arXiv:2303.04306v1 [math.CO] 8 Mar 2023

抽象可定向关联结构与有限有界无环范畴算法。I. 关联结构

Yu-Wei Huang*

2023年3月9日

摘要

本文探讨了抽象多胞体中关联关系的一种推广，并以参数化曲面作为入门示例。本文将抽象可定向关联结构定义为关联关系的一种代数模型，并推广了抽象多胞体理论中的某些代数性质。本文还讨论了抽象可定向关联结构的几何解释，并简要研究了半正则正规 CW 复形中的可定向关联结构。

1 引言

关联关系的概念可追溯至经典多胞体的面格，它是面之间的一种组合结构 [3]。这种结构可以抽象多胞体的形式进行研究；抽象多胞体是一种二元关系，用于描述一个面是否包含于另一个面之中。然而，抽象多胞体在描述某些类型的关联关系时能力有限。例如，多胞体的凸性确保两个面之间的关系是唯一的，因此抽象多胞体具有偏序集结构。几何对象的平坦性也使其形状由边界唯一确定。放宽这些约束，可以揭示关联关系更为基本的结构。某些几何复形，如单纯复形和 CW 复形，可以视为多胞体的推广 [2, 1]。然而，这些方法需要引入辅助几何对象，并不适合用于研究关联结构。尽管众所周知，关联关系可以通过偏序集体现，但鲜有讨论以同样的方式将这一概念推广至无环范畴。因此，本文将重新描述几何对象之间的关联关系，并说明其具有无环范畴的结构。

2 关联结构

2.1 面与关联关系

下面我们将通过参数化的 n 维曲面来介绍关联结构，这些曲面称为**面**。粗略地说，参数化的 n 维曲面是由 n 个参数的函数定义的曲面。为了排除一些奇异的几何形态，我们采用了一些约束。曲面上的点由称为**坐标** 的参数忠实地描述，因此该曲面的拓扑性质可以由坐标空间完整描述。坐标空间不局限于欧几里得空间，因此可以描述环面等非平凡拓扑。坐标的取值受限于坐标空间中的给定范围，该范围应为紧致连通开子集。例如，图1是球壳一部分的一个面，由$\{S(\theta,\phi) \mid 0<\theta<\pi/4, 0<\phi<\pi/4\}$描述，其中$S(\theta,\phi) \equiv \cos\ \theta\cos\ \phi\ \hat{}x + \sin\ \theta\cos\ \phi\ \hat{}y + \sin\ \phi\ \hat{}z$是曲面上的一个点，其坐标为 (θ,ϕ)。该曲面的拓扑

*l28071504@gs.ncku.edu.tw

可以用坐标范围 $(0,\pi/4)\times(0,\pi/4)\subset\mathbb{R}^2$描述。要描述完整的球面，坐标空间不能是欧几里得空间，因为它无法忠实地表示球面上的所有点。如果坐标空间具有度量，则有助于进行实际的几何计算；当它不是笛卡尔坐标系时，这一点尤为重要。良好的坐标空间应具有较小的失真，以便准确地进行几何计算。圆锥面可由$\{Y(x,y)|0<x^2+y^2<1\}$描述，其中 $Y(x,y)\equiv x\hat{}x+y\hat{}y+\sqrt{x^2+y^2}\hat{}z$；由于坐标空间的原点 $(0,0)$ 处的点不可微，因此将其移除。尽管该坐标范围与圆盘不同胚，但它仍然有效；无需将其裁剪成与圆盘同胚。这些例子展示了坐标的灵活性如何帮助我们更轻松地处理实际几何问题。作为一种特殊情况，由单点集$\{P\}$描述的点，其坐标空间具有零个参数，也就是仅包含一个有效坐标的坐标空间。

如果坐标空间是可定向的，就可以定义一个面的定向。为方便起见，我们假设^它们总是可定向的。点 $F(u,v,\dots)$ 处一个面的定向，记作 $dF(u,v,\dots)$，定义为偏导数 $dF(u,v,\dots)=\frac{\partial}{\partial u}F(u,v,\dots)\wedge\frac{\partial}{\partial v}F(u,v,\dots)\wedge\dots$的楔积的归一化。在图 1 的例子中，定向为 $\hat{}dS(\theta,\phi)=\cos\theta\cos\phi\hat{}y\wedge\hat{}z+\sin\theta\cos\overline{\phi}\hat{}z\wedge\hat{}x+\sin\overline{\phi}\phi\hat{}x\wedge\hat{}y$，可将其视为径向伪向量。 n 维面上的每个点都有一个定向，即次数为 n 的归一化多向量（更准确地说，是一个 n-刀）。同理，直线的定向只是一个次数为 1 的多向量，也就是单位切向量；点的定向只是一个次数为 0 的多向量，它只能是一个符号。点的定向无法自然推导出来，因此需要为其附加一个符号以定义其定向，这样的点称为带符号点。

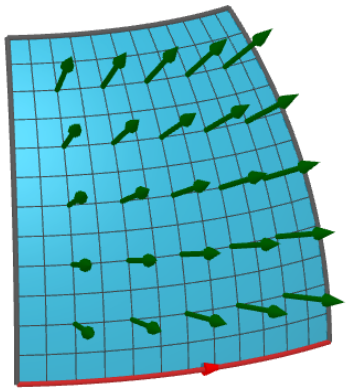


图1：球壳的一部分。曲面上的箭头表示其定向。底部边界上的弧，其定向由直线上的箭头表示，相对于球壳为正向定向。

有效面应当能够通过纳入坐标范围的边界来扩展，这种面称为**闭面**。开坐标范围的像称为该面的**内部**，坐标范围边界的像称为该面的**边界**。面的内部与边界应当互不相交。与面的内部不同，边界无法通过坐标得到忠实描述，但至少可以在局部得到忠实描述。为描述给定面的边界，引入一组互不相交的面，使它们的并集等于该边界；这些面称为给定面的**子面**。面与其子面之间的关系称为**关联关系**，由嵌入函数和局部连通性描述。**嵌入函数** 是面坐标空间之间的映射，表示一个面如何嵌入另一个面中。例如

