arXiv:2303.04309v1 [math.NT] 8 Mar 2023

曲面与 p 进域 I：德恩扭曲

Nadav Gropper

2023年3月9日

摘要

按照算术拓扑的理念，我们希望在曲面 S与 p 进域 K之间建立一种类比。

下文将介绍一种观察曲面和 p 进域的视角，使我们能够以“统一的方式”看待它们，并说明映射类群的结果可以推广到这一视角，从而应用于 G_K，即 p 进域 K的绝对伽罗瓦群。

将这两个群都置于 pro-p 群的范畴中（对 G_K，我们取其最大 pro-p 商；对 $\pi_1(S)$，我们取其 pro-p 完备化），可以看出它们都是维数为 2 的 pro-p 庞加莱对偶群，也称为 Demushkin 群。这类群可以用生成元与关系进行非常简洁的分类。

接下来，为了将几何思想转化到纯粹的群论框架中，我们使用群图和 Bass-Serre 树的语言。

将曲面的结果完全用这种方式重新表述后，我们便可以（在证明一些技术性结果之后）得到关于 p 进域的类似结果。

我们首先考察具有 Demushkin 型关系的离散群，并证明一些关于 pro-p 刚性的结果。

利用这一点，我们证明 Demushkin 群的所有分裂都来自离散分裂；这又有助于我们说明德恩扭转在此类情境下是有意义的。

由此得到 $G_K(p)$的一族无限阶外自同构，其中 $G_K(p)$是 G_K的最大 pro-p 商；这些自同构称为“算术德恩扭转”。另一方面，将这一结果特化到来自曲面群的 Demushkin 群时，便可恢复曲面上德恩扭转的通常定义。

我们也得到了 p 进域的曲线复形，即其边是以 $G_K(p)$为基本群的群图的复形；当两个顶点所对应的图相容时，它们之间便有一条边。借助离散 Demushkin 群与 pro-p Demushkin 群之间的关系，我们得以很好地理解这个曲线复形。

最后，作为推论，我们证明存在一个由两两不同构的离散群组成的无限族，它们对所有素数 l 都有同构的 pro-l 完备化（当 $l \neq p$ 时为自由 pro-l 群，当 $l = p$时为 Demushkin 群）。

1 引言

本文旨在阐释一种新的视角，它进一步拓展了算术拓扑中的类比，并为研究 p 进域 K 和曲面 S 提供了一种更为“统一”的方法。

研究这类类似结构的早期动机，源于对 p 进域绝对伽罗瓦群结构的研究；由此得到的表示与曲面群的表示非常相似。

同时包含这两类群的一个群族是维数为 2 的 pro-p 庞加莱对偶群，它们也称为 Demushkin 群。

另一个体现这种相似性的领域是三维双曲流形。这类流形具有莫斯托刚性定理，该定理指出，完备的有限体积 n 维双曲流形由其基本群决定。

数域也有类似的定理：数域的绝对伽罗瓦群决定该数域（见 Neukirch、Uchida [22,34]）。

Neukirch-Schmidt-Wingberg[23] 在定义12中定义的自同构，是远阿贝尔几何中的一个重要例子，表明 Neukirch、Uchida [34, 22] 等结果并没有直接的类似结论；据作者所知，它也是唯一已构造出的 G_K 的外自同构，其中 G_K 是 K 的绝对伽罗瓦群。

[23] 中的论证仅说明该自同构对于 G_K 是一个外自同构，但它不适用于该自同构的幂。

如果考察模 p 意义下平凡的表示，我们可以得到该表示经过 $G_K(p)$ 分解，其中 G_K 的最大 pro-p 商群（即最大 p扩张的伽罗瓦群）是如此。

可以类似于 12 定义一个构造，从而得到 $G_K(p)$ 的一个自同构，但同样无法立即看出它是外自同构。

备注 1：我们对 $Out(G_K)$ 感兴趣的原因之一，是研究其在伽罗瓦表示的变形空间上的作用；如果考察模 p 意义下平凡的表示，我们可以得到该表示经过曲面的最大 pro-p 商群分解，G_K，$G_K(p)$。

回到曲面，对于曲面有其映射类群；对于曲面 S，它也可以看作 $Out(\pi_1(S))$（见事实 17）。

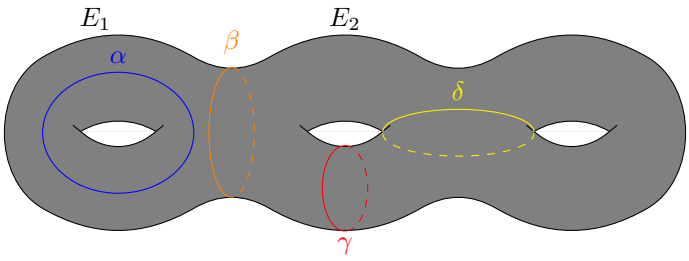
曲面的映射类群理论极其丰富，并给出了许多关于其在 Teichmüller空间上的作用的有趣性质（Teichmüller空间是曲面群表示的变形空间）。

推广这类理论的难点在于，它们本质上具有极强的几何性质，因此我们希望知道，能否以及如何用群论的方式定义所有这类对象。

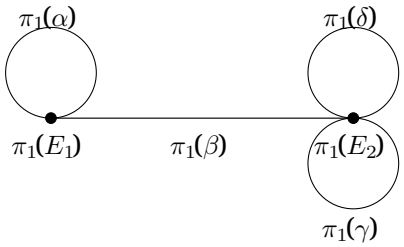
对于映射类群，其基本构件是绕简单闭曲线的德恩扭转。本文的主要结果之一是阐明这些构件如何推广到 Demushkin 群，并证明它们在这种背景下确实有意义。

正如我们在事实 25 中解释的，可以将曲面上的曲线视为 $\pi_1(S)$ 的分裂。我们所说的群 G的分裂，是指将 G 写成某个群图的基本群（而不是分裂正合列意义上的分裂）。我们主要关注的分裂是单边群图（在某种意义上，它们是所有群图的基本构件）。这类分裂对应于合并自由积或 HNN 扩张。

以亏格为3的曲面上的以下一组曲线为例:



上述内容对应于以下群图



接下来，给定一个分裂，我们可以与之关联一个德恩扭转，它是群的一个自同构（一般而言，它不一定是外自同构）。

利用这些结果，我们尝试遵循针对曲面提出的思路，并以类似的方式改写 Demushkin 群的证明，不过现在使用的是群的分裂这一语言，而不是曲面上的曲线。

第一节介绍了算术拓扑、远阿贝尔几何和曲面的映射类群中已有和未知的内容。

第二节将更深入地探讨群的分裂，以及群图和 Bass-Serre 理论这一更具组合性的研究方法。

主要定义包括分裂（定义33）和德恩扭转（定义 41），它们将是第4节的研究对象。

备注 2。 需要强调的是，尽管本文将讨论范围限定于曲面群和 p 进域，但群图和分裂的视角可以将几何引入更多群中；我们也认为，本文所提出的视角同样有助于进一步推进算术拓扑的整体类比。

在最后一节中，我们聚焦于 Demushkin 群（如上所述，它是一类原有限 p 群，其中包括 $G_K(p)$ 以及$\pi_1(S)$的 pro-p 完备化），并证明我们的

主要结果:

定理。 设 G 是一个 *Demushkin* 群，具有 d' 个生成元，其定向特征模 p^r 为零但模 p^{r+1}不为零，并假设 $p \neq 2$。那么存在一族离散群 $\{\mathcal{G}_{r'}\}_{r' \geq r}$，使得 G 在 $\mathbb{Z}_p$ 上的每个分裂，都来自某个 $\mathcal{G}_{r'}$ 在 $\mathbb{Z}$ 上的分裂。此外， G 在 $\mathbb{Z}_p$ 上的分裂具有一种“良好”的形式，也就是说，它们是定义 *70* 中所述分裂的 *pro-p* 完备化。（更精确的陈述见定理 *93*）

定理。 设 G和 $\mathcal{G}_{r'}$ 如前一定理所述，则有一个单射 $Out_D(\mathcal{G}_{r'}) \hookrightarrow Out(G)$（其中下标 D表示由定义 *70* 中所定义的、来自“良好”分裂的德恩扭转所生成的子群）

定理。 设 G 为一个 *Demushkin* 群，设 α 为 G 在 $\mathbb{Z}_p$ 上的一个分裂，并设 T_α 表示 α的德恩扭转，它是 G 的一个自同构（定义见 *43*）。那么对每个整数 k，T_α^k 在 $Out(G)$ 中的像都非平凡。

推论。 族 $\{\mathcal{G}_{r'}\}_{r' \geq r}$ 有无穷多个同构类；另一方面，所有这些群的 *pro-l* 完备化都是由$d'-1$ 个生成元生成的自由 *pro-l* 群，而其 *pro-p* 完备化则是同一个 *Demushkin* 群（即由 d' 个生成元生成、定向特征模 p^r 时消失但模 p^{r+1}时不消失的那个群）。

注意，上述定理给出了 $G_K(p)$ 的一大类非平凡外自同构（其中包括 [23], 中出现的外自同构的类比版本，该外自同构在定义12中给出，并在例 42 中作了解释）。

我们还注意到，所有证明都将带有几何风格，并且可以视为关于曲面德恩扭转的经典结果的直接推广。

推论 86 和定理 91、93 的证明紧随 Wilkes（[38, 36]）的思路，并将其推广到，主要区别在于需要追踪更多能够完备化为给定 pro-p 群的离散群，而且无法使用一些适用于曲面群的几何工具。

备注。 除了上述定理之外，作者认为，这篇论文的另一项重要贡献在于拓展了算术拓扑词典，并为讨论曲面和 p 进域提供了一种全新且更加统一的方式。从某种意义上说，作者将这篇论文视为这种思维方式的一次“概念验证”，也是一个更大项目的第一部分；该项目旨在将有关曲面的结果推广到 p 进域（反之亦然），后续还将发表更多论文，其中一些已经在撰写中。

因此，我们在引言结尾附上一张表，帮助读者找到 Farb 和 Margalit 所著《映射类群入门》中与曲面相对应的指导性案例 [5]:

	映射类群入门 [5] 类群	本文
映射类群	第 2.1 节	$Out(G)$
简单闭曲线	第 1.2.2 节	π_1 的分裂（定义 33）
曲线的交点	第 1.2.3 节	定义 37
坐标变换原理	第 1.3 节	定理 93
德恩扭转的定义	第 3.1.1 节	定义 41
德恩扭转的共轭公式	事实 3.7	引理 88
德恩扭转是 $Out(\pi_1)$ 的元素	命题 3.1	推论 100
不相交曲线的德恩扭转可交换	事实 3.9	引理 47
曲线复形	第 4.1 节	定义 34

关于论文结构的说明

本文面向群论和数论领域的读者，因此我们回顾了这两个领域的一些基础知识。

第 2.1 和 2.2 小节介绍了促成本论文写作的数论背景与动机。

第 2.3 小节回顾了曲面的映射类群基础知识，并概述了作者希望在 p 进域方面取得的成果类型。

第 3 节回顾并解释了所需的群图 Bass-Serre 理论，第 3.4 小节则介绍了群图的有限化情形。

只想了解本文主要定理的读者，可以直接跳到第 4 节。该节以庞加莱群的定义开篇，随后给出所有主要定理的证明。

致谢

本文是作者在牛津大学攻读哲学博士期间撰写的，导师为 Konstantin Ardakov 教授和 Min-hyong Kim 教授，并获得牛津大学数学研究所的经费支持。

作者谨向他的导师、牛津大学，以及在其哲学博士期间及此前与他进行过许多有益交流的众人表示感谢。

作者特别感谢其答辩委员 Kobi Kremnitzer 和 Tomer Schlank 提出的宝贵意见和修正。他还要感谢 Jonathan Fruchter、Ido Grayevsky 和 Alex Lubotzky，就与本文相关的材料进行有益讨论，并感谢 Dani Wise 建议在最后一个推论的证明中使用 Whitehead 算法。

作者还要感谢 Uri Bader 和 Tsachik Gelander，以及他们的群论 Midrasha；在那里，他学习了大部分几何群论方面的基础知识。

目录

1 引言 2

2 一般动机 7

2.1 算术拓扑学.7 2.2 刚性与远阿贝尔几何.8 2.2.1 显式外自同构.9 2.3 曲面的映射类群.11 2.3.1 映射类群的生成元与曲线复形.14 2.4 Teichmüller空间与伽罗瓦表示 14

3 从曲线到群图 15

3.1 群的分裂与群图.15 3.2 分裂的交.17 3.3 离散群的德恩扭转.21 3.4 Profinite 群与图.22

4 Demuskin 群 26

4.1 庞加莱对偶群背景.26 4.2 主要结果.27 4.2.1 离散 Demushkin 群的分裂 . . . . . 28 4.3 Demushkin 型关系的 pro-p 刚性 .30 4.3.1 p- 有效分裂 . 30 4.3.2 循环分裂复形.34 4.3.3 一族非 pro-l 刚性群.37

2 一般动机

2.1 算术拓扑

如引言中所述，算术拓扑在素数与纽结、曲面与 p-adic 域，以及数域与 3维流形之间建立了类比。

本小节将作一个非常简短的概述，更多信息请参见 [21]。

例如，数域 K 上的类域论可以表述为 $\acute{e}$的 $Spec(O_K)$（[18]）上的一种三维庞加莱对偶。

Mazur 指出了这一思路，以及纽结与素数之间的类比，见 [17]。

考察素数域 $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ 上的 $\acute{e}$同伦群，我们得到：群：$\pi_1^{et}(Spec(\mathbb{F}_p)) = \hat{}\mathbb{Z}$，$\pi_i^{et}(Spec(\mathbb{F}_p) = 0$ (i≥ 2)（其中 $\hat{}\mathbb{Z}$ 是 $\mathbb{Z}$的有限生成完备化），因此我们将 $Spec(\mathbb{F}_p)$视为圆 S^1的算术类比。

由于 $Spec(\mathbb{Z})$ 的 étale 上同调维数为 3（忽略 2-挠元），且$\pi_1^{et}(Spec(\mathbb{Z})) = 1$，因此可以将其视为三维球面。

由此可知，嵌入 $Spec(\mathbb{F}_p) \hookrightarrow Spec(\mathbb{Z})$ 可以视为纽结的算术类比，即嵌入 $S^1 \hookrightarrow S^3$。

纽结与素数、3维流形与数环之间的类比，后来由 Kapranov([13])、Reznikov ([26],[27])、Morishita ([21]) 等许多人作了进一步研究。

按照上述类比，纽结群 $G_K = \pi_1(S^3\backslash K))$ 对应于“素数群” $G_{\{(p)\}} = \pi_1^{et}(Spec(\mathbb{Z})\backslash\{(p)\})$。

