arXiv:2303.04317v1 [math.FA] 8 Mar 2023

与 Besov 型空间和 Triebel–Lizorkin 型空间相关的 2-微局部空间

Koichi Saka

摘要。本文引入并研究与 Besov 型空间和 Triebel–Lizorkin 型空间相关的新型 2-微局部空间。我们通过 φ–变换、原子与分子分解以及小波分解，建立了这些函数空间的刻画。作为应用，我们考察了 Calder´on–Zygmund 算子和伪微分算子在这些函数空间上的有界性。

关键词：

小波，Besov 空间，Triebel–Lizorkin 空间，Calder´on–Zygmund 算子，伪微分算子，φ-变换，原子与分子分解，2-微局部空间。

2010 年数学主题分类：

42B35（主要），42B25，42C40（次要）。

1. 引言

众所周知，函数空间在现代分析的许多领域中有着日益广泛的应用，尤其是在调和分析和偏微分方程领域。最一般的尺度可能是 Besov空间和 Triebel–Lizorkin空间的尺度，它们涵盖了许多众所周知的经典具体函数空间，例如 Lebesgue空间、Lipschitz 空间、Sobolev空间、Hardy空间和 BMO空间（[23,24]）。

D. Yang 和 W. Yuan 在 [25] 以及 W. Sickel、D. Yang 和 W. Yuan 在 [22], 中引入了一类 Besov 型和 Triebel–Lizorkin 型空间，这类空间推广了许多经典函数空间，例如 Besov空间、Triebel–Lizorkin空间、Morrey空间和 Q 型空间。

2-微局部空间源于 Bony [2]，旨在研究非线性演化方程解的奇异性的传播。它是描述奇异性附近函数的局部正则性和振荡行为的适当工具（Meyer [18]）。该理论已在分形分析和信号处理中得到发展并被广泛应用。关于 2-微局部空间概念的系统讨论及进一步参考文献，参见 Meyer[18,19],Levy-Vehel 和 Seuret [17], Jaffard [10,11] 以及 Jaffard 和 M´elot [12]。

Kempka [13,14]和 Jaffard [10,11] 从两个不同方向推广了 2-微局部空间。具体而言，Kempka 将其推广为具有更一般可容许权（[13,14]）的 2-微局部 Besov 空间，而 Jaffard 则将其推广为与 Banach空间或拟 Banach空间（[9,10,11]）相关的一般逐点正则性。本文基于 Jaffard 的思想引入新的 2-微局部空间，并研究这些新型 2-微局部空间的性质与刻画。它们与 Besov型空间和 Triebel–Lizorkin型空间相关，并包含许多经典函数空间作为特例，例如 Besov型空间、Triebel–Lizorkin型空间和 Morrey空间。我们还研究新型 2-微局部空间与经典 2-微局部空间之间的关系。此外，我们考察 Calder´on–Zygmund 算子和伪微分算子在这些函数空间上的有界性。

本文其余各节的安排如下：

第 2 节给出我们新定义的 2-微局部空间，以及后文将用到的记号，并给出这些空间的例子。

第 3 节定义与我们的函数空间相对应的序列空间

此外，我们讨论近似对角性，并给出近似对角算子在相应序列空间上有界的条件。我们给出一些辅助引理，这些引理

是后续章节所需要的。

在第 4 节中，我们将通过原子分解与分子分解、Frazier–Jawerth 意义下的 φ-变换 [6] 以及小波分解，借助相应的序列空间来刻画我们的函数空间。此外，我们还将研究这些函数空间的性质，并考察新的 2-微局部空间与经典 2-微局部空间之间的关系。.

在第 5 节中，作为应用，我们给出 Calder´on–Zygmund 算子和伪微分算子在这些函数空间上有界的条件。

全文中，我们用 C 表示一个正的常数，它在不同情况下取值不同，但取值取决于每个命题中出现的参数。符号 C 在不同位置不一定表示同一个量。我们使用记号 $i\vee j=\max\{i,\,j\}$、$i\wedge j=\min\{i,\,j\}$和 $s_+=\max\{s,\,0\}$。符号 $X\approx Y$表示存在正数 C_1 和 C_2，使得 $X\le C_1Y$和 $Y\le C_2X$。

2. 定义

我们考虑 $\mathbb{R}^n$ 中形如 $Q=[0,\,2^{-l})^n+2^{-l}k$ 的二进立方体，其中 $k\in\mathbb{Z}^n$ 且 $l\in\mathbb{Z}$，并使用记号 $l(Q)=2^{-l}$ 表示边长，使用 $x_Q=2^{-l}k$ 表示角点。全文中，我们用记号 P、Q、R 表示 $[0,\,2^{-l})^n+2^{-l}k$ 中形如 $\mathbb{R}^n$ 的二进立方体；当二进立方体 Q 作为指标出现时，默认 Q 遍历 $\mathbb{R}^n$ 中这类二进立方体。我们用 $\mathcal{D}$ 表示所有这类二进立方体组成的集合。对于二进立方体 Q 和常数 $c>1$，cQ 表示与 Q 中心相同、边长放大 c 倍的立方体。我们用 χ_E 表示集合 E 在 $\mathbb{R}^n$ 中的示性函数。

我们设 $\mathbb{N}=\{1,2,\cdots\}$ 且 $\mathbb{N}_0=\mathbb{N}\cup\{0\}$。令 $\mathcal{S}=\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 表示 $\mathbb{R}^n$ 上所有施瓦茨函数构成的空间，$\mathcal{S}'$ 表示其对偶空间。令 $\mathcal{S}_\infty=\mathcal{S}_\infty(\mathbb{R}^n)=\{f\in\mathcal{S}:\int_{\mathbb{R}^n}f(x)x^\gamma dx=0$ 对所有 $\gamma\in\mathbb{N}_0^n\}$，$\mathcal{S}_r=\mathcal{S}_r(\mathbb{R}^n)=\{f\in\mathcal{S}:\int_{\mathbb{R}^n}f(x)x^\gamma dx=0$ 对所有 $|\gamma|\le r\}$、$r\in\mathbb{N}_0$。我们回顾一下，对偶空间 $\mathcal{S}'_\infty=\mathcal{S}'_\infty(\mathbb{R}^n)$ 可与空间 $\mathcal{S}'/\mathfrak{P}$ 等同，后者由分布模去 $\mathfrak{P}$ 上所有多项式构成的空间 $\mathbb{R}^n$ 后得到；对偶空间 $\mathcal{S}'_r=\mathcal{S}'_r(\mathbb{R}^n)$ 可与空间 $\mathcal{S}'/\mathfrak{P}_r$ 等同，后者由分布模去 $\mathbb{R}^n$ 上所有次数满足 $\deg\le r$ 的多项式构成的空间 $\mathfrak{P}_r$ 后得到。

我们用 $\langle f,\,g\rangle$ 表示两个函数的标准内积 $\int f\bar g$，并用相同的记号表示分布 $f\in\mathcal{S}'$ 对 $\bar g\in\mathcal{S}$ 的作用。

设 ϕ 是一个施瓦茨函数，使得

$$\text{(1.1)}\quad \operatorname{supp}\hat\phi\subset\{\xi\in\mathbb{R}^n:\ \tfrac12\le|\xi|\le2\},$$

(1.2) $|\hat{\phi}(\xi)| \geq C > 0$ 若 $\frac{3}{5} \leq |\xi| \leq \frac{5}{3}$。

我们令 $\phi_i(x) = 2^{in}\phi(2^i x)$。设 $s \in \mathbb{R}$ 和 ϕ 满足上述 (1.1) 和 (1.2)。

对于 $f \in \mathcal{S}'_\infty$，我们定义一些以二进立方体 P为指标的序列：

$c(\dot{B}^s_{pq})(P) = (\sum_{i\geq -\log_2 l(P)} ||2^{is}\phi_i * f||^q_{L^p(P)})^{1/q}$, $0 < p, q \leq \infty$,
$c(\dot{F}^s_{pq})(P) = ||\{\sum_{i\geq -\log_2 l(P)} (2^{is}|\phi_i * f|)^q\}^{1/q}||_{L^p(P)}$,
$0 < p < \infty$, $0 < q \leq \infty$,
$c(\dot{F}^s_{\infty q})(P) = l(P)^{-\frac{n}{q}} ||\{\sum_{i\geq -\log_2 l(P)} (2^{is}|\phi_i * f|)^q\}^{1/q}||_{L^q(P)}$,
$0 < q \leq \infty$

分别对 $q = \infty$ 作通常的相应修改。

我们使用记号 E^s_{pq} 表示 B^s_{pq} 或 F^s_{pq}中的任一个。

定义1. 设 s、 s'、 $\sigma \in \mathbb{R}$、 $0 < p$、 $q \leq \infty$ 以及 $x_0 \in \mathbb{R}^n$。空间 $A^s(\dot{E}^{s'}_{pq})^\sigma_{x_0}$ 定义为满足下列条件的所有 $f \in \mathcal{S}'_\infty$ 所构成的空间：

$$||f||_{A^s(\dot{E}^{s'}_{pq})^\sigma_{x_0}} \equiv \sup_{\mathcal{D}\ni Q\ni x_0} l(Q)^{-\sigma} \sup_{\mathcal{D}\ni P\subset 3Q} l(P)^{-s} c(\dot{E}^{s'}_{pq})(P) < \infty.$$

我们使用缩写 $A^0(\dot{E}^{s'}_{pq})^\sigma_{x_0} \equiv (\dot{E}^{s'}_{pq})^\sigma_{x_0}$, $A^s(\dot{E}^{s'}_{pq})^0_{x_0} \equiv A^s(\dot{E}^{s'}_{pq})$ 和 $A^0(\dot{E}^{s'}_{pq})^0_{x_0} \equiv \dot{E}^{s'}_{pq} \equiv \dot{E}^{s'}_{pq}(\mathbb{R}^n)$。注意，空间 $A^s(\dot{E}^{s'}_{pq})$ 是 Yang–Yuan[25]意义下的齐次 Besov 型空间或齐次 Triebel–Lizorkin 型空间，而空间 $\dot{E}^{s'}_{pq} \equiv \dot{E}^{s'}_{pq}(\mathbb{R}^n)$ 是经典齐次 Besov 空间或经典齐次 Triebel–Lizorkin 空间。

对于 $f \in \mathcal{S}'_\infty$，我们定义一些以二进立方体 P 为指标的序列：

$c(\tilde{\dot{B}}^{s'}_{pq})^\sigma_{x_0}(P) =$
$(\sum_{i\geq -\log_2 l(P)} ||2^{is'}|\phi_i * f(x)|(2^{-i} + |x_0 - x|)^{-\sigma}||^q_{L^p(P)})^{1/q}$,
$0 < p, q \leq \infty$,
$c(\tilde{\dot{F}}^{s'}_{pq})^\sigma_{x_0}(P) =$
$||\{\sum_{i\geq -\log_2 l(P)} (2^{is'}|\phi_i * f(x)|(2^{-i} + |x_0 - x|)^{-\sigma})^q\}^{1/q}||_{L^p(P)}$,
$0 < p < \infty$, $0 < q \leq \infty$,
$c(\tilde{\dot{F}}^{s'}_{\infty q})^\sigma_{x_0}(P) =$
$l(P)^{-\frac{n}{q}} ||\{\sum_{i\geq -\log_2 l(P)} (2^{is'}|\phi_i * f(x)|(2^{-i} + |x_0 - x|)^{-\sigma})^q\}^{1/q}||_{L^q(P)}$,
$0 < q \leq \infty$
with the usual modification for $q = \infty$ respectively.
We use the notation $\tilde{\dot{E}}^{s'}_{pq}$ to denote either $\tilde{\dot{B}}^s_{pq}$ or $\tilde{\dot{F}}^s_{pq}$.

定义2. 设 s、 s'、 $\sigma \in \mathbb{R}$、 $0 < p$、 $q \leq \infty$ 和 $x_0 \in \mathbb{R}^n$。
空间 $A^s(\dot{\tilde{E}}^{s'}_{pq})^{\sigma}_{x_0}$ 定义为所有满足以下条件的 $f \in \mathcal{S}'_\infty$ 空间

$$||f||_{A^s(\dot{\tilde{E}}^{s'}_{pq})^{\sigma}_{x_0}} \equiv \sup_{\mathcal{D} \ni P} l(P)^{-s} c(\dot{\tilde{E}}^{s'}_{pq})^{\sigma}_{x_0}(P) < \infty.$$

空间 $A^s(\dot{\tilde{E}}^{s'}_{pq})^{\sigma}_{x_0}$ 是经典的 2-微局部 Besov 空间或经典的 2-微局部 Triebel–Lizorkin 空间。我们使用缩写 $A^0(\dot{\tilde{E}}^{s'}_{pq})^{\sigma}_{x_0} \equiv (\dot{\tilde{E}}^{s'}_{pq})^{\sigma}_{x_0}$。

例子。

(i) 空间 $A^0(\dot{E}^{s'}_{pq})^0_{x_0} = A^0(\dot{E}^{s'}_{pq})^0_{x_0} = \dot{E}^{s'}_{pq}(\mathbb{R}^n)$ 是齐次 Besov 空间或齐次 Triebel–Lizorkin 空间，[23]。

(ii) D. Yang 和 W. Yuan [25]，引入的 Besov 型空间 $B^{s,\ \tau}_{pq}(\mathbb{R}^n)$ 以及 Triebel–Lizorkin 型空间 $F^{s,\ \tau}_{pq}(\mathbb{R}^n)$ 都包含在我们的定义中，作为特殊情形，

$$\dot{E}^{s',s}_{pq}(\mathbb{R}^n) = A^{ns}(\dot{E}^{s'}_{pq})^0_{x_0} = A^{ns}(\dot{\tilde{E}}^{s'}_{pq})^0_{x_0}.$$

(iii) Y. Sawano 和 H. Tanaka [20]，或 Y. Sawano、D. Yang 和 W. Yuan [21] 研究的 Besov-Morrey $\dot{\mathcal{N}}^s_{uqp}$ 及 Triebel–Lizorkin-Morrey 空间 $\dot{\mathcal{E}}^s_{uqp}$，在我们的定义中得以实现为

$$\dot{\mathcal{N}}^s_{uqp} \subset A^{n(\frac{1}{p}-\frac{1}{u})}(\dot{B}^s_{pq})^0_{x_0} \text{ if } 0 < p \leq u \leq \infty \text{ and } 0 < q \leq \infty,$$

$$\dot{\mathcal{E}}^s_{uqp} = A^{n(\frac{1}{p}-\frac{1}{u})}(\dot{F}^s_{pq})^0_{x_0} \text{ if } 0 < p \leq u \leq \infty \text{ and } 0 < q \leq \infty, \text{ and}$$

Especially the Morrey space $\mathcal{M}^u_p$ is realized as

$$\mathcal{M}^u_p = A^{n(\frac{1}{p}-\frac{1}{u})}(\dot{F}^0_{p2})^0_{x_0},\ 1 < p < u < \infty.$$

(iv) Y. Komori-Furuya 等人 [15]，研究的 B_σ-Morrey 空间 $B_\sigma(L_{p,\ \lambda})$ 包含在我们的定义中，作为特殊情形，即，

$$\dot{B}_\sigma(L_{p,\lambda}) = A^{\lambda+\frac{n}{p}}(\dot{F}^0_{p2})^\sigma_0,\ 1 < p < \infty.$$

（v）Ts. Batbold 和 Y. Sawano 研究的局部Morrey空间 $LM_{p,\ \lambda}$ 在我们的情形中可表为 [1]，

$$LM_{p,\lambda} = (\dot{F}^0_{p2})^{\lambda/p}_0,\ 1 < p < \infty.$$

3. 序列空间

对于一个序列 $c = (c(P))$，我们定义一些由二进立方体 P索引的序列:

$c(\dot{b}^s_{pq})(P) = (\sum_{i\geq -\log_2 l(P)} || \sum_{l(R)=2^{-i}} 2^{is}|c(R)|\chi_R||^q_{L^p(P)})^{1/q}$,
$0 < p,\ q \leq \infty$,
$c(\dot{f}^s_{pq})(P) = ||\{\sum_{i\geq -\log_2 l(P)} \big(\sum_{l(R)=2^{-i}} 2^{is}|c(R)|\chi_R\big)^q\}^{1/q}||_{L^p(P)}$,
$0 < p < \infty,\ \ 0 < q \leq \infty$, and
$||\{\sum_{i\geq -\log_2 l(P)} l(P)^{-\frac{n}{q}} \times \big(\sum_{l(R)=2^{-i}} 2^{is}|c(R)|\chi_R\big)_q\}^{1/q}||_{L^q(P)}$,
$0 < q \leq \infty$,
分别作通常的修改后。
我们使用记号 $\dot{e}^s_{pq}$ 表示 $\dot{b}^s_{pq}$ or $\dot{f}^s_{pq}$。

