注意到，$f^\omega \restriction_{E^\omega}$ 本身就是一个内函数，因为特别是它可以表示为$f^\omega \restriction_{E^\omega} = [(f_i \restriction_{E_i})]_,$，其中 $f^\omega = [(f_i)]$ 且 $E^\omega = [(E_i)]$。此外，由于 $f^\omega \approx f^\omega \restriction_{E^\omega}$ 逐点成立，我们知道 $f^\omega \restriction_{E^\omega}$ 也是 S-可积的$f \circ st_{\hat{d}}$的提升。

接下来，令$C = \|f\|_{L^\infty(\mu)}$。定义

$$\tilde{f}^\omega(x) = \begin{cases} f^\omega \restriction_{E^\omega}(x) & f^\omega \restriction_{E^\omega}(x) \le 2C \\ 2C & \text{otherwise.} \end{cases}$$

注意，按照与 $f^\omega \restriction_{E^\omega}$ 相同的推理， f^ω 是内部定义的。它也是有界的（甚至不只是几乎处处 μ^ω-有界）；并且显然仅在一个 μ_L-零测集上与 f^ω 不同。因此，它也是 $f \circ st_{\hat{d}}$ 的一个提升

。又因为 $0 \le f^\omega \le f^\omega$ 逐点成立，且 f^ω 是 S-可积的，我们知道 f^ω 也是 S-可积的。

现在，由于 $\tilde{f}^\omega$是 $f \circ st_{\hat{d}}$ 的一个提升，因此

$$\int \tilde{f}^\omega d\mu^\omega \approx \int f \circ st_{\hat{d}} d\mu_L = 1.$$

因此，我们再次修改 f^ω，令

$$\breve{f}^\omega := \frac{1}{\int \tilde{f}^\omega d\mu^\omega} \tilde{f}^\omega.$$

经过这一归一化后，显然 $f^\omega d\mu^\omega$ 是一个内概率测度；又由于 $f^\omega \approx f^{\omega\breve{}}$ 逐点成立， f^ω 仍然是 $f \circ st_{\hat{d}}$ 的一个 S-可积提升。

最后，设 $\nu^\omega := f^\omega d\mu^\omega$。由于 ν^ω 是一个具有有界支撑的内概率测度，因此它自动属于每个 $W_p(X)^\omega_{\lim}$，尤其是属于 $p = 2$。由引理 29 (3) 可得

$$\nu_L = \int st \circ \breve{f}^\omega d\mu_L = \int f \circ st_{\hat{d}} d\mu_L.$$

同样,

$$\nu_L \circ st_{\hat{d}}^{-1} = \int f d(\mu_L \circ st_{\hat{d}}^{-1}) = \int f d\mu = \nu$$

因此，由于 ν^ω 具有有界支撑，根据引理 27 可知， ν^ω 自动是 ν的一个 W_2-提升。由此，证明完成。

□

The 前述引理为推导本节的主定理奠定了大部分基础 n:

定理 *28* 的证明。 为减少记号负担，我们省略对定义 9 中提及的带基点度量测度同构的引用，只考虑配备参考测度 μ的超极限度量空间 $\hat{}\hat{}(X,d)$。这不失一般性，因为根据 [44, 命题 4.12], , $CD(K,\infty)$ 性质在 pmm 同构下保持不变。

假设对于 ω-几乎所有的 (X_i,d_i,μ_i)，它们都是 $CD(K_i,\infty)$；并假设与 $\mu^\omega = [(\mu_i)]$ 相关联的 Loeb 测度 μ_L 在 $\hat{}X$ 上的推前是一个 Radon 测度，也就是说， $\mu := \mu_L \circ st^{-1}{}_{\hat{d}} \in \mathcal{P}(\hat{}X)$。假设 $st(K^\omega) \neq -\infty$，否则便无须证明。令 $v_0, v_1 \in \mathcal{P}_{2,ac(\mu)}(\hat{}X)$，其 μ-密度分别为 f_0 和 f_1。根据 [44, 注 4.6]，只需证明

$$H(\nu_{\frac{1}{2}} \mid \mu) \le \frac{1}{2}H(\nu_0 \mid \mu) + \frac{1}{2}H(\nu_1 \mid \mu) - \frac{1}{8}st(K^\omega)W_2^2(\nu_0,\nu_1).$$