，弧$\{C(\theta) \mid 0 < \theta < \pi/4\}$及其 $C(\theta) \equiv \cos\theta \hat{} x + \sin \theta \hat{} y$被图1示例中的曲面覆盖，可由方程 $C(\theta) = S(\theta, 0)$ 描述。这个嵌入函数记作$\phi : C \to S$，其中 C 是面 S的子面。请注意，两个面之间可能存在多个嵌入函数。例如，由$\{C(\theta)|0 < \theta < 2\pi\}$及其 $C(\theta) \equiv \cos\theta \hat{} x + \sin \theta \hat{} y$描述的圆，以两种方式覆盖点 $P \equiv 1 \hat{} x + 0 \hat{} y$： $P = C(0)$和 $P = C(2\pi)$。这不同于传统多胞体，在传统多胞体中，关联面之间只有一种关系。

子面的定义还蕴含了两个特殊的面。空面 $\varnothing$ 被定义为空集，因此没有有效的坐标。空面通常被视为维数为(-1) 的面。空面 $\varnothing$ 被所有面覆盖，因为存在一个从空集到任意集合的映射。考虑多个具有共同子面的不相交的面，包含这些面的空间称为全集 $\mathbb{U}$，也可以视为一个面。例如，三维欧几里得空间定义为 $\mathbb{U}(x, y, z) = x \hat{} x + y \hat{} y + z \hat{} z$。全集 $\mathbb{U}$ 覆盖所有面，因为它是定义各个面的函数的陪域。空面 $\varnothing$ 和全集 $\mathbb{U}$ 称为非正则面。

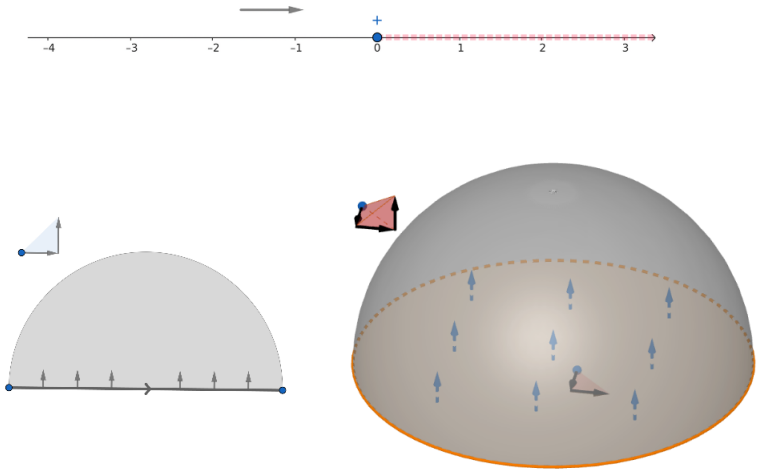


图2：带符号点、直线和平面的相对定向。它们的定向表示为箭头链（绘制为单形），这些向量的楔积由此形成定向。阴影区域表示各面的正侧。

关联关系的另一种性质称为**局部连通性**，它体现为两个关联面的相对位置。如果它们的维数只相差1，那么总可以用一个符号（记作 $|\phi|$）来描述它们的相对位置，该符号决定子面朝向面的内部还是外部。在图1的例子中，根据右手定则，球壳位于弧的正侧，因此我们定义 $|\phi| = +1$ （见图1）。推广到 n维面与$(n+1)$维面之间的关联关系，我们将它们之间的定向定义为楔积之差：若n维子面 B 通过映射 ϕ： $B \to F$嵌入到$(n+1)$维面 F 中，则定义$|\phi|$ 为一个符号，使得$\hat{} dB \wedge \hat{} n = |\phi| \hat{} dF$，其中$\hat{} dF$和$\hat{} dB$ 分别是子面 B中某一点处的定向，而$\hat{} n$ 是该点处指向面 F内部的向量。 $|\phi| = +1$ （$|\phi| = -1$）表示子面B 相对于面 F 是正向（负向）定向的（见图2）。注意，子面 B 中的所有点都应给出相同的 $|\phi|$值。根据此定义，可以说：线段有一个正向子面和一个负向子面，而它们都是端点处的正点；具有逆时针切向量的圆是所围圆盘的正向子面；按照上述例子定义的球面相对于所围球体是负向定向的。空面与带符号点之间的关联关系是一种特殊情形：正点（负点）总是相对于空面正向（负向）定向。一个子面可以被具有

多个定向的面覆盖。例如，考虑一个平面 S 和一条位于平面中间的线段 L 。由于平面位于这条直线的左侧和右侧，指向内部的向量有两种选择。因此，它们之间的关联关系可由 ϕ_+ 和 ϕ_-描述；这两个嵌入函数相同，但定向不同，令 $|\phi_+| = +1$ 和 $|\phi_-| = -1$即可。

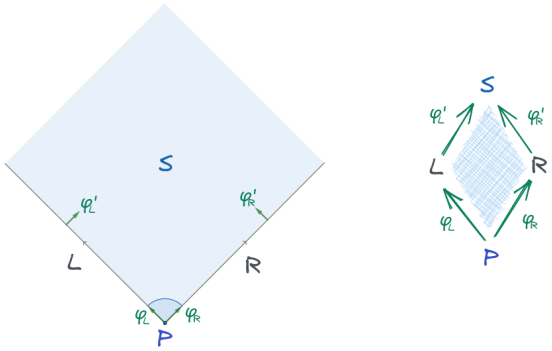


图3：正方形与其顶点之间的关联关系。从顶点到边、再从边到正方形的关联关系可以复合，得出从顶点到正方形的关联关系。这些关联关系构成一个菱形（右图），填充菱形表示复合等价性。复合等价性体现了顶点的完备性，在图中以顶点上的扇形表示。

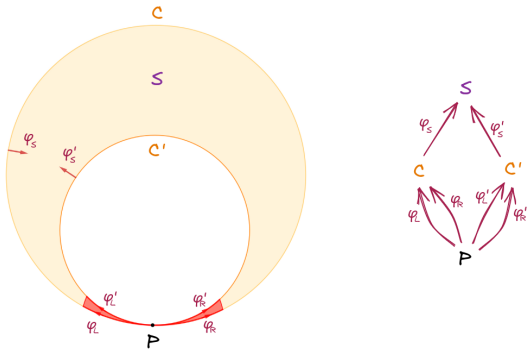


图4：新月形上的多重关联关系。点 P 上有两个菱形，表示从该点通向新月形内部的两个方向（以两个红色扇形表示）。右图表示面之间的嵌入函数，但难以通过填充来表示它们的菱形性质。

