arXiv:2303.04296v2 [math.OC] 9 May 2024

不确定随机非线性系统的事件触发主动抗扰控制

Ze-Hao Wu [a], Feiqi Deng [b]、Pengyu Zeng [a]、Hua-Cheng Zhou [c]、Hongyi Li [d]

[a] *School of Mathematics and Big Data, Foshan University, Foshan 528000, China*
[b] *Systems Engineering Institute, South China University of Technology, Guangzhou 510640, China*
[c] *School of Mathematics and Statistics, HNP-LAMA, Central South University, Changsha 410075, China*
[d] *School of Electronic and Information Engineering and Chongqing Key Laboratory of Generic Technology and System of Service Robots, Southwest University, Chongqing 400715, China*

摘要

本文首次针对一类受有界噪声和有色噪声驱动的不确定随机非线性系统，研究事件触发主动扰动抑制控制（ADRC）。设计了事件触发扩张状态观测器（ESO）和自抗扰控制器，并分别提出了两种事件触发机制，使相邻执行时刻之间的间隔具有固定的正下界。事件触发扩张状态观测器实时估计由非线性未建模动态、外部确定性扰动、有界噪声和有色噪声耦合形成的随机总扰动，并在事件触发反馈回路中对其进行补偿。通过严格的理论分析，证明了闭环系统的均方实际收敛性和几乎必然实际收敛性。最后，通过数值仿真验证所提出控制方案及理论结果的有效性。

Key words: 随机系统 ；主动抗扰控制；事件触发机制；扩张状态观测器 .

1 引言

过去几十年来，由于扰动和不确定性在工程应用中普遍存在，不确定系统的扰动抑制越来越受到关注。自抗扰控制（ADRC）是一种基于估计/补偿策略的新型控制技术，由 Han 于 20 世纪 80 年代末提出 [9]。ADRC 方案的核心组件是扩张状态观测器（ESO），其旨在实时估计不可测状态，以及代表内部不确定性和外部扰动综合影响的总扰动。基于通过 ESO 获得的估计值，由反馈控制器和补偿器组成的自抗扰控制器经过设计，可为被控对象实现扰动抑制和预期控制目标，并在闭环中及时估计和补偿总扰动。自抗扰控制提出以来，已应用于广泛的工程技术应用，例如德州仪器生产的通用控制芯片 [28], DC-DC功率变换器 [22], 永磁同步电机 [24], Delta机器人控制 [2],发电厂 [25], 等。

一方面，过去二十年来，不确定系统自抗扰控制理论基础取得了长足进展，包括扩张状态观测器的收敛性分析以及自抗扰控制闭环的收敛性分析，相关研究可见于文献 [7], 中一类不确定非线性系统扩张状态观测器的收敛性分析、文献 [6], 中不确定随机系统自抗扰控制闭环的收敛性分析，以及专著 [8,26] 及其参考文献中关于不确定非线性系统自抗扰控制的更全面设计和理论分析。另一方面，网络化控制系统（NCSs）中的传感器、执行器和控制器在空间上分布，并通过通信网络传输数据；这类系统在降低安装成本、提高可靠性和增强系统灵活性方面具有优势，因此已得到广泛应用。值得注意的是，

Email addresses: zehaowu@amss.ac.cn（Ze-Hao Wu），aufqdeng@scut.edu.cn（Feiqi Deng），pyzeng@outlook.com（Pengyu Zeng），hczhou@amss.ac.cn（Hua-ChengZhou），lihongyi2009@swu.edu.cn（Hongyi Li）。

网络化控制系统中无线传感器-执行器网络的带宽和计算资源有限。事件触发机制（ETM）已广泛用于提高网络化控制系统的通信效率，同时保证控制质量，参见文献 [10,30,1,4,21] 及其参考文献。对于网络化环境中的不确定系统，前述文献中基于连续传输的输出测量进行扩张状态观测器设计，以及基于扩张状态观测器获得的连续时间估计值进行自抗扰控制器设计，这些方法可能不再适用。这进一步推动了近期面向不确定系统的事件触发自抗扰控制的发展，参见文献 [27,11,23] 及其参考文献。在事件触发控制框架下，仅在系统有需要时才传输信息并更新控制信号，从而显著节省通信和计算资源。

众所周知，在工程应用中，扰动和不确定性更可能具有随机特性。过去几十年来，针对由白噪声驱动、以随机微分方程（SDE）描述的随机系统的反馈控制已取得许多重要进展，例如见 [3,29]。近年来，随机系统的事件触发控制也受到了广泛关注，例如见 [16,17,18,19]。然而，白噪声的平均功率是无穷大，因此随机微分方程并不总是适用于描述许多实际系统，尤其是工程系统 [33]。随机微分方程（RDE）已被广泛用作动态模型，这类模型由平均功率有界的二阶矩过程驱动，例如见 [13,14]。直到2014年，随机微分方程解的存在唯一性及其稳定性分析才在[31]中得到发展。随后出现了一系列相关进展，例如见 [33,35,36]。例如， [33]研究了由二阶矩过程驱动的拉格朗日系统的轨迹跟踪控制； [35]研究了随机非线性时滞系统全局解的存在唯一性、稳定性以及自适应输出反馈调节控制设计； [36]研究了同时存在参数不确定性和强非线性的随机微分方程系统的事件触发自适应跟踪控制。关于控制领域随机系统的更多研究进展可参见近期的综述论文 [34]。近年来，针对一类由有界噪声和有色噪声（它们是具有代表性的二阶矩过程）驱动的不确定随机非线性系统的开环，设计了线性和非线性事件触发扩张状态观测器，并通过严格的理论分析给出了所提扩张状态观测器的均方收敛性和几乎必然收敛性 [32]。

确保基于事件触发机制的观测器和控制器能够正常工作，一个关键要素是防止芝诺现象（即触发条件在有限时间内满足无穷多次）。这给事件触发控制的开发带来了巨大困难，尤其是在随机系统中，因为执行时刻/采样时间和执行间隔时间都是随机的，因此很难甚至不可能获得随机执行间隔时间的正下界。在上述文献中，例如 [16,17,18,19],设计了带驻留时间（时间正则化）的新型事件触发机制或周期性事件触发机制，直接排除了芝诺现象，但理论分析复杂得多。

本文针对一类不确定随机非线性系统，设计了事件触发自抗扰控制器，并进行了收敛性分析。主要贡献与创新可概括如下：a）受控随机非线性系统受到广泛的随机总扰动影响，该扰动涉及非线性未建模动态、外部确定性扰动、有界噪声和有色噪声的耦合；b）设计了事件触发自抗扰控制器，并提出了两种可行的事件触发机制；c）通过严格的理论证明，给出了不确定随机非线性系统的自抗扰控制闭环系统的均方实用收敛性和几乎必然实用收敛性。

本文结构安排如下：第2节对问题进行建模，并介绍一些预备知识。第3节设计事件触发自抗扰控制器，并给出主要结果。第4节给出主要结果的理论证明。第5节开展数值仿真以验证理论结果，最后在第6节给出总结。

2 问题表述与预备知识

本文使用以下记号。$\mathbb{E}$ 表示数学期望； $|Z|$ 表示标量 Z 的绝对值， $\|Z\|$ 表示向量 Z的二范数（或欧几里得范数）； $\mathbb{I}_n$ 表示 n维单位矩阵； $\bar{x}_i$、$(x_1,\cdots,x_i)$、$\hat{\bar{x}}_i$、$(\hat{x}_1,\cdots,\hat{x}_i)$、$\hat{x}=\hat{\bar{x}}_{n+1}$； $\lambda_{\min}(Z)$和 $\lambda_{\max}(Z)$分别表示正定矩阵 Z的最小特征值和最大特征值； $\mathbb{I}_{\Omega_*}$ 表示一个示性函数，其在区域Ω_*内取值为1，否则取值为0；$(\Omega\ \mathcal{F},\mathbb{F},P)$表示一个完备滤过概率空间，其滤过为 $\mathbb{F}=\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$，其中定义了两个相互独立的一维标准布朗运动 $B_i(t)$ $(i=1,2)$。

本文针对一类由有界噪声和有色噪声驱动的不确定随机非线性系统，研究事件触发式自抗扰控制方法，用于实现输出反馈稳定化和扰动抑制。

如下：

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) + g_1(x_1(t)), \\ \dot{x}_2(t) = x_3(t) + g_2(x_1(t), x_2(t)), \\ \quad\quad\vdots \\ \dot{x}_n(t) = f(t, x(t), w_1(t), w_2(t)) + g_n(x(t)) + u(t), \\ y(t) = x_1(t), \end{cases} \tag{1}$$

其中，$x(t) = (x_1(t) \cdots, x_n(t)) \in \mathbb{R}^n$、$u(t) \in \mathbb{R}$ 和 $y(t) \in \mathbb{R}$ 分别是系统的状态、控制输入和输出测量；$f : [0, \infty) \times \mathbb{R}^{n+2} \to \mathbb{R}$ 是未知系统函数，而 $g_i : \mathbb{R}^i \to \mathbb{R}$ $(i = 1, \cdots, n)$ 是已知函数，但由于状态不可测，$g_i(\bar{x}_i(t))$ $(i = 2, \cdots, n)$仍表示未知动力学；$w_1(t) \ \psi(t, B_1(t))$由满足假设（A2）的未知函数 $\psi : [0, \infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 定义，是有界噪声；$w_2(t)$是有色噪声，它是 Itô 型随机微分方程的解（例如，参见 [15,p.426], [20, p.101]）：

$$dw_2(t) = -\rho_1 w_2(t)dt + \rho_1\sqrt{2\rho_2}dB_2(t), \tag{2}$$

其中，$\rho_1 > 0$ 和 $\rho_2 > 0$ 分别为表示相关时间和噪声强度的常数，初始值为 $w_2(0) \in \mathbb{R}$。ρ_1、ρ_2 可能未知，但处于已知的有界区间内。

考虑这两类随机噪声的意义可阐述如下。众所周知，白噪声可用于表征实际中的随机扰动，通常将其理解为均值为零且功率谱密度恒定的平稳过程。然而，在许多工程应用中，白噪声并不总是适用于表征噪声，因为连续时间白噪声的平均功率为无穷大，且其相关时间为 0 [33]。式（2）所描述的有色噪声是一种二阶矩过程，其功率谱密度不均匀，平均功率有界。与白噪声相比，当实际过程具有有限甚至较长的相关时间且平均功率有界时，有色噪声更能真实地描述噪声 [15,33]。关于白噪声与有色噪声的更多解释和比较，以及有色噪声的物理背景，可参见 [14,15,31,33,34], 等文献。至于有界噪声，令 $w_1(t) = \psi(t)$，其中仅为关于时间自变量的函数，即可得到其一个特例——传统的确定性扰动。实际中经常出现的有界噪声，如 $\sin(t + B_1(t))$ 和 $\cos(t + B_1(t))$（[12]），正是所关注的对象，它们满足以下假设（A2）。

文献 [5] 表明，任意一致可观仿射单输入单输出（SISO）非线性系统都可以变换为下三角形式 (1)

其中 $w_i(t) \equiv 0$ $(i = 1,2)$。此外，系统 (1) 将具有匹配扰动和不确定性的本质积分链系统作为$g_i(\cdot) = 0$ $(i = 1, \cdots, n)$的一个特例加以涵盖；该形式是用于展示自抗扰控制设计过程及其应用的规范化形式。许多工程系统都可以用系统 (1) 描述，例如前文提到的 DC-DC功率变换器 [22], 永磁同步电机 [24], 和 Delta机器人 [2], 等。