步骤 1。首先，假设 f_0 和 f_1 都一致有界，且具有紧支撑。令 f_0^ω 和 f_1^ω 分别为 $f_0 \circ st_{\hat{d}}$ 和 $f_1 \circ st_{\hat{d}}$ 的提升，并按照引理34选取。

现在，考虑从 X_i 到 $\mathbb{R}_+$ 的函数序列 $(f_{0,i})_{i\in\mathbb{N}}$ 和 $(f_{1,i})_{i\in\mathbb{N}}$，使得 $[(f_{0,i})] = f_0^\omega$ 且 $[(f_{1,i})] = f_1^\omega$。注意，$f_{0,i}d\mu_i$ 和 $f_{1,i}d\mu_i$ 属于 $\mathcal{P}_{2,ac(\mu_i)}(X_i)$，并且对 ω-几乎处处的 $i\in\mathbb{N}$ 都具有有界密度。由于 X_i 是 $CD(K_i,\infty)$，存在一条连接 $f_{0,i}d\mu_i$ 与 $f_{1,i}d\mu_i$ 的 W_2-测地线，沿着这条测地线，相对熵 $H(\cdot\mid\mu_i)$ 是 K_i-凸的；注意，这条测地线必然在所有 $t\in[0,1]$ 时刻都相对于 μ_i 具有密度（否则，$H(\cdot\mid\mu_i)$ 会在某个中间时刻发散至 ∞，这与 K_i-凸性矛盾）。令 $(f_{t,i}d\mu_i)_{t\in[0,1]}$ 表示这条特定的常速测地线；注意，Rajala 在 [40, 定理 1.3] 中给出的估计表明，对 ω-几乎处处的 $i\in\mathbb{N}$,

$$\|f_{t,i}\|_{L^\infty(\mu_i)} \le e^{K_i^- D_i^2/12}(\|f_{0,i}\|_{L^\infty(\mu_i)} + \|f_{1,i}\|_{L^\infty(\mu_i)})$$

其中 $D_i = diam(supp(f_{0,i}) \cup supp(f_{1,i}))$.

根据 Łoś 定理（特别是引理 29 (2)），这意味着 $f_{\frac12}^\omega := [(f_{\frac12,i})]$ 除了在一个 μ^ω-测度为零的集合上（除非我们处于 $st(K^\omega) = -\infty$ 的退化情形），均有界于 $e^{K^{-\omega}(D^\omega)^2/12}(\max f_0^\omega + \max f_1^\omega)$。注意,

$$D^\omega = diam(supp(f_0^\omega)\cup supp(f_1^\omega)) < \infty$$

由于 t 提升 f_0^ω 和 f_1^ω 是依照引理34选取的。因此

$$st\left(\|f_{\frac12}^\omega\|_{L^\infty(\mu^\omega)}\right) \le st\left(e^{-K^{\omega^-}D^{\omega^2}/12}\left(\|f_0^\omega\|_{L^\infty(\mu^\omega)} + \|f_1^\omega\|_{L^\infty(\mu^\omega)}\right)\right) < \infty.$$

这意味着 $f_{\frac12}^\omega$ 是 S-可积的，因此 $st\circ f_{\frac12}^\omega$ 是 μ_L-可积的。特别地，引理 29 (3) 使我们能够推导出

$$\forall B\in\sigma(\mathcal{B}^\omega)\quad \mathrm{Loeb}(f_{\frac12}^\omega d\mu^\omega)(B) = \int_B st\circ f_{\frac12}^\omega d\mu_L.$$

并且根据引理31，我们知道 $\mathrm{Loeb}(f_{\frac12}^\omega d\mu^\omega)\circ st^{-1}\hat{}_d$ 是良定义的（此外，$\mathrm{Loeb}(f_{\frac12}^\omega d\mu^\omega)\circ st^{-1}\hat{}_d \ll \mu_L\circ st^{-1}\hat{}_d = \mu$）。

与此同时，我们知道

$$W_2(f_{0,i}d\mu_i, f_{\frac12,i}d\mu_i) = W_2(f_{\frac12,i}d\mu_i, f_{1,i}d\mu_i) = \frac12 W_2(f_{0,i}d\mu_i, f_{1,i}d\mu_i)\quad \omega\text{-a.s.}$$