显然，关联关系可以复合：如果一个点可以嵌入一条直线，而这条直线又可以嵌入另一个曲面，那么这个点也可以嵌入该曲面。复合嵌入函数之间的等价关系体现了局部连通性，而不仅仅是一个符号。关联关系及其复合规则构成一种**关联结构**。图3展示了正方形与其顶点之间的关联关系。顶点可以通过映射 ϕ嵌入正方形，这等价于复合 $\phi'_L \circ \phi_L$ 和 $\phi'_R \circ \phi_R$；其中， ϕ_L （ϕ_R）是该点与左侧（右侧）相邻边之间的关联关系，而 ϕ'_L （ϕ'_R）是左侧（右侧）相邻边与正方形之间的关联关系。这种等价关系正是抽象多胞体中的菱形性质，该性质描述了顶点的完备性。在抽象多胞体中，对于任意两个维数相差 2 的关联面，这样的菱形总是存在且唯一。如果某个形状有两个顶点共用同一个点，那么这个点会沿着两个方向被该区域覆盖。例如，考虑两个内切圆之间的区域，它称为新月形（见图4），切点沿两个方向被外圆覆盖，分别记作 和 ；外圆也被新月形覆盖，记作 $\phi_{\circ}$。于是，从切点到新月形内部有两种路径，分别对应于 $\phi'_L \circ \phi_L$ 和 $\phi'_R \circ \phi_R$。这两个关联关系并不等价，因此它们不能构成菱形；这两条边之间的角度被内圆隔开。相反，菱形由 $\phi_L \circ \phi'_R \circ$ 和 $\circ \circ$ 构成，其中 、和 与上文所述相同，但相对于内圆而言。这两个菱形表示切点与新月形之间关联关系的两个不同方向；从该点通往内部的角度范围被分隔为两段。这表明，菱形之间的差异体现了该点周围的局部连通性。

同一个点，如果一个形状有两个顶点共享，那么该点会沿着两个方向被该区域覆盖。例如，考虑两个内切圆之间的区域，它称为新月形（见图4），切点沿两个方向被外圆覆盖，分别记作 ϕ_L 和 ϕ_R；外圆也被新月形覆盖，记作 ϕ_S。于是，从切点到新月形内部有两种路径，分别对应于 $\phi_S \circ \phi_L$ 和 $\phi_S \circ \phi_R$。这两个关联关系并不等价，因此它们不能构成菱形；这两条边之间的角度被内圆隔开。相反，菱形由 $\phi_S \circ \phi_L = \phi'_S \circ \phi'_L$和 $\phi_S \circ \phi_R = \phi'_S \circ \phi'_R$构成，其中 ϕ'_L、ϕ'_R 和 ϕ'_S 与上文所述相同，但相对于内圆而言。这两个菱形表示切点与新月形之间关联关系的两个不同方向；从该点通往内部的角度范围被分隔为两段。这表明，菱形之间的差异体现了该点周围的局部连通性。

并非所有关联关系都能连续地定义。函数$f(z) = \sqrt{z}(1 - |z|)$（其中 $0 < |z| < 1$）的黎曼曲面 $R(z) \equiv (z, f(z))$ 是四维空间中的二维面，它对单位圆 $C(z) \equiv (z, 0)$ 构成二重覆盖（其中 $|z| = 1$）。这里有两种关联关系：圆上的任意一点，例如 $C(e^{i\theta})$，都应映射到 $R(e^{i\theta})$ 和 $R(e^{i(2\pi+\theta)})$，分别表示两个嵌入函数。根据支割线的选取，这些嵌入函数在该点处不连续。因此，不可能将这样的嵌入函数写成连续函数。连续性的破坏可能会导致一些几何计算问题。为了解决这个问题，计算应限制在一个小范围内，使得在该范围内，嵌入函数可以根据位置写成连续函数。具有不可定向子面的面也会遇到类似问题，即关联关系无法具有连续的符号。这类关联关系称为**不可定向**。为简化讨论，我们只关注具有可定向关联关系的关联结构，并将其称为**可定向关联结构**。

2.2 顶点图形与局部连通性

为了更清楚地说明局部连通性的概念，我们将引入顶点图形，其定义方式与多胞体相同。要在零维面（一个正向点）上构造顶点图形，可在其上放置一个球 D^n，球要足够小，使得只有覆盖该点的面与球相交。随后，将面的切片像（球的边界 ∂D^n 与面的交集）定义为相应面的**顶点图形**。例如，立方体一个顶点处的顶点图形是一个球面三角形，它是立方体与以该顶点为球心的球面的交集（见图 5）。$\hat{}$ 面 F的切片像 L 的定向应遵循 $\hat{n} \wedge dL = dF$，其中 $\hat{n}$ 是从切片球球心向外指的向量。通过限制映射的定义域和值域，可以直接导出该顶点图形的关联关系。很容易证明，关联关系的符号相同。更一般地，任意面上的顶点图形可以定义如下：在给定的 m 维面 V上取一点，并在该点处放置一个球 D^{n-m}，使球与该点处的面定向垂直。随后，将面的切片像（球的边界 ∂D^{n-m} 与面的交集）定义为相应面在面 V上的顶点图形。面 V 上的所有点都应得到相同的 $\hat{}$ $\hat{}$ $\hat{}$ 顶点图形。面 F的切片像 L 的定向应遵循 $dV \wedge \hat{n} \wedge dL = dF$，其中 $\hat{n}$ 是从切片球球心向外指的向量。例如，立方体一条边上的顶点图形（即棱图）是一段弧，它是立方体与以该边为轴的圆的交集（见图 5）。显然，取顶点图形的运算可以复合。例如，如图 5 所示，立方体的棱图是其顶点图形的顶点图形。

子面上的某些切片像包含多个连通分支，其中每个连通分支都被定义为此顶点图形中的一个独立面。这类面称为被该子面**局部分离**。例如，平面上位于平面中部的一个点所对应的顶点图形是一个圆，它是连通的，因此我们说该平面没有被这个点局部分离。但平面上位于平面中部的一条直线所对应的顶点图形变成了两个点，它们有两个连通分支，因此我们说该平面被这条直线局部分离。新月形（图4）是一个非平凡的例子，其在切点处的顶点图形是两条线段，因此我们说新月形被该切点局部分离。