定义 3. 设 s、 s'、 $\sigma \in \mathbb{R}$、 $0 < p$、 $q \leq \infty$ 和 $x_0 \in \mathbb{R}^n$。
我们定义所有满足以下条件的序列 $c = (c(P))$ 所构成的空间:

$$||c||_{a^s(\dot{e}^{s'}_{pq})^\sigma_{x_0}} \equiv \sup_{\mathcal{D}\ni Q\ni x_0} l(Q)^{-\sigma} \sup_{\mathcal{D}\ni P\subset 3Q} l(P)^{-s} c(\dot{e}^{s'}_{pq})(P) < \infty.$$

我们使用缩写 $a^0(\dot{e}^{s'}_{pq})^\sigma_{x_0} \equiv (\dot{e}^{s'}_{pq})^\sigma_{x_0}$、 $a^s(\dot{e}^{s'}_{pq})^0_{x_0} \equiv a^s(\dot{e}^{s'}_{pq})$ 和 $a^0(\dot{e}^{s'}_{pq})^0_{x_0} \equiv \dot{e}^{s'}_{pq} \equiv \dot{e}^{s'}_{pq}(\mathbb{R}^n)$。注意，空间 $a^s(\dot{e}^{s'}_{pq})$ 是 Yang–Yuan 意义下齐次 Besov 型空间或齐次 Triebel–Lizorkin 型空间的序列空间，而空间 $\dot{e}^{s'}_{pq} \equiv \dot{e}^{s'}_{pq}(\mathbb{R}^n)$ 是经典齐次 Besov 空间或经典齐次 Triebel–Lizorkin 空间的序列空间。

我们为定义2给出一个序列版本。
我们定义，对于序列 $(c(R))$,

$c(\tilde{\dot{b}}^{s'}_{pq})^\sigma_{x_0}(P) =$
$(\sum_{i\geq -\log_2 l(P)} || \sum_{l(R)=2^{-i}} 2^{is'}|c(R)|(2^{-i}+|x_0-x|)^{-\sigma}\chi_R||^q_{L^p(P)})^{1/q}$,
$0 < p,\ q \leq \infty$,
$c(\tilde{\dot{f}}^{s'}_{pq})^\sigma_{x_0}(P) =$
$||\{\sum_{i\geq -\log_2 l(P)}(\sum_{l(R)=2^{-i}} 2^{is'}|c(R)|(2^{-i}+|x_0-x|)^{-\sigma}\chi_R)^q\}^{1/q}||_{L^p(P)}$,
$0 < p \leq \infty,\ 0 < q \leq \infty$,
$c(\tilde{\dot{f}}^{s'}_{\infty q})^\sigma_{x_0} = l(P)^{-\frac{n}{q}} \times$
$||\{\sum_{i\geq -\log_2 l(P)}(\sum_{l(R)=2^{-i}} 2^{is'}|c(R)|(2^{-i}+|x_0-x|)^{-\sigma}\chi_R)^q\}^{1/q}||_{L^q(P)}$,
$0 < q \leq \infty$,
with the usual modification for $q = \infty$ respectively.

定义 4. 设 s、 s'、 $\sigma \in \mathbb{R}$、 $0 < p$、 $q \leq \infty$ 和 $x_0 \in \mathbb{R}^n$。

我们将序列空间 $a^s(\tilde{e}^{s'}_{pq})^{\sigma}_{x_0}$ 定义为所有序列 c=(c(R)) 构成的空间，使得

$$||c||_{a^s(\tilde{e}^{s'}_{pq})^{\sigma}_{x_0}} \equiv \sup_{\mathcal{D}\ni P} l(P)^{-s} c(\tilde{e}^{s'}_{pq})^{\sigma}_{x_0}(P) < \infty.$$

我们使用缩写 $a^0(\tilde{e}^{s'}_{pq})^{\sigma}_{x_0} \equiv (\tilde{e}^{s'}_{pq})^{\sigma}_{x_0}$。

我们将给出后续各节中需要的一些引理。

定义 5. 设 $r_1,\ r_2 \geq 0$ 和 $L > 0$。若以二进立方体 Q 和 P 为指标的矩阵算子 $A = \{a_{QP}\}_{QP}$ 满足以下条件，则称其为 (r_1, r_2, L)-几乎对角矩阵：矩阵 $\{a_{QP}\}$ 满足

$$|a_{QP}| \leq C\big(\tfrac{l(Q)}{l(P)}\big)^{r_1}(1 + l(P)^{-1}|x_Q - x_P|)^{-L} \text{ if } l(Q) \leq l(P),$$
$$|a_{QP}| \leq C\big(\tfrac{l(P)}{l(Q)}\big)^{r_2}(1 + l(Q)^{-1}|x_Q - x_P|)^{-L} \text{ if } l(Q) > l(P).$$

关于 [6 中几乎对角算子的有界性的结果：定理 3.3]，在我们的情形下也成立。

引理 1. 假设 $s,\ s',\ \sigma \in \mathbb{R},\ x_0 \in \mathbb{R}^n$ 和 $0 < p,\ q \leq \infty$。那么

(i) (r_1, r_2, L)-几乎对角矩阵算子 A 在 $a^s(\dot{e}^{s'}_{pq})^{\sigma}_{x_0}$ 上有界，其中 $r_1 > \max(s',\ \sigma + s + s' - \frac{n}{p})$ $r_2 > J - s'$，且在 $\dot{e}^{s'}_{pq} = \dot{f}^{s'}_{pq}$ 的情形下 $L > J$ where$J = n/\min(1,\ p,\ q)$，而在 $\dot{e}^{s'}_{pq} = \dot{b}^{s'}_{pq}$ 的情形下 $J = n/\min(1,\ p)$。

(ii) 一个（$r_1,\ r_2,\ L$）-几乎对角矩阵算子 A 在 $a^s(\tilde{e}^{s'}_{pq})^{\sigma}_{x_0}$ 上有界，其中 $r_1 > \max(s' + (\sigma \vee 0), (\sigma \vee 0) + s + s' - \frac{n}{p})$ $r_2 > J - s' - (\sigma \wedge 0)$，且 $L > J$，其中在 $\tilde{e}^{s'}_{pq} = \dot{f}^{s'}_{pq}$ 的情形下 $J = n/\min(1,\ p,\ q)$，而在 $\tilde{e}^{s'}_{pq} = \dot{b}^{s'}_{pq}$ 的情形下 $J = n/\min(1,\ p)$。

证明：（i）我们可以假设 $\sigma \geq 0$，因为当 $\sigma < 0$ 时，$a^s(\dot{e}^{s'}_{pq})^{\sigma}_{x_0} = \{0\}$（见下文命题 1）。我们假设 $A = (a_{RR'})$ 是（$r_1,\ r_2,\ L$）-几乎对角的。令 $c = (c(R)) \in a^s(\dot{e}^{s'}_{pq})^{\sigma}_{x_0}$。对于满足 $R \subset P$ 的二进立方体 P 和 R，我们记 $Ac = A_0 c + A_1 c + A_2 c$，其中

$$(A_0c)(R)=\sum_{l(R)\le l(R')\le l(P)} a_{RR'}c(R'),$$
$$(A_1c)(R)=\sum_{l(R')<l(R)\le l(P)} a_{RR'}c(R'),$$
$$(A_2c)(R)=\sum_{l(R)\le l(P)<l(R')} a_{RR'}c(R').$$

我们断言

$$||A_ic||_{a^s(\dot e^{s'}_{pq})^\sigma_{x_0}}\le C||c||_{a^s(\dot e^{s'}_{pq})^\sigma_{x_0}},\quad i=0,1,2.$$

首先考虑 $0<p<\infty$、 $0<q\le\infty$ 的 F 型情形。由于 A 是几乎对角的，我们可知，对于满足 $l(P)=2^{-j}$ 的二进立方体 P，

$$\begin{aligned}(A_0c)(\dot f^{s'}_{pq})(P)&=||\{\sum_{i\ge j}\sum_{l(R)=2^{-i}}\big(2^{is'}|(A_0c)(R)|\big)^q\chi_R\}^{1/q}||_{L^p(P)}\\
&\le C||\{\sum_{i\ge j}\sum_{l(R)=2^{-i}}2^{is'q}\big(\sum_{i\ge k\ge j}\sum_{l(R')=2^{-k}}|a_{RR'}||c(R')|\big)^q\chi_R\}^{1/q}||_{L^p(P)}\\
&\le C||\{\sum_{i\ge j}\sum_{l(R)=2^{-i}}2^{is'q}\times\\
&\big(\sum_{i\ge k\ge j}\sum_{l(R')=2^{-k}}2^{-(i-k)r_1}(1+2^k|x_R-x_{R'}|)^{-L}|c(R')|\big)^q\chi_R\}^{1/q}||_{L^p(P)}.\end{aligned}$$

利用极大函数 $M_tf(x)$、 $0<t\le1$，其定义为

$$M_tf(x)=\sup_{x\in Q}(\frac{1}{l(Q)^n}\int_Q|f(y)|^t\,dy)^{1/t}$$

（参见 [16: 引理 7.1] 或 [6: 注 A.3]），对于 $L>n/t$，有

$$\begin{aligned}(A_0c)(\dot f^{s'}_{pq})(P)&\le C||\{\sum_{i\ge j}\sum_{l(R)=2^{-i}}2^{is'q}2^{-ir_1q}\times\\
&\quad\Big(\sum_{i\ge k\ge j}2^{kr_1}2^{(k-i)_+n/t}M_t\big(\sum_{l(R')=2^{-k}}|c(R')|\chi_{R'}\big)\Big)^q\chi_R\}^{1/q}||_{L^p(P)}\\
&\le C||\{\sum_{i\ge j}2^{-i(r_1-s')q}\Big(\sum_{i\ge k\ge j}2^{kr_1}M_t\big(\sum_{l(R')=2^{-k}}|c(R')|\chi_{R'}\big)\Big)^q\}^{1/q}||_{L^p(P)}\\
&\le C||\{\sum_{i\ge j}2^{is'q}M_t\big(\sum_{l(R')=2^{-i}}|c(R')|\chi_{R'}\big)^q\}^{1/q}||_{L^p(P)}\\
&\le C||\{\sum_{i\ge j}2^{is'q}\big(\sum_{l(R')=2^{-i}}|c(R')|\chi_{R'}\big)^q\}^{1/q}||_{L^p(P)}=Cc(\dot f^{s'}_{pq})(P)\end{aligned}$$

其中，当 $r_1 > s'$ 时，这些不等式由 Hardy不等式推出；当 $0 < t <$ min(p, q)时，则由 Fefferman-Stein 向量值不等式推出。

对于 B 型情形，我们有 $L > n/t$,

$$
\begin{aligned}
&(A_0c)(\dot{b}^{s'}_{pq})(P) = \big(\sum_{i\geq j} || \sum_{l(R)=2^{-i}} 2^{is'}|(A_0c)(R)|\chi_R||^q_{L^p(P)}\big)^{1/q}\\
&\leq C\big\{\sum_{i\geq j} || \sum_{l(R)=2^{-i}} 2^{is'}\times\\
&\qquad \sum_{i\geq k\geq j}\sum_{l(R')=2^{-k}} 2^{-(i-k)r_1}(1+2^k|x_R - x_{R'}|)^{-L}|c(R')|\chi_R||^q_{L^p(P)}\big\}^{1/q}\\
&\leq C\big\{\sum_{i\geq j} 2^{-i(r_1-s')q}\times\\
&\qquad || \sum_{l(R)=2^{-i}}\sum_{i\geq k\geq j} 2^{kr_1}M_t\big(\sum_{l(R')=2^{-k}}|c(R')|\chi_{R'})\chi_R||^q_{L^p(P)}\big\}^{1/q}\\
&\leq C\big\{\sum_{i\geq j} 2^{-i(r_1-s')q}\big(\sum_{i\geq k\geq j} 2^{kr_1}||M_t\big(\sum_{l(R')=2^{-k}}|c(R')|\chi_{R'})||_{L^p(P)}\big)^q\big\}^{1/q}\\
&\leq C\big\{\sum_{i\geq j} 2^{-i(r_1-s')q}\big(\sum_{i\geq k\geq j} 2^{kr_1}|| \sum_{l(R')=2^{-k}}|c(R')|\chi_{R'}||_{L^p(P)}\big)^q\big\}^{1/q}\\
&\leq C\big(\sum_{i\geq j} 2^{is'q}|| \sum_{l(R')=2^{-i}}|c(R')|\chi_{R'}||^q_{L^p(P)}\big)^{1/q} = Cc(\dot{b}^{s'}_{pq})(P)
\end{aligned}
$$

其中，当 $r_1 > s'$ 时，不等式由 Hardy不等式得出；当 $0 < t <$ min$(1, p)$ 时，不等式由 Fefferman-Stein 向量值不等式得出。

因此我们得到估计

$$A_0c(\dot{e}^{s'}_{pq})(P) \leq Cc(\dot{e}^{s'}_{pq})(P)$$

若 $r_1 > s'$、 $0 < p < \infty$、 $0 < q \leq \infty$、 $L > J$, 则成立。

类似地，我们将得到 $(A_1c)(\dot{f}^{s'}_{pq})(P)$ 的估计。对于满足 $l(P) = 2^{-j}$ 的二进立方体 P，我们有，

$$
\begin{aligned}
&(A_1c)(\dot{f}^{s'}_{pq})(P) = ||\big\{\sum_{i\geq j}\sum_{l(R)=2^{-i}}\big(2^{is'}|(A_1c)(R)|\big)^q\chi_R\big\}^{1/q}||_{L^p(P)}\\
&\quad\leq\quad C||\big\{\sum_{i\geq j}\sum_{l(R)=2^{-i}} 2^{is'q}\big(\sum_{i\leq k}\sum_{l(R')=2^{-k}}|a_{RR'}||c(R')|\big)^q\chi_R\big\}^{1/q}||_{L^p(P)}\\
&\quad\leq\quad C||\big\{\sum_{i\geq j}\sum_{l(R)=2^{-i}} 2^{is'q}\times\\
&\big(\sum_{i\leq k}\sum_{l(R')=2^{-k}} 2^{-(k-i)r_2}(1+2^i|x_R - x_{R'}|)^{-L}|c(R')|\big)^q\chi_R\big\}^{1/q}||_{L^p(P)}.
\end{aligned}
$$

像上面一样使用极大函数 $M_t f(x)$，我们得到

$$\begin{aligned}
(A_1c)(\dot{f}^{s'}_{pq})(P) \le C||\{&\sum_{i\ge j}\sum_{l(R)=2^{-i}} 2^{is'q}2^{ir_2q}\times \\
&\Big(\sum_{i\le k}2^{-kr_2}2^{(k-i)_+n/t}M_t\big(\sum_{l(R')=2^{-k}}|c(R')|\chi_{R'}\big)\Big)^q\chi_R\Big\}^{1/q}||_{L^p(P)} \\
\le\ & C||\{\sum_{i\ge j}2^{i(r_2+s'-n/t)q}\times \\
&\Big(\sum_{i\le k}2^{-k(r_2-n/t)}M_t\big(\sum_{l(R')=2^{-k}}|c(R')|\chi_{R'}\big)\Big)^q\Big\}^{1/q}||_{L^p(P)} \\
\le\ & C||\{\sum_{i\ge j}2^{is'q}M_t\big(\sum_{l(R')=2^{-i}}|c(R')|\chi_{R'}\big)^q\Big\}^{1/q}||_{L^p(P)} \\
\le\ & C||\{\sum_{i\ge j}2^{is'q}\big(\sum_{l(R')=2^{-i}}|c(R')|\chi_{R'}\big)^q\Big\}^{1/q}||_{L^p(P)} = Cc(\dot{f}^{s'}_{pq})(P)
\end{aligned}$$

其中，当 $r_2+s'-n/t>0$ 时，这些不等式由 Hardy不等式推出；当 $0<t<\min(p,q)$ 时，则由 Fefferman-Stein 向量值不等式推出。

同理，对于 B 型情形，我们得到

$$(A_1c)(\dot{b}^{s'}_{pq})(P) \le Cc(\dot{b}^{s'}_{pq})(P)$$

当 $r_2+s'-n/t>0, 0<t<\min(1,p)$ 时。因此，我们得到估计

$$A_1c(\dot{e}^{s'}_{pq})(P) \le Cc(\dot{e}^{s'}_{pq})(P)$$

当 $r_2>J-s', 0<p<\infty, 0<q\le\infty, L>J$ 时。

当 $p=\infty$ 时，我们得到相同的估计。因此，我们得到

$$||A_ic||_{a^s(\dot{e}^{s'}_{pq})^\sigma_{x_0}} \le C||c||_{a^s(\dot{e}^{s'}_{pq})^\sigma_{x_0}},\quad i=0,1$$

当 $r_1>s', r_2>J-s', L>J, 0<p\le\infty$ 且 $0<q\le\infty$ 时。

接下来，我们将给出 A_2 情形的估计。

我们注意到，如果 $L>n$，

$$\sum_{l(P)=2^{-j}}(1+2^j|x_R-x_P|)^{-L}<\infty$$

（参见 [3, 引理 3.4]），并且

对于 $c\in a^s(\dot{e}^{s'}_{pq})^\sigma_{x_0}$，我们有 $|c(P)|\le C(|x_0-x_P|+l(P))^\sigma l(P)^{s+s'-n/p}||c||_{a^s(\dot{e}^{s'}_{pq})^\sigma_{x_0}}$，其中二进立方体为 P。于是，对于 $0<p<\infty, 0<q\le\infty$ 以及一个