需要指出的是，[32] 中开环系统的扩张状态观测器收敛，并不直接意味着自抗扰控制闭环系统中的扩张状态观测器收敛以及受控系统稳定。这是因为，在证明开环系统中随机总扰动（包括系统状态）的估计误差收敛时，需要预先假设状态在统计意义上有界；而反过来，闭环状态的有界性取决于扩张状态观测器是否收敛。开环系统的状态有界性假设，除了常见的结构条件（如精确可观测性）之外，还可视为一种缓慢变化条件。设计自抗扰控制器时，这一预设条件并不理想，而设计控制器本身在理论上也并非易事。此外，本文的设计与理论分析在很大程度上不同于 [27,11,23] 中的确定性情形。

3 事件触发自抗扰控制设计与主要结果

定义

$$x_{n+1}(t) \triangleq f(t, x(t), w_1(t), w_2(t)), \tag{3}$$

其为随机总扰动（扩张状态），涉及非线性未建模动态、外部确定性扰动、有界噪声和有色噪声所产生的非线性耦合效应。为估计不可测状态和随机总扰动，基于系统 (1) 的输出和输入设计事件触发扩张状态观测器如下：

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}_1(t) = \hat{x}_2(t) + \lambda_1 r\left(y(t_k) - \hat{x}_1(t)\right) + g_1(\hat{x}_1(t)), \\ \dot{\hat{x}}_2(t) = \hat{x}_3(t) + \lambda_2 r^2\left(y(t_k) - \hat{x}_1(t)\right) + g_2(\hat{x}_1(t), \hat{x}_2(t)), \\ \quad\quad\vdots \\ \dot{\hat{x}}_n(t) = \hat{x}_{n+1}(t) + \lambda_n r^n\left(y(t_k) - \hat{x}_1(t)\right) + g_n(\hat{x}_n(t)) \\ \quad\quad +u(t), \\ \dot{\hat{x}}_{n+1}(t) = \lambda_{n+1} r^{n+1}\left(y(t_k) - \hat{x}_1(t)\right), \ t \in [t_k, t_{k+1}), \end{cases} \tag{4}$$

其中，$k \in \mathbb{Z}^+$、$t_1 = 0$、$\hat{x}_i(t)$（$i = 1$、$\cdots$、$n+1$）是 $x_i(t)$的估计值，r 是调节增益，参数λ_i $(i = 1$、$\cdots$、$n+1)$的选取旨在保证

矩阵

$$H=\begin{pmatrix} -\lambda_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -\lambda_2 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -\lambda_n & 0 & 0 & \ddots & 1 \\ -\lambda_{n+1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}_{(n+1)\times(n+1)} \tag{5}$$

为赫尔维茨矩阵，且 t_k ($k \in \mathbb{Z}^+$)是由以下事件触发机制确定的随机执行时间（停时）

$$t_{k+1}=\inf\{t\geq t_k+\tau:\ |y(t)-y(t_k)|\geq \kappa_1 r^{-(n+\frac{1}{2})}\}, \tag{6}$$

其中 $\tau=\epsilon_1 r^{-(2n+\frac{3}{2})}$且 ϵ_1, κ_1 为任意正调节参数。对于任意固定的 $t\in[0,\infty)$，ETM (6) 在 t 之前的最后一个执行时刻可表示如下:

$$\zeta_t=\max\{t_k: t_k\leq t, k\in\mathbb{Z}^+\}. \tag{7}$$

因此，对于任意 $k\in\mathbb{Z}^+$， $y(\zeta_t)-y(t)$ 总能表示 $y(t_k)-y(t)$ $t\in[t_k,t_{k+1})$。由于 $t_{k+1}-t_k\geq\tau$，对于几乎所有样本路径， t 之前执行时刻的最大值为$[\frac{t}{\tau}]+1$。对于 $k=1,\cdots,[\frac{t}{\tau}]+1$，我们定义

$$\Omega_k=\{\zeta_t=t_k\},\ \Omega_{k,\tau}=\{\zeta_t=t_k \text{ and } t\leq t_k+\tau\}. \tag{8}$$

因此，Ω 可表示为一组两两不相交子集的并集，即对于任意固定的 $t\in[0,\infty)$，$\Omega=\bigcup_{k=1}^{[\frac{t}{\tau}]+1}\Omega_k$。基于事件触发扩张状态观测器 (4)，事件触发自抗扰控制器设计如下:

$$u(t)=\sum_{i=1}^{n}\theta^{n+1-i}c_i\hat{x}_i(t_l^*)-\hat{x}_{n+1}(t_l^*),\ t\in[t_l^*,t_{l+1}^*), \tag{9}$$

其中， $t_1^*=0$、 $\theta\geq 1$ 将在后文给出， c_i (i =1、$\cdots$、 n)为控制增益，并选择这些增益使得矩阵

$$J=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 1 \\ c_1 & c_2 & \cdots & c_{n-1} & c_n \end{pmatrix}_{n\times n} \tag{10}$$

为赫尔维茨矩阵，且 t_l^* ($l\in\mathbb{Z}^+$) 是由以下事件触发机制确定的随机执行时间（停时）

$$t_{l+1}^*=\inf\{t\geq t_l^*+\upsilon:\ \sum_{i=1}^{n+1}|\hat{x}_i(t)-\hat{x}_i(t_l^*)|\geq\frac{\kappa_2}{r^{\frac{1}{2}}}\}, \tag{11}$$

其中 $l\in\mathbb{Z}^+$, $\upsilon=\epsilon_2 r^{-(\frac{2n}{3}+\frac{5}{3})}$，且 ϵ_2, κ_2 为任意正调节参数。在事件触发机制（11）下，事件触发自抗扰控制器（9）由输出反馈控制器 $\sum_{i=1}^{n}\theta^{n+1-i}c_i\hat{x}_i(t_l^*)$ 和扰动抑制分量 $-\hat{x}_{n+1}(t_l^*)$ 构成，它以主动方式抑制随机总扰动，而非被动方式。

类似地，对于任意固定的 $t\in[0,\infty)$，ETM (11)在 t 之前的最后一个执行时刻为

$$\varpi_t\triangleq\max\{t_l^*: t_l^*\leq t, l\in\mathbb{Z}^+\}. \tag{12}$$

由于 $t_{l+1}^*-t_l^*\geq\upsilon$，在几乎每条样本路径上， t 之前执行时刻的最大值为 $[\frac{t}{\upsilon}]+1$。对于$l=1$、 $\cdots$、 $[\frac{t}{\upsilon}]+1$，我们定义

$$\Omega_l^*=\{\varpi_t=t_l^*\},\ \Omega_{l,\upsilon}^*=\{\varpi_t=t_l^* \text{ and } t\leq t_l^*+\upsilon\}. \tag{13}$$

于是，Ω也可以表示为一组两两不相交子集的并，即对于任意固定的$t\in[0,\infty)$，$\Omega=\bigcup_{l=1}^{[\frac{t}{\upsilon}]+1}\Omega_l^*$。此外，我们还设

$$\Omega_\tau=\bigcup_{k=1}^{[\frac{t}{\tau}]+1}\Omega_{k,\tau},\quad \Omega_\upsilon^*=\bigcup_{l=1}^{[\frac{t}{\upsilon}]+1}\Omega_{l,\upsilon}^*. \tag{14}$$

备注3.1 关于ETM (6)（或(11)），每个执行间隔 $[t_k,t_{k+1})$（或 $[t_l^*,t_{l+1}^*)$）分为两个阶段：执行一旦发生，触发将在 $[t_k,t_k+\tau)$（或 $[t_l^*,t_l^*+\upsilon)$）内继续暂停；在时刻 $t_k+\tau$（或 $t_l^*+\upsilon$）之后，持续评估事件触发条件，以确定下一执行时刻 t_{k+1} （或 t_{l+1}^*）。这意味着每个执行间隔显然不小于 τ（或 υ），因此可以自然地避免芝诺现象。然而，在这些事件触发机制下，对自抗扰控制闭环进行收敛性分析会更加复杂。

为保证系统 (1) 在事件触发自抗扰控制器 (9) 作用下形成的闭环系统实现均方收敛和几乎必然的实用收敛，需要满足以下假设。

假设 (A1). $f(\cdot)$ 关于自变量 (t,x) 和 (w_1,w_2) 分别具有一阶连续偏导数和二阶连续偏导数，并且存在已知常数 $\alpha_j>0$ ($j=1,2,3,4$)、 $L_i\geq 0$，以及函数 $\varphi_j\in C(\mathbb{R};\mathbb{R}^+)$ ($j=1,2$)，使得对于所有$t\geq 0, x\in\mathbb{R}^n, w_1\in\mathbb{R}$, $w_2\in\mathbb{R}, i=1,\cdots,n$，都有

$$\begin{aligned}&|f(t,x,w_1,w_2)|+\left|\tfrac{\partial f(t,x,w_1,w_2)}{\partial t}\right|\\ &\leq\alpha_1+\alpha_2\|x\|+\alpha_3|w_2|+\varphi_1(w_1),\end{aligned}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{\partial f(t,x,w_1,w_2)}{\partial x_i}\right|+\left|\frac{\partial f(t,x,w_1,w_2)}{\partial w_1}\right|+\left|\frac{\partial^2 f(t,x,w_1,w_2)}{\partial w_1^2}\right|+\left|\frac{\partial f(t,x,w_1,w_2)}{\partial w_2}\right|+\left|\frac{\partial^2 f(t,x,w_1,w_2)}{\partial w_2^2}\right|\le \alpha_4+\varphi_2(w_1),$$

$$\left|g_i(\bar{x}_i)-g_i(\hat{\bar{x}}_i)\right|\le L_i\|\bar{x}_i-\hat{\bar{x}}_i\|,\ g_i(\underbrace{0,\cdots,0}_{i})=0.$$

假设（A2）。函数 $\psi(t,\vartheta):[0,\infty)\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 关于自变量 t 和 ϑ 分别具有一阶和二阶连续偏导数，并且存在一个已知常数 $\alpha_5>0$，使得对于所有 $t\ge 0,\vartheta\in\mathbb{R}$,

$$|\psi(t,\vartheta)|+\left|\frac{\partial\psi(t,\vartheta)}{\partial t}\right|+\left|\frac{\partial\psi(t,\vartheta)}{\partial\vartheta}\right|+\frac{1}{2}\left|\frac{\partial^2\psi(t,\vartheta)}{\partial\vartheta^2}\right|\le\alpha_5.$$

注释 3.2 由于随机总扰动需要由事件触发扩张状态观测器进行估计，并在事件触发自抗扰控制的闭环中进行补偿，因此自然要求其变化率（式 (24) 中的随机微分）相对于闭环状态有界或呈线性增长，这由假设 (A1)-(A2) 保证。

在以下主要结果及其证明中，使用如下符号：

$$\begin{aligned}&z_i(t)=r^{n+1-i}(x_i(t)-\hat{x}_i(t)),\ i=1,\cdots,n+1,\\&z(t)=(z_1(t),\cdots,z_{n+1}(t)),\ c_{n+1}=1.\end{aligned}\tag{15}$$