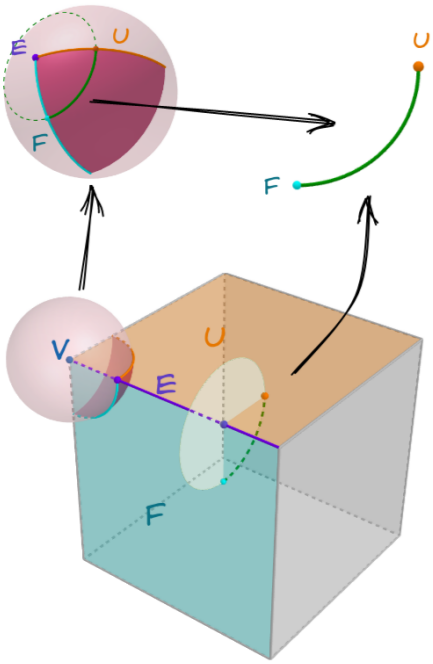


图 5：立方体（下方）的顶点图形（左上）和棱图（右上）。其中， U 和 F 表示两个面， E 表示一条边， V 表示一个顶点。顶点 V 处的顶点图形由这些面的切片像构成。进一步在顶点 E 处取顶点图形，与在原立方体的边 E 处取顶点图形相同。

这表明，由关联关系描述的局部连通性会转化为顶点图形的连通性；如果考虑顶点图形的关联结构，这种对应关系便是自然的要求。此外，局部连通性可以通过连通性传递，因此可以在连通子面的每个点上检验关联关系。这些描述体现了关联关系的局部和整体性质。

可定向关联结构可以绘制成有向无环多重图，其中节点是面，边是不可分解嵌入函数。在这种图中，所有关联面都可以通过有向路径连接起来，从而体现关联关系的偏序集结构。这种图称为 **哈斯图**。哈斯图不足以描述可定向关联结构，因为它没有展示关联关系的复合规则。由于连通面的切片像可能变得不连通，顶点图形的关联结构并非哈斯图的子图。例如，环面上两个圆的交点处的顶点图形本身要复杂得多（见图6），但关联关系的复合规则始终相同。

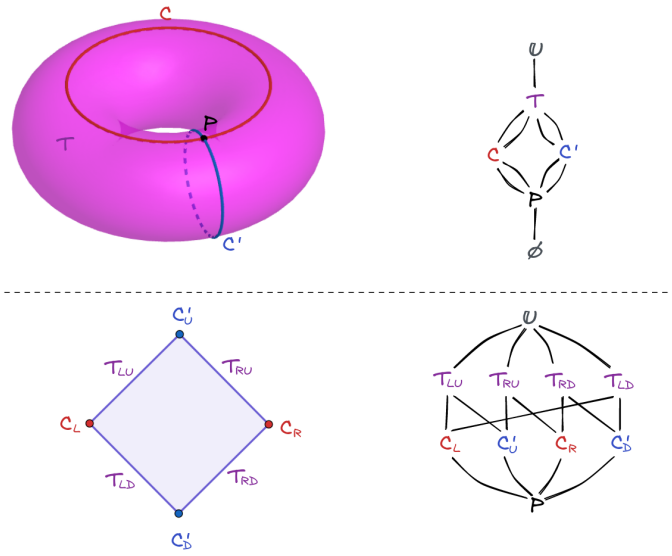


图6：环面的顶点图形。上方为环面（左）及其哈斯图（右）；下方为点 P 上的顶点图形（左）及其对应的哈斯图（右），后者复杂得多。

在我们的理论中，两个关联面的关联关系并非唯一。两个关联关系之差体现了面的局部连通性，这是它与传统关联结构的主要区别。多个关联关系的存在促使我们考虑它们之间的复合规则。与可用偏序集描述结构的抽象多胞体不同，可定向关联结构的行为更像一个范畴。我们将在下一节提取出这种结构。

3 抽象可定向关联结构

3.1 有界无环范畴与有界偏序集

抽象可定向关联结构是一种代数结构，用于表示面之间的可定向关联关系。与前一节不同，它只描述其组合性质，不指定几何性质。**抽象可定向关联结构**记作$\mathcal{F}$，是一个**分级有界**

无环范畴，满足**半菱形性质**。**无环范畴**是不包含非平凡环的范畴。不可能同时存在两个方向相反的非恒等态射，因此态射只能沿一个方向。对于有限无环范畴，存在一个将对象映射为整数的秩函数，使得除恒等态射外，所有态射都使对象的秩增加。对象的秩可以定义为对应面的维数。具有秩函数的无环范畴称为**分级无环范畴**。**有界**表示它恰有一个始对象和一个终对象。秩最低的始对象表示空面，记作 $\varnothing$；秩最高的终对象表示全集，记作 $\mathbb{U}$。态射表示面之间的关联关系。态射 $\phi : F \to S$ 表示面 F 被面 S覆盖。两个对象之间可能存在多个态射，这一性质体现了关联关系的局部连通性，正如我们上文所述。下文主要关注有界无环范畴的性质，并将其与有界偏序集进行比较。

回顾**有界偏序集**的定义（包含其下界和上界的偏序集），它是抽象多胞体的基础：

1. 自反性： $a \not< a$。2. 非对称性：若 $a < b$，则 $b \not< a$。3. 传递性：若 $a < b$ 且 $b < c$，则 $a < c$。4. 最小元：存在唯一一个 $\varnothing$，使得对任意 $a \neq \varnothing$，都有 $\varnothing < a$。5. 最大元：存在唯一一个 $\mathbb{U}$，使得对任意 $a \neq \mathbb{U}$，都有 $a < \mathbb{U}$。

现在将其与**有界无环范畴**的定义进行比较：

1. 自反性：对于任意 $\phi \neq$ id，都不存在 $\phi : F \to F$。2. 非对称性：若对于某个 $\phi \neq$ id，存在 $\phi : F \to S$，则对于任意 $\phi' \neq$ id，都不存在 $\phi' : S \to F$。3. 传递性：若对于某个 $\phi \neq$ id 和某个 $\phi' \neq$ id，存在 $\phi : P \to F$ 以及 $\phi' : F \to S$，则 $\phi' \circ \phi : P \to S$。4. 始对象：存在唯一一个 $\varnothing$，使得对任意 $F \neq \varnothing$，存在 $\phi : \varnothing \to F$，且对应恰好一个 $\phi \neq$ id。5. 终对象：存在唯一一个 $\mathbb{U}$，使得对任意 $F \neq \mathbb{U}$，存在 ϕ: $F \to \mathbb{U}$，且对应恰好一个 $\phi \neq$ id。

关键区别在于，在有界无环范畴中，两个对象之间可以存在多个关系，而序关系的传递性则变成了态射的复合。有界偏序集只是一种薄有界无环范畴。自然可以通过忽略多个关系之间的差异，为有界无环范畴定义一个诱导有界偏序集。从这个意义上说，无环范畴是偏序集的一种推广。抽象可定向关联结构也放宽了抽象多胞体的三项约束，我们将在本节末尾讨论这一点。请注意，有界偏序集中的最小 和最大 规则，在有界无环范畴中变成了始 和终，看起来限制更严格。始对象和终对象称为非正常对象。