二进立方体 P，满足 $l(P)=2^{-j}$,

$$
\begin{aligned}
&(A_2c)(\dot f^{s'}_{pq})(P)=||\{\sum_{i\geq j}\sum_{l(R)=2^{-i}}\left(2^{is'}|(A_2c)(R)|\right)^q\chi_R\}^{1/q}||_{L^p(P)}\\
&\leq C||\{\sum_{i\geq j}\sum_{l(R)=2^{-i}}2^{is'q}\times\\
&\big(\sum_{j\geq k}\sum_{l(R')=2^{-k}}2^{-(i-k)r_1}(1+2^k|x_R-x_{R'}|\big)^{-L}|c(R')|)^q\chi_R\}^{1/q}||_{L^p(P)}\\
&\leq C2^{-j(r_1-s'+n/p)}\sum_{j\geq k}2^{k(r_1-s-s'+\frac{n}{p})}(2^{-k}+|x_0-x_P|)^\sigma||c||_{a^s(\dot f^{s'}_{pq})^\sigma_{x_0}}\\
&\quad\leq\quad C2^{-j(r_1-s'+n/p)}2^{j(r_1-\sigma-s-s'+\frac{n}{p})}(1+2^k|x_0-x_P|)^\sigma||c||_{a^s(\dot f^{s'}_{pq})^\sigma_{x_0}}\\
&\quad\leq\quad C(2^{-j}+|x_0-x_P|)^\sigma 2^{-js}||c||_{a^s(\dot f^{s'}_{pq})^\sigma_{x_0}}
\end{aligned}
$$

其中，这些不等式在 $r_1>\sigma+s+s'-\frac{n}{p}$, $r_1>s'$, $L>n$ 时成立。

类似地，对于 B 型情形，我们有相同的估计。因此，我们有:

$$||A_2c||_{a^s(\dot e^{s'}_{pq})^\sigma_{x_0}}\leq C||c||_{a^s(\dot e^{s'}_{pq})^\sigma_{x_0}}$$

当 $r_1>\sigma+s+s'-n/p$, $r_1>s'$, $L>J$, $0<p<\infty$ and $0<q\leq\infty$ 时。

对于情形 $p=\infty$，我们得到相同的估计。因此，得到了所需的结论。

(ii) 令 $w_i=(2^{-i}+|x_0-x|)^{-\sigma}$。我们看到，当 $0\leq\sigma$ 时，$w_i\leq 2^{(i-k)_+\sigma}w_k$; 当 $0>\sigma$ 时，$w_i\leq 2^{(k-i)_+\sigma}w_k$。利用这些不等式，我们可以按照上述 (i) 中相同的方法证明所需结果。 □

引理 2. 设 $r_1,r_2\in\mathbb{N}_0$, $L>n$ and $L_1>n+r_1, L_2>n+r_2$。

假设对于二进立方体 P 和 R, ϕ_P 和 φ_R 是定义在 $\mathbb{R}^n$ 上的函数，并满足以下性质:

$$
\begin{aligned}
&(2.1)\quad \int_{\mathbb{R}^n}\phi_P(x)x^\gamma dx=0\quad for\quad |\gamma|<r_1,\\
&(2.2)\quad |\phi_P(x)|\leq C(1+l(P)^{-1}|x-x_P|)^{-\max(L,L_1)},\\
&(2.3)\quad |\partial^\gamma\phi_P(x)|\leq Cl(P)^{-|\gamma|}(1+l(P)^{-1}|x-x_P|)^{-L}\\
&for\quad 0<|\gamma|\leq r_2,\\
&(2.4)\quad \int_{\mathbb{R}^n}\varphi_R(x)x^\gamma dx=0\quad for\quad |\gamma|<r_2,\\
&(2.5)\quad |\varphi_R(x)|\leq C(1+l(R)^{-1}|x-x_R|)^{-\max(L,L_2)},\\
&(2.6)\quad |\partial^\gamma\varphi_R(x)|\leq Cl(R)^{-|\gamma|}(1+l(R)^{-1}|x-x_R|)^{-L}\\
&for\quad 0<|\gamma|\leq r_1
\end{aligned}
$$

其中，当 $r_1 = 0$ 时，(2.1) 和 (2.6) 为空；当 $r_2 = 0$ 时，(2.3) 和 (2.4) 为空。于是我们有

$$
\begin{aligned}
&l(P)^{-n}|\langle \phi_P\ ,\ \varphi_R\rangle| \le C\big(\tfrac{l(P)}{l(R)}\big)^{r_1}(1+l(R)^{-1}|x_P - x_R|)^{-L}\\
&\textit{if}\quad l(P)\le l(R)\ \textit{and}\\
&l(R)^{-n}|\langle \phi_P\ ,\ \varphi_R\rangle| \le C\big(\tfrac{l(R)}{l(P)}\big)^{r_2}(1+l(P)^{-1}|x_P - x_R|)^{-L}\\
&\textit{if}\ \ l(R)<l(P).
\end{aligned}
$$

证明：参见 [6：推论 B.3] , [4：引理 6.3] 或 [16：引理 3.1]。

□

引理 3. 设 $s,\ s',\ \sigma\in\mathbb{R}, x_0\in\mathbb{R}^n$ 和 $0<p,\ q\ \le\infty$。令 $r_1,\ r_2\in\mathbb{N}_0$ 和 $L>n$。假设函数 $\phi_P,\ \varphi_R$ 满足引理 2 中的性质 (2.1) 至 (2.6)。令 J 如引理 1 中所述。则有

(i) 对于二进立方体 R 和序列 $c\in a^s(\dot e^{s'}_{pq})^\sigma_{x_0}$，$\sum_{\mathcal{D}\ni P}c(P)\langle\phi_P,\ \varphi_R\rangle$，若 $r_1>J-n-s', r_2>\sigma+s+s'-\frac{n}{p}$ 和 $L>\max(J,\ n+\sigma)$，则该序列收敛，

(ii) 对于二进立方体 R 和序列 $c\in a^s(\tilde e^{s'}_{pq})^\sigma_{x_0}$，$\sum_{\mathcal{D}\ni P}c(P)\langle\phi_P,\ \varphi_R\rangle$，若 $r_1>J-n-s'-(\sigma\wedge 0),\ r_2>\sigma+s+s'-\frac{n}{p}$ 且 $L>J+\sigma$，则该序列收敛。

证明：(i) 我们将 $\sum_{\mathcal{D}\ni P}c(P)\langle\phi_P,\ \varphi_R\rangle = I_0+I_1$ 写作

$$
\begin{aligned}
I_0 &= \sum_{l(R)<l(P)} c(P)\langle\phi_P\ ,\ \varphi_R\rangle,\\
I_1 &= \sum_{l(P)\le l(R)} c(P)\langle\phi_P\ ,\ \varphi_R\rangle.
\end{aligned}
$$

我们断言 $I_i<\infty,\ i=0,1$。

注意，若 $L>n$，

$$\sum_{l(P)=2^{-j}}(1+2^j|x_R-x_P|)^{-L}<\infty$$

（参见 [3, 引理 3.4]），且

$$|c(P)|\le C(|x_P-x_0|+l(P))^\sigma l(P)^{s+s'-n/p}||c||_{a^s(\dot e^{s'}_{pq})^\sigma_{x_0}}$$

对于 $c \in a^s(\dot{e}^{s'}_{pq})^{\sigma}_{x_0}$。对于满足 $l(R) = 2^{-i}$ 的二进立方体 R，由引理 2 可得

$$\begin{aligned}
|I_0| &\le C\sum_{i>j}\sum_{l(P)=2^{-j}}|c(P)||\langle\phi_P\ ,\ \varphi_R\rangle| \\
&\le C\sum_{i>j}\sum_{l(P)=2^{-j}}|c(P)|2^{-in}2^{(j-i)r_2}(1+2^j|x_R-x_P|)^{-L} \\
&\le C\sum_{i>j}2^{-i(r_2+n)}2^{j(r_2-s-s'+\frac{n}{p})}||c||_{a^s(\dot{e}^{s'}_{pq})^{\sigma}_{x_0}}\times \\
&\quad \sum_{l(P)=2^{-j}}(|x_P-x_0|+2^{-j})^{\sigma}(1+2^j|x_R-x_P|)^{-L} \\
&\le C\sum_{i>j}2^{-i(r_2+n)}2^{j(r_2-\sigma-s-s'+\frac{n}{p})}||c||_{a^s(\dot{e}^{s'}_{pq})^{\sigma}_{x_0}}\times \\
&\quad \sum_{l(P)=2^{-j}}(1+2^j|x_R-x_P|)^{-(L-\sigma)} \\
&\le C2^{-i(n+\sigma+s+s'-\frac{n}{p})}||c||_{a^s(\dot{e}^{s'}_{pq})^{\sigma}_{x_0}}<\infty
\end{aligned}$$

如果 $r_2 > \sigma + s + s' - \frac{n}{p}$ 和 $L > n + \sigma$。

同样，利用引理 2 和极大算子 M_t，我们可以像引理 1 的证明中那样估计 I_1，

$$\begin{aligned}
|I_1| &\le C\sum_{j\ge i}\sum_{l(P)=2^{-j}}|c(P)||\langle\phi_P\ ,\ \varphi_R\rangle| \\
&\le C\sum_{j\ge i}\sum_{l(P)=2^{-j}}|c(P)|2^{-jn}2^{(i-j)r_1}(1+2^i|x_R-x_P|)^{-L} \\
&\le C\sum_{j\ge i}2^{-j(r_1+n)}2^{ir_1}\sum_{l(P)=2^{-j}}|c(P)|(1+2^i|x_R-x_P|)^{-L} \\
&\le \sum_{j\ge i}2^{-j(r_1+n-n/t+s')}2^{ir_1}2^{-in/t}M_t(\sum_{l(P)=2^{-j}}2^{js'}|c(P)|\chi_P)(x) \qquad (a)
\end{aligned}$$

如果 $0 < t \le 1$、$L > n/t$ 和 $x \in R$ 满足 $l(R) = 2^{-i}$。

当 $0 < q < 1$时，利用 l^q-范数的单调性；当 $1 \le q \le \infty$时，利用 H¨older 不等式，由上述 (a) 可得以下结果，

$$|I_1| \le C2^{-i(n+s')}\{\sum_{i\le j}(M_t(\sum_{l(P)=2^{-j}}2^{js'}|c(P)|\chi_P)(x))^q\}^{1/q}$$

若 $r_1 + n - n/t + s' > 0$, $0 < q \le \infty$ 和 $x \in R$。

取 $L^p(R)$ 范数并利用 Fefferman-Stein 向量值不等式，对于满足 $l(R) = 2^{-i}$ 和 $c \in a^s(\dot{f}^{s'}_{pq})^\sigma_{x_0}$ 的二进立方体 R，有:

$$\begin{aligned}
|I_1|2^{-in/p} &= ||I_1||_{L^p(R)} \\
&\le C2^{-i(n+s')}||\{\sum_{i\le j} M_t(\sum_{l(P)=2^{-j}} 2^{js'}|c(P)|\chi_P)^q\}^{1/q}||_{L^p(R)} \\
&\le C2^{-i(n+s')}||\{\sum_{i\le j}(\sum_{l(P)=2^{-j}} 2^{js'}|c(P)|\chi_P)^q\}^{1/q}||_{L^p(R)} \\
&\le C2^{-i(n+s')}c(\dot{f}^{s'}_{pq})(R) \\
&\le C2^{-i(n+s')}(|x_0 - x_R| + 2^{-i})^\sigma 2^{-is}||c||_{a^s(\dot{f}^{s'}_{pq})^\sigma_{x_0}} \\
&\le C2^{-i(n+s'+s+\sigma)}||c||_{a^s(\dot{f}^{s'}_{pq})^\sigma_{x_0}} < \infty
\end{aligned}$$

若 $0 < t < \min(p, q)$, $0 < p < \infty$, $0 < q \le \infty$。

接下来给出 B 型情形的估计。我们将考虑两种情形。

情形 1: $1 \le p < \infty$。对 (a) 取 $L^p(R)$ 范数，并利用极大算子 M_t 的有界性，对于满足 $l(R) = 2^{-i}$ 和 $c \in a^s(\dot{b}^{s'}_{pq})^\sigma_{x_0}$ 的二进立方体 R，可得:

$$\begin{aligned}
|I_1|2^{-in/p} &= ||I_1||_{L^p(R)} \\
&\le C2^{i(r_1-n/t)}||\sum_{i\le j} 2^{-j(r_1+n-n/t+s')} M_t(\sum_{l(P)=2^{-j}} 2^{js'}|c(P)|\chi_P)||_{L^p(R)} \\
&\le C2^{i(r_1-n/t)}\sum_{i\le j} 2^{-j(r_1+n-n/t+s')}||M_t(\sum_{l(P)=2^{-j}} 2^{js'}|c(P)|\chi_P)||_{L^p(R)} \\
&\le C2^{i(r_1-n/t)}\sum_{i\le j} 2^{-j(r_1+n-n/t+s')}||\sum_{l(P)=2^{-j}} 2^{js'}|c(P)|\chi_P||_{L^p(R)} \\
&\le C2^{-i(n+s')}\{\sum_{i\le j}||\sum_{l(P)=2^{-j}} 2^{js'}|c(P)|\chi_P||^q_{L^p(R)}\}^{1/q} \\
&\le C2^{-i(n+s')}c(\dot{b}^{s'}_{pq})(R) \le C2^{-i(n+s'+s+\sigma)}||c||_{a^s(\dot{b}^{s'}_{pq})^\sigma_{x_0}} < \infty
\end{aligned}$$

其中，这些不等式在 $r_1 + n - n/t + s' > 0$ 且 $p > t$ 时由利用 l^q-范数的单调性得到，而在 $0 < q < 1$ 时由 H¨older 不等式得到。

情形 2: $0 < p < 1$。类似地，对于一个二进立方体 R，有

$l(R)=2^{-i}$ and $c\in a^s(\dot b^{s'}_{pq})^\sigma_{x_0}$,

$$
\begin{aligned}
|I_1|2^{-in/p} &= ||I_1||_{L^p(R)}\\
&\le C2^{i(r_1-n/t)}||\sum_{i\le j}2^{-j(r_1+n-n/t+s')}M_t(\sum_{l(P)=2^{-j}}2^{js'}|c(P)|\chi_P)||_{L^p(R)}\\
&\le C2^{i(r_1-n/t)}\times\\
&\quad\{\sum_{i\le j}2^{-j(r_1+n-n/t+s')p}||M_t(\sum_{l(P)=2^{-j}}2^{js'}|c(P)|\chi_P)||^p_{L^p(R)}\}^{1/p}\\
&\le C2^{i(r_1-n/t)}\{\sum_{i\le j}2^{-j(r_1+n-n/t+s')p}||\sum_{l(P)=2^{-j}}2^{js'}|c(P)|\chi_P||^p_{L^p(R)}\}^{1/p}\\
&\le C2^{-i(n+s')}\{\sum_{i\le j}||\sum_{l(P)=2^{-j}}2^{js'}|c(P)|\chi_P||^q_{L^p(R)}\}^{1/q}\\
&\le C2^{-i(n+s')}c(\dot b^{s'}_{pq})(R)\le C2^{-i(n+s'+s+\sigma)}||c||_{a^s(\dot b^{s'}_{pq})^\sigma_{x_0}}<\infty
\end{aligned}
$$

其中，当 $q<p$ 时，由 l^q-范数的单调性可得这些不等式；当 $p\le q$ 时，则由 Hölder 不等式可得。

对于情形 $p=\infty$，我们也得到相同的估计。因此，对于二进立方体 R 和序列 $c\in a^s(\dot e^{s'}_{pq})^\sigma_{x_0}$, $\sum_{\mathcal{D}\ni P}c(P)\langle\phi_P,\varphi_R\rangle$，当 $r_1>J-n-s'$，$r_2>\sigma+s+s'-\frac{n}{p}$ 且 $L>\max(J,\ n+\sigma)$ 时，该序列收敛。

(ii) 设 I_0 和 I_1 如 (i) 的证明中所述，且 R 是满足 $l(R)=2^{-i}$ 的二进立方体。令 $w_j(P)=(2^{-j}+|x_P-x_0|)^{-\sigma}$，$\sigma\ge 0$。注意到

$$|c(P)|\le Cl(P)^{s+s'-n/p}w_j(P)^{-1}||c||_{a^s(\tilde e^{s'}_{pq})^\sigma_{x_0}}$$