Set

$$\Lambda_1(\upsilon)=\frac{10(n+1)\theta^{2n}(\max\limits_{1\le i\le n+1}c_i^2+4\alpha_2^2)\upsilon^2}{(1-\upsilon\theta^n\max\limits_{1\le i\le n+1}|c_i|)^2},$$

$$\Lambda_2(\upsilon)=\frac{10[n(1+\sum_{i=1}^{n}L_i^2)+4n\alpha_2^2]\upsilon}{(1-\upsilon\theta^n\max\limits_{1\le i\le n+1}|c_i|)^2},$$

$$\Lambda_3(\upsilon,\tau,r)=\frac{10(n+1)(1+L_1^2)\upsilon^2(\upsilon+\tau)r^{2(n+1)}\sum\limits_{i=1}^{n+1}\lambda_i^2}{(1-\upsilon\theta^n\max\limits_{1\le i\le n+1}|c_i|)^2},$$

$$\Lambda_4(\upsilon)=\frac{10(n+1)\theta^{2n}\max\limits_{1\le i\le n+1}c_i^2\upsilon^2}{(1-\upsilon\theta^n\max\limits_{1\le i\le n+1}|c_i|)^2},$$

$$\Lambda_5(\upsilon,r)=\frac{10[n(1+\sum_{i=1}^{n}\frac{L_i^2}{r^{2(n+1-i)}})+(n+1)r^2\sum_{i=1}^{n+1}\lambda_i^2]\upsilon}{(1-\upsilon\theta^n\max\limits_{1\le i\le n+1}|c_i|)^2},$$

$$\Lambda_6(\upsilon,r)=\frac{10\theta^{2n}\upsilon^2}{(1-\upsilon\theta^n\max\limits_{1\le i\le n+1}|c_i|)^2}\Big\{(4+8n)[\alpha_1^2+\alpha_3^2\sup_{t\in[-\upsilon,\infty)}\mathbb{E}|w_2(t)|^2+\sup_{t\in[-\upsilon,\infty)}(\varphi_1(w_1(t)))^2]+r(n+1)\kappa_1^2\sum_{i=1}^{n+1}\lambda_i^2\Big\},$$

$$\begin{aligned}&x(t)\triangleq x(0),\ t\in[-\upsilon-\tau,0],\\&z(t)\triangleq z(0),w_i(t)\triangleq w_i(0),t\in[-\upsilon,0],i=1,2,\end{aligned}\tag{16}$$

其中，整定参数 υ、θ、c_i 的选取满足 $\upsilon\theta^n\max_{1\le i\le n+1}\{|c_i|\}<1$。

引理 3.1 给出了 Ω_υ^* 上的采样误差 $\hat{x}_i(t)-\hat{x}_i(\varpi_t)$，这对于后续闭环系统的收敛性分析是必要的。

引理 3.1 假设假设 (A1)-(A2) 成立，且整定参数 υ, θ, c_i 选取为满足 $\upsilon\theta^n\max_{1\le i\le n+1}\{|c_i|\}<1$，则对于所有 $t\ge 0$，有

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}[\sum_{i=1}^{n+1}|\hat{x}_i(t)-\hat{x}_i(\varpi_t)|\mathbb{I}_{\Omega_\upsilon^*}]^2\\&\le\Lambda_1(\upsilon)\mathbb{E}[\|x(t)\|^2\mathbb{I}_{\Omega_\upsilon^*}]+\Lambda_2(\upsilon)\int_{t-\upsilon}^{t}\mathbb{E}[\|x(s)\|^2\mathbb{I}_{\Omega_\upsilon^*}]ds\\&+\Lambda_3(\upsilon,\tau,r)\int_{t-\upsilon-\tau}^{t}\mathbb{E}[\|x(s)\|^2\mathbb{I}_{\Omega_\upsilon^*}]ds+\Lambda_4(\upsilon)\mathbb{E}[\|z(t)\|^2\mathbb{I}_{\Omega_\upsilon^*}]\\&+\Lambda_5(\upsilon,r)\int_{t-\upsilon}^{t}\mathbb{E}[\|z(s)\|^2\mathbb{I}_{\Omega_\upsilon^*}]ds+\Lambda_6(\upsilon,r),\end{aligned}\tag{17}$$

其中 $\Lambda_i(i=1,2,\cdots,6)$ 在式 (16) 中给出。

证明。见第 4 节中的“引理 3.1 的证明”。

令 $Q_1\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 和 $Q_2\in\mathbb{R}^{(n+1)\times(n+1)}$ 分别为李雅普诺夫方程的唯一正定矩阵解

$$Q_1J+J^\top Q_1=-\mathbb{I}_n\tag{18}$$

and

$$Q_2H+H^\top Q_2=-\mathbb{I}_{n+1},\tag{19}$$

其中，J 和 H 分别由式 (10) 和式 (5) 给出。

事件触发自抗扰控制器 (9) 作用下系统 (1) 闭环的均方实用收敛性和几乎必然实用收敛性总结如下定理 3.1 所述。

定理 3.1 假设 (A1)-(A2)$_n$成立， θ的选取满足 $\theta > 2\lambda_{\max}(Q_1)\sum L_i$且$_{i=1}\upsilon\theta^n \max_{1\le i\le n+1}\{|c_i|\} < 1$。那么，存在一个已知常数 $r_* \ge 1$，使得对于任意初始值 $x(0) \in \mathbb{R}^n$、 $\hat{x}(0) \in \mathbb{R}^{n+1}$、 $w_2(0) \in \mathbb{R}$，以及任意 $r \ge r_*$，在事件触发自抗扰控制器 (9) 作用下，系统 (1) 的闭环存在唯一全局解 $(x(t), \hat{x}(t))$，且该解满足

$$
\begin{aligned}
&(i)\ \ \mathbb{E}|x_i(t)-\hat{x}_i(t)|^2 \le \frac{M}{r^{2n+3-2i}},\ i=1,\cdots,n+1,\\
&(ii)\ |x_i(t)-\hat{x}_i(t)| \le \frac{M_\omega}{r^{\frac{2n+3-2i}{2}}}\ a.s.\ i=1,\cdots,n+1,\\
&(iii)\ \sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}|x_i(t)|^2 \le \frac{M}{r},\\
&(iv)\ |x_i(t)| \le \frac{M_\omega}{r^{\frac{1}{2}}}\ a.s.\ i=1,\cdots,n,
\end{aligned}
\tag{20}
$$

对所有 $t \ge t_r$，其中 t_r 为一个依赖于 r 的常数，$M > 0$ 和 $M_\omega > 0$ 分别为常数和独立于 r 的随机变量。

证明。参见第 4 节中的“定理 3.1 的证明”。

注 3.3 与 *[32],* 中线性事件触发式扩张状态观测器的收敛性相比，闭环中的事件触发扩张状态观测器无需预先假设状态有界，即可实现均方意义下的实际收敛和几乎必然意义下的实际收敛。上述主要结果所涉及的收敛性是指，在 $[t_r,\infty$中，均方意义下和几乎必然意义下的估计误差及闭环状态界都可以任意小，前提是增益 r 调得足够大；这要求相应地设计基于依赖于 r 的事件触发扩张状态观测器的控制器。

4 主要结果的证明

本节给出主要结果的证明。

引理 3.1 的证明。对于任意固定的 $t \in[0,\infty)$，引理 3.1 的证明采用以下步骤。令

$$
\delta_i(t) = \hat{x}_i(t) - \hat{x}_i(\varpi_t), \tag{21}
$$

其中， ϖ_t 的定义与式 (12) 中相同。 c_{n+1}、 $z_i(t)$ 和 $z(t)$ 在式 (15) 中给出。对于 $\omega \in \Omega_{k,\tau}$，有 $\zeta_t \ge t-\tau$。因此，根据事件触发机制 (6)，对于所有 $t \ge 0$,

$$
\begin{aligned}
&|y(\zeta_t)-y(t)|\\
&= \sum_{k=1}^{[\frac{t}{\tau}]+1}|y(\zeta_t)-y(t)|\mathbb{I}_{\Omega_{k,\tau}} + \sum_{k=1}^{[\frac{t}{\tau}]+1}|y(\zeta_t)-y(t)|\mathbb{I}_{\Omega_k\setminus\Omega_{k,\tau}}\\
&\le \int_{t-\tau}^{t}|x_2(s)|ds + L_1\int_{t-\tau}^{t}|x_1(s)|ds + \kappa_1 r^{-(n+\frac{1}{2})}.
\end{aligned}
$$

因此，对于 $i=1$、 $\cdots$、 $n+1$，可得

$$
\begin{aligned}
&\int_{t-\upsilon}^{t}|\lambda_i r^i(y(\zeta_s)-y(s))|ds\\
&= |\lambda_i|\upsilon r^i\int_{t-\upsilon-\tau}^{t}|x_2(s)|ds + |\lambda_i|L_1\upsilon r^i\int_{t-\upsilon-\tau}^{t}|x_1(s)|ds\\
&+|\lambda_i|\kappa_1\upsilon r^{-(n+\frac{1}{2}-i)}.
\end{aligned}
$$

对于 $\omega \in \Omega^*_{l,\upsilon}$，我们有 $\varpi_t \ge t-\upsilon$。然后，对于任意 $\omega \in \Omega^*_{l,\upsilon}$以及 $i=1$、 $\cdots$、 $n-1$，可得

$$
\begin{aligned}
&|\delta_i(t)|\\
&\le \int_{t-\upsilon}^{t}|\hat{x}_{i+1}(s)+\lambda_i r^i(y(\zeta_s)-\hat{x}_1(s))+g_i(\hat{\tilde{x}}_i(s))|ds\\
&\le \int_{t-\upsilon}^{t}\frac{|z_{i+1}(s)|}{r^{n-i}}ds + \int_{t-\upsilon}^{t}|x_{i+1}(s)|ds + |\lambda_i|\upsilon r^i\int_{t-\upsilon-\tau}^{t}\\
&|x_2(s)|ds + |\lambda_i|L_1\upsilon r^i\int_{t-\upsilon-\tau}^{t}|x_1(s)|ds + |\lambda_i|\kappa_1\upsilon r^{-(n+\frac{1}{2}-i)}\\
&+\int_{t-\upsilon}^{t}\frac{|\lambda_i z_1(s)|}{r^{n-i}}ds + \frac{L_i}{r^{n+1-i}}\int_{t-\upsilon}^{t}\|z(s)\|ds\\
&+L_i\int_{t-\upsilon}^{t}\|x(s)\|ds,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&|\delta_n(t)|\\
&\le \sum_{i=1}^{n+1}\upsilon\theta^{n+1-i}|c_i\hat{x}_i(\varpi_t)| + \int_{t-\upsilon}^{t}|\lambda_n r^n(y(\zeta_s)-\hat{x}_1(s))|ds\\
&+\int_{t-\upsilon}^{t}|\hat{x}_{n+1}(s)|ds + \int_{t-\upsilon}^{t}|g_n(\hat{\tilde{x}}_n(t))|ds\\
&\le \sum_{i=1}^{n+1}\upsilon\theta^{n+1-i}|c_i\delta_i(t)| + \sum_{i=1}^{n+1}\upsilon\theta^{n+1-i}\frac{|c_i z_i(t)|}{r^{n+1-i}}\\
&+\sum_{i=1}^{n+1}\upsilon\theta^{n+1-i}|c_i x_i(t)| + |\lambda_n|\upsilon r^n\int_{t-\upsilon-\tau}^{t}|x_2(s)|ds\\
&+|\lambda_n|L_1\upsilon r^n\int_{t-\upsilon-\tau}^{t}|x_1(s)|ds + |\lambda_n|\kappa_1\upsilon r^{-\frac{1}{2}}\\
&+\int_{t-\upsilon}^{t}|\lambda_n z_1(s)|ds + \int_{t-\upsilon}^{t}|z_{n+1}(s)|ds + \int_{t-\upsilon}^{t}|x_{n+1}(s)|ds\\
&+\frac{L_n}{r}\int_{t-\upsilon}^{t}\|z(s)\|ds + L_n\int_{t-\upsilon}^{t}\|x(s)\|ds,
\end{aligned}
$$

and

$$
\begin{aligned}
&|\delta_{n+1}(t)| \le |\lambda_{n+1}|\upsilon r^{n+1}\int_{t-\upsilon-\tau}^{t}|x_2(s)|ds\\
&+|\lambda_{n+1}|L_1\upsilon r^{n+1}\int_{t-\upsilon-\tau}^{t}|x_1(s)|ds + |\lambda_{n+1}|\kappa_1\upsilon r^{\frac{1}{2}}\\
&+r\int_{t-\upsilon}^{t}|\lambda_{n+1}z_1(s)|ds.
\end{aligned}
$$