更一般地，链环 L 对应于有限个素数 S，而链环群 $G_L = \pi_1(S^3\backslash L)$ 对应于 $G_S = \pi_1^{et}(Spec(\mathbb{Z})\backslash S)$，即 $\mathbb{Q}$ 在 $S\cup\{\infty\}$ 之外不分歧的最大伽罗瓦扩张的伽罗瓦群。由此可见，$\mathbb{Q}$ 的绝对伽罗瓦群可以视为三维球面去掉无穷多个纽结后的基本群。

有 Kapranov-Reznikov-Mazur-Morishita 词典：

算术	拓扑学
$Spec(O_K) \cup \{\infty\}$ $Spec(\mathbb{Z}) \cup \{\infty\}$	三维流形 M S^3
$Spec(\mathbb{F}_\mathfrak{p}) \subset Spec(O_K)$ 素数 $\mathfrak{p}_1, ..., \mathfrak{p}_n$	纽结 $K \subset M$ 链环 $K_1 \cup ... \cup K_n$
$\mathfrak{p}$-进整数 $Spec(O_{K_\mathfrak{p}})$ $\pi_1^{et}(Spec(O_{K_\mathfrak{p}})) =< \sigma >$	K 的管状邻域，$V(K)$ $\pi_1(V(K)) =< \beta >$
$\mathfrak{p}$-进域 $Spec(K_\mathfrak{p})$ $\pi^{et,}{}_1{}^{tame}(Spec(K_\mathfrak{p})) =< \sigma,\ \tau:\ \tau^{p-1}[\tau,\sigma] = 1 >$	环面 $\partial V(K)$ $\pi_1(\partial V(K)) =< \alpha, \beta:\ [\alpha,\beta] = 1 >$
类群 H_K	$H_1(M,\mathbb{Z})$
单位 $O_K^\times$	$H_2(M,\mathbb{Z})$
在 S 外非分歧的最大伽罗瓦群： $\pi_1^{et}(Spec(O_K)\backslash\{\mathfrak{p}_1, ..., \mathfrak{p}_n)\}$	链环群： $\pi_1(M\backslash K_1 \cup .. \cup K_n)$
勒让德符号	链接数
p进L函数	K的亚历山大多项式

在这种对应下，许多局部结构都没有得到体现。例如，它只考察温和分歧部分，而且总是将一个 p 进域对应到一个亏格为1的曲面。

我们希望在本文中扩充上述词典，以涵盖 p 进域的所有伽罗瓦群，并根据 $\mathbb{Q}_p$ 上扩张的度，为不同亏格的曲面建立对应关系。

2.2 刚性与远阿贝尔几何

算术与拓扑之间的类比继续延伸到另一个有趣的领域，这也是我们特别感兴趣的领域：远阿贝尔几何中的 Mostow 刚性定理和 Uchida-Neukirch [22][34] 定理。

首先，我们来看 Mostow 的刚性定理：

定理 3. 设 M 和 N 是维数为 $n \geq 3$的完备有限体积双曲流形。

如果 $\pi_1(M) \cong \pi_1(N)$，那么 M和 N等距。

同样，在远阿贝尔几何中，人们研究一个空间 X 已经有多少信息包含在它的第一étale 同伦群 $\pi^1_{\acute{e}t}(X,x)$ 中。

“远阿贝尔”一词源于这样一个想法：“越不阿贝尔的 $\pi^1_{\acute{e}t}(X,x)$，所携带的关于 X 的信息就越多”。

我们希望 $\pi^1_{\acute{e}t}(X,x)$ 非阿贝尔性很强；椭圆曲线就是一个有助于理解我们为何如此希望的例子。

设 E 是特征为 0 的代数闭域上的椭圆曲线，它有 $\pi^1_{\acute{e}t}(E,x) = \hat{\mathbb{Z}}^2$，其中我们任取一个基几何点 x。因此，$\pi^1_{\acute{e}t}(E,x)$ 无法区分椭圆曲线。同样，对于有限域 $\mathbb{F}_p$，我们有 $\pi^1_{\acute{e}t}(\mathbb{F}_p,x) = \hat{\mathbb{Z}}$，因此，$\pi^1_{\acute{e}t}$ 也无法区分有限域。

其同构类完全由$\pi^1_{\acute{e}t}$（X、 x）决定的代数簇称为远阿贝尔簇。

Uchida [34] 和 Neukirch [22], 证明了数域是远阿贝尔的。这可以看作莫斯托刚性定理的算术类比：

定理 4。 设 F 和 F' 是数域。

若 $\pi^1_{\acute{e}t}(F) = Gal(\bar{F}/F) \cong Gal(\bar{F}'/F') = \pi^1_{\acute{e}t}(F')$，则 F'和 F同构，并且存在一个双射：

$$Isom_{\mathbb{Q}}(F,F') \to Out(G_F, G_{F'})$$

Mochizuki [20]对 p 进域也证明了类似的结论：

定理 5。 设 K 和 K' 是 $\mathbb{Q}_p$的有限扩张。令 $Isom_{\mathbb{Q}_p}(K,K')$表示 K 与 K'之间的 $\mathbb{Q}_p$-代数同构集合。

令 $Out_{Filt}(G_K, G_{K'})$表示 K 与 K' 的绝对伽罗瓦群之间的滤过群外同构集合，其中的滤过由上编号中较高的（即指标为 > 0的）分歧群定义。

那么自然态射

$$Isom_{\mathbb{Q}_p}(K,K') \to Out_{Filt}(G_K, G_{K'})$$

由“考察绝对伽罗瓦群上诱导的态射”所诱导的映射是一个双射。

关于分歧滤过的附加条件是必要的，而且存在绝对伽罗瓦群同构但彼此不同构的 p 进域。

例 6. 域 $\mathbb{Q}_p(\mu_p, \sqrt[p]{p})$ 和 $\mathbb{Q}_p(\mu_p, \sqrt[p]{p+1})$ 不同构，但它们的绝对伽罗瓦群同构（这个例子及更多例子可见 [12]）。

事实上，对于任意 p 进域 K， $Out(G_K)$ 中都存在非平凡元素，我们将在下一小节中对此作出解释。

这同样符合拓扑情形，因为 p 进域可以被视为曲面的类比对象。

在曲面情形中，我们没有莫斯托刚性，而曲面 S 的 $Out(\pi_1(S))$ 是一个非常有趣的对象，也称为 S 的映射类群。

备注 7. 1984年，格罗滕迪克[8], 提出了以下重要猜想，该猜想推动了远阿贝尔几何理论的发展:

猜想 8. 数域上的所有双曲曲线都是远阿贝尔簇。

对于有限域、数域和 p 进域上的代数曲线，这一论断最终由 Mochizuki [19] 证明完成。

2.2.1 显式外自同构

本小节将介绍 p 进域的伽罗瓦群的一个结构定理，稍后将用它来构造 $G_{\mathbb{Q}_p}$ 的外态射（可参见 [23], 第7章末尾）。

定理 9 ((Jannsen-Wingberg)). 设 K 是一个 p 进域， $N=[K:\ \mathbb{Q}_p]$是 K的剩余域的基数，q 是 K^{tr}中所有 p次单位根组成的群的阶，而 K^{tr}是 K的最大温和分歧扩张。

群 $Gal(K^{tr}/K)$ 由 σ,τ生成，满足 $\sigma\tau\sigma^{-1}=\tau^q$，并将 σ,τ在圆分特征下的像分别记为 $g,h\in\mathbb{Z}_p$。

那么群 G_K有 $N+3$ 个生成元（其中 $N=[K:\mathbb{Q}_p]$） ， $\sigma,\tau,x_0,...,x_N$，并满足以下关系/条件:

A) 由 $x_0,...,x_N$生成的闭正规子群是一个 *pro-p*-群。

B) 元素 σ,τ满足驯关系 $\sigma\tau\sigma^{-1}=\tau^q$。*C) i)* 若 *N* 为偶数 $x_0^\sigma =< x_0,$ $\tau >^g x_1^{p^s}[x_1,x_2]...[x_{N-1},x_N]$; *ii)* 若 *N* 为奇数 $x_0^\sigma =< x_0,$ $\tau >^g x_1^{p^s}[x_1,y_1][x_2,x_3]...[x_{N-1},x_N]$

其中 $< x_0,\ \tau >=(x_0^{h^{p-1}}\tau x_0^{h^{p-2}}...x_0^h\tau)^{\frac{\pi}{p-1}}$，并且 y_1是由 $x_1,\ \sigma,\ \tau$生成的子群中的某个元素。

注记 10。 从某种意义上说，这意味着它应该对应一个亏格为 $\frac{N}{2}+1$ 的曲面。

完整证明请参见 [11] 和 [4], 。该证明基于 H. Koch[14] 的一套理论，该理论将如下事实公理化：对于每个有限的适度分歧扩张L/K，群 $G_L(p)$ 都是一个 Demushkin 群。

从群论角度看，它使用以下 3 条公理/条件：
设 H 是 $\mathcal{G}=Gal(K^{tr}/K)$ 的一个开正规子群，且包含于 χ_{tr} 的核中（ χ_{tr} 是来自 $\mathcal{G}$ 的圆分特征），因此 μ_{p^s} 包含于 H 的不变域 L 中，并记 $G=\mathcal{G}/H=Gal(L/K)$。

我们有 $G_L(p)=Gal(L(p)/L)$，它是 L 的极大 p-扩张的伽罗瓦群，是 G_L 的极大 pro-p 因子群，并且是一个 Demushkin 群。

对于这些群，我们有以下已知性质。
I. - $dimH^1(G_L,\mathbb{F}_p)<\infty, dimH^2(G_L,\mathbb{F}_p)=1$ 和 $H^1(G_L,\mathbb{F}_p)\times H^1(G_L,\mathbb{F}_p)\overset{\cup}{\to}H^2(G_L,\mathbb{F}_p)$ 是一个非退化反对称双线性形式。
II. - 将 $H^1(H,\mathbb{F}_p)$ 视为辛空间 $H^1(G_L,\mathbb{F}_p)$ 的一个 1 维子空间，我们得到 G-模 $H^1(H,\mathbb{F}_p)^{\perp}/H^1(H,\mathbb{F}_p)\cong\mathbb{F}_p[G]^n$ 的同构。

关于诱导的非退化双线性形式，该 G-模是两个完全各向异性的 G-模的直和。

III. - $(G_L(p)^{ab})_{tor}\cong\mu_{p^s}$ 作为一个 G-模。
注 11。 条件 I 表明 $G_L(p)$ 是一个 Demushkin 群。
根据类域论，$H^1(G_L,\mathbb{F}_p)$ 与 $L^*/L^{*^p}=(\pi)/(\pi)^p\times U^1/(U^1)^p$ 对偶，其中 π 是 K 的一个素元，而 U^1 是 L 的主单位群。
杯积映射到 L^*/L^{*^p} 上的希尔伯特符号，而 $U^1/(U^1)^p$ 包含 $H^1(H,\mathbb{F}_p)^{\perp}/H^1(H,\mathbb{F}_p)$ 作为一个维数为 1 的子空间，该子空间同构于 $\mathbb{F}_p[G]$。

最后一个同构是岩泽的结果。关于全各向同性子模直和性质的断言归功于 Koch。

在 [23]（第7章第5节）中构造了 G_K 的一个非平凡外自同构，从而表明定理 5 中额外的保持滤子的条件是必要的。

对于 $N=[K:\mathbb{Q}_p]>1$，更容易描述并证明它是外自同构。
令 $\sigma,\tau,x_0,...,x_N$ 为定理 9 中描述的 G_K 的生成元。

定义12. 定义 $\psi: G_K\to G_K$，使得 $\psi(y)=y$ 对于 $y=\sigma,\tau,x_0,...,x_{N-1}$ 成立，并且$\psi(x_N)=x_Nx_{N-1}$。

备注13. 在例 42 中我们看到，对于恰当的分裂，上述构造也是定义 41 意义下的德恩扭转。

因此，这是 G_K 的一个自同构，因为 $[x_{N-1};\ x_N]=[x_{N-1};\ x_Nx_{N-1}]$，所以生成元 σ、τ、x_0、...、x_{N-1}、x_Nx_{N-1} 在 $N>1$ 时满足这两个关系。
现在假设这是一个内自同构，即存在一个元素 $\rho\in G_K$，使得对于所有 $z\in G_K$，都有 $\psi(z)=z^{\rho}$。

记 V_K^i 为分歧群V_K 的 p-中心序列的第 i 项，其中 $V_K^1 = V_K$。

由于 $x_{N-1}^{\rho} = \psi(x_{N-1}) = x_{N-1}$，且 $x_{n-1}V_K^2$ 在 V_K/V_K^2 中生成一个自由的 $\mathbb{F}_p[[G_K]]$模，由 [11], 可得 $\rho \in V_K$。

由此可得 $x_N V_K^2 = x_N x_{N-1} V_K^2$，这与假设矛盾。因此，若 $N = [K : \mathbb{Q}_p] > 1$，我们就构造出了 G_K的一个非平凡外自同构。

$K = \mathbb{Q}_p$ 的情形更加困难。它以类似的方式构造，但还用到了 [39]中的以下结果。

定理 14. 设 $\psi_3 : G_K/V_K^3 \to G_K/V_K^3$ 是 G_K/V_K^3的一个自同构，它在因子群 G_K/V_K 上诱导单位元。

那么，存在 G_K 的一个自同构，它模V_K^2与 ψ_3 一致。

2.3 曲面的映射类群

我们希望拥有一种类似于映射类群理论的算术理论，更具体地说，是关于曲面映射类群的算术理论（有关此主题的更多信息，请参阅 [6]。

设 S 是一个连通、闭的、可定向曲面，$\mathrm{Homeo}^+(S)$ 表示 S 上保持定向（即保向）的同胚群（若 S 有边界，则这些同胚在 ∂S 上限制为单位元）。

这个群具有自然的拓扑，即紧开拓扑。它可以通过距离函数轻松定义：给定一个诱导其拓扑的度量 d，定义在 S 上的函数

$$\delta(f, g) = \sup_{x \in S} (d(f(x), g(x))$$

是 $\mathrm{Homeo}^+(S)$ 上诱导紧开拓扑的距离。

在此拓扑下，单位元所在的连通分支记为 $\mathrm{Homeo}_0(S)$。根据定义，它等于与恒等映射同伦的 S 的同胚，并且是保向同胚群的正规子群。

定义 15. 我们将 S 的映射类群定义为群

$$\mathrm{MCG}(S) = \mathrm{Homeo}^+(S)/\mathrm{Homeo}_0(S)$$

修改定义，将所有同胚都纳入其中，我们便得到扩展映射类群 $\mathrm{MCG}^{\pm}(S)$。

注意，这些群都是可数的，而扩展映射类群 $\mathrm{MCG}^{\pm}(S)$ 包含映射类群作为一个指数 2 的子群。

注记16。这个定义也可以在可微范畴中给出：如果将上文所有的“同胚”都替换为“微分同胚”，便会得到同一个群；也就是说，包含映射 $\mathrm{Diff}^+(S) \subset \mathrm{Homeo}^+(S)$ 会在各自的恒等分支之商之间诱导一个同构。