因此

$$W_2^\omega(f_0^\omega d\mu^\omega, f_{\frac12}^\omega d\mu^\omega) = W_2^\omega(f_{\frac12}^\omega d\mu^\omega, f_1^\omega d\mu^\omega) = \frac12 W_2^\omega(f_0^\omega d\mu^\omega, f_1^\omega d\mu^\omega).$$

一方面，由于 $f_0^\omega d\mu^\omega$ 和 $f_1^\omega d\mu^\omega$ 是 W_2-提升，且分别对应 $f_0 d\mu$ 和 $f_1 d\mu$，我们知道

$$W_2^\omega(f_0^\omega d\mu^\omega, f_1^\omega d\mu^\omega) \approx W_2(f_0 d\mu, f_1 d\mu).$$

另一方面，由命题 21 和命题 23 可知

$$W_2(f_0 d\mu, \mathrm{Loeb}(f_{\frac12}^\omega d\mu^\omega)\circ st_{\hat d}^{-1}) \lessapprox W_2^\omega(f_0^\omega d\mu^\omega, f_{\frac12}^\omega d\mu^\omega)$$

and

$$W_2(\mathrm{Loeb}(f_{\frac12}^\omega d\mu^\omega)\circ st_{\hat d}^{-1}, f_1 d\mu) \lessapprox W_2^\omega(f_{\frac12}^\omega d\mu^\omega, f_1^\omega d\mu^\omega).$$

由此可得

$$W_2(f_0 d\mu, \mathrm{Loeb}(f_{\frac12}^\omega d\mu^\omega)\circ st_{\hat d}^{-1}) \lessapprox \frac12 W_2(f_0 d\mu, f_1 d\mu)$$

and

$$W_2(\mathrm{Loeb}(f_{\frac12}^\omega d\mu^\omega)\circ st_{\hat d}^{-1}, f_1 d\mu) \lessapprox \frac12 W_2(f_0 d\mu, f_1 d\mu).$$

但在最后这两个展示的等式中，所有量都是实数。因此

$$W_2(f_0d\mu, \mathrm{Loeb}(f_{\frac{1}{2}}^{\omega}d\mu^{\omega}) \circ st_{\hat{d}}^{-1}) \leq \frac{1}{2}W_2(f_0d\mu, f_1d\mu)$$

and

$$W_2(\mathrm{Loeb}(f_{\frac{1}{2}}^{\omega}d\mu^{\omega}) \circ st_{\hat{d}}^{-1}, f_1d\mu) \leq \frac{1}{2}W_2(f_0d\mu, f_1d\mu)$$

这意味着 $\mathrm{Loeb}(f_{\frac{1}{2}}^{\omega}d\mu^{\omega}) \circ st^{-1}{}_{\hat{d}}$ 必须是 $f_0d\mu$ 与 $f_1d\mu$ 之间的一个 W_2-中点。因此，从现在起，我们记 $\nu_{\frac{1}{2}} := \mathrm{Loeb}(f_{\frac{1}{2}}^{\omega}d\mu^{\omega}) \circ st^{-1}{}^{\wedge}d$，并写作 $f_{\frac{1}{2}} = \frac{d\nu_{\frac{1}{2}}}{d\mu}$。

现在，回到空间 $(\mathcal{P}(X_i)\ W_2)$，记 $\nu_{t,i} := f_{t,i}d\mu_i$，其中 $t = 0,\ _1{}_2,\ 1$。注意，对于每个 i，$CD(K_i,\infty)$ 性质意味着

$$H(\nu_{\frac{1}{2},i} \mid \mu_i) \leq \frac{1}{2}H(v_{0,i}|\mu_i) + \frac{1}{2}H(v_{1,i}|\mu_i) - \frac{1}{8}K_iW_{2,i}^2(\nu_{0,i}, \nu_{1,i}).$$