因此，对于任意 $\omega \in \Omega_{l,\upsilon}^{*}$，有

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n+1}|\delta_i(t)| \\
&\le \frac{1}{1-\upsilon\theta^n \max\limits_{1\le i\le n+1}|c_i|}\Big\{\sum_{i=1}^{n}\int_{t-\upsilon}^{t}\frac{|z_{i+1}(s)|}{r^{n-i}}ds \\
&+\sum_{i=1}^{n}\int_{t-\upsilon}^{t}|x_{i+1}(s)|ds+\sum_{i=1}^{n+1}|\lambda_i|\upsilon r^i\int_{t-\upsilon-\tau}^{t}|x_2(s)|ds \\
&+\sum_{i=1}^{n+1}|\lambda_i|L_1\upsilon r^i\int_{t-\upsilon-\tau}^{t}|x_1(s)|ds+\sum_{i=1}^{n+1}\int_{t-\upsilon}^{t}\frac{|\lambda_i z_1(s)|}{r^{n-i}}ds \\
&+\sum_{i=1}^{n+1}\upsilon\theta^{n+1-i}\frac{|c_i z_i(t)|}{r^{n+1-i}}+\sum_{i=1}^{n+1}\upsilon\theta^{n+1-i}|c_i x_i(t)| \\
&+\sum_{i=1}^{n+1}|\lambda_i|\kappa_1\upsilon r^{-(n+\frac{1}{2}-i)}+\sum_{i=1}^{n}\frac{L_i}{r^{n+1-i}}\int_{t-\upsilon}^{t}\|z(s)\|ds \\
&+\sum_{i=1}^{n}L_i\int_{t-\upsilon}^{t}\|x(s)\|ds\Big\}.
\end{aligned}
$$

这些结果与假设 (A1)-(A2) 以及关于 $a_i \ge 0$ 和 $m \in \mathbb{Z}^+$ 的m m不等式 $(\sum a_i)^2 \le m\sum a_i^2$ $i=1$ $i=1$进一步推出

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}[\sum_{i=1}^{n+1}|\delta_i(t)|\cdot\mathbb{I}_{\Omega_\upsilon^*}]^2 \\
&\le \frac{10}{(1-\upsilon\theta^n\max\limits_{1\le i\le n+1}|c_i|)^2}\sum_{l=1}^{[\frac{t}{\upsilon}]+1}\mathbb{E}\Big\{\Big\{n\upsilon(1+\sum_{i=1}^{n}L_i^2)\cdot \\
&\int_{t-\upsilon}^{t}\|x(s)\|^2ds+n\upsilon(1+\sum_{i=1}^{n}\frac{L_i^2}{r^{2(n+1-i)}})\int_{t-\upsilon}^{t}\|z(s)\|^2ds \\
&+(n+1)(1+L_1^2)\upsilon^2(\upsilon+\tau)r^{2(n+1)}\sum_{i=1}^{n+1}\lambda_i^2\int_{t-\upsilon-\tau}^{t}\|x(s)\|^2 \\
&ds+(n+1)\upsilon r^2\sum_{i=1}^{n+1}\lambda_i^2\int_{t-\upsilon}^{t}\|z(s)\|^2ds+(n+1)\upsilon^2\theta^{2n}\cdot \\
&\max_{1\le i\le n+1}c_i^2(\|x(t)\|^2+\|z(t)\|^2)+4n\upsilon\int_{t-\upsilon}^{t}[\alpha_1^2+\alpha_2^2\|x(s)\|^2 \\
&+\alpha_3^2|w_2(s)|^2+(\varphi_1(w_1(s)))^2]ds+4(n+1)\upsilon^2\theta^{2n}[\alpha_1^2 \\
&+\alpha_2^2\|x(t)\|^2+\alpha_3^2|w_2(t)|^2+(\varphi_1(w_1(t)))^2] \\
&+\upsilon^2r(n+1)\kappa_1^2\sum_{i=1}^{n+1}\lambda_i^2\Big\}\mathbb{I}_{\Omega_{l,\upsilon}^*}\Big\} \\
&\le \Lambda_1(\upsilon)\mathbb{E}[\|x(t)\|^2\mathbb{I}_{\Omega_\upsilon^*}]+\Lambda_2(\upsilon)\int_{t-\upsilon}^{t}\mathbb{E}[\|x(s)\|^2\mathbb{I}_{\Omega_\upsilon^*}]ds \\
&+\Lambda_3(\upsilon,\tau,r)\int_{t-\upsilon-\tau}^{t}\mathbb{E}[\|x(s)\|^2\mathbb{I}_{\Omega_\upsilon^*}]ds+\Lambda_4(\upsilon)\mathbb{E}[\|z(t)\|^2\cdot\mathbb{I}_{\Omega_\upsilon^*}] \\
&+\Lambda_5(\upsilon,r)\int_{t-\upsilon}^{t}\mathbb{E}[\|z(s)\|^2\mathbb{I}_{\Omega_\upsilon^*}]ds+\Lambda_6(\upsilon,r), \qquad (22)
\end{aligned}
$$

其中，$\Lambda_i(i=1,\cdots,6)$ 在式 (16) 中给出。证明完毕。□

定理 3.1 的证明。令

$$
\begin{cases}
\varrho_i(t)=\theta^{n-i}x_i(t),\ \ \varrho(t)=(\varrho_1(t),\cdots,\varrho_n(t)),\\
\Xi_i(t)=g_i(\bar{x}_i(t))-g_i(\hat{\bar{x}}_i(t)),\ i=1,\cdots,n,\\
\varsigma(t)=r^n(y(\zeta_t)-y(t)),\\
\delta(t)=(\delta_1(t),\cdots,\delta_{n+1}(t)),
\end{cases} \qquad (23)
$$

其中，$\delta_i(t)\ (i=1,\cdots,n+1)$ 的定义与式 (21) 中相同。c_{n+1}、$z_i(t)$ 和 $z(t)$ 在式 (15) 中给出。沿着系统 (1) 和 (2)，对随机总扰动$f(t,x(t)\ w_1(t)\ w_2(t))$ 关于 t 应用 Itô 公式，并采用式 (9) 中设计的事件触发自抗扰控制器，可得

$$
\begin{aligned}
&dx_{n+1}(t)=\Big\{\frac{\partial f(t,x(t),w_1(t),w_2(t))}{\partial t} \\
&+\sum_{i=1}^{n-1}\frac{\partial f(t,x(t),w_1(t),w_2(t))}{\partial x_i}[x_{i+1}(t)+g_i(\bar{x}_i(t))] \\
&+\frac{\partial f(t,x(t),w_1(t),w_2(t))}{\partial x_n}\cdot[x_{n+1}(t)+g_n(x(t))-\hat{x}_{n+1}(\varpi_t) \\
&+\sum_{i=1}^{n}\theta^{n+1-i}c_i\hat{x}_i(\varpi_t)]dt+\frac{\partial f(t,x(t),w_1(t),w_2(t))}{\partial w_1}\cdot \\
&[\frac{\partial\psi(t,B_1(t))}{\partial t}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2\psi(t,B_1(t))}{\partial\vartheta^2}] \\
&+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f(t,x(t),w_1(t),w_2(t))}{\partial w_1^2}(\frac{\partial\psi(t,B_1(t))}{\partial\vartheta})^2 \\
&-\frac{\partial f(t,x(t),w_1(t),w_2(t))}{\partial w_2}\rho_1 w_2(t) \\
&+\frac{\partial^2 f(t,x(t),w_1(t),w_2(t))}{\partial w_2^2}\rho_1^2\rho_2\Big\}dt \\
&+\frac{\partial f(t,x(t),w_1(t),w_2(t))}{\partial w_1}\frac{\partial\psi(t,B_1(t))}{\partial\vartheta}dB_1(t) \\
&+\frac{\partial f(t,x(t),w_1(t),w_2(t))}{\partial w_2}\rho_1\sqrt{2\rho_2}dB_2(t) \\
&\triangleq \Gamma_1(t)dt+\Gamma_2(t)dB_1(t)+\Gamma_3(t)dB_2(t), \qquad (24)
\end{aligned}
$$

其中，ϑ 表示函数$\psi(\cdot,\cdot)$的第二个自变量，ϖ_t 在式 (12) 中定义。根据假设 (A1)- (A2)，存在已知常数 β_i $(i=1,\cdots,5)$，使得对于所有 $t\ge 0$,

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}|\Gamma_1(t)|^2\le\beta_1+\beta_2\mathbb{E}\|\varrho(t)\|^2+\beta_3\mathbb{E}\|z(t)\|^2+\beta_4\mathbb{E}\|\delta(t)\|^2,\\
&|\Gamma_2(t)|^2+|\Gamma_3(t)|^2\le\beta_5. \qquad (25)
\end{aligned}
$$

根据关于函数 $g_i(\cdot)$ 的假设 (A1)，可得

$$
|\Xi_i(t)|\le\frac{L_i}{r^{n+1-i}}\|z(t)\|,\ \forall t\ge 0. \qquad (26)
$$

系统 (1) 在上述事件触发自抗扰控制器 (9) 作用下的闭环等价于

$$\begin{cases} d\varrho_1(t) = \theta\varrho_2(t)dt + \theta^{n-1}g_1(\frac{\varrho_1(t)}{\theta^{n-1}})dt, \\ d\varrho_2(t) = \theta\varrho_3(t)dt + \theta^{n-2}g_2(\frac{\varrho_1(t)}{\theta^{n-1}}, \frac{\varrho_2(t)}{\theta^{n-2}})dt, \\ \quad\vdots \\ d\varrho_n(t) = [\theta\sum_{i=1}^{n} c_i\varrho_i(t) - \sum_{i=1}^{n+1}\frac{\theta^{n+1-i}c_iz_i(t)}{r^{n+1-i}} \\ -\sum_{i=1}^{n+1}\theta^{n+1-i}c_i\delta_i(t) + g_n(\frac{\varrho_1(t)}{\theta^{n-1}}, \cdots, \varrho_n(t))]dt, \\ dz_1(t) = r[z_2(t) - \lambda_1 z_1(t)]dt - \lambda_1 r\varsigma(t)dt + r^n\Xi_1(t)dt, \\ dz_2(t) = r[z_3(t) - \lambda_2 z_1(t)]dt - \lambda_2 r\varsigma(t)dt \\ \quad +r^{n-1}\Xi_2(t)dt, \\ \quad\vdots \\ dz_n(t) = r[z_{n+1}(t) - \lambda_n z_1(t)]dt - \lambda_n r\varsigma(t)dt \\ \quad +r\Xi_n(t)dt, \\ dz_{n+1}(t) = -r\lambda_{n+1}z_1(t)dt - \lambda_{n+1}r\varsigma(t)dt + \Gamma_1(t)dt \\ \quad +\Gamma_2(t)dB_1(t) + \Gamma_3(t)dB_2(t). \end{cases} \tag{27}$$