若 S 是闭的，且 f 是 S 的一个同胚，那么我们可以如下定义基本群 $\pi_1(S, x_0)$ 的一个自同构 f_*：固定一条连接 x_0 与 $f(x_0)$ 的路径 γ；对于一个以 x_0 为基点、代表元素 $[\alpha] \in \pi_1(S, x_0)$ 的环路 α，定义 $f_*([\alpha])$ 为与环路 $\bar{\gamma} * f(\alpha) * \gamma$ 相对应的基本群元素。

这个自同构取决于 γ 的选择，但只在共轭意义下不同。因此，我们得到一个定义良好的映射 Φ，从 $\mathrm{Homeo}(S)$ 到外自同构群 $\mathrm{Out}(\pi_1(S, x_0))$。

事实 17。映射 Φ 是一个态射，其核恰好是子群 $\mathrm{Homeo}_0(S)$。

德恩–尼尔森–贝尔定理 *[2, 24]* 指出，该映射还是满射。

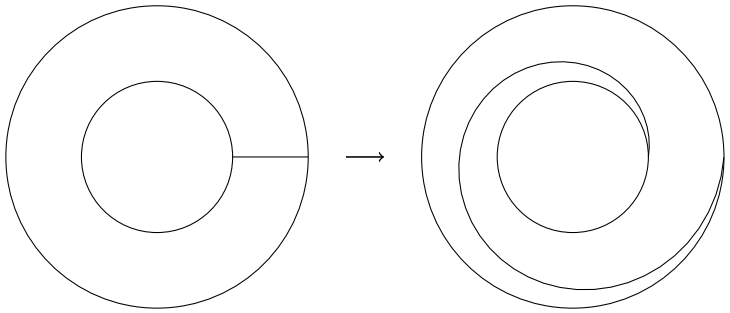
特别地，它推出扩展映射类群 $\mathrm{MCG}^{\pm}(S)$ 同构于外自同构群 $\mathrm{Out}(\pi_1(S))$。

映射类群的像是外自同构群的指数为 *2* 的子群，可通过其在同调上的作用来刻画。

曲面 S 上的闭曲线是一个连续映射 $S^1 \to S$；若该映射是单射，则称其为简单闭曲线。若闭曲线不同伦于一点、一个穿孔或一个边界分支，则称其为本质闭曲线。我们通常将闭曲线与其在 S 中的像等同看待。

考虑环带 $A = S^1 \times [0, 1]$，我们通过 $(\theta, t) \mapsto (\theta, t + 1)$ 将其嵌入带极坐标的平面，并取由平面的标准定向诱导的定向。定义 $T\colon A \to A$ 的“左扭映射”为 $T(\theta, t) = (\theta + 2\pi t, t)$（注意，若改为取 $\theta - 2\pi t$，则会得到右扭转）。

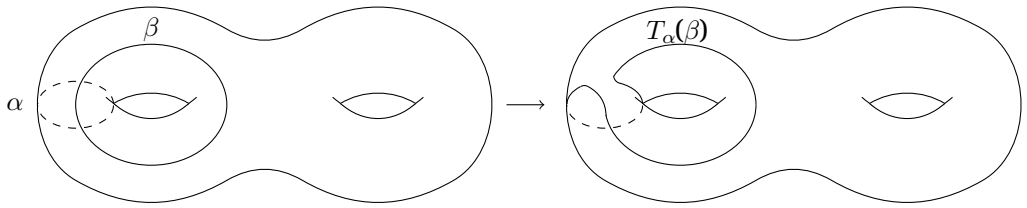
映射 T 是一个保定向同胚，它逐点固定 A 的边界。



定义 18. 设 α 是 S 上的一条简单闭曲线，N 是 α 的一个正则邻域，并取 ϕ 为一个保定向同胚，则存在一个同胚 f，将 A 映到标准环带 A_0，并将 C 映到一个带逆时针定向的圆。

定义一个 T_α 到 S 的同胚如下：在 $S \setminus N$ 上它是单位元，在 N 上它等于 $\phi^{-1} \circ T \circ \phi$。

T_α 在映射类群 MCG(S)中的类不依赖于上述 ϕ 的选择，由此得到的元素称为关于 α的德恩扭转。



注记 19。 人们会想把定义12中的映射 ψ 视为某种算术德恩扭转。

如果 α 不是零伦的，那么这个映射类非平凡；更一般地，由两条非同伦曲线定义的德恩扭转，在映射类群中是不同的元素。

在与 $SL_2(\mathbb{Z})$ 同一的环面的映射类群中，德恩扭转对应于幺幂矩阵。

例如，矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 对应于环面上一条水平闭曲线周围的德恩扭转。

映射类群由该曲面上所有简单闭曲线周围的德恩扭转所成的子集生成。

德恩–利克里什定理指出，只需选取其中有限多个，就足以生成映射类群。这推广了 $SL_2(\mathbb{Z})$ 由矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$、$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ 生成这一事实。

特别地，曲面的映射类群是一个有限生成群。

生成亏格为 $g \geq 2$ 的闭曲面的映射类群所需的德恩扭转的最小数量为 $2g+1$；这一结果后来由 Humphries 证明。

定理20. *(Nielsen, Thurston)* 元素 $g \in \mathrm{MCG}(S)$ 必属于以下情况之一：

- 有限阶 - 可约：在 S 上存在一组两两不相交的闭曲线，在 g 的作用下保持不变

- 伪阿诺索夫。

该定理的主要内容是：既非有限阶又不可约的映射类必定是伪阿诺索夫的（这是一种动力学性质）。

2.3.1 映射类群与曲线复形的生成元

理解映射类群的一个重要初步，是认识到它由有限个德恩扭转生成。

为证明这一点，引入曲线复形。

定义 21. 曲线复形是与曲面 S 相关联的单纯复形。

顶点是 S 上本质简单闭曲线的自由同伦类，并且当且仅当它们可以同伦变形为两两不相交时，v_1、.....、 v_n 个不同顶点张成一个单形。

Masur 和 Minsky 证明了曲线复形是双曲型的，并进一步利用这一事实推导出关于映射类群的新信息。

映射类群在曲线复形上的作用具有良好的性质，并且可以证明 $MCG(S)$ 由 $stab_v$ 和 h 生成，其中 v、w 是由一条边相连的两个顶点，而 $h(v) = w$。

2.4 Teichmüller空间与伽罗瓦表示

与曲面相关的一个重要空间是它的 Teichmüller空间：

定义 22. 给定一个曲面 S，Teichmï¿œller 空间 $T(S)$ 是 S 上带标记的复结构（等价地说，保角结构或完备双曲型结构）所构成的空间。

这些结构可以用配对 (X, f) 表示，其中 X 是一个黎曼曲面，且 $f: S \to X$ 是一个同胚，并且要对适当的等价关系取商。

群 $\text{Homeo}^+(S)$ 在这类配对上有一个作用，该作用下降为 $\text{MCG}(S)$ 在 Teichmï¿œller 空间上的作用。

这个作用有许多有趣的性质；例如，它是适当不连续的（但不是自由的）。

该作用延拓到 Teichmï¿œller 空间的瑟斯顿边界，而映射类的 Nielsen-Thurston 分类可以从该作用在 Teichmï¿œller 空间及其瑟斯顿边界上的动力学性质中看出。具体而言：

有限阶元素在 Teichmï¿œller 空间内部有不动点（更具体地说，这意味着 $\text{MCG}(S)$ 中任何有限阶映射类都可以实现为某个 S 上双曲度量的等距变换）；伪阿诺索夫映射类固定边界上与其稳定叶状结构和不稳定叶状结构相对应的两个点，且其在边界上的作用是极小的（有稠密轨道）；可约映射类在边界上的作用不是极小的。

也可以从以下意义上将 $T(S)$ 视为 $\pi_1(S)$ 的表示空间：

定理23。 空间 $T(S)$ 可以视为表示空间 $Rep(\pi_1(S)\ PSL(2,\mathbb{R})) = Hom(\pi_1(S)\ PSL(2,\mathbb{R}))/PSL(2,\mathbb{R})$ 中的一个连通分支，其中 $PSL(2,\mathbb{R})$ 通过共轭作用。

这促使人们按如下方式定义高阶 Teichmüller 空间：设 G 是一个高秩单李群 G，（例如 $n \geq 3$ 对应的 $PSL(n,\mathbb{R})$）。

高阶 Teichmüller 空间是 $Hom(\pi_1(S)\ G)/G$ 的一个子集，它是由完全由离散且忠实表示组成的连通分支之并。

对于足够好的 G，也已证明这些高阶空间具有映射类群的适当作用

因此我们预期，在算术情形中，Teichmüller 空间所扮演的角色将由某种伽罗瓦表示变形空间承担。

对于模 p 的平凡表示的变形，这与 $G_K(p)$ 的表示相同，因为所有模 p 平凡的表示都经由 $G_K(p)$ 分解

注记 24。定理 5 的证明中使用的方法涉及 p 进霍奇理论以及特殊类型的霍奇-泰特表示。

考察 $G_K(p)$ 的外自同构后，我们也希望能进一步阐述伽罗瓦表示空间中所包含的不同 p 进霍奇理论结构。

3 从曲线到群图

3.1 群的分裂与群图

回顾一下，曲面 S 上的简单闭曲线是一个连续单射 $S^1 \to S$。

事实 25。曲面 S 上的简单闭曲线会导出 $\pi_1(S)$ 的一个分裂：它是沿 $\mathbb{Z}$ 的合并自由积，或沿 $\mathbb{Z}$ 的 *HNN* 扩张。

事实上，$\pi_1(S)$ 的所有沿 $\mathbb{Z}$ 的分裂——分解为 *HNN* 扩张和合并自由积——都以这种方式产生，因此简单闭曲线的同伦类与 $\pi_1(S)$ 沿 $\mathbb{Z}$ 的此类分裂之间存在双射。

这可参见 [40] 定理 4.12.1。

上述内容引导我们找到一种方法，将与简单闭曲线相关的思想推广到任意群。

首先，让我们回顾一些基本定义：

定义 26.（合并自由积）设 A、B 和 C 是群，且有单同态 $\varphi_1 : C \to A$、$\varphi_2 : C \to B$。我们将 A 和 B 沿 C 的合并自由积记为 $A *_C B$，定义为由 A 和 B 生成，并满足关系 $\varphi_1(c)\varphi_2(c)^{-1} = 1$，其中 $c \in C$ 任意。

定义 27. (HNN 扩张) 设 A 是一个群，$C \subset A$ 是其子群，并且 $\theta : C \to A$ 是一个单同态。我们将相对于 θ的 A 的 HNN（G. Higman、B. H. Neumann、H. Neumann）扩张定义为由 A 和一个元素 t 生成的群，记作 $A*_\theta$，其满足关系 $\theta(c) = tct^{-1}$，对所有 $c \in C$均成立。新的生成元 t 称为稳定字。

利用群图，我们可以将这两个想法结合起来考虑：

定义 28. 图 X由顶点集 $V(X)$、（有向）边集 $E(X)$以及边反向映射 $e \mapsto \bar{e}$ 组成，其中 $e \neq \bar{e}$ 且对所有边都有 $\bar{\bar{e}} = e$（也就是说，每条边都有一个定向，并且图中也包含其反向定向的边）；还有一个映射 $v: E(X) \to V(X)$，将一条边映到其终点（因此，一条边的起点为 $v(\bar{e})$。

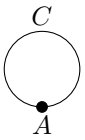
定义 29. 群图 $(X, \boldsymbol{G})$ 是一个连通图 X，并附有一个函数 $\boldsymbol{G}$，它为图 $V(X)$ 的所有顶点 $\boldsymbol{G}_v$ 指定一个群，并为所有边 $e \in E(X)$ 指定一个群 $\boldsymbol{G}_e$，满足 $\boldsymbol{G}_e = \boldsymbol{G}_{\bar{e}}$；此外，对于每条边 $e \in E(X)$，还存在一个单同态 φ_e：$\boldsymbol{G}_e \to \boldsymbol{G}_{v(e)}$，其中 $v(e)$ 是 e 的终点。

给定一个群图 $(X, \boldsymbol{G})$，令 $T \subset X$ 为 X 的一棵极大子树。我们将 $(X, \boldsymbol{G})$ 在 T 处的基本群 $\pi_1(X, \boldsymbol{G}, T)$ 定义为由所有 $v \in V(X)$ 对应的顶点群 G_v 以及所有$e \in E(X)$ 对应的元素 t_e 生成的群，并满足以下关系：

1. 对所有 $e \in E(X)$，$t_{\bar{e}} = t_e^{-1}$；2. 对所有 $e \in E(X)$ 及 $c \in \boldsymbol{G}_e$，$t_e \varphi_e(c) t_e^{-1} = \varphi_{\bar{e}}(c)$；3. 对所有 $e \in E(T)$，$t_e = 1$。

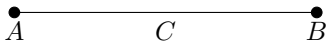
注记 30. 上述基本群的定义与极大子树的选择无关 T。

现在我们可以看到，对于有 1 条边和 1 个顶点的群图，



基本群给出一个 HNN 扩张 $A*_C$。

对于有 1 条边和 2 个顶点的群图，



基本群给出一个合并自由积 $A *_C B$。

定义 31. 设 $(X, \boldsymbol{G})$、$(X', \boldsymbol{G}')$ 是群图。$(X, \boldsymbol{G})$ 到 $(X', \boldsymbol{G}')$ 的同构是形如 $(H_X, (H_v)_{v \in V(X)}, (H_e)^{e \in E(X)}, (\delta(e))^{e \in E(X)})$ 的元组，其中：

- $H_X: X \to X'$ 是一个图同构，
- $H_v: \boldsymbol{G}_v \to \boldsymbol{G}'_{H_X(v)}$ 是一个群同构，
- $H_e = H_{\bar{e}}: \boldsymbol{G}_e \to \boldsymbol{G}'_{H_X(e)}$ 是一个群同构，
- $\delta(e)$ 是 $\boldsymbol{G}'_{v(H_X(e))}$ 的一个元素，并且还满足以下相容性要求：

$$H_{v(e)}(\varphi_e(c)) = \delta(e) \varphi_{H_X(e)}(H_e(c)) \delta(e)^{-1} \text{ for all } e \in E(X), c \in \boldsymbol{G}_e.$$