由此，我们推得在空间 $(\mathcal{P}(X)^{\omega}, W_2^{\omega})$ 中，

$$H^{\omega}([(\nu_{\frac{1}{2},i})] \mid [(\mu_i)]) \leq \frac{1}{2}H^{\omega}([(v_{0,i})] \mid [(\mu_i)]) + \frac{1}{2}H^{\omega}([(v_{1,i})] \mid [(\mu_i)]) - \frac{1}{8}K^{\omega}(W_2^{\omega})^2([(\nu_{0,i})], [(\nu_{1,i})]).$$

注意，

$$H^{\omega}([(v_{0,i})] \mid [(\mu_i)]) = \int f_0^{\omega}\log^{\omega} f_0^{\omega}d\mu^{\omega} \text{ and } H^{\omega}([(v_{1,i})] \mid [(\mu_i)]) = \int f_1^{\omega}\log^{\omega} f_1^{\omega}d\mu^{\omega}$$

因此，根据引理 32，我们有

$$H^{\omega}([(v_{0,i})] \mid [(\mu_i)]) \approx H(\nu_0 \mid \mu) \text{ and } H^{\omega}([(v_{1,i})] \mid [(\mu_i)]) \approx H(\nu_1 \mid \mu).$$

同时，$(W_2^{\omega})([(\nu_{0,\ i})], [(\nu_{1,\ i})]) \approx W_2(\nu_0, \nu_1)$，因为 $[(\nu_{0,\ i})]$ 和 $[(\nu_{1,\ i})]$ 是 ν_0 和 ν_1 的提升。最后，根据引理 33，$H^{\omega}([(v_{\frac{1}{2},\ i})]|[(\mu_i)]) \gtrapprox H(\nu_{\frac{1}{2}} \mid \mu)$。

因此，由于

$$H^{\omega}([(\nu_{\frac{1}{2},i})] \mid [(\mu_i)]) \leq \frac{1}{2}H^{\omega}([(v_{0,i})] \mid [(\mu_i)]) + \frac{1}{2}H^{\omega}([(v_{1,i})] \mid [(\mu_i)]) - K^{\omega}\frac{1}{8}(W_2^{\omega})^2([(\nu_{0,i})], [(\nu_{1,i})])$$

and:

(1) $H^{\omega}([(v_{0,i})] \mid [(\mu_i)]) \approx H(\nu_0 \mid \mu)$, (2) $H^{\omega}([(v_{1,i})] \mid [(\mu_i)]) \approx H(\nu_1 \mid \mu)$, (3) $H^{\omega}([(v_{\frac{1}{2},i})] \mid [(\mu_i)]) \gtrapprox H(\nu_{\frac{1}{2}} \mid \mu)$, (4) $(W_2^{\omega})([(\nu_{0,i})], [(\nu_{1,i})]) \approx W_2(\nu_0, \nu_1)$，以及 (5) $K^{\omega} \approx st(K^{\omega})$，

我们推得

$$H(\nu_{\frac{1}{2}} \mid \mu) \lessapprox \frac{1}{2}H(\nu_0 \mid \mu) + \frac{1}{2}H(\nu_1 \mid \mu) - \frac{1}{8}st(K^{\omega})W_2^2(\nu_0, \nu_1).$$

但上述表达式中的所有内容都是取值于 $\mathbb{R}$ 的函数/量，因此实际上

$$H(\nu_{\frac{1}{2}} \mid \mu) \leq \frac{1}{2}H(\nu_0 \mid \mu) + \frac{1}{2}H(\nu_1 \mid \mu) - \frac{1}{8}st(K^{\omega})W_2^2(\nu_0, \nu_1)$$

如所需。

步骤 2。我们刚才给出的论证适用于 ν_0 和 ν_1 具有有界密度和紧支撑的情形。现在我们给出一个逼近论证，将该结果推广到一般的 $\nu_0, \nu_1 \in \mathcal{P}_{2,ac(\mu)}(X)$。

设 $\nu_0,\nu_1 \in \mathcal{P}_{2,ac(\mu)}(\hat{X})$ 的密度分别为 f_0 和 f_1。设 $(\kappa_{0,m})_{m\in\mathbb{N}}$ 和 $(\kappa_{1,m})$ 是分别包含于 $supp(\nu_0)$ 和 $supp(\nu_1)$ 中的紧集序列，使得

$$\bigcup_{m\in\mathbb{N}} \kappa_{0,m} = supp(\nu_0) \text{ and } \bigcup_{m\in\mathbb{N}} \kappa_{1,m} = supp(\nu_1).$$