3.2 上范畴与向下函子

有界偏序集 P 中元素 x 的上闭包是一个子集，其中的元素都大于或等于 x。该子集本身也是一个有界偏序集，其序关系继承自宿主偏序集 P。为强调这一点，将其记为 P $\uparrow x$。类似地，只需纳入对象 F_m 的上闭包，即可构造一个全子范畴 F′。没有非平凡态射指向对象 F_m，但它不是始对象，因为对于对象 S，态射 ϕ: $F_m \to S$ 可能不唯一，因此它不是有界无环范畴。要解决这一问题，应分裂对象，使每个对象都只有一个初始态射。在有界无环范畴 F 中构造对象 F_m 的上范畴，记为 F $\uparrow F_m$：Obj(F $\uparrow F_m$) 是由所有对象 F_s 和态射 ϕ_{sm}：$F_m \to F_s$ 对应的 $F_s|\phi_{sm}$i 构成的集合。对于所有满足$\phi_{ts} \circ \phi_{sm} = \phi_{tm}$的态射 $\phi_{ts} : F_s \to F_t$ 和 $\phi_{sm} : F_m \to F_s$，Hom($F_s|\phi_{sm}$i $F_t|\phi_{tm}$i) 是由 $\phi_{ts}|\phi_{sm}$i：$F_s|\phi_{sm}$i $\to F_t|\phi_{tm}$i 构成的集合。复合规则为 $\phi_{pt}|\phi_{tm}$i $\circ$ $\phi_{ts}|\phi_{sm}$i $= \phi_{ps}|\phi_{sm}$i，其中 $\phi_{ps} = \phi_{pt} \circ \phi_{ts}$。对象$F_t$ 已用态射 ϕ_{tm} 标记，因此被分裂为多个对象，分别对应于每个初始态射 ϕ_{tm}。尽管对象被分裂，复合规则仍继承自宿主范畴 F。从关联结构的角度看，上范畴 F $\uparrow F_m$ 正对应于一个对象上的顶点图形

对象 F_m：在上范畴中，对象 $F_n|\phi_{nm}\rangle$ 表示切片像的一个连通分支，而态射 $\phi_{ts}|\phi_{sm}\rangle$ 表示面 $F_s|\phi_{sm}\rangle$ 与面 $F_t|\phi_{tm}\rangle$之间的关联关系。

存在一个函子 $F_m^{\downarrow}:\mathcal{F}\uparrow F_m \to \mathcal{F}$，它将对象 $F_s|\phi_{sm}\rangle$ 映射到 F_s，并将态射 $\phi_{ts}|\phi_{sm}\rangle:F_s|\phi_{sm}\rangle \to F_t|\phi_{tm}\rangle$ 映射到 $\phi_{ts}:F_s \to F_t$。这个函子是取上范畴操作的逆操作，因此称为**向下函子**。将其绘制为哈斯图时，向下函子就成为两个图之间的图同态。与抽象多胞体不同，它在节点和边上并非单射，这体现了关联关系的局部连通性。

由于上范畴本身也是一个有界无环范畴，因此可以进一步构造上范畴中某个对象的上范畴。范畴 F $\uparrow F_m \uparrow F_n|\phi_{nm}$i 是对象 $F_n|\phi_{nm}$i 的一个上范畴，其中 Obj(F $\uparrow F_m \uparrow F_n|\phi_{nm}$i) 是对象 $F_s|\phi_{sm}$i$|\phi_{sn}|\phi_{nm}$ii 的集合，或简写为 $F_s|\phi_{sn},\phi_{nm}$i，适用于所有对象 F_s 和态射 $\phi_{sn}:F_n \to F_s$；Hom($F_t|\phi_{tn},\phi_{nm}$i $F_s|\phi_{sn},\phi_{nm}$i) 是 $\phi_{ts}|\phi_{sm}$i$|\phi_{sn}|\phi_{nm}$ii $:F_s|\phi_{sm}$i$|\phi_{sn}|\phi_{nm}$ii $\to F_t|\phi_{tm}$i$|\phi_{tn}|\phi_{nm}$ii 的集合，或简写为 $\phi_{ts}|\phi_{sn},\phi_{nm}i:F_s|\phi_{sn},\phi_{nm}$i $\to F_t|\phi_{tn},\phi_{nm}$i，适用于所有满足 $\phi_{ts}\circ\phi_{sn}=\phi_{tn}$ 的态射 $\phi_{ts}:F_s \to F_t$ 和 $\phi_{sn}:F_n \to F_s$。注意，我们假设$\phi_{sm}=\phi_{sn}\circ\phi_{nm}$ 且 $\phi_{tm}=\phi_{tn}\circ\phi_{nm}$，并且这种简写之所以成立，是因为 ϕ_{sm} 可以唯一确定。它与上范畴 F $\uparrow F_n$ 同构，这说明取上范畴的操作具有可复合性。这一规则与上文讨论一致：取顶点图形具有可复合性。同样，向下函子也具有可复合性。对于态射$\phi_{mn}:F_n \to F_m$，向下函子可以归结为函子 $\phi_{mn}^{\downarrow}:$F $\uparrow F_m \to$F $\uparrow F_n$；其中对象 $F_s|\phi_{sm}$i 映射到 $F_s|\phi_{sn}$i，而态射 $\phi_{ts}|\phi_{sm}$i$:F_s|\phi_{sm}$i $\to F_t|\phi_{tm}$i 映射到 $\phi_{ts}|\phi_{sn}$i$:F_s|\phi_{sn}$i $\to F_t|\phi_{tn}$i，其中 $\phi_{sn}=\phi_{sm}\circ\phi_{mn}$。偏序集的上闭包在包含关系下构成一个偏序集，其对偶范畴与宿主偏序集同构。类似地，上范畴 {F $\uparrow F_m|F_m \in$ Obj} 和向下函子 {$\phi_{mn}^{\downarrow}|\phi_{mn} \in$ Hom} 也构成一个有界无环范畴，其对偶范畴与宿主范畴 F 同构（见图7）。