给定一个群图（$X, \boldsymbol{G}$），可以与之关联一个 Bass-Serre 覆盖˜树 X。它是一棵带有 $\pi_1(X, \boldsymbol{G})$ 作用且没有边反转的特定树。这是（$X, \boldsymbol{G}$）的一种万有覆盖，并且有 $X/\pi_1(X, \boldsymbol{G})$ 同构于（$X, \boldsymbol{G}$）。

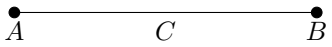
类似地，给定一棵树 T，群 G 在其上作用且不发生边反转，我们可以定义群图商 T/G，其 Bass-Serre 覆盖为 T。

更精确地说，群图商图 X 就是商图 T/G，而顶点群和边群分别同 T 在 G 作用下各顶点和各边的顶点稳定子与边稳定子同构。

这样，我们便可以在带有群作用的树与群图这两个概念之间转换。

还可以看出，如果两个群图的 Bass-Serre 树之间存在一个 G-等变图同构，那么这两个群图同构。

例32。 设 $(X, \boldsymbol{G})$ 是一个只有一条边 e 和两个顶点 v_1, v_2 的群图，其中 $\boldsymbol{G}_e = C$, $\boldsymbol{G}_{v_1} = A$,$\boldsymbol{G}_{v_2} = B$ 配有单同态 $\varphi_1 : \boldsymbol{G}_e \to \boldsymbol{G}_{v_1}$, $\varphi_2 : \boldsymbol{G}_{\bar{e}} \to \boldsymbol{G}_{v_2}$。



我们有 $\pi_1(X, \boldsymbol{G}) \cong A *_C B = G$。

˜在这种情况下，我们会有 X，它是满足以下条件的树 $V(X) = \{gA : g \in G\} \amalg \{gB : g \in G\}$，若存在 $a \in A$ 使得 $fB = gaB$，则两个顶点 gA 和 fB 之间有一条边。顶点 gA 的度为 $[A : \varphi_1(C)]$，而 gB 的度为 $[B : \varphi_2(C)]$。

定义33。 给定一个群 G，我们将其分裂集合 $Split(G)$ 定义为基本群同构于 G 的单边群图（即 HNN 扩张和合并自由积）的同构类集合。

$\mathbb{Z}$ 分裂 $Split(G, \mathbb{Z})$ 是指所有边稳定子都同构于 $\mathbb{Z}$ 的分裂。

定义 34。 我们将 G 的曲线复形定义为 $\mathcal{C}(G)$，它的顶点是 $\alpha \in Split(G, \mathbb{Z})$；当且仅当 n 个顶点 $v_1, ..., v_n$ 两两不相交（即相容）时，它们张成一个 n 维单形。换句话说，存在一个有 n 条边且所有边群都为 $\mathbb{Z}$ 的群图，使其成为所有 v_i 的细化。

3.2 分裂的相交

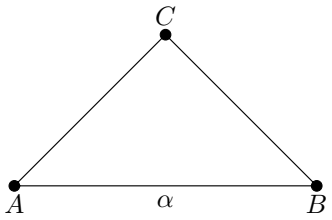
我们还想用分裂的语言来理解两条简单闭曲线何时相交。

定义35。 设（X, $\boldsymbol{G}$）是一个群图，且 T 是一个子图。我们定义一个新图（X/T, $\boldsymbol{G}$（X/T））, 即通过收缩树得到的图，其顶点为 V（X）$\backslash V$（T）$\cup v_T$，其中 v_T 是代表 T的新顶点。

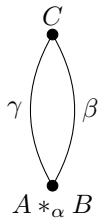
边则为 V（X）$\backslash V$（T）之间与 X 中相同的所有边，以及 v_T 与 V（X）$\backslash V$（T）之间的边，前提是 V（X）$\backslash V$（T）中的某个顶点与 T中的某个顶点之间存在一条边。

$X\backslash T$ 的边和顶点对应的群与原来的（X， $\boldsymbol{G}$）相同，而新顶点 v_T对应的群是（T， $\boldsymbol{G}|_T$）的基本群。

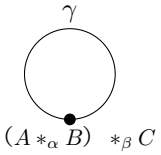
例36. 我们可以利用上述内容来计算以下群图的基本群：



我们先收缩 α 的边，于是得到



接着收缩 β 的边，得到



因此基本群为：$((A *_\alpha B) *_\beta C)*_\gamma$。

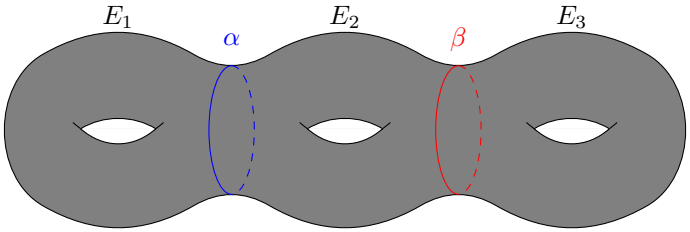
定义 37。 如果存在一个群图，使得折叠其中一条边（折叠由该边及其两个顶点构成的子图）得到第一个分裂，而折叠另一条边得到第二个分裂，则称两个分裂相容，或称不相交。如果两个分裂相容，则称 $i(\alpha,\beta) = 0$；如果它们不相容，则称 $i(\alpha,\beta) \neq 0$。

例如，两个自由积 $A * B = G = A' * B'$ 相容，当且仅当存在 $G = C * D * F$ 的一个分裂，使得 $(C * D) = A, F = B$ 且$C = A'$，$(D * F) = B'$。

不相容分裂也称为相交分裂。

可以证明（见 [31]），两条曲线相交，当且仅当相应的分裂相交。

例38. 假设我们处于下图所示的情形：

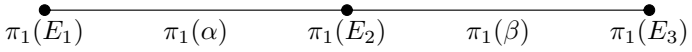


也就是说，一个群 $G = \pi_1(S_3)$以及两条不相交的曲线 α （蓝色曲线）和 β （红色曲线）。沿着它们切开后，我们得到三个子曲面E_1、 E_2、 E_3。

α的分裂将是 $\pi_1(E_1) *_{\pi_1(\alpha)} \pi_1(E_2 \cup E_3)$，而 β的分裂将是 $\pi_1(E_1 \cup E_2) *_{\pi_1(\beta)} \pi_1(E_3)$。

很容易看出这两条曲线不相交，并且这两条曲线都可以同时实现为 $G = \pi_1(E_1) *_{\pi_1(\alpha)} \pi_1(E_2) *_{\pi_1(\beta)} \pi_1(E_3)$。

用群图的形式表示如下：

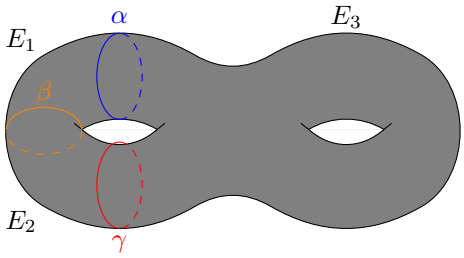


例39。 让我们回到例36，看看它可能具有怎样的几何解释，例如在一个亏格2曲面上。

首先注意，由例 36 中的群图塌缩得到的任何群图，按照定义，当然都不会与这些塌缩相交。

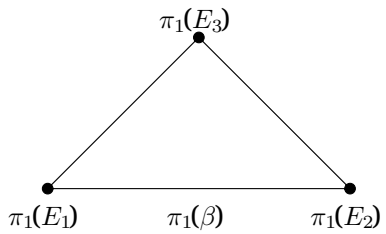
从分裂的形式可知，与边对应的曲线将是非分离曲线；任意切开其中两条都会将曲面分成两个连通分支，而切开全部三条则会得到 3 个连通分支。

由上可知，一种可能的图示如下：



因此我们看到，实际上我们沿着同一个简单闭曲线的同伦类切了 3 次；显然，这条曲线不会与自身相交。

群图可以写成如下形式 s:



注记 40。实际上，我们可以更进一步，衡量分裂之间的不相容程度，并为它们定义一个相交数。

设 T_1 和 T_2 是两个带有群 G 作用的单纯树，令 $C \subset T_1 \times T_2$ 为 $T_1 \times T_2$ 中具有凸纤维的最小非空闭的（在对角作用下）不变子集（如果对于任意 $i \in \{1,2\}$ 和每个 $x \in T_i$， $E \cap p_i^{-1}(x)$都是凸的，则称子集 $E \subset T_1 \times T_2$ 具有凸纤维，其中 p_i 是典范投影）。

这也称为两个图的核心或 Guirardel 核心（更多信息请参见[9] ）。

我们将交数 $i(T_1, T_2)$ 定义为核心的余体积。
当且仅当两个分裂的核心是一维时，它们不相交。
因此，这是[1]的一个公共细化是[1]的一个公共细化是[1]的一个公共细化

这也等价于 c' 不包含在 A 或 B 的某个共轭中。

根据 [31], 中的注记 3.4，若 α 关于 β 是双曲型的，则分裂相交。

3.3 离散群的德恩扭转

定义 41. 给定一个群及其一个 $\mathbb{Z}$ 分裂 $A *_{<c>} B$，定义德恩扭转 δ 为自同构 $\delta(a) = a, \delta(b) = \varphi(c)b\varphi(c)^{-1}$，其中对所有 $a \in A, b \in B$ 均成立。

类似地，给定一个 HNN 扩张 $A*_\theta$，其中 $\theta :< c >\to A$，我们定义德恩扭转 δ 为 $\delta(a) = a$，对所有 $a \in A$ 均成立；并且 $\delta(t) = ct$。

例 42. 设 n 为偶数，并设 G 为具有如下表示的群： $G =< x_1, x_2, ..., x_n : x_1^p[x_1, x_2]...[x_{n-3}, x_{n-2}][x_{n-1}, x_n] = 1 >$。设 A 为由 $n-1$ 个生成元 $x_1, ..., x_{n-1}$ 生成的自由群，并设 θ 为将 x_{n-1} 映到 $x_1^p[x_1, x_2]...[x_{n-3}, x_{n-2}]x_{n-1}$ 的映射，由此得到 G 作为 HNN 扩张 $A*_\theta = \{x_{1,...,}x_{n-1}, t | tx_{n-1}t^{-1} = x_1^p[x_1, x_2]...[x_{n-3}, x_{n-2}]x_{n-1}\}$ 的分裂。与该分裂相关联的德恩扭转作用如下：对所有 $1 \le i \le n-1$， $x_i \mapsto x_i$，且 $x_n \mapsto x_{n-1}x_n$。

很容易看出，这与定义12中构造的外自同构非常相似。

注意，对于 $A' =< x_1, ..., x_{n-2}, x_n >$ 和 θ'，我们得到了 G 作为 HNN 扩张 $A'*_{\theta'} = \{x_{1,...,}x_{n-2}, x_n, t | tx_nt^{-1} = x_1^p[x_1, x_2]...[x_{n-3}, x_{n-2}]x_n\}$ 的另一种分裂，并且很容易检查它们相交。

定义 43。 上述德恩扭转的定义，与由 $H_X = id_X, H_v = id_{\boldsymbol{G}_v}, H_e = id_{\boldsymbol{G}_e}$ 和 δ 给出的群图 $(X, \boldsymbol{G})$ 的自同构相同；该自同构满足：对于每个边群，都存在一个元素 γ_e，属于中心 $Z(\boldsymbol{G}_e)$，使得 $\delta(e) = \varphi_e(\gamma_e)$。集合 $(\gamma_e)_{e \in E(X)}$，其中每个 $\gamma_e \in Z(\boldsymbol{G}_e)$，以及一个基点 $v \in V(X)$，定义了一个德恩扭转。

换言之，对每个 $e \in E(X)$ 取 $\gamma_e \in Z(\boldsymbol{G}_e)$，并选取 X 的一个基点x_0。那么，(γ_e, x_0) 的德恩扭转将按如下方式作用于 $\pi_1(X, \boldsymbol{G}, T)$:

$$t_e \to \gamma_e t_e$$
$$g_v \to \gamma_{e_1} ... \gamma_{e_n} g_v \gamma_{e_n}^{-1} ... \gamma_{e_1}^{-1}$$

对所有满足 $e \notin T$ 的 t_e，以及所有满足 $e_1..e_n$ 的 $g_v \in \boldsymbol{G}_v$，其中 T 中从x_0 到 v的路径。

注记 44。 由上面的定义可得:

-基点处的群作用是平凡的。

-将基点从 x_0 改为 x_1，会使德恩扭转被沿着 T 中连接 x_0 和 x_1的路径 $f_1...f_n$ 的 $\gamma_{f_1}...\gamma_{f_n}$ 共轭。

-该定义与定义 41 相容。对于一个 amalgamated product，基点将选在具有群 A 的位置。

-令 T' 是 X 的子树，则对于所有 $t \in T'$，$(X/T', \boldsymbol{G}(X/T')$ 的德恩扭转与取 $\gamma_t = 1$ 时 $(X, \boldsymbol{G})$ 的德恩扭转相同。

稍后我们考察具有循环边群的群图时，(γ_e) 将是边群生成元。

注记 45。 再一次，这一切都是相容的，并且等于由简单闭曲线所产生的德恩扭转。

综上所述，我们可以问：德恩扭转何时会产生非平凡的映射类，或 G 的非平凡外自同构?