定义

$$(f_0 \upharpoonright m)(x) := \begin{cases} \min\{m, f_0(x)\} & x \in \kappa_{0,m} \\ 0 & x \notin \kappa_{0,m} \end{cases}$$

类似地

$$(f_1 \upharpoonright m)(x) := \begin{cases} \min\{m, f_1(x)\} & x \in \kappa_{1,m} \\ 0 & x \notin \kappa_{1,m} \end{cases}.$$

换言之，我们同时将密度截断在高度 m，并限制在某个紧集内。我们还使用记号 $\mu(f_0 \upharpoonright m) := \int_{\hat{X}} (f_0 \upharpoonright m)d\mu$，对 f_1 也类似。不失一般性，假设 $\mu(f_0 \upharpoonright 1)$ 和 $\mu(f_1 \upharpoonright 1)$ 均严格为正。

注意

$$H((f_0 \upharpoonright m)d\mu \mid \mu) = \int_{\hat{X}} (f_0 \upharpoonright m)\log(f_0 \upharpoonright m)d\mu$$

尽管密度 $f_0 \upharpoonright m$ 的积分不为 1，这仍然有意义。显然，随着 $m \to \infty$， $f_0 \upharpoonright m$ 单调逐点收敛到 f_0，对 f_1 也同样如此。由引理 5.1], 可知，这意味着

$$H((f_0 \upharpoonright m)d\mu \mid \mu) \to H(\nu_0 \mid \mu) \text{ and } H((f_1 \upharpoonright m)d\mu \mid \mu) \to H(\nu_1 \mid \mu).$$

因此,

$$\frac{1}{\mu(f_0 \upharpoonright m)} H((f_0 \upharpoonright m)d\mu \mid \mu) \to H(\nu_0 \mid \mu) \text{ and } \frac{1}{\mu(f_1 \upharpoonright m)} H((f_1 \upharpoonright m)d\mu \mid \mu) \to H(\nu_1 \mid \mu)$$

于是

$$H\left(\frac{1}{\mu(f_0 \upharpoonright m)}(f_0 \upharpoonright m)d\mu \mid \mu\right) \to H(\nu_0 \mid \mu) \text{ and } H\left(\frac{1}{\mu(f_1 \upharpoonright m)}(f_1 \upharpoonright m)d\mu \mid \mu\right) \to H(\nu_1 \mid \mu).$$

同时，单调收敛定理表明

$$\int_{\hat{X}} f_0 \upharpoonright m d\mu \to \int f_0 d\mu \text{ and } \int_{\hat{X}} f_1 \upharpoonright m d\mu \to \int f_1 d\mu$$

因此

$$\frac{1}{\mu(f_0 \upharpoonright m)} \int_{\hat{X}} f_0 \upharpoonright m d\mu \to f_0 d\mu \text{ and } \frac{1}{\mu(f_1 \upharpoonright m)} \int_{\hat{X}} f_1 \upharpoonright m d\mu \to \int f_1 d\mu.$$

序列中的所有项

$$\left(\frac{1}{\mu(f_0 \upharpoonright m)} f_0 \upharpoonright m\right)_{m\in\mathbb{N}} \text{ and } \left(\frac{1}{\mu(f_1 \upharpoonright m)} f_1 \upharpoonright m\right)_{m\in\mathbb{N}}$$

分别由 $\mu^{\frac{1}{(f_0\upharpoonright 1)}} f_0$ 和 $\mu^{\frac{1}{(f_1\upharpoonright 1)}} f_1$ 控制。因此，根据控制收敛定理,

$$\int_{\hat{X}} \left| f_0 - \frac{1}{\mu(f_0 \upharpoonright m)} f_0 \upharpoonright m \right| d\mu \to 0 \text{ and } \int_{\hat{X}} \left| f_1 - \frac{1}{\mu(f_1 \upharpoonright m)} f_1 \upharpoonright m \right| d\mu \to 0.$$