对于 $c\in a^s(\tilde e^{s'}_{pq})^\sigma_{x_0}$。由引理 2 可得

$$
\begin{aligned}
|I_0|&\le C\sum_{i\ge j}\sum_{l(P)=2^{-j}}|c(P)||\langle\phi_P\ ,\ \varphi_R\rangle|\\
&\le C\sum_{i\ge j}\sum_{l(P)=2^{-j}}|c(P)|2^{-in}2^{(j-i)r_2}(1+2^j|x_R-x_P|)^{-L}\\
&\le C\sum_{i\ge j}2^{-i(r_2+n)}2^{j(r_2-s-s'+\frac{n}{p})}||c||_{a^s(\tilde e^{s'}_{pq})^\sigma_{x_0}}\times\\
&\qquad\sum_{l(P)=2^{-j}}w_j(P)^{-1}(1+2^j|x_R-x_P|)^{-L}
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned} &\leq C\sum_{i\geq j} 2^{-i(r_2+n)}2^{j(r_2-s-s'+\frac{n}{p})}||c||_{a^s(\tilde{e}^{s'}_{pq})^\sigma_{x_0}} \times \\ &\quad 2^{-j\sigma}\sum_{l(P)=2^{-j}}(1+2^j|x_R-x_P|)^{-(L-\sigma)} \\ &\leq C2^{-i(n+\sigma+s+s'-\frac{n}{p})}||c||_{a^s(\tilde{e}^{s'}_{pq})^\sigma_{x_0}} < \infty \end{aligned}$$

如果 $r_2 > \sigma + s + s' - \frac{n}{p}$ 且 $L > \sigma + n$。

对于 I_1，我们有

$$\begin{aligned} |I_1| &\leq C\sum_{j\geq i}\sum_{l(P)=2^{-j}}|c(P)||\langle\phi_P\ ,\ \varphi_R\rangle| \\ &\leq C\sum_{j\geq i}\sum_{l(P)=2^{-j}}|c(P)|2^{-jn}2^{(i-j)r_1}(1+2^i|x_R-x_P|)^{-L} \\ &\leq C\sum_{j\geq i}\sum_{l(P)=2^{-j}}|c(P)|2^{-jn}2^{(i-j)r_1}w_j(P)w_j(P)^{-1}(1+2^i|x_R-x_P|)^{-L} \\ &\leq C\sum_{j\geq i}2^{-j(r_1+n)}2^{ir_1}2^{-i\sigma}\sum_{l(P)=2^{-j}}|c(P)|w_j(P)(1+2^i|x_R-x_P|)^{-(L-\sigma)} \\ &\leq \sum_{j\geq i}2^{-j(r_1+n-n/t+s')}2^{i(r_1+\sigma-n/t)}M_t(\sum_{l(P)=2^{-j}}2^{js'}w_j(P)|c(P)|\chi_P)(x). \end{aligned}$$

按照 (i) 的证明中的相同方法，我们得到

$$|I_1| \leq Cc(\tilde{e}^{s'}_{pq})^\sigma_{x_0}(R) \leq C||c||_{a^s(\tilde{e}^{s'}_{pq})^\sigma_{x_0}} < \infty$$

如果 $r_1 > J - n - s'$ 且 $L > \sigma + J$。对于 $\sigma < 0$ 的情形，我们也得到相同的估计。 □

4. 刻画

设 ϕ 是一个满足 (1.1) 和 (1.2) 的施瓦茨函数。对于每个二进立方体 Q，我们定义 $\phi_j(x) = 2^{jn}\phi(2^j x)$ 和 $\phi_Q(x) = \phi(l(Q)^{-1}(x - x_Q))$。

注 1.（参见 [7: 引理(6.9)]）。注意，对于给定的 ϕ 满足 (1.1) 和 (1.2) 的 sat-，存在一个满足相同条件 (1.1) 和 (1.2) 的施瓦茨函数 φ，使得

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}}\hat{\varphi}_j(\xi)\hat{\phi}_j(\xi) = 1 \text{ if } \xi \neq 0.$$

因此我们有 φ-变换 [5；引理 2。1]

$$f=\sum_R l(R)^{-n}\langle f,\ \varphi_R\rangle\phi_R$$

对于 $f\in\mathcal{S}'$。

定理 1. 对于满足 (1.1) 和 (1.2) 的 s、 s'、 $\sigma\in\mathbb{R}$、 $0<p$、$q\leq\infty$、 $x_0\in\mathbb{R}^n$ 和 $\phi\in\mathcal{S}$，我们有
(i)

$$A^s(\dot{E}^{s'}_{pq})^\sigma_{x_0}=\{f=\sum_Q c(Q)\phi_Q:\ \ (c(Q))\in a^s(\dot{e}^{s'}_{pq})^\sigma_{x_0}\}.$$

(ii)

$$A^s(\tilde{\dot{E}}^{s'}_{pq})^\sigma_{x_0}=\{f=\sum_Q c(Q)\phi_Q:\ \ (c(Q))\in a^s(\tilde{\dot{e}}^{s'}_{pq})^\sigma_{x_0}\}$$

注 2. (1) 我们可以证明，$D\equiv\{f=\sum_Q c(Q)\phi_Q:c\in a^s(\dot{e}^{s'}_{pq})^\sigma_{x_0}\}$ 和 $\tilde{D}\equiv\{f=\sum_Q c(Q)\phi_Q:\ \ c\in a^s(\tilde{\dot{e}}^{s'}_{pq})^\sigma_{x_0}\}$

与满足条件 (1.1) 和 (1.2) 的 $\phi\in\mathcal{S}$ 的选取无关。事实上，设 ϕ^1 和 ϕ^2 是满足 (1.1) 和 (1.2) 的 Schwartz函数，并且空间 $D(\phi^1)$ 和 $D(\phi^2)$ 分别由使用 ϕ^1 和 ϕ^2 替代 ϕ 来定义。我们考虑 φ-变换

$$\phi^1_P=\sum_R l(R)^{-n}\langle\phi^1_P\ ,\ \varphi^2_R\rangle\phi^2_R.$$

那么，对于 $D(\phi^1)\ni f=\sum_P c(P)\phi^1_P$，$c\in a^s(\dot{e}^{s'}_{pq})^\sigma_{x_0}$，我们有

$$f=\sum_P c(P)\phi^1_P=\sum_R Ac(R)\phi^2_R$$

其中 $A=\{l(R)^{-n}\langle\phi^1_P,\ \varphi^2_R\rangle\}_{RP}$。由引理 1 和引理 2 可知，对于 $c\in a^s(\dot{e}^{s'}_{pq})^\sigma_{x_0}$, $Ac\in a^s(\dot{e}^{s'}_{pq})^\sigma_{x_0}$。这表明 $D(\phi^1)\subset D(\phi^2)$。用同样的论证可知，$D(\phi^2)\subset D(\phi^1)$。由此可得，˜空间 D 与 ϕ 的选取无关。对于 D，这也成立

(2) 根据引理 3，我们注意到，对于每个序列 $c\in a^s(\dot{e}^{s'}_{pq})^\sigma_{x_0}$，或 $c\in a^s\ \tilde{\dot{e}}^{s'}_{pq}\ ^\sigma_{x_0}\ \sum_Q c\ Q\ \phi_Q\qquad\qquad\mathcal{S}'_{k_0}\qquad k_0=\qquad\{[\sigma+s+(\ ),\ s'-\frac{n}{p}],-1\}\qquad\mathcal{S}_{-1}=\mathcal{S}\ \mathcal{S}'_{-1}=\mathcal{S}'\qquad[x]$
( ) 在 中收敛，其中 max，且，，是一个不大于 x 的最大整数。因此，我们可以在定义1和定义2中用 $\mathcal{S}'_{k_0}$ 替换 $\mathcal{S}'_\infty$ （参见 [17]）。

定理 1 的证明: 令 $D \equiv \{f = \sum_Q c(Q)\phi_Q : c \in a^s(\dot{e}^{s'}_{pq})^\sigma_{x_0}\}$。为了证明 $D \subset A^s(\dot{E}^{s'}_{pq})^\sigma_{x_0}$，我们断言，对于满足 $l(P) = 2^{-j}$ 的二进立方体 P,

$$c(\dot{E}^{s'}_{pq})(P) \le Cc(\dot{e}^{s'}_{pq})(P).$$

令 $D \ni f = \sum_P c(P)\phi_P: (c(P)) \in a^s(\dot{e}^{s'}_{pq})^\sigma_{x_0}$。注意，由于$\phi_i * \phi \in \mathcal{S}$,

$$\begin{aligned}
|\phi_i * f(x)| &= |\sum_P c(P)\phi_i * \phi_P(x)| \\
&= |\sum_{j=i-1}^{i+1} \sum_{l(P)=2^{-j}} c(P)\phi_i * \phi_P(x)| \\
&= |\sum_{j=i-1}^{i+1} \sum_{l(P)=2^{-j}} c(P)(\phi_{i-j} * \phi)_P(x)| \\
&\le C \sum_{j=i-1}^{i+1} \sum_{l(P)=2^{-j}} |c(P)|(1 + 2^j|x - x_P|)^{-L}
\end{aligned}$$

对于足够大的 L。因此，利用引理 1 证明中所用的极大算子 M_t，可得,

$$\begin{aligned}
&\{\sum_{i\ge j}(2^{is'}|\phi_i * f|)^q\}^{1/q} \le C\{\sum_{i\ge j}(2^{is'} \sum_{l(R)=2^{-i}} |\phi_i * f|\chi_R)^q\}^{1/q} \\
&\le C\{\sum_{i\ge j}(2^{is'} \sum_{l(R)=2^{-i}} (\sum_{l(R')=2^{-i+1}} |c(R')|(1 + 2^{i-1}|x - x_{R'}|)^{-L} \\
&+ \sum_{l(R')=2^{-i}} |c(R')|(1 + 2^i|x - x_{R'}|)^{-L} \\
&+ \sum_{l(R')=2^{-i-1}} |c(R')|(1 + 2^{i+1}|x - x_{R'}|)^{-L})\chi_R)^q\}^{1/q}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\le C\{\sum_{i\ge j}(2^{is'}\times \\
&\qquad \sum_{l(R)=2^{-i}}(\sum_{l(R')=2^{-i+1}}|c(R')|(1+2^{i-1}|x_R-x_{R'}|)^{-L})\chi_R)^q\}^{1/q} \\
&+\quad C\{\sum_{i\ge j}(2^{is'}\sum_{l(R)=2^{-i}}(\sum_{l(R')=2^{-i}}|c(R')|(1+2^{i}|x_R-x_{R'}|)^{-L})\chi_R)^q\}^{1/q} \\
&+\quad C\{\sum_{i\ge j}(2^{is'}\times \\
&\qquad \sum_{l(R)=2^{-i}}(\sum_{l(R')=2^{-i-1}}|c(R')|(1+2^{i+1}|x_R-x_{R'}|)^{-L})\chi_R)^q\}^{1/q} \\
&\le\quad C\{\sum_{i\ge j}(\sum_{l(R)=2^{-i}}M_t(\sum_{l(R')=2^{-i+1}}2^{is'}|c(R')|\chi_{R'})\chi_R)^q\}^{1/q} \\
&+\quad C\{\sum_{i\ge j}(\sum_{l(R)=2^{-i}}M_t(\sum_{l(R')=2^{-i}}2^{is'}|c(R')|\chi_{R'})\chi_R)^q\}^{1/q} \\
&+\quad C\{\sum_{i\ge j}(\sum_{l(R)=2^{-i}}M_t(\sum_{l(R')=2^{-i-1}}2^{is'}|c(R')|\chi_{R'})\chi_R)^q\}^{1/q}
\end{aligned}
$$

若 $0<t\le 1$ 且 $L>n/t_\circ$ 取 $L^p(P)$-范数，并利用 Fefferman-Stein 向量值不等式，可得

$$
\begin{aligned}
c(\dot F^{s'}_{pq})(P)&=||\{\sum_{i\ge j}(2^{is'}|\phi_i*f|)^q\}^{1/q}||_{L^p(P)} \\
&\le\quad C||\{\sum_{i\ge j}(M_t(\sum_{l(R')=2^{-i+1}}2^{is'}|c(R')|\chi_{R'}))^q\}^{1/q}||_{L^p(P)} \\
&+\quad C||\{\sum_{i\ge j}(M_t(\sum_{l(R')=2^{-i}}2^{is'}|c(R')|\chi_{R'}))^q\}^{1/q}||_{L^p(P)} \\
&+\quad C||\{\sum_{i\ge j}(M_t(\sum_{l(R')=2^{-i-1}}2^{is'}|c(R')|\chi_{R'}))^q\}^{1/q}||_{L^p(P)} \\
&\le\quad C||\{\sum_{i\ge j}(\sum_{l(R')=2^{-i+1}}2^{is'}|c(R')|\chi_{R'})^q\}^{1/q}||_{L^p(P)} \\
&+\quad C||\{\sum_{i\ge j}(\sum_{l(R')=2^{-i}}2^{is'}|c(R')|\chi_{R'})^q\}^{1/q}||_{L^p(P)} \\
&+\quad C||\{\sum_{i\ge j}(\sum_{l(R')=2^{-i-1}}2^{is'}|c(R')|\chi_{R'})^q\}^{1/q}||_{L^p(P)} \\
&\le\quad C||\{\sum_{i\ge j}(\sum_{l(R')=2^{-i}}2^{is'}|c(R')|\chi_{R'})^q\}^{1/q}||_{L^p(P)}=Cc(\dot f^{s'}_{pq})(P)
\end{aligned}
$$

若 $0 < t < \min(p, q)$ 且 $1 \le p < \infty$。若 $0 < p < 1$，则有

$$
\begin{aligned}
c(\dot{F}^{s'}_{pq})(P) &= ||\{\sum_{i\ge j}(2^{is'}|\phi_i * f|)^q\}^{1/q}||_{L^p(P)} \\
&\le C\{||\{\sum_{i\ge j}(M_t(\sum_{l(R')=2^{-i+1}} 2^{is'}|c(R')|\chi_{R'}))^q\}^{1/q}||^p_{L^p(P)} \\
&+ C||\{\sum_{i\ge j}(M_t(\sum_{l(R')=2^{-i}} 2^{is'}|c(R')|\chi_{R'}))^q\}^{1/q}||^p_{L^p(P)} \\
&+ C||\{\sum_{i\ge j}(M_t(\sum_{l(R')=2^{-i-1}} 2^{is'}|c(R')|\chi_{R'}))^q\}^{1/q}||^p_{L^p(P)}\}^{1/p} \\
&\le C\{||\{\sum_{i\ge j}(\sum_{l(R')=2^{-i+1}} 2^{is'}|c(R')|\chi_{R'})^q\}^{1/q}||^p_{L^p(P)} \\
&+ C||\{\sum_{i\ge j}(\sum_{l(R')=2^{-i}} 2^{is'}|c(R')|\chi_{R'})^q\}^{1/q}||^p_{L^p(P)} \\
&+ C||\{\sum_{i\ge j}(\sum_{l(R')=2^{-i-1}} 2^{is'}|c(R')|\chi_{R'})^q\}^{1/q}||^p_{L^p(P)}\}^{1/p} \\
&\le C||\{\sum_{i\ge j}(\sum_{l(R')=2^{-i}} 2^{is'}|c(R')|\chi_{R'})^q\}^{1/q}||_{L^p(P)} = Cc(\dot{f}^{s'}_{pq})(P).
\end{aligned}
$$

类似地，对于 B 型情形，我们有

$$
\begin{aligned}
c(\dot{B}^{s'}_{pq})(P) &= \{\sum_{i\ge j}(2^{is'}||\phi_i * f||_{L^p(P)})^q\}^{1/q} \le \\
&\le C\{\sum_{i\ge j}||M_t(\sum_{l(R')=2^{-i+1}} 2^{is'}|c(R')|\chi_{R'})||^q_{L^p(P)}\}^{1/q} \\
&+ C\{\sum_{i\ge j}||M_t(\sum_{l(R')=2^{-i}} 2^{is'}|c(R')|\chi_{R'})||^q_{L^p(P)}\}^{1/q} \\
&+ C\{\sum_{i\ge j}||M_t(\sum_{l(R')=2^{-i-1}} 2^{is'}|c(R')|\chi_{R'})||^q_{L^p(P)}\}^{1/q} \\
&\le C\{\sum_{i\ge j}||\sum_{l(R')=2^{-i+1}} 2^{is'}|c(R')|\chi_{R'}||^q_{L^p(P)}\}^{1/q} \\
&+ C\{\sum_{i\ge j}||\sum_{l(R')=2^{-i}} 2^{is'}|c(R')|\chi_{R'}||^q_{L^p(P)}\}^{1/q} \\
&+ C\{\sum_{i\ge j}||\sum_{l(R')=2^{-i-1}} 2^{is'}|c(R')|\chi_{R'}||^q_{L^p(P)}\}^{1/q} \\
&\le C\{\sum_{i\ge j}||\sum_{l(R')=2^{-i}} 2^{is'}|c(R')|\chi_{R'}||^q_{L^q(P)}\}^{1/q} = Cc(\dot{b}^{s'}_{pq})(P)
\end{aligned}
$$

若 $1 \le p < \infty$ 且 $0 < t < p$。对于 $0 < p < 1$ 情形，通过与 F 型情形的证明相同的论证，我们可以得到相同的结果。此外，对于 $p = \infty$ 情形，我们也有相同的结果。因此，我们有

$$c(\dot{E}^{s'}_{pq})(P) \le Cc(\dot{e}^{s'}_{pq})(P)$$

如果 $0 < p$， $q \le \infty$。这蕴含 $D \subset A^s(\dot{E}^{s'}_{pq})^{\sigma}_{x_0\circ}$