我们以两个关于分裂的交的引理结束本小节。

引理 46. 共轭不会改变两个分裂是否相交。

证明. 见 [31] 注记 1.9。 □

引理 47. 如果两个分裂 α, β 不相交，那么它们的德恩扭转可交换。

证明。 由于这些分裂彼此不相交，因此它们有一个公共细化。然后，可以像定义 43 中那样，在它们的公共细化上实现相应的德恩扭转。参照该定义可知，这些德恩扭转必定彼此交换（见注释 44）。 □

3.4 前有限群与图

定义 48。 拓扑空间 T 若是有限离散空间的逆极限，则称为前有限空间；因此，T 是前有限空间，当且仅当它是紧致、豪斯多夫且全不连通的。

定义 49。 给定一个离散群 G，可以将其前有限完备化 $\hat{}G$ 定义为对所有有限指数正规子群 $N \lhd G$ 取 G/N 的逆极限；将其 pro-p 完备化定义为对所有满足 $|G/N| = p^r$（其中 r为某个整数）的正规子群 N 取 G/N 的逆极限。

注释 50。 上述构造实际上给出了从离散群范畴到前有限群/pro-p 群范畴的一个函子。这个完备化函子是右正合的。

定义 51. 我们称群 G 为剩余有限（分别为剩余 p），如果对每个元素 $1 \neq g \in G$，都存在一个同态 $\varphi\colon\ G \to H$ 到一个有限群（分别为 p 群），使得 $\varphi(g) \neq 1$。

注 52。 一个群是剩余有限（分别为剩余 p）的，当且仅当它到其 profinite（分别为 pro-p）完备化的自然映射是单射。

定义 53. 拓扑图 X 是一个拓扑空间 X，连同一个顶点子集 $V(X)$ 以及两个关联映射 $v_0, v_1\colon\ X \to V(X)$，它们在 $V(X)$ 上是单位映射（这些映射将一条边分别映到其终端顶点和初始顶点）。若 X 是前有限空间，顶点子集 $V(X)$ 是闭的（因而是前有限的），且两个关联映射 $v_0, v_1\colon\ X \to V(X)$ 连续，则称其为前有限图。

如果 $E(X) = X\backslash V(X)$ 是闭的，那么只需在 $E(X)$ 上连续地定义 v_0 和 v_1。一般而言，前有限图 X 的边集 $E(X)$ 不一定是 X 的闭子集（因此也不一定紧致）。

有限抽象图是逆有限图。逆有限图的态射是既连续又为抽象图态射的映射。

事实 54。 每个逆有限图 X 都可以表示为 X的有限商图的逆极限。

利用上述将逆有限图表示为有限图的逆极限这一事实，可以定义空间上的自由逆有限 $\mathbb{F}_p$；与抽象情形类似，还可以定义 X 的链复形以及系数为 $\mathbb{F}_p$的同调群。

如果逆有限图 X 是连通的（当且仅当 $H_0(X,\mathbb{F}_p) = 0$），并且 $H_1(X,\mathbb{F}_p) = 0$，则称其为原-p 树。因此， X是原-p 树，当且仅当$C(X,\mathbb{F}_p)$是正合序列。

事实 55。 *(a)* 原-p 树的每个连通子图都是原-p 树。
(b) 原-p 树的逆极限是原-p 树。
(c) 设 $X_i, i \in I$ 是原有限 p 树 T 的一族原-p 子树。那么子图 $X = \cap_i X_i$ 是一棵原有限 p 树（可能为空）。

设 G 是一个原有限 p 群， X 是一个前有限图。假设 G 从左侧连续作用于前有限空间 X。
如果对所有 $g \in G$、$x \in X$ 和 $i = 0, 1$，都有 $v_i(gx) = gv_i(x)$，我们就称 G （从左侧）作用于前有限图 X。
定义 $G_x = \{g \in G : gx = x\}$ 为元素 $x \in X$ 的稳定子。
令 $\varphi_X : G \times X \to X$ 为由 $\varphi_X(g,x) = gx$ 定义的映射，并令 $pr_G : G \times X \to G$ 为投影。

于是 $G_x = pr_G(\varphi_X^{-1}(x) \cap (G \times \{x\}))$，因此 G_x 是 G 的闭子群。
如果每个元素 $x \in X$ 的稳定子 G_x 都是平凡的，我们就称 G 在 X上自由作用。

若原有限 p 群 G 作用于前有限图 R，则带有商拓扑的 G-轨道空间 $G\backslash X = \{Gx : x \in X\}$ 是一个前有限空间，并具有如下自然的原有限图结构：

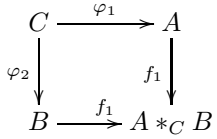
$V(G\backslash X) = G\backslash V(X)$ $v_i(Gx) = Gv_i(x)$，其中 $i = 0, 1$。
因此，存在一个原有限图的自然满同态 $X \to G\backslash X$。
若 $N \lhd G$，则 G/N 在 $N\backslash X$ 上有如下按标准方式定义的作用：$(gN)(Nx) = Ngx$，其中 $g \in G, x \in X$。
设原有限 p 群 G 作用于前有限图 X，且 $N \lhd G$，考虑上文定义的 G/N 在 $N\backslash X$ 上的自然作用。则 G/N 中的稳定子是 G中相应稳定子的满同态像。

例 56. 设 G 是一个原有限 p 群， S 是包含 1 的 G 闭子集。
定义凯莱图 $X(G,S)$ 如下： $X(G,S) = G \times S, V(X(G,S)) = G \times \{1\}, v_0(g,s) = (g,1), v_1(g,s) = (gs,1)$ 对所有 $g \in G, s \in S$均成立。
那么 $X(G,S)$ 是一个前有限图。通过对所有 $(g,s) \in G \times S, g' \in G$，令 $g' \cdot (g,s) = (g'g,s)$，定义 G 在 $X(G,S)$ 上的左作用。

显然，对于所有 $g \in G, x \in X(G,S)$ 和 $i = 0, 1$， $gv_i(x) = v_i(g(x))$，因此 G 在凯莱图 $X(G,S)$ 上自由作用。

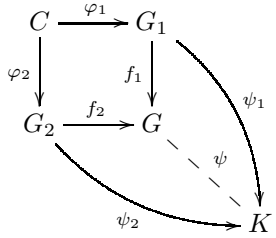
定义57. 设 A、B 和 C 是原有限 p 群，且 $\varphi_1 : C \to A$、$\varphi_2 : C \to B$是原有限 p 群之间的单同态。

A 和 B 以融合子群 C 为融合的 pro-p 融合自由积，是 pro-p 群范畴中的一个推出



换言之，原有限 p 群 $G = A *_C B$满足以下泛性质：

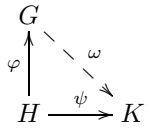
对于任意一对映入满足 $\psi_1\varphi_1 = \psi_2\varphi_2$的原有限 p 群$K$ 的同态 $\psi_1 : A \to K$、$\psi_2 : B \to K$，存在唯一的同态 $\psi : G \to K$，使得下图交换：



由推出的存在性和唯一性可知，融合自由 pro-p 积存在且唯一。

定义58. 设 A 是一个原有限 p 群，且 $\theta : C' \to C$ 是从一个原有限 p 群到 A 的闭子群的连续同构。相对于 (θ, C)的 A的 pro-p HNN 扩张，是一个原有限 p 群 $G = HNN(A, \theta, C) = A*_\theta$，带有一个元素 $t \in G$ 和一个同态 $\varphi: A \to G$，并满足以下泛性质：

对于任意原有限 p 群 K、任意 $k \in K$ 以及任意同态 $\psi : A \to K$，若对所有 $c \in C'$ 都满足 $k\psi((c))k^{-1} = \psi(\theta(c))$，则存在唯一的同态$\omega : G \to K$，使得图表



是交换的，且 $\omega(t) = k$。

注记 59。 请注意，上述泛性质与离散 HNN 和合并积的泛性质相同，但现在是在原有限 p 群的范畴中。

还要注意，只需对有限 p 群 K检验泛性质即可。

定义 60. 我们再次定义 HNN 扩张和 amalgamated 自由积的德恩扭转，不过这次讨论的是 pro-p／profinite 版本:

给定一个群和一个 $\mathbb{Z}_p$ 分裂 $A *_{<c>} B$，我们将德恩扭转 δ 定义为自同构 $\delta(a) = a, \delta(b) = \varphi(c)b\varphi(c)^{-1}$，对所有 $a \in A, b \in B$ 均如此。根据泛性质，这可扩展到 $A *_{<c>} B$

类似地，给定一个 HNN 扩张 $A*_\theta$，其中 $\theta :< c >\to A$，我们将德恩扭转 δ 定义为 $\delta(a) = a$，对所有 $a \in A$ 均如此，并且 $\delta(t) = ct$。同样，根据泛性质，这可扩展到$A*_\theta$。

定义 61. 更一般地，设 $(X, \boldsymbol{G})$ 是一个有限图的 profinite 群，并设 $T \subset X$ 为极大子树 X。

关于 T，群图 $(X, \boldsymbol{G})$ 的 pro有限基本群是一个 profinite 群 $\pi_1(X, \boldsymbol{G}, T)$，以及一个映射

$$\psi : \coprod_{v \in V(X)} \boldsymbol{G}_v \amalg \coprod_{e \in E(X)} < t_e >\to \pi_1(X, \boldsymbol{G}, T)$$

使得对于所有 $e \in E(T)$，$\varphi(t_e) = 1$，并且对于所有$e \in E(X)$ 和 $c \in \boldsymbol{G}_e$，$\psi(t_e\varphi_e(c)t_e^{-1}) = \psi(\varphi_{\bar{e}}(c))$，且 $(\pi_1(X, \boldsymbol{G}, T)\ \psi)$ 关于这些性质是泛的。

上述对象存在，且与极大子树 T 无关；事实上，它等于

$$((\coprod_{v \in V(X)} \boldsymbol{G}_v) \amalg F)/N$$

其中 F 是由所有 $e \in E(X)$ 的 t_e 生成的自由 pro有限群，而 N 是 $\coprod_{v \in V(X)} \boldsymbol{G}_v) \amalg F$ 的最小闭正规子群，包含 $\{t_e :\ e \in E(T)\} \cup \{\varphi_{\bar{e}}(c)^{-1}t_e\varphi_e(c)t_e^{-1} :\ e \in E(X)\ c \in \boldsymbol{G}_e\}$。对于有限 pro-p 群图，这一切也同样成立（见 [28] 第 6 节）。

与经典的 Bass-Serre 理论类似，我们有以下结论（也可见 [28] 第 6 节）：

定理 *62.* 设 $(X, \boldsymbol{G})$ 是一个概形有限群的有限图。那么存在唯一的 *pro*有限树 $S((X, \boldsymbol{G}))$，称为 $(X, \boldsymbol{G})$ 的标准图，$\pi_1(X, \boldsymbol{G})$ 在其上作用，并且商图 $\pi_1((X, \boldsymbol{G}))\backslash S((X, \boldsymbol{G}))$ 同构于 X；此外，点 $s \in S(X, \boldsymbol{G})$ 的稳定子是 $Im(\boldsymbol{G}_{p(s)} \to \pi_1(X, \boldsymbol{G}))$ 的一个共轭，其中 $p : S((X, \boldsymbol{G})) \to X$ 是投影映射。

反过来，一个 *profinite* 群在一棵 *pro*有限树上的作用，若其商为有限图，则可将该 *profinite* 群分解为概形有限群的有限图。

备注 63。请注意，pro-p 群的图也有基本群，其定义依赖于一个泛性质，该性质源自 $G(v)$ 和 t_e。因此，可以类似地定义 pro-p 群的图的德恩扭转（类似于 43）。另请注意，一般而言，它并不只是离散德恩扭转的 pro-p 完备化。

4 Demushkin 群

4.1 庞加莱对偶群背景

现在我们将重点转向 Demushkin 群，它们属于一大类原有限 p 群，这类群满足某种形式的庞加莱对偶。

定义 64. 设 G 是一个无限 pro-p 群。

那么，如果满足以下条件，G 就是维数为 n 的庞加莱对偶群：- $dim_{\mathbb{F}_p} H^i(G,\mathbb{F}_p) < \infty$ 对所有 $i \leq n$均成立- $dim_{\mathbb{F}_p} H^n(G,\mathbb{F}_p) = 1$ - 对所有 $0 \leq i \leq n$，杯积 $H^i(G,\mathbb{F}_p) \times H^{n-i}(G,\mathbb{F}_p) \to H^n(G,\mathbb{F}_p)$ 都是非退化双线性形式。

上述条件等价于如下更“标准”的庞加莱对偶定义：

定义 65. 设 G 是一个上同调维数为 n 的 profinite 群，使得对于每个有限群 G-模 A，$H^n(G,A)$ 都是有限的。

定义对偶化模为挠群 G-模 I，它表示函子 $A \mapsto H^n(G,A)^*$

我们有以下命题，见 [33]:

命题 66. 设 G 是一个 n 维 *Poincare pro-p* 群，则它有一个对偶化模 I，并且：

(a) I 与 $\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p$ 同构，作为阿贝尔群。*(b)* 典范同态 $i: H^n(G, I) \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ 是一个同构

f

$H^n(G, I)$，其中 $\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p$ （作为 $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ 的子群）。

(c) 对于所有有限的 G-模 A 以及所有整数 i，杯积

$$H^i(G,A) \times H^{n-i}(G, Hom(A,I)) \to H^n(G,I) = \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p$$

给出有限群 $H^i(G,A)$ 与 $H^{n-i}(G,Hom(A,I))$之间的对偶性。

将 U_p 记为 p-进单位群。我们有 U_p 是 I的自同构群。由于 G 作用于 I，因此这一作用由一个典范同态给出

$$\chi : G \to U_p$$

这个同态是连续的；它（在同构意义下）确定了 I，我们称 χ 为 G 的定向特征。这个特征是庞加莱对偶群的一个重要不变量。

例 67. 如果 G 是一个维数为 n 的 p-adic 解析群，且它是紧致且无挠的，那么 G 是一个维数为 n 的庞加莱群（参见 [16]）。

设 G 是维数为 $n > 0$的 Poincare 原有限 p 群。
G 的每个开子群也都是维数为 n的庞加莱对偶群。
设 H是 G的真闭子群，则 $Res\colon H^n(G,\mathbb{F}_p) \to H^n(H,\mathbb{F}_p)$ 等于 0。

如果还有 $[G\colon H] = \infty$ （即 H 不是开子群），那么 H 的上同调维数为 $\leq n$。特别地，Demushkin 群的每个无限指数闭子群都是自由原 pro-p 群。

设 G 是 Demushkin 群，且 H 是 G的开子群。则有:

$$rank(H) - 2 = [G : H](rank(G) - 2).$$

4.2 主要结果

现在我们来讨论维数为 2 的庞加莱对偶群，它们也称为 Demushkin 群。

事实上，这类群都是单关系群，并且完全由与 Demushkin 群相关的两个不变量确定：最小（拓扑）生成元个数，以及另一个取决于定向特征的不变量；该特征要么是 ∞ ，要么是素数 p 的某个幂。更准确地说，这个不变量是满足诱导映射 $\chi\colon G \to Aut(\mathbb{Z}_p/p^r\mathbb{Z}_p)$ 为平凡映射的最高幂 p^r。

定理 68. *([3])* 设 G 是一个 *Demushkin* 群，具有 d' 个生成元，其定向特征模 p^r 为零、但模 p^{r+1} 不为零，并且满足 $p \neq 2$。

那么 d' 为偶数， $d' = 2d$，且 G 同构于 F/R，其中 F 是以 x_1, y_1, ..., x_d, y_d 为基的自由 *pro-p* 群，而 R 是由 $x_1^{p^r}[x_1,y_1]...[x_d,y_d]$ 生成的正规闭子群。

对于 $r = \infty$ （即平凡定向特征），我们将 x_1^∞替换为单位元（因此关系就是通常的曲面群关系 $[x_1,y_1]...[x_d,y_d] = 1$）。
此外，所有具有这类表示的群都是 *Demushkin* 群。

当 G 是带有 $p = 2$的 Demushkin 群时，分类由 Serre [32] 和 Labute [15]完成。

我们对 Demushkin 群感兴趣有两个原因：对于离散群，唯一的 2 维庞加莱对偶群是曲面群。
另一个更重要的原因，是以下关于 p 进域的绝对伽罗瓦群（或极大 p-扩张的伽罗瓦群）的最大 pro-p 商的分类；