这意味着

$$\frac{1}{\mu(f_0 \upharpoonright m)} f_0 \upharpoonright m d\mu \rightharpoonup f_0 d\mu \text{ and } \frac{1}{\mu(f_1 \upharpoonright m)} f_1 \upharpoonright m d\mu \rightharpoonup f_1 d\mu.$$

因此，要证明 $W_2(f_0,\mu(f_0\restriction m)^{-1}f_0\restriction m)\to 0$，以及对 f_1 也同样成立，只需验证二阶矩也收敛。这显然成立，因为单调收敛定理意味着

$$\int_{\hat{X}} d(x_0,x)^2 f_0\restriction m d\mu \to \int d(x_0,x)^2 f_0 d\mu \text{ and } \int_{\hat{X}} d(x_0,x)^2 f_1\restriction m d\mu \to \int d(x_0,x)^2 f_1 d\mu$$

因此

$$\frac{1}{\mu(f_0\restriction m)}\int_{\hat{X}} d(x_0,x)^2 f_0\restriction m d\mu \to \int d(x_0,x)^2 f_0 d\mu$$

and

$$\frac{1}{\mu(f_1\restriction m)}\int_{\hat{X}} d(x_0,x)^2 f_1\restriction m d\mu \to \int d(x_0,x)^2 f_1 d\mu.$$

设 $\nu_{0,m}:=\mu(f_0\restriction m)^{-1}f_0\restriction m d\mu$，以及 $\nu_{1,m}:=\mu(f_1\restriction m)^{-1}f_1\restriction m d\mu$。根据步骤 1，我们知道

$$H(\nu_{\frac{1}{2},m}\mid\mu)\le\frac{1}{2}H(\nu_{0,m}\mid\mu)+\frac{1}{2}H(\nu_{1,m}\mid\mu)-\frac{1}{8}st(K^\omega)W_2^2(\nu_{0,m},\nu_{1,m})$$

其中 $\nu_{\frac{1}{2},m}$ 是步骤 1 中构造的 $\nu_{0,m}$ 与 $\nu_{1,m}$ 之间的中点。同时，由于 $H(\nu_{0,m}\mid\mu)$、$H(\nu_{1,m}\mid\mu)$、$W_2^2(\nu_{0,m},\nu_{1,m})$ 都随 $m\to\infty$ 收敛，因此特别有

$$\begin{aligned}\sup_m H(\nu_{\frac{1}{2},m}\mid\mu)&\le\sup_m\left[\frac{1}{2}H(\nu_{0,m}\mid\mu)+\frac{1}{2}H(\nu_{1,m}\mid\mu)-\frac{1}{8}st(K^\omega)W_2^2(\nu_{0,m},\nu_{1,m})\right]\\&<\infty.\end{aligned}$$

因此，由相对熵次水平集的紧性（例如参见 [23, 命题 4.1]）以及 Prokhorov 定理可知，我们可以从 $(\nu_{\frac{1}{2},m})_{m\in\mathbb{N}}$ 中抽取一个收敛子序列（不再另行标记），其极限记为 $\nu_{\frac{1}{2}}$，是 ν_0 与 ν_1 的中点。

最后，根据 $H(\cdot\mid\mu)$ 的下半连续性，

$$\begin{aligned}H(\nu_{\frac{1}{2}}\mid\mu)&\le\liminf_{m\to\infty}H(\mu_{\frac{1}{2},m}\mid\mu)\\&\le\liminf_{m\to\infty}\left[\frac{1}{2}H(\nu_{0,m}\mid\mu)+\frac{1}{2}H(\nu_{1,m}\mid\mu)-\frac{1}{8}st(K^\omega)W_2^2(\nu_{0,m},\nu_{1,m})\right]\\&=\frac{1}{2}H(\nu_0\mid\mu)+\frac{1}{2}H(\nu_1\mid\mu)-\frac{1}{8}st(K^\omega)W_2^2(\nu_0,\nu_1).\end{aligned}$$

□

致谢

本研究部分工作是在美国国家科学基金会数学科学部（NSF DMS）资助项目 1814991 的支持下完成的；此外，对于作者在 IHÉS 任职期间完成的部分工作，作者谨此感谢 Labex CARMIN 的支持。作者感谢 Robert Anderson、David Ross、Dejan Slepčev 和 Henry Towsner 提供的有益讨论。此外，作者感谢 Timo Schultz 指出本手稿先前版本中的一处错误。