接下来我们将证明逆向结论，即 $A^s(\dot{E}^{s'}_{pq})^{\sigma}_{x_0} \subset D$。我们考虑 φ-变换 $f = \sum_P c(f)(P)\phi_P$, $c(f)(P) = l(P)^{-n}\langle f, \varphi_P\rangle$其中 ϕ 和 φ 如注 1 所述。我们将证明 $c(f)(P) \in a^s(\dot{e}^{s'}_{pq})^{\sigma}_{x_0\circ}$ 更准确地说，我们将看到

$$c(f)(\dot{e}^{s'}_{pq})(P) \le Cc(\dot{E}^{s'}_{pq})(P)$$

对于一个二进立方体 P，满足 $l(P) = 2^{-j}$，其中记号 $c(f)(\dot{e}^{s'}_{pq})(P)$ 表示在 $c(\dot{e}^{s'}_{pq})(P)$ 的定义中，用序列 $c(f)(P)$ 替代序列 $c(P)$。我们通过如下方式定义序列 $\sup(f)(P)$:

$$\sup(f)(P) = \sup_{P \ni y} |\varphi_j * f(y)|$$

并且对于 $\gamma \in \mathbb{N}_0$，序列 $\inf_\gamma(f)(P)$ 和 $t_\gamma(P)$ 分别为

$$\inf_\gamma(f)(P) = \max\{\inf_{R \ni y} |\varphi_j * f(y)| : R \subset P, l(R) = 2^{-(\gamma+j)}\},$$

$$t_\gamma(P) = \inf_{P \ni y} |\varphi_{j-\gamma} * f(y)|$$

分别。对于满足 $l(P) = 2^{-j}$ 的序列 $c(P)$，我们定义序列$c^*(P)$ 为

$$c^*(P) = \sum_{l(R)=2^{-j}} |c(R)|(1 + 2^j|x_P - x_R|)^{-L}$$

当 L 足够大时。

由附录中的引理 A (i)，我们有

$$\begin{aligned} |c(f)(P)| &= l(P)^{-n}|\langle f\ ,\ \varphi_P\rangle| = |\varphi_j * f(x_P)| \\ &\le \quad \sup(f)(P) \le \sup(f)^*(P) \approx \inf_\gamma(f)^*(P) \end{aligned}$$

当 γ 足够大时。因此，根据附录中的引理 A (ii) 和 (iii)，我们

have

$$
\begin{aligned}
&|c(f)(\dot{f}^{s'}_{pq})(P)| \le C \inf_{\gamma}(f)^*(\dot{f}^{s'}_{pq})(P) \le C \inf_{\gamma}(f)(\dot{f}^{s'}_{pq})(P) \\
&\quad \le \quad C||\{\sum_{i\ge j}(\sum_{l(R)=2^{-i}} 2^{is'} \inf_{\gamma}(f)(R)\chi_R)^q\}^{1/q}||_{L^p(P)} \\
&\le C||\{\sum_{i\ge j}(\sum_{l(R)=2^{-i}} 2^{is'}2^{\gamma L} \sum_{R'\subset R, l(R')=2^{-(\gamma+i)}} t^*_{\gamma}(R')\chi_{R'}\chi_R)^q\}^{1/q}||_{L^p(P)} \\
&\quad \le \quad C2^{\gamma L}||\{\sum_{i\ge j+\gamma}(2^{is'}2^{-\gamma s'} \sum_{l(R')=2^{-i}} t_{\gamma}(R')\chi_{R'})^q\}^{1/q}||_{L^p(P)} \\
&\quad \le \quad C2^{\gamma(L-s')}||\{\sum_{i\ge j+\gamma}(2^{is'} \sum_{l(R')=2^{-i}} |\varphi_{i-\gamma} * f(y)|\chi_{R'})^q\}^{1/q}||_{L^p(P)} \\
&\quad \le \quad C2^{\gamma(L-s')}||\{\sum_{i\ge j}(2^{is'}2^{s'\gamma} \sum_{l(R')=2^{-(i+\gamma)}} |\varphi_i * f(y)|\chi_{R'})^q\}^{1/q}||_{L^p(P)} \\
&\quad \le \quad C2^{\gamma L}||\{\sum_{i\ge j}(2^{is'}|\varphi_i * f(y)|)^q\}^{1/q}||_{L^p(P)} = Cc(\dot{F}^{s'}_{pq})(P).
\end{aligned}
$$

对于 B 型情形，我们可以用与上述类似的论证证明相同的结果

$$c(f)(\dot{b}^{s'}_{pq})(P) \le Cc(\dot{B}^{s'}_{pq})(P).$$

因此我们得到

$$c(f)(\dot{e}^{s'}_{pq})(P) \le Cc(\dot{E}^{s'}_{pq})^{\varphi}(P)$$

其中，下标 φ 表示在$c(\dot{E}^{s'}_{pq})(P)$的定义中用 φ 替换 ϕ 。由注 2 (1) 可知，这意味着 $A^s(\dot{E}^{s'}_{pq})^{\sigma}_{x_0} \subset D$。因此我们得到 $A^s(\dot{E}^{s'}_{pq}) = D$。通过采用与 (i) 的证明相同的论证，可以证明 (ii)。

□

注 3. (1) 从上述证明中可以看出
$c(\dot{E}^{s'}_{pq})(P) \le Cc(\dot{e}^{s'}_{pq})(P)$ 对于 $f = \sum_P c(P)\phi_P$, $c \in a^s(\dot{e}^{s'}_{pq})^{\sigma}_{x_0}$,$c(f)(\dot{e}^{s'}_{pq})(P) \le Cc(\dot{E}^{s'}_{pq})(P)$ 对于 $c(f)(P) = l(P)^{-n}\langle f, \phi_P\rangle$, $f \in A^s(\dot{E}^{s'}_{pq})^{\sigma}_{x_0}$以及,

$\sim c\ (\dot{E}^{s'}_{pq})^{\ \sigma}_{x_0}\ (P) \le Cc\ (\tilde{e}^{s'}_{pq})^{\ \sigma}_{x_0}\ (P)$ 适用于 $f = \sum_P c\ (P)\ \phi_P$、$c \in a^s\ (\tilde{e}^{s'}_{pq})^{\ \sigma}_{x_0}$、$\sim c\ (f)\ \ (\tilde{e}^{s'}_{pq})^{\ \sigma}_{x_0}\ (P) \le Cc\ (\dot{E}^{s'}_{pq})^{\ \sigma}_{x_0}\ (P)$ ，适用于 $c\ (f)\ \ (P) = l\ (P)^{\ -n}\langle f$、$\ \phi_P\rangle$、$\ f \in \sim A^s\ (\dot{E}^{s'}_{pq})^{\ \sigma}_{x_0}$。

$\sim$(2) $A^s(\dot{E}^{s'}_{pq})^{\sigma}_{x_0}$ 和 $A^s(\dot{E}^{s'}_{pq})^{\sigma}_{x_0}$ 与满足条件 (1.1) 和 (1.2) 的 $\phi \in \mathcal{S}$ 的选取无关。

由定理 1 可得以下性质。因此，我们将研究我们的 2-微局部空间与经典 2-微局部空间之间的关系。

命题 1. 假设 s、 s、$'$ $\sigma \in \mathbb{R}$ 和 $x_0 \in \mathbb{R}^n$。

(i) 当 $\sigma < 0$ 时，我们有$A^s(\dot{E}^{s'}_{pq})^{\sigma}_{x_0} = \{0\}$，其中 $0 < p$、$q \leq \infty$。
(ii) 当 $\sigma + s < 0$ 时，我们有$A^s(\dot{B}^{s'}_{pq})^{\sigma}_{x_0} = \{0\}$，其中 $0 < p$、$q \leq \infty$、$A^s(\dot{F}^{s'}_{pq})^{\sigma}_{x_0} = \{0\}$，其中 $0 < p <\infty$、$0 < q \leq \infty$。当 $\sigma + s + \frac{n}{q} < 0$ 时，我们有 $A^s(\dot{F}^{s'}_{\infty q})^{\sigma}_{x_0} = \{0\}$，其中 $0 < q \leq \infty$.

(iii) 当 $s < 0$ 时，我们有~ ~$A^s(\dot{B}^{s'}_{pq})^{\sigma}_{x_0} = \{0\}$，其中 $0 < p$、$q \leq \infty$、$A^s(\dot{F}^{s'}_{pq})^{\sigma}_{x_0} = \{0\}$，其中 $0 < p < \infty$、$0 < q \leq \infty$。当 $s + \frac{n}{q} < 0$ 时，我们有~$A^s(\dot{F}^{s'}_{\infty q})^{\sigma}_{x_0} = \{0\}$，其中 $0 < q \leq \infty$。

证明：这些性质由以下事实可得：$c(\dot{e}^{s'}_{pq})(P)$，以及$c(\tilde{\dot{e}}^{s'}_{pq})^{\sigma}_{x_0}(P)$ 随着 $l(P)$ 的增大而单调不减。 □

命题 2. 假设 s、 s、$'$ $\sigma \in \mathbb{R}$ 和 $x_0 \in \mathbb{R}^n$。

(i) 对于 $0 < p$、$q \leq \infty$、A^s，我们有$A^s(\dot{B}^{s'}_{pq})^{\sigma}_{x_0} \subset (\dot{B}^{s'}_{pq})^{s+\sigma}_{x_0}$；对于 $0 < p < \infty$、$0 < q \leq \infty$，我们有 $^{\sigma}_{x_0} \subset (\dot{F}^{s'}_{pq})^{s+\sigma}_{x_0}$。当 $s \geq 0$ 时，对于 $0 < q \leq \infty$，我们有$A^s(\dot{F}^{s'}_{\infty q})^{\sigma}_{x_0} \subset (\dot{F}^{s'}_{\infty q})^{s+\sigma}_{x_0}$。

(ii) *When $s \leq 0$, we have*
$A^s(\dot{B}^{s'}_{pq})^{\sigma}_{x_0} = (\dot{B}^{s'}_{pq})^{s+\sigma}_{x_0}$ *for* $0 < p, q \leq \infty$,
$A^s(\dot{F}^{s'}_{pq})^{\sigma}_{x_0} = (\dot{F}^{s'}_{pq})^{s+\sigma}_{x_0}$ *for* $0 < p < \infty,\ 0 < q \leq \infty$,
$A^s(\dot{F}^{s'}_{\infty q})^{\sigma}_{x_0} \supset (\dot{F}^{s'}_{\infty q})^{s+\sigma}_{x_0}$ *for* $0 < q \leq \infty$.
Particularly, when $\sigma \geq 0$ and $\sigma + s = 0$, we have
$A^s(\dot{B}^{s'}_{pq})^{\sigma}_{x_0} = \dot{B}^{s'}_{pq}(\mathbb{R}^n)$ *for* $0 < p, q \leq \infty$,
$A^s(\dot{F}^{s'}_{pq})^{\sigma}_{x_0} = \dot{F}^{s'}_{pq}(\mathbb{R}^n)$ *for* $0 < p < \infty,\ 0 < q \leq \infty$.

(iii) 当 $\sigma < 0$ 时，对于$0 < p$、$q \le \infty$，我们有 $A^s(\tilde{\dot{E}}^{s'}_{pq})^\sigma_{x_0} \subset A^s(\dot{E}^{s'+\sigma}_{pq}) \subset \dot{E}^{s'+\sigma+s-\frac{n}{p}}_{\infty\infty}$。

证明：性质 (i) 可由以下事实推出

$$l(Q)^{-\sigma} \sup_{\mathcal{D}\ni P\subset 3Q} l(P)^{-s} c(\dot{e}^{s'}_{pq})(P) \ge l(Q)^{-(\sigma+s)} c(\dot{e}^{s'}_{pq})(Q).$$

由于若 $s \le 0$，我们可以从性质 (i) 得到性质 (ii)，

$$a^s(\dot{e}^{s'}_{pq})^\sigma_{x_0} \supset (\dot{e}^{s'}_{pq})^{s+\sigma}_{x_0}.$$

性质 (iii) 可由下式证明

$$l(P)^{-s} c(\tilde{\dot{e}}^{s'}_{pq})^\sigma_{x_0}(P) \ge l(P)^{-s} c(\dot{e}^{s'+\sigma}_{pq})(P) \ge l(P)^{-(s+s'+\sigma-\frac{n}{p})} |c(P)|.$$

□

命题 3. 假设 s, s' $\sigma \in \mathbb{R}$ 和 $x_0 \in \mathbb{R}^n$。

当 $0 < q_1 \le q_2 \le \infty$, $0 < p \le \infty$ 时，我们有 $\tilde{A}^s(\dot{B}^{s'}_{pq_1})^\sigma_{x_0} \subset A^s(\dot{B}^{s'}_{pq_2})^\sigma_{x_0}$, $A^s(\dot{B}^{s'}_{pq_1})^\sigma_{x_0} \subset A^s(\dot{B}^{s'}_{pq_2})^\sigma_{x_0}$；当 $0 < q_1 \le q_2 \le \infty$, $0 < p < \infty$ 时，我们有 $\tilde{A}^s(\dot{F}^{s'}_{pq_1})^\sigma_{x_0} \subset A^s(\dot{F}^{s'}_{pq_2})^\sigma_{x_0}$, $A^s(\dot{F}^{s'}_{pq_1})^\sigma_{x_0} \subset A^s(\dot{F}^{s'}_{pq_2})^\sigma_{x_0}$。

证明：这些结论是由 l^p-范数的单调性得出的。

□

命题 4. 假设 s、 s、$'$ $\sigma \in \mathbb{R}$ 和 $x_0 \in \mathbb{R}^n$。

(i) *If* $0 < p_2 \le p_1 \le \infty$ *and* $0 < q \le \infty$, *then*
$A^{s+\frac{n}{p_1}}(\dot{B}^{s'}_{p_1q})^\sigma_{x_0} \subset A^{s+\frac{n}{p_2}}(\dot{B}^{s'}_{p_2q})^\sigma_{x_0}$, $A^{s+\frac{n}{p_1}}(\tilde{\dot{B}}^{s'}_{p_1q})^\sigma_{x_0} \subset A^{s+\frac{n}{p_2}}(\tilde{\dot{B}}^{s'}_{p_2q})^\sigma_{x_0}$,
and, if $0 < p_2 \le p_1 < \infty$ *and* $0 < q \le \infty$, *then*
$A^{s+\frac{n}{p_1}}(\dot{F}^{s'}_{p_1q})^\sigma_{x_0} \subset A^{s+\frac{n}{p_2}}(\dot{F}^{s'}_{p_2q})^\sigma_{x_0}$, $A^{s+\frac{n}{p_1}}(\tilde{\dot{F}}^{s'}_{p_1q})^\sigma_{x_0} \subset A^{s+\frac{n}{p_2}}(\tilde{\dot{F}}^{s'}_{p_2q})^\sigma_{x_0}$,
and, if $0 < p \le q \le \infty$, *then*
$A^s(\dot{F}^{s'}_{\infty q})^\sigma_{x_0} \subset A^{s+\frac{n}{p}}(\dot{F}^{s'}_{pq})^\sigma_{x_0}$, $A^s(\tilde{\dot{F}}^{s'}_{\infty q})^\sigma_{x_0} \subset A^{s+\frac{n}{p}}(\tilde{\dot{F}}^{s'}_{pq})^\sigma_{x_0}$.