定理 69. 设 K 是一个 p 进域，其在 $\mathbb{Q}_p$上的度为 N，并且假设 $p \neq 2$:
1) 若 $\mu_p \not\subseteq K$，则 $G_K(p)$ 是一个秩为 $N+1$ 的自由 *pro-p* 群
*2)*如果 $\mu_p \subseteq K$，令 r 为满足 $\mu_{p^r} \subseteq K$ （即 $\mu_{p^{r+1}} \not\subseteq K$）的最大幂，则 $G_K(p)$ 是一个由 $N+2$ 个生成元构成、具有不变量 p^r 的 *Demushkin* 群（注意

由于 $\mu_p \subseteq K$， N 必须为偶数），其对偶化模为 K 的极大 p-扩张中所有单位根构成的群。

换句话说， G_K（p）是由生成元 x_1、 y_1、.....、 $x_{\frac{N}{2}+1}$、 $y_{\frac{N}{2}+1}$以及关系式 $x_1^{p^r}[x_1,y_1]...[x_{\frac{N}{2}+1},y_{\frac{N}{2}+1}]$所定义的原有限 p 群。

在本章余下部分，我们将假设 $p \neq 2$，并用 G表示一个 Demushkin 群；对于 $r' \geq r$ ，用 $\mathcal{G}_{r'}$ 表示具有 $2d$个生成元和 1 个关系式 $x_1^q[x_1,y_1]...[x_d,y_d]y_d^{-p^{r'}}$ 的离散群。当 $r' = \infty$ 时，我们就将其记为 $\mathcal{G}$。

4.2.1 离散 Demushkin 群的分裂

定义 70。 定义 $Split_D(\mathcal{G}_{r'},\mathbb{Z})$ 为并集 $Split_{D,\ amalg}(\mathcal{G}_{r'},\mathbb{Z})$，即将 $\mathcal{G}_{r'}$ 分裂为 $F_{2n}*_{<c>}F_{d-2n}$ 的分裂集合，其中 c映射到 F_{2n} 以及到 $y^{p^{r'}}$ $_d$ $_{[y_d,x_d]\cdot[y_{n+1},x_{n+1}]}$ 在 F_{d-2n} 中，对于某个基 x_i、 y_i以及 $Split_{D,\ HNN}(\mathcal{G}_{r'},\mathbb{Z})$，分裂为 $A*_\theta$ 的集合，其中 A 是由 $n-1$ 个生成元生成的自由群 x_1、.....、 x_{d-1}、 y_{d-1}、 y_d，并令 θ 为将 y_d 映射到 y^{-p^r} 的映射 $_d$ $'$ $x_1^{p^r}[x_1,y_1]...[x_{d-1},y_{d-1}]y_d$。

我们用 $Aut_D(\mathcal{G}_{r'})$ 表示 $Aut(\mathcal{G}_{r'})$ 中由德恩扭转T_α生成的子群；对于 $\alpha \in Split_D(\mathcal{G}_{r'},\mathbb{Z})$， $Aut_D(\mathcal{G}_{r'})$ 在 $Out(\mathcal{G}_{r'})$ 中的像记为 $Out_D(\mathcal{G}_{r'})$。

注 71。 我们将自己限制在这类分裂上，因为我们不知道如何对离散群的所有分裂进行分类，而且从某种意义上说，对于我们的应用而言也没有必要这样做。

根据 [37] 定理 5.18 和 [38] 定理 3.3，对于 Demushkin 群，这些是唯一的分裂。因此，在考察 pro-p 情形的德恩扭转时，我们唯一的限制是边稳定子为循环群。

定理 72. 固定一个基 $x_1,y_1...,x_d,y_d$，令 α 为 $\mathcal{G}$的分裂为 $A*_\theta$，其中 A 是以 $d-1$ 个生成元 $x_1,y_1...,x_d$为基的自由群，并令 θ 为将 x_d 映到 $x_1^p[x_1,y_1]...[x_{d-1},y_{d-1}]x_d$ 的映射，则 T_α^k在 $Out(\mathcal{G})$中非平凡。

证明。 令 β 为分裂 $B =< x_1,y_1...x_{d-1},y_{d-1},y_d >$ ，并且 θ' 我们有 $B*_{\theta'} = \{x_1,y_1...x_{d-1},y_{d-1},y_d,t|tx_nt^{-1} = x_1^p[x_1,y_1]...[x_{d-1},y_{d-1}]y_d\}$。

考察 x_d 在 β 的树上的作用的平移长度，可知其为正，因为 x_d 不与 B 的任何元素共轭，因此分裂 α 和 β 相交。

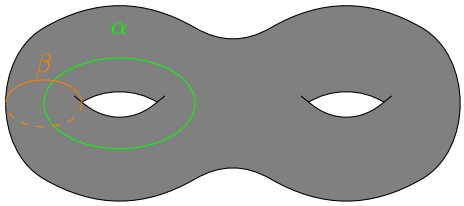
同样，我们有 $T_\alpha^k(y_d)$ 在 β 的树上的作用的平移长度为正，因为 $y_dx_d^k$ 不与 B 的任何元素共轭，因此分裂 $T_\alpha^k(\beta)$ 和 β相交。

现在假设 T_α^k 是内自同构，即通过共轭作用。

由于共轭不会改变两个分裂是否相交（引理 46），且任何分裂都不与自身相交，因此我们得到矛盾。

因此， T_α^k 是外自同构。 □

备注 73。 在上述情形中，当 $r = \infty$ 时，我们得到 α 和 β 的如下图示：



定理 74. 令 α 为 $\mathcal{G}_{r'}$ 的分裂，分裂为 $F_{2n} *_{<c>} F_{2d-2n}$，其中 c 在 F_{2n} 中映射到 $x_1^q[x_1,y_1]...[x_n,y_n]$，在 F_{2d-2n} 中映射到 $y_d^{p^{r'}}[y_d,x_d]..[y_{n+1},x_{n+1}]$，那么 T_α^k 在 $Out(\mathcal{G}_{r'})$中非平凡。

证明。与定理 35 类似：

令 β为分裂 $B =< x_1,y_1,...,x_n,y_{n+1},x_{n+2},y_{n+2},..,x_d,y_d,b >$，其中 $b = y_n^{-1}x_{n+1}$ 带有粘合映射

$$\theta'(b^{-1}x_n^{-1}by_{n+1}) = x_n^{-1}[y_{n-1},x_{n-1}]...[y_1,x_1]x_1^q y_d^{p^{r'}}[y_d,x_d]...[y_{n+2},x_{n+2}]y_{n+1}$$

因此我们有

$$B*_{\theta'} = \{B,t| \begin{array}{c} tb^{-1}x_n^{-1}by_{n+1}t^{-1} = \\ x_n^{-1}[y_{n-1},x_{n-1}]...[y_1,x_1]x_1^q y_d^{p^{r'}}[y_d,x_d]...[y_{n+2},x_{n+2}]y_{n+1} \end{array} \}$$

其中 t 在 $\mathcal{G}_{r'}$中应为 x_{n+1}。

考察 $x_{n+1}^{-1}y_nx_n^{-1}y_n^{-1}x_{n+1}y_{n+1}$在 α 的树上的作用的平移长度，可知其为正，因为它不共轭于 $< x_1, ..., y_n >$中的任何元素，也不共轭于 $< x_{n+1}, ..., y_d >$中的任何元素（由于 x_n 和 y_{n+1}的幂次和都非零），因此分裂 α 和 β 相交。

同样，$T_\alpha^k(b^{-1}x_n^{-1}by_{n+1})$ 在 β 的树上的作用的平移长度为正，因为 $x_{n+1}^{-1}\gamma^k y_n x_n^{-1}y_n^{-1}\gamma^{-k}x_{n+1}y_{n+1}$ 不与 B 的任何元素共轭；这是由于词中间出现了 γ 所产生的“远离 x_{n+1}”的 y_n，而 $\gamma = x_1^q[x_1,y_1]...[x_n,y_n]$。

例如，当 $k=1$ 时，我们有：

$$x_{n+1}^{-1}x_1^q[x_1,y_1]..[x_{n-1},y_{n-1}][x_n,y_n]x_n^{-1}[y_{n-1},x_{n-1}]...[y_1,x_1]x_1^{-q}x_{n+1}y_{n+1}$$

显然它不与 B 的元素共轭，因此分裂 $T_\alpha^k(\beta)$ 和 β 相交。

注意，也可以看出 $T_\alpha^k(\beta)$ 与 β 相交，因为若非如此，我们便会得到 $T_{T_\alpha^k(\beta)}$ 与 T_β 交换（根据引理 47）。

但根据引理 88，我们有 $T_{T_\alpha^k(\beta)} = T_\alpha^k T_\beta T_\alpha^{-k}$，直接计算（例如使用 Dehn 算法求解字问题）即可证明 $T_\alpha^k T_\beta T_\alpha^{-k}T_\beta(x_{n+1}) \neq T_\beta T_\alpha^k T_\beta T_\alpha^{-k}(x_{n+1})$。

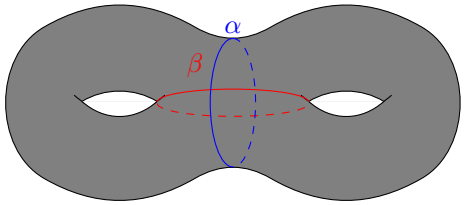
现在假设 T_α^k 是内自同构的，即通过共轭作用。

由于共轭不会改变两个分裂是否相交（引理 46），而任何分裂都不会与自身相交，因此我们得出矛盾。

因此，T_α^k 是外自同构。 □

注记 75。 注意，要得到合并自由积，我们需要 d >1，这与需要曲面的亏格大于 1 才有分离曲线类似。

注 76。 在上述情形中，当 $r=\infty$ 时，对于 α 和 β，我们得到的图景几乎如下图所示（只是“几乎”如此，因为 β 在其表示中加入了一些额外的“扭转”，以使其更便于处理）：



4.3 Demushkin 型关系的 pro-p 刚性

4.3.1 p-有效分裂

现在我们描述一种性质，它将使我们能够从证明离散群 $\mathcal{G}$ 的性质转而证明 Demushkin 群 G的性质。

定义 77。 若离散群图 $\mathscr{G}=(X,F)$满足： $\pi_1(\mathscr{G})$是剩余 p 的，每个群 F_x 在 $\pi_1(\mathscr{G})$上的 pro-p 拓扑中都是闭的，并且 $\pi_1(\mathscr{G})$在每个 F_x上诱导完整的 pro-p 拓扑，则称其为 p-高效。

注 78。 设(X,F)是一个离散群图，例如，若 X 是一条边，则它ˆ或者是 $F_1 *_L F_2$，或者是 $F_1 *_L$。如果它是 p-高效的，那么我们将得到(X,F)是一个原有限 p 群的单射图（即顶点群单射到基本群中），并且 $\pi_1(X,F)$的 pro-p 完备化是 $\pi_1(X,F)$；其中ˆ表示 pro-p 完备化，而第二个 π_1 是在 pro-p 群图的范畴中的基本群。

对于只有 F_2 条边的图，这意味着 $\widehat{F_1 *_L} \cong \hat{F}_1 *_{\hat{L}}$，其中每个同构左侧的合并自由积/HNN 扩张属于离散群范畴，而右侧属于原 p 完备化群范畴。

换句话说，如果一个群图是 p-高效的，那么取基本群与取 pro-p 完备化可交换，并且离散基本群嵌入 pro-p 基本群。

命题 79. 每个群 $\mathcal{G}_{r'}$ 都是剩余 p 的。

证明。由 [7]。 □

命题 80. 设 $\alpha \in Split_D(\mathcal{G}_{r'},\mathbb{Z})$。那么对任意 s，都存在 $\mathcal{G}$ 的一个 p 群商，使得 $\mathcal{G}_e$的生成元 c的像 p^s 是挠元。特别地， $\mathcal{G}$ 在 $\mathcal{G}_e$上诱导出完整的 *pro p* 拓扑。

证明. 如果 α 是 HNN 扩张，那么 c 是 $\mathcal{G}^{ab}$中的一个非平凡本原元，因此任何将 c 映至 1 的映射 $\mathcal{G} \twoheadrightarrow \mathbb{Z}/p^s$都可以。

否则，我们有一个基，使得 $\alpha = F_{2n} *_{<c>} F_{2d-2n}$ 其中 c 映射到 $x_1^q[x_1, y_1]...[x_n, y_n]$ 在 F_{2n} 中，并映射到 $[x_{n+1}, y_{n+1}]...[x_d, y_d]y_d^{-p^{r'}}$ 在 F_{2d-2n}中。

若 $r', r \geq s$，我们定义从 F_{2n}, F_{2d-2n} 到系数取自 $\mathbb{Z}/p^s$的海森堡群的映射

$$\mathcal{H}(\mathbb{Z}/p^r) = \{\begin{pmatrix} 1 & x & y \\ 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : x, y, z \in \mathbb{Z}/p^s\}$$

将 x_{n+1}, x_1映射到 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，$y_{n+1}$，将 y_1映射到 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，并将其余的$x_i, y_i$ 映射到单位元。因此， c 的像将是，其阶恰为 p^s。映射 $\mathcal{G} \to \mathcal{H}(\mathbb{Z}/p^s) *_{\mathbb{Z}/p^s} \mathcal{H}(\mathbb{Z}/p^s) \to \mathcal{H}(\mathbb{Z}/p^s)$，其中最后一个映射将 $\mathcal{H}(\mathbb{Z}/p^s)$的两个副本识别为同一个，是所需的商群。

若 $r < s \leq r'$，则我们将 F_{2n} 映到 $\mathbb{Z}/p^{r+s}$，并将所有生成元映到单位元，因此将 c 映到一个阶为 p^s的元素；我们将 F_{2d-2n} 映到 $\mathcal{H}(\mathbb{Z}/p^{r+s})$，但现在将 x_{n+1} 映到 $\begin{pmatrix} 1 & p^r & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$。

映射 $\mathcal{G} \to \mathcal{H}(\mathbb{Z}/p^{r+s}) *_{\mathbb{Z}/p^{r+s}} \mathbb{Z}/p^{r+s} = \mathcal{H}(\mathbb{Z}/p^{r+s})$ 的像就是所需的商群。

若 s, r' 将除，则我们将所有生成元都映到单位元，而将 x_1 映到 $p^{r'-r}$，因此将 c 映到一个阶为 p^s 的元素，由此得到所需的 $\mathcal{G}$ 的商群。 □

定义 81. 设 P 是一个有限 p 群。 P 的主列是正规子群序列 $1 \leq P_n \leq P_{n-1} \leq ... \leq P_2 \leq P_1 = P$，其中 P 的每个商群 P_i/P_{i+1} 或者是平凡群，或者同构于 Z/pZ。

我们首先需要 Higman 的以下定理 [10]:

定理 82. 设 A 和 B 是具有公共子群 $A \cap B = U$的有限 p-群。那么，当且仅当存在 A 和 B 的主列 $\{A_i\}$ 和 $\{B_i\}$，使得 $\{U \cap A_i\} = \{U \cap B_i\}$时， $A *_U B$ 是剩余 p 的。特别地，当 U 是循环群时， $A *_U B$是剩余 p 的。

命题 83. $Split_{D,amalg}(\mathcal{G}_{r'}, \mathbb{Z})$中的一个分裂 $\mathcal{G}_{r'} = G_1 *_L G_2$是一个 p-有效分裂。

证明。令 $H \lhd_p G_1$ 和 $P_1 = G_1/H$，并假设 $LH/H \cong Z/p^r Z$。根据命题 80，存在一个 p-群商群 $G_2 \to P_2$，使得 L 的像也与 $Z/p^r Z$同构。所得商群 $P_1 *_{Z/p^r Z} P_2$ 是剩余 p 的（根据定理 82），因此它有一个 p- 群商群 Q，能够区分 P_1中的所有元素。

复合映射 $G_1 \to \mathcal{G} \to P_1 *_{Z/p^rZ} P_2 \to Q$ 的核是 H，因此 $\mathcal{G}$在 G_1上诱导出完整的 pro-p 拓扑学， G_2也同理。

给定 $g \in \mathcal{G} \backslash G_1$，我们可以写成 $g = a_1 b_2 \cdots a_n b_n$，其中 $a_i \in G_1$、 $b_i \in G_2$ 都不属于 L，但 $b_n = 1$ 或 $a_1 \in L$可能例外。

接下来，我们有 $H_i \lhd_p G_i$，使得每个 a_j （分别为 b_j）在$P_1 = G_1/H_1$ 中的像（分别为 $P_2 = G_2/H_2$）都不在 L的像中。

根据命题 80，实际上我们可以令 H_i 满足：L 的像在两个 P_i 中都是Z/p^rZ 。

根据构造，像 $\phi(g)$ 不属于 P_1，其中 ϕ 是 $\mathcal{G} \to P_1 *_{Z/p^r} P_2$ 的商映射。

由于 $P_1 *_{Z/p^r} P_2$ 是剩余 p 的（根据定理 82），我们可以找到 $P_1 *_{Z/p^r} P_2$ 的一个 p-群商 Q，使 $\phi(g)$ 与 P_1 区分开来。

映射 $\mathcal{G} \to Q$ 区分 g 与 G_1，因此 G_1 在 $\mathcal{G}$中是 p-可分的， G_2的情形也类似。 □

现在我们需要 Chatzidakis [1] 的以下定理：

定理 84. 设 P 是有限 p-群， A 和 B 是 P的子群，且 f： $A \to B$ 是一个同构。

假设 P有一个主列 $\{P_i\}$，满足对所有i，均有 $f(A \cap P_i) = B \cap P_i$，并且对所有 i，诱导映射 f_i： $AP_i \cap P_{i-1}/P_i \to BP_i \cap P_{i-1}/P_i$ 都是单位元。

那么 P 可嵌入有限 p-群 T 中，且其中 f 由共轭诱导。因此， HNN扩张 $P*_f$是剩余 p的。

命题 85. 对于 θ： $A \to B$（循环群之间的同构），$Split_{D,HNN}(\mathcal{G}_{r'}, \mathbb{Z})$，$\mathcal{G}_{r'} = H*_\theta$ 中的一个分裂是 p 高效分解。

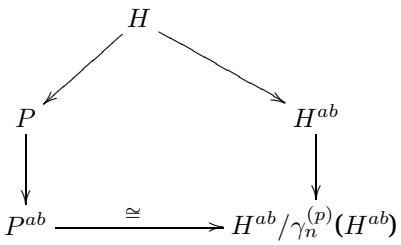
证明。设 $x_1, ..., x_{d-1}, y_{d-1}, y_d$ 是 $\mathcal{G}_{r'}$ 的生成元，使得 $A = y_d$ 和 $B = y_d^{-p^{r'}} x_1^{p^r} [x_1, y_1] ... [x_{d-1}, y_{d-1}] y_d$。

首先我们将证明， $\mathcal{G}_{r'}$ 在 H 上诱导出完整的 pro-p 拓扑。

设 $P = H/\gamma_n^{(p)}(H)$ 是 H 的下中心 p-商群之一，并设 ϕ: $H \to P$ 为商映射。

分别设 a 和 b 为 $\phi(A)$ 和 $\phi(B)$ 的生成元，并且

由于换位子群和下中心 p-级数的各项都是词子群，因此存在一个交换图：



因此 $P^{ab} = H^{ab} \otimes Z/p^{n-1}Z$。

a 在 P 中的像因此阶至少为 p^{n-1}；根据下中心列的定义， P 中的任何元素的阶至多为 p^{n-1}。

因此， A 在 P 中的像嵌入 P^{ab}。

由于 P 是 H 的特征商群，且存在一个H 的自同构将 a 映射到 b，因此 b 的阶也将为 p^{n-1}。

此外，若我们将 a和 b在 $P^{ab}/ < \psi(x_1) >$中的像分别记为 $\bar{a}$、 $\bar{b}$，其中 ψ是从 H到 P^{ab}的映射，则有 $\bar{a}^{-p^{r'}}\bar{a} = \bar{b}$。

现在为 P构造一个主列 $\{P_i\}$，使其最初的 n 项是 $P^{ab}/ < \psi(x_1) >$ 的一个主列各项的原像；该主列与 $P^{ab}/ < \psi(x_1) >$ 中由 a的像生成的子群上的一个主列相交。

于是，对于 $i \geq n$，我们有 $\phi(A) \cap P_i = \phi(B) \cap P_i = 1$；而对于 $i < n$，定理 84 的条件由构造可知成立。

因此 $P*_{\phi(A)}$ 是剩余 p，我们可以取一个 p-群商群 $P*_{\phi(A)} \twoheadrightarrow Q$，其中 P 的任何元素都不会被消去。

复合映射 $H \to G \to P*_{\phi(A)} \to Q$ 的核是 $\gamma_n^{(p)}(H)$，符合要求。

要证明 H 在 G中是 p-可分的，按照命题 83 的证明进行：将 $g \in G\backslash H$ 写成由 HNN扩张意义下的约化字，并取一个足够深的下中心 p-商群 $P = H/\gamma_n^{(p)}(H)$，使得g 在 $P*_{\phi(A)}$ 中的像仍是一个不属于 P的约化字。

如上所示， $P*_{\phi(A)}$ 是剩余 p，因此存在一个 p-群商群 Q，可以区分 g 的像与 P的像。

这个商群 Q of G 表明 H 在 G中是 p-可分的。 □

由上文可得:

推论 86. $\mathbb{Z}$ 在 $Split_D(\mathcal{G}_{r'}, \mathbb{Z})$ 中的每个 $\mathcal{G}_{r'}$ 分裂都是 p-高效的。

注 87. 正如引言中提到的，命题 83 和 85 的证明是对 Wilkes [36] 证明的直接推广。

引理 88. 设 α 是 G 的一个分裂，并设 $\phi \in Aut(G)$，则： $T^k_{\phi(\alpha)} = \phi T^k_\alpha \phi^{-1}$。

证明. 设 α 将 G 分裂为合并自由积 $G_1 *_H G_2$。根据合并自由积的泛性质（见定义57），只需证明 $T^k_{\phi(\alpha)} = \phi T^k_\alpha \phi^{-1}$在两个子群$\phi(G_1)$ $\phi(G_2)$上成立。

由于德恩扭转在第一个因子上平凡作用，因此得到 $T^k_{\phi(\alpha)} = \phi T^k_\alpha \phi^{-1}$ 在 $\phi(G_1)$ 上。

在 $\phi(G_2)$ 上， $T^k_{\phi(\alpha)}$ 通过 $(\phi(h))^k$ 的共轭作用，其中 h 是 H 的固定生成元。

设 $\phi(g) \in \phi(G_2)$，则 $\phi T^k_\alpha \phi^{-1}(\phi(g)) = \phi(T^k_\alpha(g)) = \phi(h^{-k}gh^k) = (\phi(h))^{-k}\phi(g)(\phi(h))^k$，因此作用仍是通过 $(\phi(h))^k$的共轭作用。

由此可得 $T^k_{\phi(\alpha)} = \phi T^k_\alpha \phi^{-1}$，其中 α 是一个合并自由积。

对于 α HNN 扩张的情形，情况非常相似，利用 HNN 扩张的泛性质即可（见定义58）。

□

推论 89. 如果 $\alpha, \beta \in Split(G, \mathbb{Z}_p)$ 属于同一个 $Aut(G)$ 轨道，那么 T_α^k 是内自同构，当且仅当 T_β^k 是内自同构。

证明。令 $\phi \in Aut(G)$ 为满足 $\phi(\alpha) = \beta$ 的自同构，并假设 T_α^k 是由 $g \in G$ 共轭得到的自同构。

令 $x \in G$，则 $T_\beta^k(x) = T_{\phi(\alpha)}^k(x) = \phi T_\alpha^k \phi^{-1}(x) = \phi(g^{-1}\phi^{-1}(x)g) = \phi(g^{-1})\phi(\phi^{-1}(x))\phi(g) = \phi(g^{-1})x\phi(g)$，因此我们得到 T_β^k 是内自同构，由 $\phi(g)$ 共轭得到。

另一个方向的证明类似。 □

4.3.2 循环群分裂的复形 s

现在我们证明，实际上 G 的任意分裂都"来自于"某个 $r' \geq r$ 的 $\mathcal{G}_{r'}$ 分裂。

定义 90。 对于分裂 x 和 y，若 x 是 y 的细化，我们就称 $x \leq y$。

定理 91. 对于每个 $r' \geq r$，我们都有一个 $Aut(\mathcal{G}_{r'})$-等变映射 $j : Split_D(\mathcal{G}_{r'}, \mathbb{Z}) \to Split(G, \mathbb{Z}_p)$，并具有以下附加性质：$x \leq y$ 当且仅当 $j(x) \leq j(y)$；如果 $z \in Split(G, \mathbb{Z}_p)$ 具有 $z \leq j(y)$，那么对于某个 $x \leq y$，$z = j(x)$。

证明。 i的构造：

取某个 r' 的 $\alpha \in Split_D(\mathcal{G}_{r'}, \mathbb{Z})$，根据推论 86，它是 p-高效的。

因此，根据 [28] 命题 6.5.3 和 6.5.4，存在 G 的一个诱导分裂，它是由原有限 p 群构成的单射图，且边群为原循环群。

与此分裂对偶的标准树（见 [28] 定理 6.5.2）是 $Split(G, \mathbb{Z}_p)$ 中元素 $j(\alpha)$ 的一个代表。

注意，分裂 α of $\mathcal{G}_{r'}$ 的 Bass-Serre 树自然嵌入为 $j(\alpha)$ 的 Bass-Serre 树的一个抽象子图；根据命题 6.5.4，该子图在其拓扑中再次 [28] 稠密。

由于 $x \leq y$ 当且仅当 $\mathcal{G}_{r'}$ 对应于 x 的群图分解可由 y 对应的分解通过收缩某些群子图得到；而同一个被收缩的子图也可以在 $j(x) \leq j(y)$ 中找到，因此，当且仅当 $j(x) \leq j(y)$ 时，我们有 $x \leq y$。

如果 z 的群图是通过收缩 $j(y)$ 中的某些群子图得到的，那么对与 y 对应的离散群图进行相同的收缩，就能得到所需的 x。 □

注记 92。细化这一性质表明，该映射实际上是复形 $\mathcal{C}_D(\mathcal{G}_{r'})$ 与 $\mathcal{C}(G)$ 之间的映射。

我们现在希望：

定理 93。 映射

$$j : \amalg_{r' \geq r} Split_{D,\ amalg}(\mathcal{G}_{r'}, \mathbb{Z})/Aut(\mathcal{G}) \amalg Split_{D,\ HNN}(\mathcal{G}, \mathbb{Z})/Aut(\mathcal{G}) \to Split(G, \mathbb{Z}_p)/Aut(G)$$

是一个双射，对于 *HNN*扩张有1 个轨道，并且对于每一对整数 $r' \geq r$ 和 $1 \leq n \leq d$, 恰好有 *1* 个轨道。

证明。设 α 为定理 72 或 74 中的 HNN 扩张，其中某个整数 n 介于 1 与 d之间。

我们将证明，任意 $\beta \in Split(G, \mathbb{Z}_p)$都存在某个 $\psi \in Aut(G)$，使得$\psi(\beta) = j(\alpha)$。

取这样的 $\beta \in Split(G, \mathbb{Z}_p)$。

先假设 β 是一个合并原-p积 $G_1 *_L G_2$。

由 [38] 中的 PD^2 对的分类、定理 3.3，以及 [37], 中的定理 5.18 可知，存在某组基，使得 G_1 是秩为 $2n$ 的自由群， G_2是秩为 $2d-2n$的自由群，并且 L在 G_1中的像为 $x_1^{p^s}[x_1, y_1]...[x_n, y_n]$，在 G_2中的像为 $y_d^{p^{s'}}[y_d, x_d]...[y_{n+1}, x_{n+1}]$，其中 s和 s'。

由于这对 G的对偶化模是s的限制，因此我们有 $s' \geq r$。

另一方面，若 s和 $s' > r$ 均成立，则模 p^r 后两个映射都是平凡的，因此根据融合积的泛性质，我们会得到 χ_G也成立，这与 r的定义矛盾。

因此， $s' = r$ 或 $s = r$成立。假设 $s = r$成立。

取$\alpha \in Split_{D,\ amalg}(\mathcal{G}_{r'}, \mathbb{Z})$为 $\mathcal{G}_{r'} = F_{2n} *_{L'} F_{2d-2n}$，其中 $r' = s'$ 以及$2n = rk(G_1)$，且 $L' =< c >$ 是循环群；对某个基 x_i， y_i，我们将 c 映射到F_{2n}中的 $x_1^q[x_1, y_1]...[x_n, y_n]$ ，并映射到 F_{d-2n}中的 $y_d^{p^{r'}}[y_d, x_d]..[y_{n+1}, x_{n+1}]$。

考察 $j(\alpha)$，我们得到群对之间的同构（见 [37]）：(G_1, L) 到 $j((F_{2n}, L'))$，以及 (G_2, L) 到 $j((F_{2d-2n}, L'))$。它们拼接起来构成一个 G 的自同构群元素，将 $j(\alpha)$ 映到 β。