参考文献

[1] Sergio Albeverio、Jens Erik Fenstad、Raphael Høegh-Krohn 和 Tom Lindstrøm。《随机分析与数理物理中的非标准方法》。Dover，2009 年。[2] Stephanie Alexander、Vitali Kapovitch 和 Anton Petrunin。《亚历山德罗夫几何：初步版本第 1 版》。arXiv 预印本 arXiv:1903.08539，2019 年。[3] Luigi Ambrosio。《度量测度空间中的微积分、热流与曲率-维数界》。载于《国际数学家大会论文集：里约热内卢 2018》，第 301–340 页。世界科学出版社，2018 年。[4] Luigi Ambrosio 和 Nicola Gigli。《最优传输实用指南》。载于《网络流的建模与优化》，第 1–155 页。施普林格，2013 年。[5] Luigi Ambrosio、Nicola Gigli、Andrea Mondino 和 Tapio Rajala。《σ-有限测度度量测度空间中的黎曼里奇曲率下界》。美国数学会会刊，367(7)：4661–4701，2015 年。[6] Luigi Ambrosio、Nicola Gigli 和 Giuseppe Savaré。《梯度流：度量空间中的梯度流与概率测度空间中的梯度流》。施普林格，2008 年。[7] Luigi Ambrosio、Nicola Gigli 和 Giuseppe Savaré。《Bakry–Émery 曲率-维数条件与黎曼里奇曲率界》。概率年刊，43(1)：339–404，2015 年。[8] Robert M. Anderson。《测度空间的星有限表示》。美国数学会会刊，271(2)：667–687，1982 年。[9] Dominique Bakry、Ivan Gentil 和 Michel Ledoux。《马尔可夫扩散算子的分析与几何》，第 348 卷。施普林格，2013 年。[10] Vitaly Bergelson 和 Terence Tao。《准随机群中的多重回归》。几何与泛函分析，24(1)：1–48，2014 年。[11] Vladimir I Bogachev。《测度论》，第 2 卷。施普林格，2007 年。[12] Emmanuel Boissard 和 Thibaut Le Gouic。《经验测度与占据测度在 Wasserstein距离下的平均收敛速度》。IHP 概率与统计年刊，50(2)：539–563，2014 年。[13] Martin R Bridson 和 André Haefliger。《非正曲率度量空间》，第 319 卷。施普林格，1999 年。[14] Clinton T Conley、Alexander S Kechris 和 Robin D Tucker-Drob。《保测作用的超积与图组合学》。遍历论与动力系统，33：334–374，2013 年。[15] Nigel J. Cutland。《Loeb 测度实践：近期进展》，《数学讲义》第 1751 卷。施普林格出版社，柏林，2000 年。[16] Cornelia Druţu 和 Michael Kapovich。《几何群论》，第 63 卷。美国数学会，2018 年。[17] Haosui Duanmu、Daniel M Roy 和 Aaron Smith。《紧空间上匹配先验的存在性》。生物统计学，即将出版。[18] Haosui Duanmu 和 William Weiss。《有限可加、可数可加与内概率测度》。Comment. Math. Univ. Carolin，59(4)：467–485，2018 年。[19] Gábor Elek。《度量测度空间的抽样、可观测量与不变量》。arXiv 预印本 arXiv:1205 6936，2012 年。[20] Gábor Elek 和 Balázs Szegedy。《稠密超图理论的测度论方法》。数学进展，231(3-4)：1731–1772，2012 年。[21] Matthias Erbar、Kazumasa Kuwada 和 Karl-Theodor Sturm。《度量测度空间中熵曲率-维数条件与 Bochner 不等式的等价性》。数学新进展，201(3)：993–1071，2015 年。[22] David Heaver Fremlin。《测度论》，第 4 卷。Torres Fremlin，2003 年。[23] Nicola Gigli、Andrea Mondino 和 Giuseppe Savaré。《有基点的非紧度量测度空间的收敛，以及里奇曲率界与热流的稳定性》。伦敦数学会会刊，111(5)：1071–1129，2015 年。[24] Robert Goldblatt。《超实数讲义：非标准分析导论》，第 188 卷。施普林格，2012 年。[25] Mikhail Gromov。《无限群的渐近不变量》。载于 A Niblo 和 Martin A. Roller 编，《几何群论》第 2 卷，《伦敦数学会讲义》第 182 卷，第 1–295 页。剑桥大学出版社，1993 年。[26] Stefan Heinrich。《巴拿赫空间理论中的超积》。纯粹与应用数学杂志，1980(313)：72–104，1980 年。