(ii) 若 $0 < p$、 $q \le \infty$，则$A^s(\dot{E}^{s'+\frac{n}{p}}_{pq})^\sigma_{x_0} \subset A^s(\dot{E}^{s'}_{\infty\infty})^\sigma_{x_0} \subset (\dot{E}^{s+s'}_{\infty\infty})^\sigma_{x_0}$, $A^s(\tilde{\dot{E}}^{s'+\frac{n}{p}}_{pq})^\sigma_{x_0} \subset A^s(\tilde{\dot{E}}^{s'}_{\infty\infty})^\sigma_{x_0} \subset (\tilde{\dot{E}}^{s+s'}_{\infty\infty})^\sigma_{x_0}$。

(iii) 若 $s>0$、 $0<q<\infty$、 $0<p\leq\infty$ 或

$s\geq 0,\ q=\infty,\ 0<p\leq\infty,\ then$

$A^{s+\frac{n}{p}}(\dot{E}^{s'}_{pq})^{\sigma}_{x_0}=(\dot{E}^{s+s'}_{\infty\infty})^{\sigma}_{x_0},\ and\ A^{s+\frac{n}{p}}(\tilde{\dot{E}}^{s'}_{pq})^{\sigma}_{x_0}=(\tilde{\dot{E}}^{s+s'}_{\infty\infty})^{\sigma}_{x_0}.$

(iv) 若 $0<p_1,\ p_2,\ q\leq\infty$，则

$A^{\frac{n}{p_1}}(\dot{F}^{s'}_{p_1q})^{\sigma}_{x_0}=A^{\frac{n}{p_2}}(\dot{F}^{s'}_{p_2q})^{\sigma}_{x_0},\ A^{\frac{n}{p_1}}(\tilde{\dot{F}}^{s'}_{p_1q})^{\sigma}_{x_0}=A^{\frac{n}{p_2}}(\tilde{\dot{F}}^{s'}_{p_2q})^{\sigma}_{x_0}.$

证明：性质 (i) 是 Hölder 不等式的推论。性质 (ii) 可由此推出

$$c(\dot{e}^{s'+\frac{n}{p}})(P)\geq l(R)^{-s'}|c(R)|$$

对于 $R\subset P$。我们将证明性质 (iii)。注意到

$$a^{s+\frac{n}{p}}(\dot{e}^{s'}_{pq})^{\sigma}_{x_0}\subset(\dot{e}^{s'+s}_{\infty\infty})^{\sigma}_{x_0},$$

因为

$$l(P)^{-(s+\frac{n}{p})}c(\dot{e}^{s'}_{pq})(P)\geq l(P)^{-(s'+s)}|c(P)|.$$

为了证明 (iii)，只需证明

$$(\dot{e}^{s'+s}_{\infty\infty})^{\sigma}_{x_0}\subset a^{s+\frac{n}{p}}(\dot{e}^{s'}_{pq})^{\sigma}_{x_0}.$$

由于

$$c(\dot{e}^{s'}_{pq})(P)\leq C(\dot{e}^{s'+s}_{\infty\infty})(P)\times l(P)^{s+\frac{n}{p}}$$

若 $s>0$ 和 $0<q<\infty$，因此我们得到所需结果。性质 (iv) 正是 [6: 推论 5.7]。 □

命题5. 设 $s,\ s'\in\mathbb{R},\ \sigma\geq 0,\ 0<p,\ q\leq\infty\ and\ x_0\in\mathbb{R}^n$。我们有

~(i) $A^s(\dot{E}^{s'+\sigma}_{pq})\subset A^s(\dot{E}^{s'}_{pq})^{\sigma}_{x_0}\subset A^s(\dot{E}^{s'}_{pq})^{\sigma}_{x_0}$, ~(ii) $A^s(\dot{B}^{s'}_{p\ p\wedge q})^{\sigma}_{x_0}\subset A^s(\dot{F}^{s'}_{pq})^{\sigma}_{x_0}\subset A^s(\dot{B}^{s'}_{p\ p\vee q})^{\sigma}_{x_0}$,

~ ~$A^s(\dot{B}^{s'}_{p\ p\wedge q})^{\sigma}_{x_0}\subset A^s(\dot{F}^{s'}_{pq})^{\sigma}_{x_0}\subset A^s(\dot{B}^{s'}_{p\ p\vee q})^{\sigma}_{x_0}$, ~(iii) $(\dot{E}^{s'}_{\infty\infty})^{\sigma}_{x_0}=(\dot{E}^{s'}_{\infty\infty})^{\sigma}_{x_0}$. 特别地，若 $\frac{n}{p}<s$，则~$A^s(\dot{E}^{s'}_{pq})^{\sigma}_{x_0}=A^s(\dot{E}^{s'}_{pq})^{\sigma}_{x_0}$。

证明：由以下事实可得性质 (i)：

$$c(\tilde{e}_{pq}^{s'})_{x_0}^{\sigma}(P) \le Cc(\dot{e}_{pq}^{\sigma+s'})(P),$$

and

$$l(Q)^{-\sigma}l(P)^{-s}c(\dot{e}_{pq}^{s'})(P) \le Cl(P)^{-s}c(\tilde{e}_{pq}^{s'})_{x_0}^{\sigma}(P)$$

因为对于 $P \subset 3Q$, $l(Q)^{-\sigma} \le (l(P) + |x_0 - x_P|)^{-\sigma}$。

嵌入性质 (ii) 可由下式证明：

$c(\dot{f}_{pq}^{s'})(P) \le c(\dot{b}_{pq}^{s'})(P)$ for $0 < q \le p \le \infty$,

$c(\tilde{\dot{f}}_{pq}^{s'})(P) \le c(\tilde{\dot{b}}_{pq}^{s'})(P)$ for $0 < q \le p \le \infty$,

$c(\dot{b}_{pq}^{s'})(P) \le c(\dot{f}_{pq}^{s'})(P)$ for $0 < p \le q \le \infty$,

$c(\tilde{\dot{b}}_{pq}^{s'})(P) \le c(\tilde{\dot{f}}_{pq}^{s'})(P)$ for $0 < p \le q \le \infty$

根据闵可夫斯基不等式以及单调性（参见 Triebel[23：2.3.2 命题 2]）。

为证明性质 (iii)，只需由性质 (i) 看出：

$$(\dot{e}_{\infty\infty}^{s'})_{x_0}^{\sigma} \subset (\tilde{\dot{e}}_{\infty\infty}^{s'})_{x_0}^{\sigma},$$

考虑任意满足 $l(R) = 2^{-i}$ 的二进立方体 R，以及满足 $x_0 \in Q_l$ 和 $l(Q_l) = 2^{-l}$、$i \ge l$ 的二进立方体 Q_l，使得 $Q_i \subset \cdots \subset Q_l \subset Q_{l-1} \subset \cdots$ 和 $\cup_{i \ge l} Q_l = \mathbb{R}^n$。令 $Q_l^0 \equiv 3Q_l \setminus 3Q_{l+1}$、$i > l$ 和 $Q_i^0 \equiv 3Q_i$。我们分两种情况讨论。

情形 (a)：$R \subset Q_l^0$, $i > l$ 情形。于是我们有 $2^{-i} + |x_0 - x_R| \ge C2^{-l}$，情形 (b)：$R \subset Q_i^0$。于是我们有 $2^{-i} + |x_0 - x_R| \ge 2^{-i}$。在情形 (a) 中，我们有

$$\begin{aligned} 2^{is'}|c(R)|(2^{-i} + |x_0 - x_R|)^{-\sigma} &\le C2^{is'}2^{l\sigma}|c(R)| \\ &\le C \sup_{x_0 \in Q} 2^{l\sigma} \sup_{R \subset 3Q} 2^{is'}|c(R)| < \infty. \end{aligned}$$

在情形 (b) 中，我们有

$$\begin{aligned} 2^{is'}|c(R)|(2^{-i} + |x_0 - x_R|)^{-\sigma} &\le C2^{is'}2^{i\sigma}|c(R)| \\ &\le C \sup_{x_0 \in Q} 2^{l\sigma} \sup_{R \subset 3Q} 2^{is'}|c(R)| < \infty. \end{aligned}$$

至此，证明完成。 □

命题 6. 假设 s, s,$'$ $\sigma \in \mathbb{R}$, $0 < \epsilon$ 和 $x_0 \in \mathbb{R}^n$。

(i) $A^s(\dot{B}_{pq_1}^{s'+\epsilon})_{x_0}^{\sigma-\epsilon} \subset A^s(\dot{B}_{pq_2}^{s'})_{x_0}^{\sigma}$ 当 $0 < p \le \infty$, $0 < q_1$, $q_2 \le \infty$,
$A^s(\dot{F}_{pq_1}^{s'+\epsilon})_{x_0}^{\sigma-\epsilon} \subset A^s(\dot{F}_{pq_2}^{s'})_{x_0}^{\sigma}$ 当 $0 < p < \infty$, $0 < q_1$, $q_2 \le \infty$,

(ii) $A^{s+\epsilon}(\dot{E}^{s'}_{pq})^{\sigma-\epsilon}_{x_0} \subset A^s(\dot{E}^{s'}_{pq})^{\sigma}_{x_0}$ 当 $0 < p,\ q \le \infty$,

(iii) $A^{s-\epsilon}(\dot{B}^{s'+\epsilon}_{pq_1})^{\sigma}_{x_0} \subset A^s(\dot{B}^{s'}_{pq_2})^{\sigma}_{x_0}$, 以及 $A^{s-\epsilon}(\dot{B}^{s'+\epsilon}_{pq_1})^{\sigma}_{x_0} \subset A^s(\dot{B}^{s'}_{pq_2})^{\sigma}_{x_0}$ 当 $0 < p,\ q_1,\ q_2 \le \infty$, $A^{s-\epsilon}(\dot{F}^{s'+\epsilon}_{pq_1})^{\sigma}_{x_0} \subset A^s(\dot{F}^{s'}_{pq_2})^{\sigma}_{x_0}$, 以及 $A^{s-\epsilon}(\dot{F}^{s'+\epsilon}_{pq_1})^{\sigma}_{x_0} \subset A^s(\dot{F}^{s'}_{pq_2})^{\sigma}_{x_0}$ 当 $0 < p < \infty$, $0 < q_1,\ q_2 \le \infty$。

证明。(ii)显然。(i)和(iii)是 H¨older 不等式以及 l^p 范数单调性的推论。 □

我们回顾光滑原子和分子的定义。

定义 6. 设 $r_1,\ r_2 \in \mathbb{N}_0, L > n$。由二进立方体 Q 索引的函数族 $m = (m_Q)$，称为 (r_1, r_2, L)-光滑分子族，如果

(3.1) $|m_Q(x)| \le C(1 + l(Q)^{-1}|x - x_Q|)^{-\max(L,L_2)}$ for some $L_2 > n + r_2$,

(3.2) $|\partial^\gamma m_Q(x)| \le Cl(Q)^{-|\gamma|}(1+l(Q)^{-1}|x-x_Q|)^{-L}$ for $0 < |\gamma| \le r_1$, and

(3.3) $\int_{\mathbb{R}^n} x^\gamma m_Q(x)dx = 0$ 当 $|\gamma| < r_2$,

当 $r_1 = 0$ 时，(3.2) 无意义；当 $r_2 = 0$ 时，(3.3) 无意义。

由二进立方体 Q 索引的函数族 $a = (a_Q)$，称为 (r_1, r_2)-光滑原子族，如果

(3.4) 对每个二进立方体 Q, supp $a_Q \subset 3Q$；(3.5) $|\partial^\gamma a_Q(x)| \le Cl(Q)^{-|\gamma|}$，当 $|\gamma| \le r_1$ 时；以及 (3.6) $\int_{\mathbb{R}^n} x^\gamma a_Q(x)dx = 0$，当 $|\gamma| < r_2$ 时，其中当 $r_2 = 0$ 时，(3.6) 不成立。

定理 2. 设 s、s'、$\sigma \in \mathbb{R}$、$0 < p$、$q \le \infty$ 和 $x_0 \in \mathbb{R}^n$。设 r_1、$r_2 \in \mathbb{N}_0$ 和 $L > n$。

(i) 我们假设 r_1、r_2 和 L 满足

(4.1) $r_1 > \max(s', \sigma + s + s' - \frac{n}{p})$,

(4.2) $r_2 > J - n - s'$, (4.3) $L > \max(J, n + \sigma)$

其中 J 如引理 1 所示。于是我们有

$$A^s(\dot{E}^{s'}_{pq})^{\sigma}_{x_0} = \{f = \sum_Q c(Q)m_Q :$$
$$(r_1, r_2, L)-\text{smooth molecules } (m_Q),\ \ (c(Q)) \in a^s(\dot{e}^{s'}_{pq})^{\sigma}_{x_0}\}$$

$= \{f = \sum_Q c(Q)a_Q :$ (r_1, r_2)–光滑原子（a_Q），$(c(Q)) \in a^s(\dot{e}^{s'}_{pq})^\sigma_{x_0}\}$。

(ii) 我们假设 r_1、r_2 和 L 满足

$(4.1)'$ $r_1 > \max(s' + (\sigma \vee 0), (\sigma \vee 0) + s + s' - \frac{n}{p})$,
$(4.2)'$ $r_2 > J - n - s' - (\sigma \wedge 0)$,
$(4.3)'$ $L > J + \sigma$

其中 J 如引理 1 所述。于是我们有

$$
\begin{aligned}
A^s(\tilde{\dot{E}}^{s'}_{pq})^\sigma_{x_0} = \{f = \sum_Q c(Q)m_Q :& \\
& (r_1, r_2, L) - \text{smooth molecules } (m_Q), \quad (c(Q)) \in a^s(\tilde{\dot{e}}^{s'}_{pq})^\sigma_{x_0}\} \\
= \quad \{f = \sum_Q c(Q)a_Q :& \\
& (r_1, r_2) - \text{smooth atoms } (a_Q), \quad (c(Q)) \in a^s(\tilde{\dot{e}}^{s'}_{pq})^\sigma_{x_0}\},
\end{aligned}
$$

注 4. 根据引理 3，我们注意到 $f = \sum_Q c(Q)m_Q$ 和 $f = \sum_Q c(Q)a_Q$ 在 $\mathcal{S}'_{k_0}$ 中收敛。

定理 2 的证明。(i) 我们令

$A \equiv \{f = \sum_Q c(Q)a_Q :$ (r_1, r_2)–光滑原子（a_Q），$(c(Q)) \in a^s(\dot{e}^{s'}_{pq})^\sigma_{x_0}\}$,
$M \equiv \{f = \sum_Q c\ Q\ m_Q \quad r_1\ r_2\ L -$ m_Q，$()$: $(,,)$ 光滑分子 $()$

$(c(Q)) \in a^s(\dot{e}^{s'}_{pq})^\sigma_{x_0}\}$。

由于一个 (r_1, r_2)-原子是一个 (r_1, r_2, L)-分子，因此很容易看出$A \subset M$。令 $M \ni f = \sum_Q c(Q)m_Q$，并考虑 φ-变换

$$m_Q = \sum_P l(P)^{-n}\langle m_Q\ ,\ \varphi_P\rangle\phi_P$$

其中 ϕ 和 φ 如注 1 所述。于是我们有

$$f = \sum_Q c(Q)m_Q = \sum_P (Ac)(P)\phi_P$$

其中 $A = \{l(P)^{-n}\langle m_Q, \varphi_P\rangle\}_{PQ}$。由引理 1 和引理 2 可得，$A$ 是 $(r_1, r_2 + n, L)$-几乎对角的，并且对于 $c \in a^s(\dot{e}^{s'}_{pq})^\sigma_{x_0}$，有 $Ac \in a^s(\dot{e}^{s'}_{pq})^\sigma_{x_0}$。因此，若我们令 $D \equiv \{f = \sum_Q c(Q)\phi_Q : c \in a^s(\dot{e}^{s'}_{pq})^\sigma_{x_0}\}$，则可知 $M \subset D$。

采用类似于 [6: 定理 4.1]（参见 [3: 定理5.9] 或 [4: 定理5.8]）证明中的论证，对于 $D \ni f = \sum_Q c(Q)\phi_Q$，$c \in a^s(\dot{e}^{s'}_{pq})^\sigma_{x_0}$，我们可知存在一族 (r_1, r_2)-原子 $\{a_Q\}$ 以及一个

系数序列 $\{c'(Q)\} \in a^s(\dot{e}^{s'}_{pq})^\sigma_{x_0}$，使得 $f = \sum_Q c(Q)\phi_Q = \sum_Q c'(Q)a_Q$。因此我们可知 $D \subset A$。由定理 1，我们得到$A^s(\dot{E}^{s'}_{pq})^\sigma_{x_0} = D = M = A$。

（ii）证明方法与（i）相同。

□

我们回顾光滑小波的定义。

定义 7. 设 $r \in \mathbb{N}_0$ 和 $L > n$。若函数族 $\psi^{(i)}$ 被称为一族（r, L）-光滑小波，当 $\{2^{nj/2}\psi^{(i)}(2^j x - k)$ （i =1, ..., $2^n - 1$, $j \in \mathbb{Z}$, $k \in \mathbb{Z}^n$）$\}$ 构成 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 的正交归一基，并且对 $\gamma \in \mathbb{N}_0^n$ 满足：

（5.1） $|\psi^{(i)}(x)| \le C(1+|x|)^{-\max(L,L_0)}$ 对某个 $L_0 > n + r$ 成立，（5.2） $|\partial^\gamma \psi^{(i)}(x)| \le C(1+|x|)^{-L}$ 对 $0 < |\gamma| \le r$ 成立，
（5.3） $\int_{\mathbb{R}^n} \psi^{(i)}(x)\, x^\gamma dx = 0$ 对 $|\gamma| < r$ 成立
当 $r = 0$ 时，(5.2) 和 (5.3) 不适用。
对于二进立方体 $Q = [0,\ 2^{-j})^n + 2^{-j}k$，我们将 $\psi_Q(x) = \psi(l(Q)^{-1}(x - x_Q))$ $x_Q = 2^{-j}k$ 记为。我们将省略小波的指标 i，这不会造成任何影响。

定理 3. 设 $s,\ s',\ \sigma \in \mathbb{R},\ x_0 \in \mathbb{R}^n,\ 0 < p,\ q \le \infty$ 和 $L > n$。（
i) 我们假设一个由 (r, L)- 光滑小波 ψ 构成的族满足

(6.1) $r > \max(s',\ \sigma + s + s' - \frac{n}{p},\ J - n - s')$ 且
(6.2) $L > \max(J,\ n + \sigma)$，其中 J 如引理 1 所述。