给定 $G = G_1' *_{L''} G_2'$ 的另一个分裂 β'，使得存在 $\varphi \in Aut(G)$，且 $\varphi(\beta') = \beta$，那么（在 G_1' 和 G_2'之间可能进行转换后）必有 G_1' 是秩为 $2n$ 的自由群，且 G_2' 是秩为 $2d-2n$ 的自由群；并且对于 G_1、G_2 的同一个 s 和 s'， L 在 G_1 中的像是 $x_1^{p^s}[x_1, y_1]...[x_n, y_n]$，在 G_2 中的像是 $y_d^{p^{s'}}[y_d, x_d]...[y_{n+1}, x_{n+1}]$。

对于 β 是 HNN 扩张 $G_1 *_L$ 的情形，在寻找两个同构映射到 F_{2d-1} 时需要更加谨慎，以确保它们能够适当地粘合成 G 的一个自同构。

这种粘合是可行的，其证明与 [38] 的定理 4.6 第 (3) 部分末尾的证明相同。 □

注 94。如引言中所述，上述定理表明，每个分裂都来自某个已知的分裂列表。关于这一点的证明与曲面群的 pro-p 完备化情形相似，参见 [38]。

由于 $\mathcal{G}_{r'}$ 具有同构的 pro-p 完备化，但作为离散群却有无穷多个同构类（见引理101），我们需要将它们全部纳入。另一方面，由于我们希望得到一个双射，而 HNN 扩张都只有单个轨道，因此我们只需从一个 $\mathcal{G}_{r'}$ 中取 HNN 扩张；为方便起见，我们选择 $r' = \infty$ 。

现在我们需要关于 G的分裂的最后两个引理:

引理 95. 设 $\alpha \in Split_{D,amalg}(\mathcal{G}_{r'}, \mathbb{Z})$，且 β 是一个与 α 有非平凡相交的分裂。令 c 为 β 的边的生成元，则存在一个同态 $\varphi: G \to P$，使得 P 是一个有限 p 群，并且 $\varphi(c)$ 不与 $\varphi(T_\alpha^k(c))$共轭。

证明。该引理与 [25] 中的命题 4.5 相同（其中该命题针对曲面得到了证明），此处 $g = c, h = \varphi(T_\alpha^k(c))$，且该分裂为 α。

由于我们要将一个元素与其在 α 的德恩扭转下的像分离，因此可知我们恰好处于 [25]，中命题 4.5 证明的情形 3；对于这种情形，同样的证明也适用于我们的群 $\mathcal{G}_{r'}$。 □

引理 96。 设 $\alpha \in Split_{D,HNN}(\mathcal{G}, \mathbb{Z})$，则存在一个分裂 β，它与 α 有非平凡交集，并存在一个同态 φ: $G \to P$，使得 P 是一个有限 p 群，且 $\varphi(c)$ 不与 $\varphi(T_\alpha^k(c))$共轭，其中 c 是 β 的边的生成元。

证明。经过坐标变换后，我们可以假设 α 是 $\mathcal{G}$ 分裂为 $A*_\theta$ 的分裂，其中 A 是由 $d-1$ 个生成元 $x_1, y_1 ..., x_d$ 生成的自由群，并令 θ 为将 x_d 映射到 $x_1^p[x_1, y_1]...[x_{d-1}, y_{d-1}]x_d$ 的映射。

令 β 为分裂 $B =< x_1, y_1, .., x_{d-1}, y_d, b >$，其中 $b = y_{d-1}^{-1}x_d$ 且$\theta'(b^{-1}x_{d-1}^{-1}by_d) = x_{d-1}^{-1}[y_{d-2}, x_{n-2}]...[y_1, x_1]x_1^q y_d$ 是粘合映射：

$$B*_{\theta'} = \{B, t| \begin{array}{c} tb^{-1}x_{d-1}^{-1}by_d t^{-1} = \\ x_{d-1}^{-1}[y_{d-2}, x_{n-2}]...[y_1, x_1]x_1^q y_d \end{array} \}$$

其中 t 在 $\mathcal{G}$ 中应为 x_d。

注意，出于与定理 72 中相同的原因，我们会得到 $T_\alpha^k(\beta) \neq \beta$。

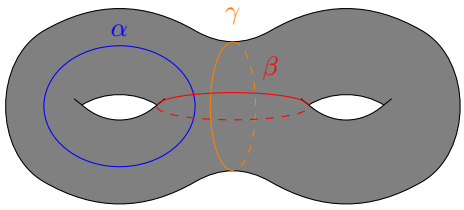
令 $c = x_d^{-1}y_{d-1}x_{d-1}^{-1}y_{d-1}^{-1}x_d y_d$。

那么，我们的引理陈述与 [25] 中的命题 4.5 相同（其中该命题已针对曲面证明），对于 $g = c, h = \varphi(T_\alpha^k(c))$，且分裂为$F_{2d-2} *_{x_1^q[x_1,y_1]...[x_{d-1},y_{d-1}]=[y_d,x_d]} F_2 = \gamma$。

在分裂 $F_{2d-2} *_{x_1^q[x_1,y_1]...[x_{d-1},y_{d-1}]=[y_d,x_d]} F_2$ 下写出 c，我们得到 $c = (x_d^{-1})(y_{d-1}x_{d-1}^{-1}y_{d-1}^{-1})(x_d y_d)$ 和 $\varphi(T_\alpha^k(c)) = (x_d^{-1})(y_{d-1}x_{d-1}^{-1}y_{d-1}^{-1})(x_d x_d^k y_d)$。

我们看到，要么是 [25]，中命题 4.5 的情形 2；由于在 F_2 上的边是 $\gamma = [y_d, x_d]$，我们有引理 4.8，因此证明其余部分仍然适用；要么是 [25]，中命题 4.5 证明的情形 3，而对于这种情形，我们的群 $\mathcal{G}$ 也完全可以沿用同一个证明。

注意到，上述内容与下图几乎对应（之所以只是几乎对应，是因为 β 被放入了一种更易于处理的表示中）：



□

引理 97. Out_D（$\mathcal{G}_{r'}$）在 $Split$（G，$\mathbb{Z}_p$）上的作用是忠实的。

证明。首先，根据定理 74 和引理 96 的证明，我们得到 T_α^k 有一个分裂 $\beta \in Split(\mathcal{G},\mathbb{Z})$，使得 $T_\alpha^k(\beta) \neq \beta$。我们想证明，对于该 β，也有 $T_\alpha^k(j(\beta)) \neq j(\beta)$。

由于 j 是 $Aut(\mathcal{G})$-等变的，我们需要证明 $j(T_\alpha^k(\beta)) \neq j(\beta)$。

设 c 是 β 的边的生成元，我们要证明 c 和 $T_\alpha^k(c)$ 在 G 中不共轭。

根据 $T_\alpha^k(\beta) \neq \beta$，我们已经知道它们在 $\mathcal{G}$ 中不共轭。
由引理 95 或 96 可知，$T_\alpha^k(c)$ 和 c 在 G 中不共轭，证毕。

□

定理 91 和引理 97 给出：

推论 98。自然映射 ϕ：$Out_{Dehn}(\mathcal{G}) \to Out(G)$ 是一个单射。

由于所有分裂都是 p-有效的，我们得到：

推论 99。我们有 $\phi(T_x^k) = T_{j(x)}^k$，因此，如果 T_x^k 是外自同构，那么 $T_{j(x)}^k$ 也是外自同构。

推论 100。给定 $\alpha \in Split(G,\mathbb{Z})$，对于任意 $k \neq 0$，有 $T_\alpha^k \neq 0$ 属于 $Out(G)$。

证明。令 $\alpha \in Split(G,\mathbb{Z}_p)$，根据定理 93，我们有 $\phi \in Aut(G)$，使得 $\phi(\alpha) = j(x)$，其中存在某个 $x \in Split_D(\mathcal{G}_{r'},\mathbb{Z})$，以及某个 r'。
根据定理 72 和 74，T_x^k 是外自同构，因此根据引理 99，$T_{j(x)}^k$ 也是外自同构。
由推论 89 可知，T_α^k 是外自同构，正如所需。 □

4.3.3 一族非 pro-l 刚性群

最后，我们将上述讨论的例子应用于群论。

正如我们所见，所有群 $\mathcal{G}_{r'}$ 都有相同的（非自由）pro-p 完备化，即 Demushkin 群 G。
另一方面，对于所有 $l \neq p$，我们也有相同的 pro-l 完备化，即由 $2d-1$ 个生成元生成的自由 pro-l 群。
这是由于关系 $w_{r'} := x_1^q[x_1,y_1]\cdots[x_d,y_d]y^{-p^{r'}}$ 不属于 $\hat{F}_l$，$(\hat{F}_l)^l$，其中 $\hat{F}_l$ 是由生成元 $\{x_1,y_1,...,x_d,y_d\}$ 生成的自由 pro-l 群，因此 $w_{r'}$ 是 F_l 中的本原元。
我们想要证明这些群作为离散群彼此不同构，下面的引理将给出证明：

引理101. 给定一个群 $\mathcal{G}_t$ 对于某个 $t \geq r$，存在有限多个 $k \geq r$ 使得 $\mathcal{G}_t \cong \mathcal{G}_k$。特别地，族 $\{\mathcal{G}_{r'}\}_{r' \geq r}$ 中有无限多个同构类。

证明. 根据 [30] 定理3.4，我们只需证明，在词族 $w_{r'} := x_1^{p^r}[x_1, y_1]...[x_d, y_d]y_d^{-p^{r'}}$ 中，尼尔森等价类只有有限多个。

但通过怀特海德算法 [35], ，我们可以立即看出，它们都已达到最小长度；另一方面，对于每个 r'，它们的长度各不相同，因此引理得证。 □

推论102。 存在一个无限族的非同构离散群，对于所有素数 l，它们都具有相同的 *pro-*l 完备化。

参考文献

[1] Zoé Maria Chatzidakis. 关于逆有限 HNN 扩张的一些评述。《以色列数学杂志》, 85(1):11–18, 1994年。[2] M Dehn. “群论与拓扑学论文集”（J. Stillwell 译）, 1987年。[3]SP Demushkin. 局部域的极大 p扩张之群。《俄罗斯科学院学报》, 25(3):329–346, 1961年。[4]Volker Diekert. 关于二进数域的绝对伽罗瓦群。《纯粹与应用数学杂志》, 350:152–172, 1984年。[5] Benson Farb and Dan Margalit. 《映射类群入门（*pms-49*）》. 普林斯顿大学出版社, 2011年。[6]Albert Fathi, François Laudenbach, and Valentin Poénaru. 《*Thurston*的曲面工作（*MN-48*）》, 第48卷。普林斯顿大学出版社, 2012年。[7] D Gildenhuys. 剩余素数幂阶的单关系群。《澳大利亚数学学会杂志》, 19(4):385–409, 1975 年。[8] Alexandre Grothendieck. 《规划草图》。 伦敦数学学会讲义系列, 第5–48页, 1997年。[9] Vincent Guirardel. 树上群作用的核心与交数。*arXiv*预印本 *math/0407206*, 2004年。[10] Graham Higman. p 群的 amalgam。《代数杂志》, 1(3):301–305, 1964年。[11] Uwe J annsen and Kay Wingberg. p进数域的绝对伽罗瓦群的结构。《数学创刊》, 70(1):71–98, 1982年。[12] Moshe Jarden and Jürgen Ritter. 关于用绝对伽罗瓦群刻画局部域。《数论杂志》, 11(1):1–13, 1979年。[13] M Kapranov. 数域与3维流形之间的类比。 未发表笔记, 1996年。[14] Helmut V Koch. 局部域的 p-闭扩张的伽罗瓦群。载于《科学院学报》, 第238卷, 第19–22页。俄罗斯科学院, 1978年。[15] John P Labute. Demushkin 群的分类。《加拿大数学杂志》, 19:106–132, 1967年。[16] Michel Lazard. p进解析群。《*IHÉS*数学出版物》, 26:5–219, 1965年。

[17] Barry Mazur。关于亚历山大多项式的评注。未发表的笔记，64，1963年。[18] Barry Mazur。数域 étale 上同调笔记。载于高等师范学校科学年刊，第6卷，第521–552页，1973年。[19] 望月新一。数域上闭双曲曲线的有限群完备化格罗滕迪克猜想。东京大学数学科学杂志，3(3):571–628，1996年。[20] 望月新一。关于 p进局部域上的格罗滕迪克猜想的一个版本。国际数学杂志，8(4):499–506，1997年。[21] 森下昌紀。纽结与素数：算术拓扑学导论。施普林格科学与商业媒体，2011年。[22] 于尔根·诺伊基希。对 p 进数域和有限代数数域的刻画。《数学创刊》，6(4):296–314，1969年。[23] Jurgen Neukirch、Alexander Schmidt 和 Kay Wingberg。数域上同调，第323卷。施普林格科学与商业媒体，2013年。[24] Jakob Nielsen 等。关于闭合双侧曲面的拓扑研究。数学学报，50:189–358，1927年。[25] Luis Paris。映射类群和曲面群的剩余 p 性质。美国数学会会刊，361(5):2487–2507，2009年。[26] Alexander Reznikov。三维流形类域论（对非虚拟 b_1-正流形的覆盖的同调）。数学精选，3(3):361–399，1997年。[27]Alexander Reznikov。嵌入的不可压缩曲面与三维流形分歧覆盖的同调。数学精选，6(1):1–39，2000年。[28] Luis Ribes。有限群完备化图与群。Springer，2017年。[29] Eliyahu Rips。有限表示群的循环分裂与典范 JSJ 分解。载于国际数学家大会论文集：*1994*年*8*月*3*日至*11*日，瑞士苏黎世，第595–600页。Springer，1995年。[30] Gerhard Rosenberger。循环捏合单关系群的同构问题。纯粹与应用代数杂志，95(1):75–86，1994年。[31] Peter Scott 和 Gadde A Swarup。群的分裂与交数。几何与拓扑，4(1):179–218，2000年。

[32] Jean-Pierre Serre。某些原群的结构。布尔巴基研讨班，63:357–364，1962年。[33] Jean-Pierre Serre。伽罗瓦上同调。Springer，1979年。[34] Kôji Uchida。伽罗瓦群的同构。日本数学学会杂志，28(4):617–620，1976年。[35] John HC Whitehead。关于自由群中元素的等价集合。数学年刊，第782–800页，1936年。[36] Gareth Wilkes。3-流形群的虚 pro-p 性质。群论杂志，20(5):999–1023，2017年。[37] Gareth Wilkes。有限群完备化群的相对上同调理论。纯粹与应用代数杂志，223(4):1617–1688，2019年。[38] Gareth Wilkes。pro-p pd2 对的分类与 pro-p 曲线复形。群、几何与动力学，14(3):917–948，2020年。[39] Kay Wingberg。Demushkin 信息唯一性定理。《数学创刊》，70(1):99–113，1982年。[40] Heiner Zieschang、Elmar Vogt 和 Hans-Dieter Coldewey。曲面与平面不连续群，第835卷。Springer，2006年。