由式（2）可知，有色噪声 $w_2(t)$ 可视为式（27）的扩张状态变量，而有界噪声 $w_1(t)$ 具有满足假设（A2）的确定性界。结合假设（A1），可得式（27）的漂移项和扩散项满足局部 Lipschitz 条件和线性增长条件。类似于随机事件触发控制系统的存在唯一性定理（例如参见 [18, 定理 1]），等价闭环系统（27）存在唯一的全局解 $(\varrho(t)\ z(t))$，因此，在事件触发自抗扰控制器（9）作用下，系统（1）的闭环也存在唯一的全局解 $(x(t), \hat{x}(t))$。令

$$W_1(\varrho) = \varrho Q_1\varrho^\top, W_2(z) = zQ_2z^\top, \tag{28}$$

对所有 $\varrho \in \mathbb{R}^n$ 和 $z \in \mathbb{R}^{n+1}$，其中 Q_1 和 Q_2 是式（18）和（19）中指定的正定矩阵，并定义李雅普诺夫泛函如下

$$\begin{aligned} W(t) &\triangleq W_1(\varrho(t)) + W_2(z(t)) + \int_{t-\upsilon}^{t}\int_{s}^{t}\|\varrho(\sigma)\|^2 d\sigma ds \\ &\int_{t-\tau}^{t}\int_{s}^{t}\|\varrho(\sigma)\|^2 d\sigma ds + \int_{t-\upsilon-\tau}^{t}\int_{s}^{t}\|\varrho(\sigma)\|^2 d\sigma ds \\ &+\int_{t-\upsilon}^{t}\int_{s}^{t}\|z(\sigma)\|^2 d\sigma ds, \end{aligned} \tag{29}$$

其中 $\varrho(t)$ $\varrho(0)$ $t \in [-\upsilon-\tau, 0]$, $z(t)$ $z(0)$ $t \in [-\upsilon, 0]$. 对 $W(t)$ 关于 t 应用 Itô 公式

沿着等效闭环系统 (27) 可得

$$\begin{aligned} W(t) &= W(0) - \theta\int_0^t \|\varrho(s)\|^2 ds \\ &+\sum_{i=1}^{n}\int_0^t \frac{\partial W_1(\varrho(s))}{\partial\varrho_i}\theta^{n-i}g_i(\frac{\varrho_1(s)}{\theta^{n-1}}, \cdots, \frac{\varrho_i(s)}{\theta^{n-i}})ds \\ &-\int_0^t \frac{\partial W_1(\varrho(s))}{\partial\varrho_n}\sum_{i=1}^{n+1}\frac{\theta^{n+1-i}c_iz_i(s)}{r^{n+1-i}}ds - \int_0^t \frac{\partial W_1(\varrho(s))}{\partial\varrho_n}\cdot \\ &\sum_{i=1}^{n+1}\theta^{n+1-i}c_i\delta_i(s)ds - r\int_0^t\|z(s)\|^2 ds - \int_0^t\sum_{i=1}^{n+1} \\ &\frac{\partial W_2(z(s))}{\partial z_i}\lambda_i r\varsigma(s)ds + \int_0^t\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial W_2(z(s))}{\partial z_i}r^{n+1-i}\Xi_i(s)ds \\ &+\int_0^t \frac{\partial W_2(z(s))}{\partial z_{n+1}}\Gamma_1(s)ds + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial^2 W_2(z(s))}{\partial z_{n+1}^2}[\Gamma_2^2(s) \\ &+\Gamma_3^2(s)]ds + \int_0^t \frac{\partial W_2(z(s))}{\partial z_{n+1}}\Gamma_2(s)dB_1(s) + \int_0^t \frac{\partial W_2(z(s))}{\partial z_{n+1}} \\ &\cdot\Gamma_3(s)dB_2(s) - \int_0^t\int_{s-\upsilon}^{s}\|\varrho(\sigma)\|^2 d\sigma ds + \upsilon\int_0^t\|\varrho(s)\|^2 ds \\ &-\int_0^t\int_{s-\tau}^{s}\|\varrho(\sigma)\|^2 d\sigma ds + \tau\int_0^t\|\varrho(s)\|^2 ds \\ &-\int_0^t\int_{s-\upsilon-\tau}^{s}\|\varrho(\sigma)\|^2 d\sigma ds + (\upsilon+\tau)\int_0^t\|\varrho(s)\|^2 ds \\ &-\int_0^t\int_{s-\upsilon}^{s}\|z(\sigma)\|^2 d\sigma ds + \upsilon\int_0^t\|z(s)\|^2 ds. \end{aligned}$$

选取足够小的 μ_1、μ_2、μ_3、μ_4 和足够大的 $r_1 > 0$，使得

$$\begin{aligned} &\gamma_1 \triangleq \theta - 2\lambda_{\max}(Q_1)\sum_{i=1}^{n}L_i - \mu_1\lambda_{\max}^2(Q_1) - \mu_2\lambda_{\max}^2(Q_1) \\ &-\mu_4\lambda_{\max}^2(Q_2)\beta_2 - 2\upsilon_1 - 2\tau_1 > 0, \\ &\gamma_2 \triangleq 1 - \mu_3\lambda_{\max}^2(Q_2)(\sum_{i=1}^{n+1}|\lambda_i|)^2 > 0, \\ &\frac{\gamma_2 r_1}{2} - \frac{(\sum_{i=1}^{n+1}\theta^{n+1-i}c_i)^2}{\mu_1} - 2\lambda_{\max}(Q_2)\sum_{i=1}^{n}L_i \\ &-\mu_4\lambda_{\max}^2(Q_2)\beta_3 - \frac{1}{\mu_4} - \upsilon_1 > 0, \end{aligned} \tag{30}$$

其中 τ_1，$\epsilon_1 r^{-(2n+\frac{3}{2})}1$ 以及 υ_1，$\epsilon_2 r^{-(\frac{2n}{3}+\frac{5}{3})}1$。这些结果结合 (25)、(26) 和杨氏不等式，进一步可得，对于所有 $r \geq r_1$,

$$\begin{aligned} &\frac{d\mathbb{E}W(t)}{dt} \\ &\leq -\theta\mathbb{E}\|\varrho(t)\|^2 + 2\lambda_{\max}(Q_1)\sum_{i=1}^{n}L_i\mathbb{E}\|\varrho(t)\|^2 \\ &+\mu_1\lambda_{\max}^2(Q_1)\mathbb{E}\|\varrho(t)\|^2 + \frac{(\sum_{i=1}^{n+1}\theta^{n+1-i}c_i)^2}{\mu_1}\mathbb{E}\|z(t)\|^2 \end{aligned}$$

$$+\mu_2\lambda^2_{\max}(Q_1)\mathbb{E}\|\varrho(t)\|^2+\frac{1}{\mu_2}\mathbb{E}[\sum_{i=1}^{n+1}|\theta^{n+1-i}c_i\delta_i(t)|\mathbb{I}_{\Omega^*_\upsilon}]^2$$
$$+\mathbb{E}[\sum_{i=1}^{n+1}|\frac{\theta^{n+1-i}c_i}{\mu_2}\delta_i(t)|\mathbb{I}_{\Omega\setminus\Omega^*_\upsilon}]^2-r\mathbb{E}\|z(t)\|^2+\mu_3\lambda^2_{\max}(Q_2)^{n+1}$$

$$\cdot(\sum_{i=1}|\lambda_i|)^2r\mathbb{E}\|z(t)\|^2+\frac{r}{\mu_3}\mathbb{E}[\varsigma^2(t)\mathbb{I}\Omega_\tau]+\frac{r}{\mu_3}\mathbb{E}[\varsigma^2(t)\mathbb{I}\Omega\setminus\Omega_\tau]_n$$
$$+2\lambda最大值(Q_2)\sum L_i\mathbb{E}\|z(t)\|^2+\mu_4\lambda^2最大值(Q_2)$$
$$[\beta_1+\beta_2\mathbb{E}\|\varrho(t)\|^2{}_{i=1}+\beta_3\mathbb{E}\|z(t)\|^2+\beta_4\mathbb{E}\|\delta(t)\|^2]+\frac{1}{\mu_4}\mathbb{E}\|z(t)$$
$$\|^2+\lambda最大值(Q_2)\beta_5-\mathbb{E}\int_{t-\upsilon}^t\|\varrho(s)\|^2ds-\mathbb{E}\int_{t-\tau}^t\|\varrho(s)$$
$$\|^2ds+2(\upsilon+\tau)\mathbb{E}\|\varrho(t)\|^2-\mathbb{E}\int_{t-\upsilon-\tau}^t\|\varrho(s)\|^2ds-\mathbb{E}\int_{t-\upsilon}^t\|z(s)$$
$$\|^2ds+\upsilon\mathbb{E}\|z(t)\|^2\le-\gamma_1\mathbb{E}\|\varrho(t)\|^2-\frac{\gamma_2r}{2}\mathbb{E}\|z(t)\|^2-\mathbb{E}\int_{t-\upsilon}^t\|\varrho$$
$$(s)\|^2ds-\mathbb{E}\int_{t-\tau}^t\|\varrho(s)\|^2ds-\mathbb{E}\int_{t-\upsilon-\tau}^t\|\varrho(s)\|^2ds-\mathbb{E}\int_{t-\upsilon}^t\|z(s)$$
$$\|^2ds+\frac{1}{\mu_2}\mathbb{E}[\sum_{i=1}^{n+1}|\theta^{n+1-i}c_i\delta_i(t)|\mathbb{I}\Omega^*_\upsilon]^2+\frac{1}{\mu_2}\mathbb{E}[\sum_{i=1}^{n+1}|\theta^{n+1-i}c_i\delta_i(t)$$
$$|\cdot\mathbb{I}\Omega\setminus\Omega^*_\upsilon]^2+\frac{r}{\mu_3}\mathbb{E}[\varsigma^2(t)\mathbb{I}\Omega_\tau]+\frac{r}{\mu_3}\mathbb{E}[\varsigma^2(t)\mathbb{I}\Omega\setminus\Omega_\tau]+\mu_4\lambda^2最大值$$
$$(Q_2)\beta_4\cdot\mathbb{E}[\|\delta(t)\|^2\mathbb{I}\Omega^*_\upsilon]+\mu_4\lambda^2最大值(Q_2)\beta_4\mathbb{E}[\|\delta(t)\|^2\mathbb{I}\Omega\setminus\Omega$$
$$^*_\upsilon]+\mu_4\lambda^2最大值(Q_2)\beta_1+\lambda最大值(Q_2)\beta_5.$$

(31)

根据事件触发机制 (6) 和 (11)，可知对所有 $t\ge0$,

$$\mathbb{E}[\varsigma^2(t)\mathbb{I}_{\Omega\setminus\Omega_\tau}]=\sum_{k=1}^{[\frac{t}{\tau}]+1}\mathbb{E}[\varsigma^2(t)\mathbb{I}_{\Omega_k\setminus\Omega_{k,\tau}}]\le\frac{\kappa_1^2}{r},$$
$$\mathbb{E}[\sum_{i=1}^{n+1}|\delta_i(t)|\mathbb{I}_{\Omega\setminus\Omega^*_\upsilon}]^2\le\frac{\kappa_2^2}{r}.\tag{32}$$