于是我们有

$$A^s(\dot{E}^{s'}_{pq})^\sigma_{x_0} = \{f = \sum_Q c(Q)\psi_Q :\ \ (c(Q)) \in a^s(\dot{e}^{s'}_{pq})^\sigma_{x_0}\}.$$

(ii) 假设一族 (r, L)-光滑小波 ψ 满足

(6.1)′ $r >$ 最大值$(s' + (\sigma \vee 0), (\sigma \vee 0) + s + s' - \frac{n}{p},\ J - n - s' - (\sigma \wedge 0))$ 和

(6.2)′ $L > J + \sigma$
于是我们有

$$A^s(\tilde{\dot{E}}^{s'}_{pq})^\sigma_{x_0} = \{f = \sum_Q c(Q)\psi_Q :\ \ (c(Q)) \in a^s(\tilde{\dot{e}}^{s'}_{pq})^\sigma_{x_0}\},$$

注 5. (1) 由引理 3 可知，$\sum_Q c(Q)\psi_Q$ 在 $\mathcal{S}'_{k_0}$ 中收敛。

(2) 由引理 1 和引理 2 可知，定理 3 与满足 (6.1)-(6.2) 或 (6.1)'-(6.2)' 的小波 $\psi^{(i)}$ 的选择无关。

定理 3 的证明：令 $W=\{f=\sum_Q c(Q)\psi_Q : (c(Q)) \in a^s(\dot{e}^{s'}_{pq})^\sigma_{x_0}\}$. 设 $W\ni f=\sum_Q c(Q)\psi_Q$，并考虑 φ-变换

$$\psi_Q=\sum_P l(P)^{-n}\langle\psi_Q\ ,\ \varphi_P\rangle\phi_P$$

其中 ϕ 和 φ 如注 1 所述。于是我们有

$$f=\sum_Q c(Q)\psi_Q=\sum_P (Ac)(P)\phi_P \qquad (b)$$

其中 $A=\{l(P)^{-n}\langle\psi_Q,\ \varphi_P\rangle\}_{PQ}$。由引理 1 和引理 2 可知，$A$ 是 $(r,r+n,L)$-几乎对角的，并且对于 $c\in a^s(\dot{e}^{s'}_{pq})^\sigma_{x_0}$，有 $Ac\in a^s(\dot{e}^{s'}_{pq})^\sigma_{x_0}$。因此，根据定理 1，我们得到 $W\subset D=A^s(\dot{E}^{s'}_{pq})^\sigma_{x_0}$，其中 D 与定理 1 的证明中所述相同。

反过来，设 $D\ni f=\sum_Q c(Q)\phi_Q$，并考虑小波展开

$$\phi_Q=\sum_P l(P)^{-n}\langle\phi_Q\ ,\ \psi_P\rangle\psi_P.$$

于是我们有

$$f=\sum_Q c(Q)\phi_Q=\sum_P (Bc)(P)\psi_P$$

其中 $B=\{l(P)^{-n}\langle\phi_Q,\ \psi_P\rangle\}_{PQ}$。由引理 1 和引理 2 可得，$B$ 是（$r,r+n$, L）-几乎对角的，并且对 $c\in a^s(\dot{e}^{s'}_{pq})^\sigma_{x_0}$，有 $Bc\in a^s(\dot{e}^{s'}_{pq})^\sigma_{x_0}$。因此，根据定理 1，我们得到 $A^s(\dot{E}^{s'}_{pq})^\sigma_{x_0}=D\subset W$。

我们可以用证明 (i) 的相同方法证明 (ii)。 □

注 6. 对于 $f\in A^s(\dot{E}^{s'}_{pq})^\sigma_{x_0}$，配对 $\langle f\ ,\ \psi_Q\rangle$ 是良定义的。更明确地说，对于任意如注 1 中的 $\{\phi,\ \varphi\}$，由引理 3 可得

$$\langle f\ ,\ \psi_Q\rangle=\sum_P l(P)^{-n}\langle f\ ,\ \phi_P\rangle\langle\psi_Q\ ,\ \varphi_P\rangle=\sum_P c(f)(P)\langle\psi_Q\ ,\ \varphi_P\rangle \qquad (c)$$

是收敛的正弦 $c(f)(P)=l(P)^{-n}\langle f,\ \phi_P\rangle\in a^s(\dot{e}^{s'}_{pq})^\sigma_{x_0}$ (见注 3 (1))。

因此，对于 $f \in A^s(\dot{E}^{s'}_{pq})^\sigma_{x_0}$，我们有 $\mathcal{S}'_{k_0}$ 中的小波展开 $f = \sum_Q c(Q)\psi_Q$，且表示式 $f = \sum_Q c(Q)\psi_Q$ 在 $\mathcal{S}'_{k_0}$ 中是唯一的，即 $c(Q) = l(Q)^{-n}\langle f, \psi_Q\rangle$。因此我们有

$$||f||_{A^s(\dot{E}^{s'}_{pq})^\sigma_{x_0}} \approx ||(c(Q))||_{a^s(\dot{e}^{s'}_{pq})^\sigma_{x_0}}.$$

事实上，由上面的 (c) 可知

$$c(Q) = l(Q)^{-n}\langle f\ ,\ \psi_Q\rangle = l(Q)^{-n}\sum_P c(f)(P)\langle \psi_Q\ ,\ \varphi_P\rangle = Ac(f)(Q)$$

其中 $A = \{l(Q)^{-n}\langle \psi_Q, \varphi_P\rangle\}_{QP}$。因此，由注 3 (1) 和引理 1 可得,

$$||c||_{a^s(\dot{e}^{s'}_{pq})^\sigma_{x_0}} = ||Ac(f)||_{a^s(\dot{e}^{s'}_{pq})^\sigma_{x_0}} \le C||c(f)||_{a^s(\dot{e}^{s'}_{pq})^\sigma_{x_0}} \le C||f||_{A^s(\dot{E}^{s'}_{pq})^\sigma_{x_0}}.$$

反过来，由注 3 (1)、引理 1 以及定理 3 的证明中的 (b) 可得

$$||f||_{A^s(\dot{E}^{s'}_{pq})^\sigma_{x_0}} \le ||Ac||_{a^s(\dot{e}^{s'}_{pq})^\sigma_{x_0}} \le ||c||_{a^s(\dot{e}^{s'}_{pq})^\sigma_{x_0}}.$$

因此，我们有一个同构 $a^s(\dot{e}^{s'}_{pq})^\sigma_{x_0} \cong A^s(\dot{E}^{s'}_{pq})^\sigma_{x_0}$ in $\mathcal{S}'_{k_0}$ (not in$\mathcal{S}'_\infty$)。

类似地，对于 $f \in A^s(\tilde{E}^{s'}_{pq})^\sigma_{x_0}$，$f$ 关于 $\{\tilde{\psi}_Q\}$ 是良定义的，并且我们有唯一的小波展开 $f = \sum_Q c(Q)\psi_Q$ in $\mathcal{S}'_{k_0}$。并且我们有

$$||f||_{A^s(\tilde{\dot{E}}^{s'}_{pq})^\sigma_{x_0}} \approx ||(c(Q))||_{a^s(\tilde{e}^{s'}_{pq})^\sigma_{x_0}}$$

（参见 [16: 定理 4.1、4.2 和命题 4.1、4.2]）。

5. 应用

定义 8. 设 $\mathcal{T}$ 为施瓦茨测试函数空间（具有紧支撑的 C^∞-函数），$\mathcal{T}'$ 为其对偶空间。对任意 $r_1,\ r_2 \in \mathbb{N}_0$ 具有指数 $\epsilon > 0$ 的 Calder´on–Zygmund 算子 T 是连续线性算子 $\mathcal{T} \to \mathcal{T}'$，其核 K 在对角线 $\{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n :\ x = y\}$ 之外满足

(7.1) $|\partial_1^\gamma K(x,y)| \le C|x-y|^{-(n+|\gamma|)}$ 对于 $|\gamma| \le r_1$,

(7.2) $|K(x,\ y)-K(x,\ y')| \le C|y-y'|^{r_2+\epsilon}|x-y|^{-(n+r_2+\epsilon)}$ 若 $2|y'-y| \le |x-y|$,

(7.3) $|\partial_1^\gamma K(x,\ y)\ -\partial_1^\gamma K(x,\ y')| \le C|y-y'|^\epsilon|x-y|^{-(n+|\gamma|+\epsilon)}$
若 $2|y'-y| \le |x-y|$，则对于 $0 < |\gamma| \le r_1$

（当 $r_1 = 0$ 时该陈述无意义），$|\partial_1^\gamma K(x,\ y) - \partial_1^\gamma K(x',\ y)| \le C|x'-x|^\epsilon |x-y|^{-(n+|\gamma|+\epsilon)}$若 $2|x'-x| \le |x-y|$，则对于 $|\gamma| \le r_1$，（其中下标 1 表示第一变量的导数）（7.4） T 在 $L^2(\mathbb{R}^n)$上有界。

我们得到以下定理。

定理 4. 设 $s,\ s',\ \sigma \in \mathbb{R},\ x_0 \in \mathbb{R}^n,\ 0 < p,\ q \le \infty,\ r_1,\ r_2 \in \mathbb{N}_0$和 J 如引理 1 中所述。

(i) Calderón–Zygmund 算子 T的指数 $\epsilon > \max(J,\ n+\sigma) - n$ 满足 $T(x^\gamma) = 0$，当 $|\gamma| \le r_1$时，以及 $T^*(x^\gamma) = 0$，当 $|\gamma| < r_2$时；若 r_1和 r_2满足以下条件，则该算子在 $A^s(\dot{E}^{s'}_{pq})^\sigma_{x_0}$上有界

(8.1) $r_1 > \max(s', \sigma + s + s' - \frac{n}{p})$,
(8.2) $r_2 > J - n - s'$.

(ii) Calderón–Zygmund 算子 T 的指数 $\epsilon > J - n + \sigma$ 满足 $T(x^\gamma) = 0$，当 $|\gamma| \le r_1$ 时，以及 $T^*(x^\gamma) = 0$，当 $|\gamma| < r_2$ 时；若 r_1 和 r_2 满足以下条件，则该算子~在 $A^s(\dot{E}^{s'}_{pq})^\sigma_{x_0}$ 和 $A^s(\tilde{E}^{s'}_{pq})^\sigma_{x_0}$ 上有界

(8.1)′ $r_1 > \max(s' + (\sigma \vee 0), (\sigma \vee 0) + s + s' - \frac{n}{p})$,
(8.2)′ $r_2 > J - n - s' - (\sigma \wedge 0)$.

证明。(i) 证明与 [8] 的证明类似。令 $f \in A^s(\dot{E}^{s'}_{pq})^\sigma_{x_0}$。根据定理 3，我们有小波展开 $f = \sum_Q c(Q)\psi_Q$：$(c(Q)) \in a^s(\dot{e}^{s'}_{pq})^\sigma_{x_0}$。根据注 5 (2)，我们假设小波 ψ 具有紧支撑且光滑度足够高。于是存在正常数 c，使得对每个二进立方体 Q，supp $\psi_Q \subset cQ$。

我们断言 $Tf = \sum_Q c(Q)(T\psi_Q) \equiv \sum_Q c(Q)m_Q$ 在 $\mathcal{S}'_{k_0}$ 中收敛，并且 $||Tf||_{A^s(\dot{E}^{s'}_{pq})^\sigma_{x_0}} \le C||f||_{A^s(\dot{E}^{s'}_{pq})^\sigma_{x_0}}$。令 Q 为满足 $l(Q) = 2^{-l}$ 的二进立方体。由假设可知，对 $|\gamma| < r_2$ 有 $T^*x^\gamma = 0$，因此对 $|\gamma| < r_2$ 有$\int_{\mathbb{R}^n} x^\gamma m_Q(x)\,dx = 0$。

我们选取一个适当大的常数 C_0。根据 Frazier–Torres–Weiss[8：推论 2.14], 当 $|x - x_Q| < 2C_0 2^{-l}$ 时，我们有

$$|\partial^\gamma m_Q(x)| \le ||\partial^\gamma m_Q||_\infty \le C \sum_{|\alpha| \le |\gamma|+1} 2^{l(|\gamma|-|\alpha|)} 2^{l|\alpha|} ||\partial^\alpha \psi_Q||_\infty$$

$$\le C2^{l|\gamma|} \le Cl(Q)^{-|\gamma|}(1 + l(Q)^{-1}|x - x_Q|)^{-L}$$

对任意 $L \geq 0$ 和 $|\gamma| \leq r_1$。当 $|x-x_Q| \geq 2C_0 2^{-l}$ 时，利用定义 8 中的条件 (7.2)，我们得到

$$\begin{aligned}
|m_Q(x)| &= |\int_{\mathbb{R}^n} K(x,y)\psi_Q(y)dy| \\
&= |\int_{\mathbb{R}^n} \big(K(x,y) - K(x,x_Q)\big)\psi_Q(y)dy| \\
&\leq C\int_{|y-x_Q|\leq C_0 2^{-l}} |K(x,y) - K(x,x_Q)||\psi_Q(y)|dy \\
&\leq C\int_{|y-x_Q|\leq C_0 2^{-l}} |y-x_Q|^{r_2+\epsilon}|x-x_Q|^{-(n+r_2+\epsilon)}dy \\
&\leq C(2^l|x-x_Q|)^{-(n+r_2+\epsilon)} \leq C(1+2^l|x-x_Q|)^{-(n+r_2+\epsilon)}.
\end{aligned}$$

此外，对 $0 < |\gamma| \leq r_1$ 使用定义 8 中的条件 (7.3)，我们得到

$$\begin{aligned}
|\partial^\gamma m_Q(x)| &\leq C\int_{|y-x_Q|\leq C_0 2^{-l}} |\partial_1^\gamma K(x,y) - \partial_1^\gamma K(x,x_Q)||\psi_Q(y)|dy \\
&\leq C\int_{|y-x_Q|\leq C_0 2^{-l}} |y-x_Q|^{\epsilon}|x-x_Q|^{-(n+|\gamma|+\epsilon)}dy \\
&\leq C2^{-l(n+\epsilon)}|x-x_Q|^{-(n+|\gamma|+\epsilon)} \leq C2^{l|\gamma|}(1+2^l|x-x_Q|)^{-(n+\epsilon)}.
\end{aligned}$$

因此我们观察到 $m_Q = T\psi_Q$ 是一个分子。更准确地说，m_Q 满足以下性质:

(3.1) $|m_Q(x)| \leq C(1+l(Q)^{-1}|x-x_Q|)^{-(n+r_2+\epsilon)}$,

(3.2) $|\partial^\gamma m_Q(x)| \leq Cl(Q)^{-|\gamma|}(1+l(Q)^{-1}|x-x_Q|)^{-(n+\epsilon)}$ 当 $0 < |\gamma| \leq r_1$ 时，且

(3.3) $\int_{\mathbb{R}^n} x^\gamma m_Q(x)dx = 0$ 当 $|\gamma| < r_2$ 时。

因此，根据引理 3，$Tf = \sum_Q c(Q)m_Q$ 在 $\mathcal{S}'_{k_0}$ 中收敛。对于一个小波展开

$$m_Q = \sum_P l(P)^{-n}\langle m_Q\ ,\ \psi_P\rangle\psi_P,$$

我们有

$$Tf = \sum_Q c(Q)m_Q = \sum_P (Ac)(P)\psi_P$$

其中 $A = \{l(P)^{-n}\langle m_Q,\ \psi_P\rangle\}_{PQ}$。由引理 1 和引理 2 可知，算子 A 在 a^s $(\dot{e}^{s'}_{pq})^\sigma_{x_0}$ 上有界，条件是 r_1 和 r_2 分别满足 (8.1) 和 (8.2)。由注 6 可得

$$||Tf||_{A^s(\dot{E}^{s'}_{pq})^{\sigma}_{x_0}} \approx ||Ac||_{a^s(\dot{e}^{s'}_{pq})^{\sigma}_{x_0}} \leq C||c||_{a^s(\dot{e}^{s'}_{pq})^{\sigma}_{x_0}} \approx C||f||_{A^s(\dot{E}^{s'}_{pq})^{\sigma}_{x_0}}.$$

这就完成了 (i) 的证明。

（ii）证明方法与（i）的证明相同。 □

定义9。

设 $\mu \in \mathbb{R}$。定义在 $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ 上的光滑函数 a 称为属于类$S^{\mu}_{1\,1,}$ $(\mathbb{R}^n)$, 如果 a 满足以下微分不等式：对所有 α、 $\beta \in \mathbb{N}^n_0$,

$$\sup_{x,\xi}(1+|\xi|)^{-\mu-|\alpha|+|\beta|}|\partial^{\alpha}_{x}\partial^{\beta}_{\xi}a(x,\ \xi)| < \infty.$$

$a(x, D)$是相应的伪微分算子，使得

$$a(x,D)f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\xi}a(x,\xi)\hat{f}(\xi)\ d\xi$$