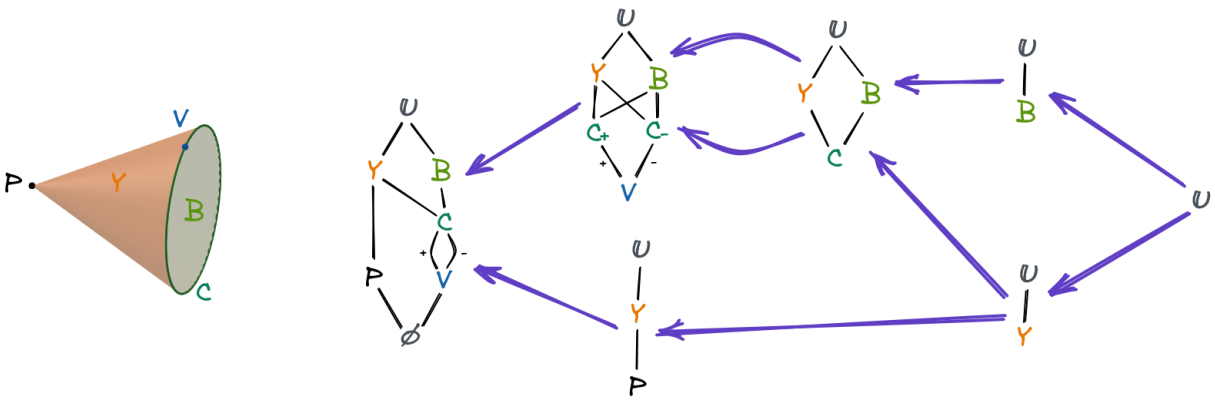


图7：圆锥面（左侧）的上范畴范畴（右侧）。它由一组哈斯图及其间的图同态（紫色箭头）表示。这种表示足以描述一个有界无环范畴。

有界无环范畴的哈斯图可以轻易地显示哪些部分是可分裂的。若两个真对象在排除非正常对象后仍在哈斯图中相连，则称它们为**相连的**。如果并非所有真对象都相连，则称该范畴为**可分裂的**。这是对抽象多胞体连通性条件的推广。相连的对象可能形成多个簇，并且可以将它们拆分为彼此分离的有界无环范畴。相连的簇可以通过**极小/极大对象**之间的连接关系来确定；这些对象被定义为所有真对象所构成的诱导偏序集中的极小元/极大元。若一个有界无环范畴的所有截面都是不可分裂的，则称该范畴为**强不可分裂的**，这与偏序集的强连通性类似。无环范畴中截面的定义将在后文介绍。之所以使用“相连”和“可分裂”这两个词，是因为“互不相交”和“不连通”专用于实际的几何性质。

3.3 截面范畴与态射链

上范畴有一个称为**下范畴**的对偶概念，它是偏序集下闭包的推广。构造上范畴时，将一个对象视为始对象，并分裂对象，使出射态射成为始态射。相反，下范畴记作$\mathcal{F}\downarrow F_m$，其构造方式是将一个对象视为终对象，并分裂对象，使入射态射成为终态射：Obj($\mathcal{F}\downarrow F_m$) 是由所有对象 F_t 和态射 ϕ_{mt}：$F_t \to F_m$ 所对应的$\langle\phi_{mt}|F_t$ 构成的集合；Hom($\langle\phi_{ms}|F_s$,$\langle\phi_{mt}|F_t$) 是由$\langle\phi_{mt}|\phi_{ts}$:$\langle\phi_{ms}|F_s \to \langle\phi_{mt}|F_t$ 构成的集合，其中对所有满足 $\phi_{mt}\circ\phi_{ts}=\phi_{ms}$ 的态射 ϕ_{ts}：$F_s \to F_t$ 和 ϕ_{mt}：$F_t \to F_m$ 都成立。复合规则为$\langle\phi_{mp}|\phi_{pt}\circ\langle\phi_{mt}|\phi_{ts}=\langle\phi_{mp}|\phi_{ps}$，其中$\phi_{ps}=\phi_{pt}\circ\phi_{ts}$。在几何中，下范畴对应于面图形</style}，就像设想一只蚂蚁生活在一个二维世界中。带有一条子午线的球面的面图形，等价于一个由两条直线围成的二维空间（见图 8）。这条直线重复出现，是因为球面以两种方式覆盖了它。作为生活在三维空间中的生物，我们知道它其实是一条直线；但对于生活在球面上的二维生物而言，它们看到的只是空间裂隙，无法确认裂隙中是否存在更宽阔的空间。

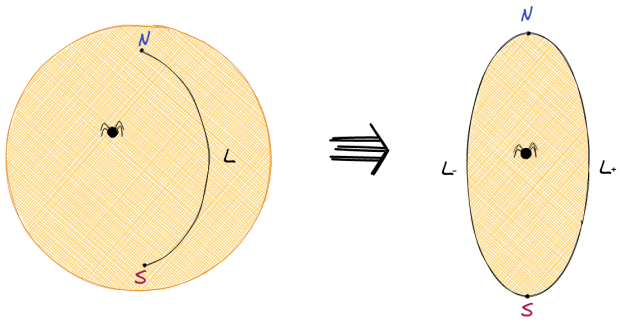


图 8：一只二维蚂蚁生活在带有子午线的球面上（左图）；从蚂蚁的视角看，这与生活在其面图形上相同（右图）。

偏序集的区间也有一个范畴论类比：$[a,b]\equiv\{c\in \mathrm{P}|a\le c\le b\}$，可将其视为上闭包的下闭包。给定一个偏序集，通过取所有极小元与极大元之间的非平凡区间，可以用多个有界偏序集覆盖该偏序集。类似地，可以通过拆分对象，将一个无环范畴转化为有界无环范畴的直和；这些有界无环范畴称为截面，其名称源自抽象多胞体。考虑一个无环范畴，例如 F，定义 F 上态射 ϕ_0 的截面范畴，记为 hFi$_{\phi_0}$：Obj(hFi$_{\phi_0}$) 是所有满足 $\phi_n^*\circ\phi_n=\phi_0$ 的态射 ϕ_n^* 和 ϕ_n 所对应的 h$\phi_n^*|\phi_n$i 的集合。Hom(h$\phi_n^*|\phi_n$i, h$\phi_m^*|\phi_m$i) 是所有满足 $\phi_m^*\circ\phi_{mn}\circ\phi_n=\phi_0$ 的态射 ϕ_m^*、ϕ_{mn}、ϕ_n 所对应的 h$\phi_m^*|\phi_{mn}|\phi_n$i 的集合。