对于 $\omega\in\Omega_{k,\ \tau}$，我们有 $t_k\ge t-\tau_\circ$ 直接计算可得

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}[\varsigma^2(t)\mathbb{I}_{\Omega_\tau}]=\sum_{k=1}^{[\frac{t}{\tau}]+1}\mathbb{E}[\varsigma^2(t)\mathbb{I}_{\Omega_{k,\tau}}]\\&=r^{2n}\sum_{k=1}^{[\frac{t}{\tau}]+1}\mathbb{E}\left[\left(\int_{t_k}^t x_2(s)ds\right)^2\mathbb{I}_{\Omega_{k,\tau}}\right]\\&\le r^{2n}\tau\int_{t-\tau}^t\mathbb{E}\|\varrho(s)\|^2ds.\end{aligned}\tag{33}$$

Set

$$\gamma^*=\frac{\theta^{2n}}{\mu_2}\max_{1\le i\le n+1}c_i^2+\mu_4\lambda^2_{\max}(Q_2)\beta_4.\tag{34}$$

根据 (16)、$\tau=\epsilon_1r^{-(2n+\frac{3}{2})}$ 和 $\upsilon=\epsilon_2r^{-(\frac{2n}{3}+\frac{5}{3})}$，可得 $\Lambda_1(\upsilon)$、$\Lambda_2(\upsilon)$、$\Lambda_3(\upsilon,\tau,r)$ 以及 $\Lambda_5(\upsilon,r)$ 关于 r 严格递减，并在 $r\to\infty$ 时趋于零。因此，存在 $r_2>0$ 使得

$$\begin{aligned}&\gamma_3\triangleq\gamma_1-\gamma^*\Lambda_1(\upsilon_2)>0,\gamma_4\triangleq1-\gamma^*\Lambda_2(\upsilon_2)>0,\\&\gamma_5\triangleq1-\frac{\epsilon_1}{\mu_3r_2^{\frac{1}{2}}}>0,\gamma_6\triangleq1-\gamma^*\Lambda_3(\upsilon_2,\tau_2,r_2)>0,\\&\gamma_7\triangleq1-\gamma^*\Lambda_5(\upsilon_2,r_2)>0,\end{aligned}\tag{35}$$

其中 τ_2, $\epsilon_1r^{-(2n+\frac{3}{2})2}$, υ_2, $\epsilon_2r^{-(\frac{2n}{3}+\frac{5}{3})2}$，且 r_2 取决于 γ_1, γ^*, n, θ, α_2, ϵ_1, ϵ_2, μ_3, $L_i(i=1,\cdots,n)$,$c_i(i=1,\cdots,n+1)$ 和 $\lambda_i(i=1,\cdots,n+1)$。取

$$r\ge r_*\triangleq\max\{1,\frac{4\gamma^*}{\gamma_2}\Lambda_4(\upsilon_2),\frac{\epsilon_1^2}{\mu_3^2},r_1,r_2\}.\tag{36}$$

由引理 3.1、(31)、(32)、(33)、(34)、(35) 和 (36) 可得

$$\begin{aligned}&\frac{d\mathbb{E}W(t)}{dt}\\&\le-\gamma_1\mathbb{E}\|\varrho(t)\|^2-\frac{\gamma_2r}{2}\mathbb{E}\|z(t)\|^2-\mathbb{E}\int_{t-\upsilon}^t\|\varrho(s)\|^2ds\\&-\mathbb{E}\int_{t-\tau}^t\|\varrho(s)\|^2ds-\mathbb{E}\int_{t-\upsilon-\tau}^t\|\varrho(s)\|^2ds-\mathbb{E}\int_{t-\upsilon}^t\|z(s)\|^2\\&ds+\gamma^*\Big\{\Lambda_1(\upsilon_2)\mathbb{E}[\|\varrho(t)\|^2\mathbb{I}_{\Omega^*_\upsilon}]+\Lambda_2(\upsilon_2)\int_{t-\upsilon}^t\mathbb{E}[\|\varrho(s)\|^2\\&\mathbb{I}_{\Omega^*_\upsilon}]ds+\Lambda_3(\upsilon_2,\tau_2,r_2)\int_{t-\upsilon-\tau}^t\mathbb{E}[\|\varrho(s)\|^2\mathbb{I}_{\Omega^*_\upsilon}]ds+\Lambda_4(\upsilon_2)\cdot\\&\mathbb{E}[\|z(t)\|^2\mathbb{I}_{\Omega^*_\upsilon}]+\Lambda_5(\upsilon_2,r_2)\int_{t-\upsilon}^t\mathbb{E}[\|z(s)\|^2\mathbb{I}_{\Omega^*_\upsilon}]ds+\Lambda_6(\upsilon_2,\\&r_2)\Big\}+\max_{1\le i\le n+1}c_i^2\frac{\theta^{2n}\kappa_2^2}{\mu_2r}+\frac{r^{2n+1}\tau}{\mu_3}\int_{t-\tau}^t\mathbb{E}\|\varrho(s)\|^2ds+\frac{\kappa_1^2}{\mu_3}\\&+\frac{\mu_4\lambda^2_{\max}(Q_2)\beta_4\kappa_2^2}{r}+\mu_4\lambda^2_{\max}(Q_2)\beta_1+\lambda_{\max}(Q_2)\beta_5\\&\le-\gamma_3\mathbb{E}\|\varrho(t)\|^2-\frac{\gamma_2r}{4}\mathbb{E}\|z(t)\|^2-\gamma_4\mathbb{E}\int_{t-\upsilon}^t\|\varrho(s)\|^2ds\\&-\gamma_5\mathbb{E}\int_{t-\tau}^t\|\varrho(s)\|^2ds-\gamma_6\mathbb{E}\int_{t-\upsilon-\tau}^t[\|\varrho(s)\|^2ds\\&-\gamma_7\mathbb{E}\int_{t-\upsilon}^t\|z(s)\|^2ds+M_1\\&\le-\frac{\gamma_3}{\lambda_{\max}(Q_1)}\mathbb{E}W_1(\varrho(t))-\frac{\gamma_2r}{4\lambda_{\max}(Q_2)}\mathbb{E}W_2(z(t))\\&-\frac{\gamma_4}{\upsilon}\mathbb{E}\int_{t-\upsilon}^t\int_s^t\|\varrho(\sigma)\|^2d\sigma ds-\frac{\gamma_5}{\tau}\mathbb{E}\int_{t-\tau}^t\int_s^t\|\varrho(\sigma)\|^2d\sigma ds\\&-\frac{\gamma_6}{\upsilon+\tau}\mathbb{E}\int_{t-\upsilon-\tau}^t\int_s^t\|\varrho(\sigma)\|^2d\sigma ds\\&-\frac{\gamma_7}{\upsilon}\mathbb{E}\int_{t-\upsilon}^t\int_s^t\|z(\sigma)\|^2d\sigma ds+M_1\\&\le-\gamma\mathbb{E}W(t)+M_1,\end{aligned}\tag{37}$$

其中我们设

$$\gamma = \min\{\frac{\gamma_3}{\lambda_{\max}(Q_1)}, \frac{\gamma_2 r_*}{4\lambda_{\max}(Q_2)}, \gamma_4, \gamma_5, \frac{\gamma_6}{2}, \gamma_7\},$$
$$M_1 = \gamma^*\Lambda_6(\upsilon_2, r_2) + \max_{1\le i\le n+1} c_i^2\frac{\theta^{2n}\kappa_2^2}{\mu_2 r_*} + \frac{\kappa_1^2}{\mu_3}$$
$$+\frac{\mu_4\lambda_{\max}^2(Q_2)\beta_4\kappa_2^2}{r_*} + \mu_4\lambda_{\max}^2(Q_2)\beta_1 + \lambda_{\max}(Q_2)\beta_5.$$

对于任意固定的 $\varepsilon > 0$，直接计算可得

$$\sup_{r\ge r_*} e^{-\gamma r^\varepsilon}\mathbb{E}W(0)$$
$$\le \sup_{r\ge r_*} e^{-\gamma r^\varepsilon}\Big\{[\lambda_{\max}(Q_1) + \upsilon^2 + \tau^2 + (\upsilon+\tau)^2]\|\varrho(0)\|^2$$
$$+(\lambda_{\max}(Q_2) + \upsilon^2)\sum_{i=1}^{n+1} r^{2(n+1-i)}\mathbb{E}|x_i(0) - \hat{x}_i(0)|^2\Big\}$$
$$\triangleq M_2, \tag{38}$$

其中 $M_2 < \infty$，因为 $\lim_{r\to\infty} e^{-\gamma r^\varepsilon} r^{2n} = 0$。因此，对于所有 $t \ge r^\varepsilon$ 且满足 $r \ge r_*$的情况，由（37）和（38）可得

$$\mathbb{E}W(t) \le e^{-\gamma t}\mathbb{E}W(0) + \int_0^t e^{-\gamma(t-s)}M_1 ds$$
$$\le M_2 + \frac{M_1}{\gamma} \triangleq M_3. \tag{39}$$

由引理 3.1、事件触发机制（11）和（39），对于所有 $t \ge r^\varepsilon + 2 \ge r^\varepsilon + \upsilon_2 + \tau_2$，有

$$\mathbb{E}\|\delta(t)\|^2 = \mathbb{E}[\|\delta(t)\|^2\mathbb{I}_{\Omega_v^*}] + \mathbb{E}[\|\delta(t)\|^2\mathbb{I}_{\Omega\setminus\Omega_v^*}]$$
$$\le \Big[\frac{\Lambda_1(\upsilon_2)}{\lambda_{\min}(Q_1)} + \frac{\Lambda_2(\upsilon_2)\upsilon}{\lambda_{\min}(Q_1)} + \frac{\Lambda_3(\upsilon_2,\tau_2,r_2)(\upsilon_2+\tau_2)}{\lambda_{\min}(Q_1)}$$
$$+\frac{\Lambda_4(\upsilon_2)}{\lambda_{\min}(Q_2)} + \frac{\Lambda_5(\upsilon_2,r_2)\upsilon_2}{\lambda_{\min}(Q_2)}\Big]M_3 + \Lambda_6(\upsilon_2,r_2) + \frac{\kappa_2^2}{r_*^2}$$
$$\triangleq M_4. \tag{40}$$

与式（31）类似，由式（32）、（33）、（39）和（40）可得，对于所有 $t \ge r^\varepsilon + 2$,

$$\frac{d\mathbb{E}W_2(z(t))}{dt}$$
$$\le -(1-\mu_3\lambda_{\max}^2(Q_2)(\sum_{i=1}^{n+1}|\lambda_i|)^2)r\mathbb{E}\|z(t)\|^2$$
$$+\frac{r}{\mu_3}\mathbb{E}[\varsigma^2(t)\mathbb{I}_{\Omega_\tau}] + \frac{r}{\mu_3}\mathbb{E}[\varsigma^2(t)\mathbb{I}_{\Omega\setminus\Omega_\tau}] + 2\lambda_{\max}(Q_2)\cdot$$
$$\sum_{i=1}^{n} L_i\mathbb{E}\|z(t)\|^2 + \mu_4\lambda_{\max}^2(Q_2)[\beta_1 + \beta_2\mathbb{E}\|\varrho(t)\|^2 + \beta_3\cdot$$
$$\mathbb{E}\|z(t)\|^2 + \beta_4\mathbb{E}\|\delta(t)\|^2] + \frac{1}{\mu_4}\mathbb{E}\|z(t)\|^2 + \lambda_{\max}(Q_2)\beta_5$$
$$\le -\gamma_2 r\mathbb{E}\|z(t)\|^2 + \frac{\epsilon_1}{r_*^{\frac{1}{2}}\mu_3}\int_{t-\tau}^t \mathbb{E}\|\varrho(s)\|^2 ds + \frac{\kappa_1^2}{\mu_3}$$
$$+2\lambda_{\max}(Q_2)\sum_{i=1}^{n} L_i\mathbb{E}\|z(t)\|^2 + \mu_4\lambda_{\max}^2(Q_2)[\beta_1 + \beta_2\mathbb{E}\|\varrho(t)\|^2$$
$$+\beta_3\mathbb{E}\|z(t)\|^2 + \beta_4\mathbb{E}\|\delta(t)\|^2] + \frac{1}{\mu_4}\mathbb{E}\|z(t)\|^2 + \lambda_{\max}(Q_2)\beta_5$$
$$\le -\frac{\gamma_2 r}{\lambda_{\max}(Q_2)}\mathbb{E}W_2(z(t)) + M_5, \tag{41}$$