[27] Richard Jordan、David Kinderlehrer 和 Felix Otto。Fokker–Planck方程的变分表述。SIAM数学分析杂志，29(1)：1–17，1998。[28] Vladimir Kanovei 和 Michael Reeken。《公理化非标准分析》。施普林格科学与商业媒体，2013。[29] Michael Kapovich。《双曲流形与离散群》。现代 Birkhäuser 经典丛书。Birkhäuser Boston，2009。[30] Stefano Lisini。Wasserstein 空间中绝对连续曲线的刻画。《变分法与偏微分方程》，28(1)：85–120，2007。[31] Peter A Loeb。从非标准测度空间到标准测度空间的转换及其在概率论中的应用。《美国数学会会刊》，211：113–122，1975。[32] Peter A Loeb 和 Manfred PH Wolff。《工作数学家的非标准分析》，第二版。施普林格，2015。[33] John Lott 和 Cédric Villani。通过最优传输研究度量测度空间的 Ricci曲率。《数学年刊》，903–991 页，2009。[34] Radu Mardare、Prakash Panangaden 和 Gordon D. Plotkin。自由完备 Wasserstein 代数。《计算机科学逻辑方法》，第 14 卷，第 3 期，2018 年 9 月。[35] Edward Nelson。内部集合论：一种非标准分析新方法。《美国数学会通报》，83(6)：1165–1198，1977。[36] Felix Otto。耗散演化方程的几何：多孔介质方程。《偏微分方程通讯》，26：101–174，2001。[37] Felix Otto 和 Cédric Villani。Talagrand 不等式的推广及其与对数Sobolev不等式的联系。《泛函分析杂志》，173(2)：361–400，2000。[38] Enrico Pasqualetto 和 Timo Schultz。带基点度量测度空间的超极限。arXiv 预印本 arXiv:2102.11365，2021。[39] Gabriel Peyré 和 Marco Cuturi。《计算最优传输：及其在数据科学中的应用》。《机器学习基础与趋势》，11(5-6)：355–607，2019。[40] Tapio Rajala。在满足 Sturm 曲率-维数条件的度量空间中具有有界密度的插值测度。《泛函分析杂志》，263(4)：896–924，2012。[41] Tapio Rajala 和 Karl-Theodor Sturm。强 CD(K,∞) 空间中的不分支测地线与最优映射。《变分法与偏微分方程》，50(3-4)：831–846，2014。[42] John Roe。《粗几何讲义》。第 31 号。美国数学会，2003。[43] Filippo Santambrogio。《应用数学家的最优传输》。施普林格，2015。[44] Karl-Theodor Sturm。度量测度空间的几何 I。《数学学报》，196：65–131，2006。[45] Karl-Theodor Sturm。度量测度空间的几何 II。《数学学报》，196：133–177，2006。[46] Anna Birgitte Svindland。随机分析与数理金融中的超滤子收敛。奥斯陆大学硕士论文，2018。[47] Lou Van den Dries 和 Alex J Wilkie。多项式增长群的 Gromov 定理与初等逻辑。《代数学杂志》，89(2)：349–374，1984。[48] Cédric Villani。《最优传输专题》。第 58 号。美国数学会，2003。[49] Cédric Villani。《最优传输：旧与新》，第 338 卷。施普林格科学与商业媒体，2008。[50] Max-Konstantin von Renesse 和 Karl-Theodor Sturm。传输不等式、梯度估计、熵与 Ricci曲率。《纯粹与应用数学通讯》，58(7)：923–940，2005。

卡内基梅隆大学，福布斯大道 5000 号，匹兹堡，宾夕法尼亚州 15213，美国；以及，

高等科学研究所，沙特尔路 35 号，91440 比尔-叙尔-伊维特，法国电子邮箱地址：warren@ihes.fr