对 $f \in \mathcal{S}$。

定理5。设 s、 s'、 $\sigma \in \mathbb{R}$、 $x_0 \in \mathbb{R}^n$、 $0 < p$、 $q \leq \infty$。令 $\mu \in \mathbb{R}$、J 如引理 1 中所述，并令$a \in S^{\mu}_{1\ ,\ 1}(\mathbb{R}^n)$。

(i) $a(x, D)$ 是从 $A^s(\dot{E}^{s'}_{pq})^{\sigma}_{x_0}$到 $A^s(\dot{E}^{s'-\mu}_{pq})^{\sigma}_{x_0}$的连续线性映射，若 $s' > J - n + \mu$ 或若 $a(x, \xi) = a(\xi)$。

(ii) $a(x, D)$ 是从 $A^s(\tilde{\dot{E}}^{s'}_{pq})^{\sigma}_{x_0}$到 $A^s(\tilde{\dot{E}}^{s'-\mu}_{pq})^{\sigma}_{x_0}$的连续线性映射，若 $s' > J - n - (\sigma \wedge 0) + \mu$ 或若 $a(x, \xi) = a(\xi)$。

证明。我们记 $T \equiv a(x, D)$。设 $f \in A^s(\dot{E}^{s'}_{pq})^{\sigma}_{x_0}$。我们考虑一个$\varphi$-变换 $f = \sum_P c(P)\phi_P$，其中 $c(P) = c(f)(P) = l(P)^{-n}\langle f, \varphi_P\rangle$。我们记 $Tf = \sum_P c(P)m_P$，其中 $m_P = T\phi_P$。我们看到

$$m_P = \int e^{ix\xi}a(x,\xi)\hat{\phi}_P(\xi)\ d\xi.$$

然后，利用变量替换，我们得到：

$$m_P(x) = \int e^{i(x-x_P)(2^j\xi)}a(x,2^j\xi)\hat{\phi}(\xi)\ d\xi.$$

由 $(1-\triangle_\xi)^L(e^{ix\xi}) = (1+|x|^2)^L e^{ix\xi}$ 这一事实并经分部积分，我们得到 $\gamma \in \mathbb{N}_0^n$

$$\begin{aligned}
&\partial_x^\gamma m_P(x) \\
&\quad = \quad (1+(2^j|x-x_P|)^2)^{-L} \times \\
&\qquad \int (1-\triangle_\xi)^L (e^{i2^j(x-x_P)\xi}) \sum_{\delta\le\gamma} (2^j i\xi)^\delta \partial_x^{\gamma-\delta} a(x,2^j\xi)\hat{\phi}(\xi)\, d\xi \\
&\quad = \quad C(1+(2^j|x-x_P|)^2)^{-L} \times \\
&\qquad \int e^{i2^j(x-x_P)\xi} (1-\triangle_\xi)^L \sum_{\delta\le\gamma} (2^j i\xi)^\delta \partial_x^{\gamma-\delta} a(x,2^j\xi)\hat{\phi}(\xi)\, d\xi
\end{aligned}$$

因此我们有

$$\begin{aligned}
&|\partial_x^\gamma m_P(x)| \\
&\le \quad C(1+2^j|x-x_P|))^{-2L} \times \\
&\qquad \int \sum_{|\alpha+\beta+\tau|\le 2L} \sum_{\delta\le\gamma} 2^{j|\delta|} 2^{j|\beta|} |\partial_\xi^\alpha(\xi)^\delta| |\partial_\xi^\beta \partial_x^{\gamma-\delta} a(x,2^j\xi)| |\partial_\xi^\tau \hat{\phi}(\xi)|\, d\xi \\
&\le \quad C(1+2^j|x-x_P|))^{-2L} \times \\
&\qquad \int \sum_{|\alpha+\beta+\tau|\le 2L} \sum_{\delta\le\gamma} 2^{j|\delta|} 2^{j|\beta|} |\partial_\xi^\alpha(\xi)^\delta| (1+2^j|\xi|)^{\mu+|\gamma|-|\delta|-|\beta|} |\partial_\xi^\tau \hat{\phi}(\xi)|\, d\xi \\
&\le \quad C 2^{j\mu} 2^{j|\gamma|} (1+2^j|x-x_P|))^{-2L}.
\end{aligned}$$

因此， $m_P(x)$ 满足

$$|2^{-j\mu}\partial^\gamma m_P(x)| \le C 2^{j|\gamma|}(1+2^j|x-x_P|))^{-2L}.$$

对于任意 $\gamma \in \mathbb{N}_0$ 以及任意 $L \ge 0$。我们选取一个足够大的 L。对于小波变换

$$2^{-j\mu} m_P = \sum_R l(R)^{-n} \langle 2^{-j\mu} m_P \ , \ \psi_R \rangle \psi_R,$$

我们有

$$Tf = \sum_P 2^{j\mu} c(P)(2^{-j\mu} m_P) = \sum_R A(2^{j\mu} c)(R)\psi_R$$

其中 $A = \{l(R)^{-n}\langle 2^{-j\mu} m_P, \ \psi_R\rangle\}_{RP}$。由引理 1 和引理 2 可知，
A a^s $a\ x$ $= a$ 在 $(\dot{e}_{pq}^{s'-\mu})_{x_0}^\sigma$
上有界，当 $s' > J - n + \mu$ 或当 $(\ ,\xi)\ (\xi)$ 时。我们指出，在 $s' > J - n + \mu$ 的情况下，我们不假设 m_P 满足消失矩条件。但在 $a(x,\xi) = a(\xi)$ 的情况下，我们

对 m_P 满足消失矩条件；事实上，对任意 $\gamma \in \mathbb{N}_0$, $\int x^\gamma m_P(x)\ dx = \hat{}$ $C\partial^\gamma \hat{}m_P(0) = C\partial^\gamma(\phi_P \cdot a)(0) = 0$。由注 6 和注 3 (1) 可知,

$||Tf||_{A^s(\dot{E}^{s'-\mu}_{pq})^\sigma_{x_0}} \le C||A_{(2^{j\mu}c)}||_{a^s(\dot{e}^{s'-\mu}_{pq})^\sigma_{x_0}} \le C||2^{j\mu}c||_{a^s(\dot{e}^{s'-\mu}_{pq})^\sigma_{x_0}} \le C||c||_{a^s(\dot{e}^{s'}_{pq})^\sigma_{x_0}} \le C||f||_{A^s(\dot{E}^{s'}_{pq})^\sigma_{x_0}}$.

类似地，我们可以证明另一种情形 (ii)。证明至此完成。

□

推论 . 设 $s,\ s',\ \sigma \in \mathbb{R},\ x_0 \in \mathbb{R}^n,\ 0 < p,\ q \le \infty$。

(i) 设 $\gamma \in \mathbb{N}^n_0$。则微分算子 ∂^γ 从 $A^s(\dot{E}^{s'}_{pq})^\sigma_{x_0}$ 到 $A^s(\dot{E}^{s'-|\gamma|}_{pq})^\sigma_{x_0}$连续，且从 $A^s(\tilde{\dot{E}}^{s'}_{pq})^\sigma_{x_0}$ 到 $A^s(\tilde{\dot{E}}^{s'-|\gamma|}_{pq})^\sigma_{x_0}$连续。

(ii) 设 $\mu \in \mathbb{R}$。贝塞尔势 $(1-\triangle)^{\mu/2}$ 是从 $A^s(\dot{E}^{s'}_{pq})^\sigma_{x_0}$ 到 $A^s(\dot{E}^{s'-\mu}_{pq})^\sigma_{x_0}$, 以及从 $A^s(\dot{E}^{s'}_{pq})^\sigma_{x_0}$ 到 $\sim A^s(\dot{E}^{s'-\mu}_{pq})^\sigma_{x_0}$ 的连续同构

证明。由定理 4，由于 $\xi^\gamma \in S^{|\gamma|}_{1\,1}$，且 $(1+|\xi|^2)^{\mu/2} \in S^\mu_1$,1，微分算子 ∂^γ 是从 $A^s(\dot{E}^{s'}_{pq})^\sigma_{x_0}$ 到 $A^s(\dot{E}^{s'-|\gamma|}_{pq})^\sigma_{x_0}$, 以及从 $A^s(\tilde{\dot{E}}^{s'}_{pq})^\sigma_{x_0}$ 到 $A^s(\tilde{\dot{E}}^{s'-|\gamma|}_{pq})^\sigma_{x_0}$ 的连续映射；贝塞尔势则是从 $A^s(\dot{E}^{s'}_{pq})^\sigma_{x_0}$ 到 $A^s(\dot{E}^{s'-\mu}_{pq})^\sigma_{x_0}$, 以及从 $A^s(\dot{E}^{s'}_{pq})^\sigma_{x_0}$ 到 $A^s(\dot{E}^{s'-\mu}_{pq})^\sigma_{x_0}$ 的连续映射。为完成 (ii) 的证明，我们需要证明贝塞尔势是满射且单射。对于 $h \in A^s(\dot{E}^{s'-\mu}_{pq})^\sigma_{x_0}$, 令 $f = (1-\triangle)^{-\mu/2}h$。则 $h = (1-\triangle)^{\mu/2}f$。类似地，我们可以证明另一种情形。证毕。

□

附录

我们将证明定理 1 的证明中所用的引理。记号请参见定理 1 的证明。

引理 A 对于二进立方体 P，当 $l(P) = 2^{-j}$ 时，我们有:

(i)

$$\sup(f)^*(P) \approx \inf_\gamma (f)^*(P)$$

如果 γ 足够大,

(ii)

$$\inf_\gamma (f)(P)\chi_P \le 2^{\gamma L} \sum_{R\subset P, l(R)=2^{-(\gamma+j)}} t^*_\gamma(R)\chi_R$$

(iii)

$$c(\dot{e}_{pq}^{s'})(P) \approx c^*(\dot{e}_{pq}^{s'})(P), \quad c(\tilde{\dot{e}}_{pq}^{s'})_{x_0}^{\sigma}(P) \approx c^*(\tilde{\dot{e}}_{pq}^{s'})_{x_0}^{\sigma}(P).$$

证明：(i) 这正是 [6, 引理 A.4]。

(ii) 设 R_0 和 R 是 P 中的立方体，满足 $l(R_0) = l(R) = 2^{-(\gamma+j)}$。只需证明

$$t_\gamma(R_0) \le C2^{\gamma L} t_\gamma^*(R).$$

由于

$$1 \le C2^{\gamma L}(1 + 2^{\gamma+j}|x_R - x_{R_0}|)^{-L},$$

我们有

$$\begin{aligned} t_\gamma(R_0) &\le Ct_\gamma(R_0)2^{\gamma L}(1 + 2^{\gamma+j}|x_R - x_{R_0}|)^{-L} \\ &\le C2^{\gamma L} \sum_{l(R')=2^{-(\gamma+j)}} t_\gamma(R')(1 + 2^{\gamma+j}|x_R - x_{R'}|)^{-L} = C2^{\gamma L} t_\gamma^*(R) \end{aligned}$$

(iii) 只需证明

$$c^*(\dot{e}_{pq}^{s'})(P) \le Cc(\dot{e}_{pq}^{s'})(P)$$

因为 $|c(P)| \le c^*(P)$。

按照引理 1 的证明中对极大算子 M_t $(0 < t \le 1)$ 的使用方式，并利用 Fefferman-Stein 向量值不等式，我们有

$$\begin{aligned} c^*(\dot{f}_{pq}^{s'})(P) &= ||\{\sum_{i\ge j}(2^{is'} \sum_{l(R)=2^{-i}} |c^*(R)|\chi_R)^q\}^{1/q}||_{L^p(P)} \\ &\le C||\{\sum_{i\ge j}(2^{is'} \times \\ &\quad \sum_{l(R)=2^{-i}} \sum_{l(R')=2^{-i}} |c(R')|(1 + 2^i|x_R - x_{R'}|)^{-L}\chi_R)^q\}^{1/q}||_{L^p(P)} \\ &\le C||\{\sum_{i\ge j}(2^{is'} \sum_{l(R)=2^{-i}} M_t(\sum_{l(R')=2^{-i}} |c(R')|\chi_{R'})\chi_R)^q\}^{1/q}||_{L^p(P)} \\ &\le C||\{\sum_{i\ge j}(\sum_{l(R')=2^{-i}} 2^{is'}|c(R')|\chi_{R'})^q\}^{1/q}||_{L^p(P)} = Cc(\dot{f}_{pq}^{s'})(P) \end{aligned}$$

若 $0 < t < \min(p, q)$, $L > n/t$ 且 $0 < p < \infty, 0 < q \le \infty$。对于 B 型情形，我们用与上述相同的论证得到相同的结果。此外，对于 $p = \infty$ 情形，我们也得到相同的结果。对于 $c(\tilde{\dot{e}}_{pq}^{s'})_{x_0}^{\sigma}(P)$，我们同样可以用上述方法得到相同的结果

致谢。作者谨向 Yoshihiro Sawano 教授致谢，感谢他的鼓励和许多有益的意见。作者感谢审稿人提出的宝贵意见和建设性建议。

参考文献

[1] Ts. Batbold and Y. Sawano, 《局部Morrey空间的分解》, Eurasian Math. J. 5 (2014), 9-45[2] J.M. Bony, 《半线性双曲方程的二阶微局部化与奇性传播》, 《双曲方程及相关主题》, Academic Press (1988), 11-49.[3]M. Bownik, 《各向异性Besov空间的原子与分子分解》, Math. Z. 250 (2005), 539-571.[4] M. Bownik and K-P Ho, 《各向异性Triebel–Lizorkin空间的原子与分子分解》, Trans. Amer. Math. Soc. 358 (2005), 1469-1510.[5] M. Frazier and B. Jawerth, 《Besov空间的分解》, Indiana Univ. Math. J. 34 (1985), 777-799.[6] M. Frazier and B. Jawerth, 《分布空间的离散变换与分解》, J. Func. Anal. 93 (1990), 34-171.[7] M. Frazier, B. Jawerth and G. Weiss, 《Littlewood–Paley 理论与函数空间研究》, CBMS Regional Conf. Series in Math. 79, Amer. Math. Soc., 1991.[8] M. Frazier, R. Torres and G. Weiss, 《Calder´on–Zygmund算子在空间 $F^{\alpha,}{}_{p}{}^{q}$上的有界性》, Revista Mat. Iberoamericana 4(1988), 41-70.[9] S. Jaffard, 《逐点正则性判据》, C. R. Acad. Sci. Paris 1339 (2004), 757-762.[10] S. Jaffard, 《逐点正则性的小波技术》, Annal. Fac. Sci. Toulouse 15 (2006), 3-33.[11] S. Jaffard, 《与函数空间相关的逐点正则性与多重分形分析》, 《逼近与概率》, Banach Center Publications, vol. 72, Institute of Mathematics, Polish Academy of Sciences (2006), 93-110.

[12] S. Jaffard and C. M´elot, 《分形边界的小波分析 第一部分：局部指数》, Commun. Math. Phys. 258 (2004), 513-539.[13] H. Kempka, 《2-微局部Besov空间与光滑度可变的函数空间》, Rev. Mat. Complut. 22 (2009), 227-251.[14]H. Kempka, 《广义2-微局部Besov空间的原子、分子和小波分解》, Funct. Approx. Comment. Math. (2010), 171-208.[15] Y. Komori-Furuya, K. Matsuoka, E. Nakai and Y. Sawano, 《Littlewood–Paley 理论在 B_σ- Morrey空间中的应用及其对积分算子有界性的研究》, J. Funct. spaces Appli. (2013), 1-21.[16]G. Kyriazis, 《函数空间的分解系统》, Studia Math. 157 (2003), 133-169.[17] J. Levy-Vehel and S. Seuret, 《二重微局部形式体系》, 《分形几何与应用：Benoit Mandelbrot七十寿辰纪念文集》, 纯数学专题讨论会论文集, vol. 72, part 2 (2004), 153-215.[18]Y. Meyer, 《小波分析、局部傅里叶分析与二阶微局部化》, Contemporary Math. 189 (1995), 393-401.[19] Y. Meyer, 《小波、振动与尺度变换》, CRM Monograph Series. AMS vol. 9 (1998), 393-401.[20] Y. Sawano and H. Tanaka, 《Besov-Morrey 空间与 Triebel–Lizorkin-Morrey 空间的分解》, Math. Z. 257 (2007), 871-905.[21] Y. Sawano, D. Yang and W. Yuan, 《Besov 型空间与 Triebel–Lizorkin 型空间的新应用》, J. Math. Anal. Appl. 363 (2010), 73-85.[22] W. Sickel, D. Yang and W. Yuan, 《Morrey与Campanato遇见Besov、Lizorkin和Triebel》, Lect. Notes in Math. vol. 2005, Springer, 柏林, 2010.[23] H. Triebel, 《函数空间理论》, Birkh¨aeuser, 巴塞尔, 1983.[24] H. Triebel, 《函数空间理论 II》, Birkh¨aeuser, 巴塞尔, 1992.[25] D. Yang and W. Yuan, 《新的Besov型空间与Triebel–Lizorkin 型空间》, Math. Z. 265 (2010), 451-480.

秋田大学数学系,
010-8502 日本秋田

电子邮箱：sakakoichi@gmail.com