其中我们设定

$$M_5 \triangleq \frac{\epsilon_1 M_3}{r_*^{\frac{1}{2}}\mu_3\lambda_{\min}(Q_1)} + \frac{\kappa_1^2}{\mu_3} + \frac{2\lambda_{\max}(Q_2)\sum_{i=1}^n L_i M_3}{\lambda_{\min}(Q_2)}$$
$$+u_4\lambda_{\max}^2(Q_2)[\beta_1 + \frac{\beta_2 M_3}{\lambda_{\min}(Q_1)} + \frac{\beta_3 M_3}{\lambda_{\min}(Q_2)} + \beta_4 M_4]$$
$$+\frac{M_3}{\mu_4\lambda_{\min}(Q_2)} + \lambda_{\max}(Q_2)\beta_5. \tag{42}$$

结合（39），可得对于所有 $t \ge r^\varepsilon + 3$,

$$\mathbb{E}W_2(z(t))$$
$$\le e^{-\frac{\gamma_2 r(t-r^\varepsilon-2)}{\lambda_{\max}(Q_2)}}\mathbb{E}W_2(z(r^\varepsilon+2)) + \int_{r^\varepsilon+2}^t e^{-\frac{\gamma_2 r(t-s)}{\lambda_{\max}(Q_2)}}M_5 ds$$
$$\le \frac{1}{r}[M_6 + \frac{\lambda_{\max}(Q_2)M_5}{\gamma_2}] \triangleq \frac{M_7}{r}, \tag{43}$$

其中 M_6，$\sup_{r\ge r_*} re^{-\lambda\frac{\gamma_2 r}{\lambda_{\max}(Q_2)}}M_3$。因此，对于所有 $i = 1、\cdots、n+1$ 和 $t \ge r^\varepsilon + 3$,

$$\mathbb{E}|x_i(t) - \hat{x}_i(t)|^2 = \frac{1}{r^{2(n+1-i)}}\mathbb{E}|z_i(t)|^2$$
$$\le \frac{\mathbb{E}W_2(z(t))}{r^{2(n+1-i)}\lambda_{\min}(Q_2)} \le \frac{M_7}{\lambda_{\min}(Q_2)r^{2n+3-2i}}. \tag{44}$$

与（31）类似，由引理 3.1、（32）、（39）和（43）可得，对于所有 $t \ge r^\varepsilon + 5$,

$$\frac{d\mathbb{E}W_1(\varrho(t))}{dt}$$
$$\le -\gamma_1\mathbb{E}\|\varrho(t)\|^2 + \frac{(\sum_{i=1}^{n+1}\theta^{n+1-i}c_i)^2}{\mu_1}\mathbb{E}\|z(t)\|^2 + \frac{1}{\mu_2}\mathbb{E}[\sum_{i=1}^{n+1}$$
$$|\theta^{n+1-i}c_i\delta_i(t)|\mathbb{I}_{\Omega_v^*}]^2 + \frac{1}{\mu_2}\mathbb{E}[\sum_{i=1}^{n+1}|\theta^{n+1-i}c_i\delta_i(t)|\mathbb{I}_{\Omega\setminus\Omega_v^*}]^2$$
$$\le -\frac{\gamma_1}{\lambda_{\max}(Q_1)}\mathbb{E}W_1(\varrho(t)) + \frac{M_8}{r}, \tag{45}$$

其中

$$M_8 \triangleq \frac{(\sum_{i=1}^{n+1}\theta^{n+1-i}c_i)^2 M_7}{\mu_1\lambda_{\min}(Q_2)} + \frac{\theta^{2n}\max\limits_{1\le i\le n+1}c_i^2}{\mu_2}\sup_{r\ge r_*}$$
$$\Big\{\frac{\Lambda_1(\upsilon)rM_3}{\lambda_{\min}(Q_1)} + \frac{\Lambda_2(\upsilon)\upsilon rM_3}{\lambda_{\min}(Q_1)} + \frac{\Lambda_3(\upsilon,\tau,r)(\upsilon+\tau)rM_3}{\lambda_{\min}(Q_1)}$$
$$+\frac{\Lambda_4(\upsilon)M_7}{\lambda_{\min}(Q_2)} + \frac{\Lambda_5(\upsilon,r)\upsilon M_7}{\lambda_{\min}(Q_2)} + \Lambda_6(\upsilon,r)r + \kappa_2^2\Big\} < \infty \tag{46}$$

根据式（16）和 $\upsilon = \epsilon_2 r^{-(\frac{2n}{3}+\frac{5}{3})}$，由式（39）和（45）可知，对于所有

$$t \geq t_r \triangleq 2r^{\varepsilon} + 5, \tag{47}$$

对于任意正数 $r \geq r_*$ 和 ε，有

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}W_1(\varrho(t)) \\
&\leq e^{-\frac{\gamma_1}{\lambda_{\max}(Q_1)}(t-r^{\varepsilon}-5)} W_1(\varrho(r^{\varepsilon}+5)) + \int_{r^{\varepsilon}+5}^{t} e^{-\frac{\gamma_1(t-s)}{\lambda_{\max}(Q_1)}} \\
&\frac{M_8}{r} ds \leq e^{-\frac{\gamma_1}{\lambda_{\max}(Q_1)} r^{\varepsilon}} M_3 + \frac{\lambda_{\max}(Q_1) M_8}{\gamma_1 r} \leq \frac{M_9}{r},
\end{aligned} \tag{48}$$

其中

$$M_9 \triangleq \sup_{r \geq r^*} r e^{-\frac{\gamma_1}{\lambda_{\max}(Q_1)} r^{\varepsilon}} M_3 + \frac{\lambda_{\max}(Q_1) M_8}{\gamma_1}. \tag{49}$$

因此，对于所有满足 $r \geq r_*$ 的 $t \geq t_r$，均有

$$\sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}|x_i(t)|^2 \leq \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}|\varrho_i(t)|^2 \leq \frac{\mathbb{E}W_1(\varrho(t))}{\lambda_{\min}(Q_1)} \leq \frac{M}{r}, \tag{50}$$

其中我们令

$$M = \frac{M_9}{\lambda_{\min}(Q_1)}, \tag{51}$$

它与调节增益 r 无关。至此，定理 3.1 的 (i) 和 (iii) 得证。由定理 3.1 的 (i) 及切比雪夫不等式（[20, 页 5]）可得

$$P\{|x_i(t) - \hat{x}_i(t)| \geq k^2 \sqrt{M} r^{-\frac{2n+3-2i}{2}}\} \leq \frac{1}{k^2} \tag{52}$$

对于所有 $t \geq t_r$、$k \in \mathbb{Z}^+$ 以及 $i = 1, \cdots, n+1$，均成立。由博雷尔-坎特利引理（[20, 页 7]），对于几乎所有 $\omega \in \in \Omega$ 和 $t \geq t_r$，存在一个随机变量 $k_0(\omega)$，使得只要 $k \geq k_0(\omega)$，就有

$$|x_i(t) - \hat{x}_i(t)| \leq k^2 \sqrt{M} r^{-\frac{2n+3-2i}{2}}. \tag{53}$$

因此，定理 3.1 的 (ii) 成立，(iv) 的证明类似，其中 M_ω，$k_0^2(\omega)$ $\sqrt{M} > 0$ 是一个独立于 r 的随机变量。定理 3.1 的证明至此完成。
□

5 数值仿真

本节通过一些数值仿真来验证所提出的事件触发自抗扰控制方案的有效性。以下不确定随机非线性系统作为一个数值示例：

$$\begin{cases}
\dot{x}_1(t) = x_2(t) + \sin(x_1(t)), \\
\dot{x}_2(t) = f(t, x(t), w_1(t), w_2(t)) + \sin(x_1(t) + x_2(t)) \\
\qquad\quad +u(t), \\
y(t) = x_1(t),
\end{cases} \tag{54}$$

这是系统 (1) 的二阶情形，其中 $g_1(x_1) = \sin(x_1)$，$g_2(x)$ h $= \sin(x_1 + x_2)$。$x_3(t) \triangleq f(t, x(t)\ w_1(t)\ w_2(t))$ 为随机总扰动。选择 $r = 50$, $\lambda_1 = 6$, $\lambda_2 = 12$, $\lambda_3 = 8$ 和 $\epsilon_1 = \kappa_1 = 1$。因此，(5) 中 H 的特征值等于 -2，进而 H 是赫尔维茨的。随后设计事件触发扩张状态观测器如下

$$\begin{cases}
\dot{\hat{x}}_1(t) = \hat{x}_2(t) + 6 \cdot 50 \left(y(t_k) - \hat{x}_1(t)\right) + \sin(\hat{x}_1(t)), \\
\dot{\hat{x}}_2(t) = \hat{x}_3(t) + 12 \cdot 50^2 \left(y(t_k) - \hat{x}_1(t)\right) \\
\qquad\quad + \sin(\hat{x}_1(t) + \hat{x}_2(t)) + u(t), \\
\dot{\hat{x}}_3(t) = 8 \cdot 50^3 \left(y(t_k) - \hat{x}_1(t)\right),
\end{cases} \tag{55}$$

其中，执行时刻 t_k $(k \in \mathbb{Z}^+)$ 由以下事件触发机制确定

$$t_{k+1} = \inf\{t \geq t_k + 50^{-5.5} : \ |y(t) - y(t_k)| \geq 50^{-2.5}\}. \tag{56}$$

Design $c_1 = -1$, $c_2 = -2$, and then $Q_1 = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ with $\lambda_{\max}\ Q_1 = 1.7071$ $\theta = 7$ $\theta >$ ( )。$2\lambda_{\max}\ Q_1\ \sum_{i=1}^{n} L_i = 6.8284$ $\upsilon\theta^2$ $_{1 \leq i \leq 2}\{|c_i|, 1\} =$ 取满足 ( ) 和 max$50^{-3} \times 7^2 \times 2 \approx 0.000784 < 1$ 的，并令 $\epsilon_2 = \kappa_2 = 1$。因此，事件触发自抗扰控制器设计为

$$u(t) = -49\hat{x}_1(t_l^*) - 14\hat{x}_2(t_l^*) - \hat{x}_3(t_l^*),\ t \in [t_l^*, t_{l+1}^*), \tag{57}$$

其中

$$t_{l+1}^* = \inf\{t \geq t_l^* + 50^{-3} : \ \sum_{i=1}^{3} |\hat{x}_i(t) - \hat{x}_i(t_l^*)| \geq \frac{1}{50^{\frac{1}{2}}}\}. \tag{58}$$