取截面范畴不会破坏态射代数，只是重命名一些对象，使其成为有界的。“态射代数”是“序关系的传递性”的一般化。为偏序集定义**局部嵌入函数**：保序函数 f 是局部嵌入的，当且仅当对于任意一对 $x\le y$，它是 $[x,y]$与 $[f(x)\ f(y)]$之间的序同构。也就是说，元素 $f(x)\le z'\le f(y)$意味着存在唯一一个 $x\le z\le y$，使得 $f(z)=z'$。注意，它不是单射函数。推广到无环范畴后，得到**局部嵌入函子**：对于任意态射 ϕ，若一对满足约束 $\psi''\circ\psi'=\mu(\phi)$ 的态射 ψ' 和 ψ''，则存在唯一一对满足约束 $\phi''\circ\phi'=\phi$ 的态射ϕ' 和 ϕ''，使得 $\mu(\phi')=\psi'$ 且 $\mu(\phi'')=\psi''$。取截面范畴的逆过程就是局部嵌入函子。局部嵌入函子描述了态射代数之间的对应关系，而无需提及任何对象。它表明，在有界无环范畴中，对象的同一性并不重要；初始态射和终态射足以指示有界无环范畴中的对象。

链表示清晰地展现了这一点。回顾偏序集中的链的定义：链是一个全序子集。链的子集仍然是全序的，称为子链。在无环

范畴中，两个对象之间的态射并不唯一，因此推广后的定义如下：态射 ϕ_{n0}：$F_0 \to F_n$ 的**态射链** 是由一系列非空态射$\langle \phi_n, \dots, \phi_2, \phi_1 \rangle$ 组成，且这些态射复合后得到该态射。其**子链** 可以通过将相邻态射复合为一个态射来构造。换句话说，子链会跳过起点和终点之间的一些中间对象，这与传统的态射链定义略有不同。包含恒等态射的态射链称为退化态射链。具有 n 个中间对象的态射链称为 n-链。0-链就是主态射本身$\langle \phi_{n0} \rangle$，因此称为平凡链。1-链表示态射 ϕ_{n0}的截面中的一个对象，而2-链表示一个态射，其源对象和目标对象恰好是两个非平凡子链。

抽象可定向关联结构可以仅通过其子链关系来描述，这种描述称为**神经**，它与传统定义也略有不同。无环范畴的神经由一组 n-链 $N_n = \{\langle \phi_n, \dots, \phi_1, \phi_0 \rangle\}$（其中 $n = 0, 1, 2, \dots$）以及面映射 d_i：$N_n \to N_{n-1}$（其中 $i = 1 \sim n$）组成；面映射会跳过 n-链中的第 i 个对象。它还包含退化映射 s_i：$N_n \to N_{n+1}$（其中 $i = 1 \sim n$），退化映射会在第 i 个对象处插入一个恒等态射。面映射和退化映射的定律与传统定义中的相同，这里不再赘述。请注意，在我们的定义中，1-链表示一个对象，而不是一个态射。有界无环范畴的神经只有一个 0-链，将 n 替换为 $n-1$ 后即可回到传统定义。在这种表述下，1-链 F 的上范畴很容易定义，只需令 $N'_n = d_1^{-n}(F)$ 和 $d'_i = d_i$, $s'_i = s_i$，其中 d_1^{-n} 表示取 d_1 n 次幂的原像。下范畴和截面范畴也可以用类似的方法定义。如果两个无环范畴都由同一个有界无环范畴的直和作满射截面嵌入，那么它们具有相同的神经。由于无需重新标记，神经是描述可定向关联结构更自然的方式。

截面范畴不仅可以定义在无环范畴上，也可以定义在**非递归范畴**上。非递归范畴是指不含非平凡非退化递归态射链的范畴，即 $\psi \circ \phi \circ \psi' = \phi$意味着 ψ 和 ψ' 都是恒等态射。这一性质仅排除了态射数量无限的情况，仍允许存在非平凡的态射环，同时确保其截面范畴是有界无环范畴。非递归性与有限性自然蕴含无环性。

3.4 半正则正规 CW 复形

抽象可定向关联结构的**菱形性质**表述如下：一个 2-秩态射应当恰好分解为两条极大链。2-秩态射是指源对象与目标对象的秩相差 2。换言之，一个一维面应当恰好有 2 个零维子面，也就是说，只有线段才是有效的一维面。此外，链的符号之积应当不同，也就是说，有效的菱形应满足 $\phi_+ \circ \psi_+ = \phi_- \circ \psi_-$ 和 $|\phi_+| \times |\psi_+| = -|\phi_-| \times |\psi_-|$。这一性质体现了欧几里得空间的拓扑特征。若要将无限直线和射线也纳入有效的一维面，这一性质就应当放宽。**半菱形性质**可表述为：一个 2-秩态射至多可分解为两条极大链。换言之，一个一维面至多有 2 个零维子面。

除了菱形性质外，传统的抽象多胞体还满足另外两个约束：强连通性和均匀极大链。强连通意味着多胞体中的所有面都牢固地连接在一起。根据这一性质，不能将两个立方体仅沿一条边粘合在一起。带孔圆盘也不符合要求，因为其边界并不连通。均匀极大链性质指出，所有极大链都包含相同数量的面。根据这一性质，极大链中相邻面的秩相差 1，因此可以自然地导出秩函数。这意味着所有面都只有与其维数相差 1 的直接子面。对于抽象可定向关联结构，这两个约束可推广为另外两项性质。即，**强可分解**：所有态射（终态射除外）都可分解为 1-秩态射；**强不可分裂**：秩大于 2 的态射的所有截面范畴均不可分裂。一种较弱的版本称为**强初始不可分裂**，其定义如下：当且仅当所有初始

秩大于 2 的态射的截面范畴均不可分裂时，有界无环范畴称为初始不可分裂。强初始不可分裂还要求所有非初始态射的截面范畴总能分解为强初始不可分裂范畴。强初始不可分裂放宽了对共享顶点的限制，但仍要求边界连通。

如果只考虑与 n圆盘同胚的面，则它成为半正则正规 CW 复形。**正则 CW 复形** 是指粘合映射到其像上的限制为同胚的 CW 复形。如果每个闭胞腔都是一个子复形，则称该 CW 复形为**正规** 。正则且正规的 CW 复形的关联结构由闭胞腔之间的包含关系给出，并构成一个 CW 偏序集 [1]。将**半正则 CW 复形** 定义为粘合映射到其像上的限制为局部同胚的 CW 复形。半正则正规 CW 复形具有由粘合映射的纤维体现的关联结构，该结构构成一个有界无环范畴。它满足菱形性质，并且是强可分解且强初始不可分裂的：它因胞腔的连通性而具有初始不可分裂性；又由于粘合映射是局部嵌入，胞腔的顶点图形总是单连通分支的不交并，因此具有强初始不可分裂性质。看来，半正则正规 CW 复形的关联结构还受到更多约束；满足这些约束的抽象可定向关联结构的几何实现也将是半正则正规 CW 复形。