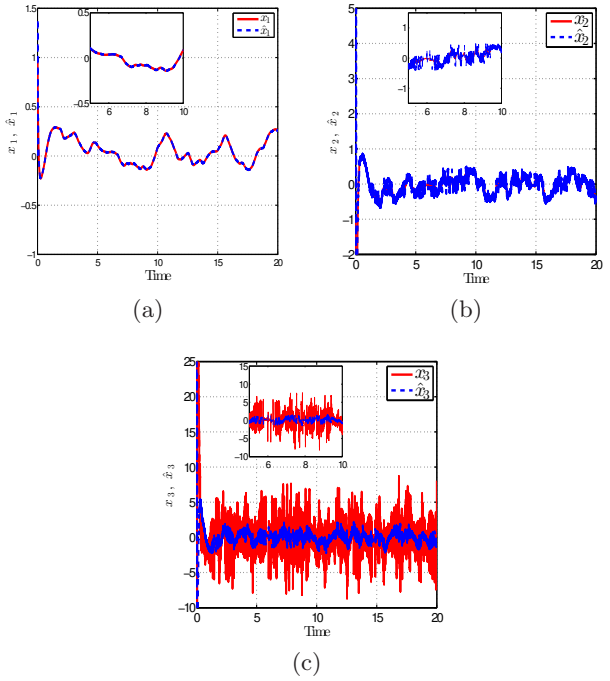
在以下数值仿真中，我们取

$$\begin{aligned}
&f(t, x, w_1, w_2) = x_1 + 2x_2 + \sin(t) + \cos(x_1 + x_2) \\
&+w_1^3 + w_2,\ \ w_1(t) = 2\sin(t + B_1(t)),
\end{aligned} \tag{59}$$

并将 $\varrho_1 = \varrho_2 = 1.5$ 用于式 (2) 中 $w_2(t)$ 的定义，初始值指定为 $x_1(0) = 0.5, x_2(0) = -0.5, w_2(0) = 0, \hat{x}_1(0) = \hat{x}_2(0) = \hat{x}_3(0) = 0$。容易验证，定理 3.1 的所有假设均得到满足。

从图1可以看出，状态（$x_1(t)\ x_2(t)$）和随机总扰动的估计效果令人满意，而

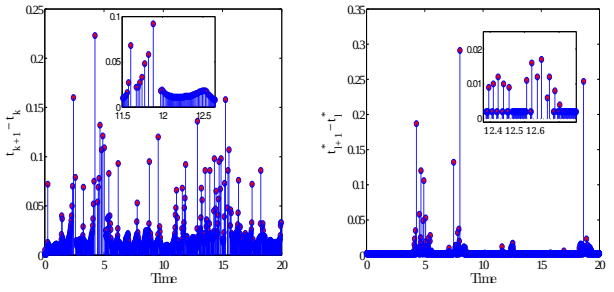
扰动 $x_3(t)$ 的估计效果以及（$x_1(t)$ $x_2(t)$）的稳定效果令人满意，其中 $x_3(t)$ 的估计效果不如状态（$x_1(t)$ $x_2(t)$）的估计效果。这与定理 3.1 给出的理论结果一致。输出传输对应的事件触发机制（56）和控制信号更新对应的事件触发机制（58）的执行间隔时间分别见图 2(a) 和图 2(b)，在 $[0, 20]$ 期间，它们各自的执行次数分别为 1290 和 8554。



(a) (b)

(c)

图1. 状态和随机总扰动（$x_1(t)$ $x_2(t)$ $x_3(t)$）及其估计值（$\hat{x}_1(t)$,$\hat{x}_2(t)$, $\hat{x}_3(t)$ 。



(a) (b)

图2. 与事件触发机制（56）和（58）相对应的执行间隔时间。

6 结论

本文首次针对一类不确定随机非线性系统研究了事件触发自抗扰控制。受控系统具有下三角结构，并受到大范围非线性未建模动态、有界噪声和有色噪声的影响，其总体效应被视为随机总扰动。本文设计了一种事件触发扩张状态观测器，用于实时估计随机总扰动；随后，设计了一种由输出反馈控制器和补偿器组成的事件触发控制器，以实现受控系统的输出反馈稳定化和扰动抑制。通过严格的理论证明，在两种相应的事件触发机制下，得到了自抗扰控制闭环系统的均方实用收敛性和几乎必然实用收敛性，并通过数值仿真进行了验证。未来值得研究的问题包括：为不确定随机非线性系统设计周期事件触发自抗扰控制并分析其收敛性，以及将其通信效率与本文提出的策略进行比较。

参考文献

[1] Anderson, R. P., Milutinovi´c, D., & Dimarogonas, D. V. (2015). 状态反馈控制的随机微分方程系统的二阶矩稳定性自触发采样。 *Automatica*, 54, 8-15.[2] Casta˜neda, L. A., Luviano-Ju´arez, A., & Chairez, I. (2014). 通过自适应自抗扰控制实现Delta机器人鲁棒轨迹跟踪。 *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 23(4), 1387-1398.[3] Deng, H., & Krstic, M. (1999). 输出反馈随机非线性稳定化。 *IEEE Transactions on AutomaticControl*, 44(2), 328-333.[4] Espitia, N., Karafyllis, I., & Krstic, M. (2021). 常参数反应扩散偏微分方程的事件触发边界控制：一种小增益方法。 *Automatica*, 128, 109562.[5] Gauthier, J. P., Hammouri, H., & Othman, S. (1992). 一种用于非线性系统的简单观测器及其在生物反应器中的应用。 *IEEE Transactions on Automatic Control*, 37(6), 875-880. [6] Guo, B. Z., Wu, Z. H., & Zhou, H. C. (2015). 主动扰动抑制控制方法在随机扰动作用下某类不确定非线性系统输出反馈稳定化中的应用。 *IEEE Transactions on AutomaticControl*, 61(6), 1613-1618.[7] Guo, B. Z., & Zhao, Z. L. (2011). 关于不确定非线性系统扩张状态观测器的收敛性。 *Systems & Control Letters*, 60(6), 420-430.[8] Guo, B. Z., & Zhao, Z. L. (2017). *Active Disturbance Rejection Control for Nonlinear Systems: An Introduction.* John Wiley & Sons, Inc., 纽约。[9] Han, J. (2009). 从比例-积分-微分控制到主动抗扰控制。 *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 56(3), 900-906.[10] Heemels, W. H., Donkers, M. C. F., & Teel, A. R. (2012). 线性系统的周期事件触发控制。 *IEEETransactions on Automatic Control*, 58(4), 847-861.[11]Huang, Y., Wang, J., Shi, D., Wu, J., & Shi, L. (2019). 事件触发采样数据控制：一种主动

扰动抑制方法。 *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics* 24 5 2052 2063 , ( ), - .[12]Huang, Z. L., Zhu, W. Q., Ni, Y. Q., & Ko, J. M. (2002). 有界噪声激励下强非线性振子的随机平均。 *Journal of Sound and Vibration*, 254 2 245 267( ), - .[13] Khas'minskii, R. (1980 *Stochastic Stability of Differential*). 马 *Equations.* 里兰州罗克维尔：S & N International（俄文原版由莫斯科Nauka于1969年出版）。[14]Khalil, H. K. (1978). 有色噪声扰动下线性奇异摄动系统的控制。 *Automatica*, 14(2), 153-156.[15] Klosek-Dygas, M. M., Matkowsky, B. J., & Schuss, Z. (1988). 动力系统中的有色噪声。*Applied Mathematics* 48 2 425 441 , *SIAM Journal on* ( ), - .[16]Luo, S., & Deng, F. (2019). 关于非线性随机系统的事件触发控制。 *IEEE Transactions on Automatic Control* 65 1 369 375 , ( ), - .[17]Luo, S., Deng, F., & Chen, W. H. (2019). 稀疏测量和通信时延下线性随机系统的动态事件触发控制。 *Automatica*, 107, 86 94- .[18] Li, F., & Liu, Y. (2019). 连续时间随机系统的事件触发稳定化。 *IEEE Transactions on Automatic Control* 65 10 4031 4046 , ( ), - .[19]Li, F., & Liu, Y. (2020). 随机系统事件触发控制的扩展框架。 *IEEE Transactions on Automatic Control* 66 9 4132 4147 , ( ), - .[20]Mao, X. (2007 *Stochastic Differential Equations and*)。 *Applications* [21]奇切斯特：Horwood Publishing Limited。 *Automatica*Ren, H., Cheng, Z., Qin, J., & Lu, R. (2023). 非线性系统事件触发分布式一致性估计中的欺骗攻击。 *Automatica*, 154, 111100.[22]Sun, B., & Gao, Z. (2005). 用于1千瓦H桥直流-直流功率变换器的基于DSP的主动扰动抑制控制设计。 *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 52 5 1271 1277 ( ), - .[23]Shi, D., Huang, Y., Wang, J., & Shi, L. (2021 *Event-*)。 *Triggered Active Disturbance Rejection Control.* 新加坡施普林格。[24]Sira-Ram´ırez, H., Linares-Flores, J., Garc´ıa-Rodr´ıguez, C., & Contreras-Ordaz, M. A. (2014). 永磁同步电机控制探讨：一种主动扰动抑制控制方法。 *IEEE Transactions on Control Systems Technology* 22 5 2056 2063 , ( ), - .[25]Sun, L., Li, D., Hu, K., Lee, K. Y., & Pan, F. (2016). 主动扰动抑制控制器的整定与实际应用：来自一家 1000 *Industrial & Engineering Chemistry Research* 55 23 6686 6695 MW发电厂再生式加热炉的案例研究。 , ( ), - .[26]Sira-Ram´ırez, H., Luviano-Ju´arez, A., Ram´ırez-Neria, M., & Zurita-Bustamante, E. W. (2017). *Active Disturbance Rejection Control of Dynamic Systems: A Flatness Based Approach.* Butterworth-Heinemann。[27]Sun, J., Yang, J., Li, S., & Zheng, W. X. (2017). 网络化环境下受扰系统的基于采样数据的事件触发主动扰动抑制控制。*IEEE Transactions on Cybernetics*, 49(2), 556-566.[28]德州仪器, 《技术参考手册》。(2013). TMS320F28069M、TMS320F28068M InstaSPINTM-MOTION软件, 文献编号：SPRUHJ0A。2013年4月，修订于2013年11月。

[29] Pan, Z., & Basar, T. (1999). 风险敏感代价准则下非线性随机系统的反步控制器设计. *SIAM Journal on Control and optimization*, 37(3), 957-995.[30] Quevedo, D. E., Gupta, V., Ma, W. J., & Y¨ uksel, S. (2014). 事件触发任意时刻控制的随机稳定性。 *IEEE Transactions on Automatic Control* 59 12 3373 3379 , ( ), - .[31] Wu, Z. (2014). 随机非线性系统的稳定性判据及其应用。 *IEEE Transactions on Automatic Control* 60 4 1038 1049 , ( ), - .[32] Wu, Z. H., Deng, F., Zhou, H. C., & Zhao, Z. L. (2024). 不确定随机系统的线性与非线性事件触发扩张状态观测器。 *IEEE Transactions on Automatic Control* 10 1109 2024 3370650 , doi: . /TAC. . .[33] Wu, Z., Karimi, H. R., & Shi, P. (2019). 随机拉格朗日系统的实用轨迹跟踪。 *Automatica*, 105, 314- 322.[34]Xi, R., Zhang, H., Wang, Y., & Sun, S. (2022). 随机非线性系统稳定性与控制近期研究进展综述。 *Annual Reviews in Control*, 53, 70 82- .[35] Yao, L., Zhang, W., & Xie, X. J. (2020). 时变时滞随机非线性系统的稳定性分析及其应用。 *Automatica*, 117, 108994.[36] Zhang, H., Xi, R., Wang, Y., Sun, S., & Sun, J. (2021). 存在参数不确定性和强非线性的随机系统的事件触发自适应跟踪控制。 *IEEE Transactions on Automatic Control*, 67(4), 2011-2018.