在此约束下，无需几何性质即可定义重心细分。回顾一下，传统多胞体的重心细分就是其面格的几何实现（更准确地说，是序复形）（见图9）。半正则正规 CW 复形的重心细分也可以类似地定义，它就是其关联结构的神经的几何实现。在我们对态射链的定义中，它应定义如下：神经的几何实现是通过为每个非退化的 n- 链 $\langle \phi_n, \dots, \phi_2, \phi_1 \rangle$ 构造一个 $(n-1)$- 单形来得到的，该单形由其直接子链所对应的单形围成；此单形的定向应定义为：第一个边界$\langle \phi_n \circ \phi_{n-1}, \dots \rangle$ 相对于它是正向定向的，而第二个边界$\langle \phi_n, \phi_{n-1} \circ \ \phi_{n-2}, \dots \rangle$ 相对于它是负向定向的，依此类推。(-1)-单形为空面。半正则正规 CW 复形的神经的几何实现就是其重心细分（见图10）。更有意思的是，顶点图形的关联结构，就是对其关联结构的上闭包进行几何实现后所得对象的顶点图形。面图形也有类似的关系。这表明**“几何对象的关联结构与关联结构的几何有关”**。本系列文章将不再进一步讨论这种对应关系，因为它只出现在受限的关联结构中。在下一篇文章中，我们将聚焦于有限有界无环范畴，并为其开发算法。

参考文献

[1] Anders Björner。《偏序集、正则 CW 复形与布鲁哈特序》。载于：《欧洲组合学杂志》5.1（1984），第 7–16 页。[2] Dimitry Kozlov。《组合代数拓扑》。第 21 卷。施普林格科学与商业媒体，2008 年。[3] Peter McMullen 和 Egon Schulte。《抽象正则多胞体》。第 92 卷。剑桥大学出版社，2002 年。

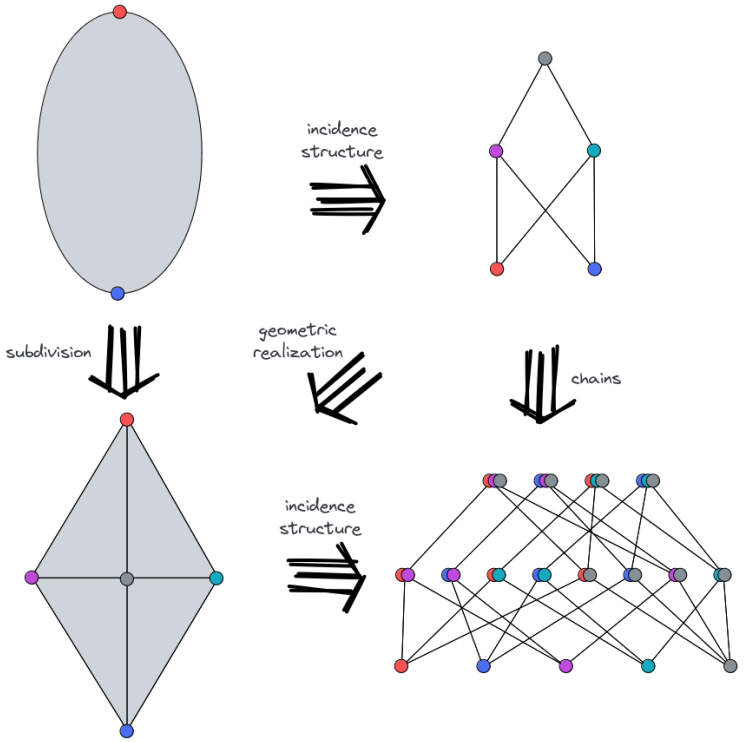


图 9：关联结构与链之间的关系。多胞体的关联结构是其面格（左上至右上），以哈斯图表示。多胞体的重心细分是通过根据重心划分各个面而构造的（左上至左下），其结果是一个单纯复形。对面格（偏序集的序复形）取几何实现，也会得到同一个复形（右上至左下）。该复形的关联结构（左下至右下）正是面格中各条链构成的偏序集（右上至右下）。

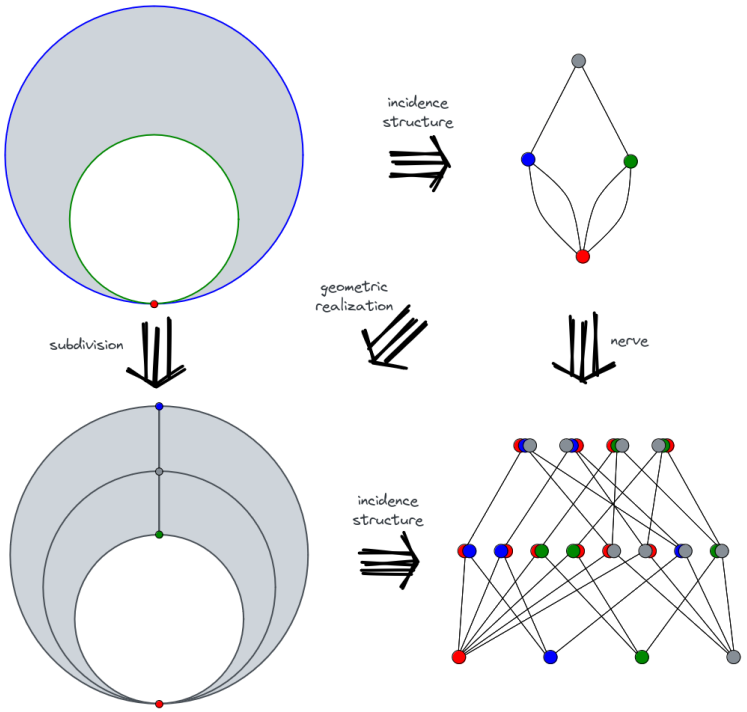


图10：关联结构与神经之间的关系。半正则正规 CW 复形的关联结构是由粘合映射的纤维构成的有界无环范畴（从左上到右上）。重心细分以类似的方式定义（从左上到左下），从而得到一个几何单纯集。对关联结构取几何实现（即其神经的几何实现），也会得到同一个复形（从右上到左下）。这个复形的关联结构（从左下到右下）就是该有界无环范畴的神经（从右上到右下）。