arXiv:2303.04323v1 [math.DS] 8 Mar 2023

折纸动力学中的几何信息动态模态分解

Shuaifeng Li, [1] Yasuhiro Miyazawa, [1] Koshiro Yamaguchi, [1] Panayotis G.Kevrekidis, [2] 和 Jinkyu Yang[1,3]

[1] *Department of Aeronautics and Astronautics, University of Washington, Seattle, WA, USA*

[2] *Department of Mathematics and Statistics, University of Massachusetts, Amherst, MA, USA*

[3] *Department of Mechanical Engineering, Seoul National University, Seoul, Republic of Korea*

折纸结构因其丰富的静态与动态行为，常被用作机械系统的构件。关于折纸动力学的实验观测和理论建模已有大量报道，而由于系统固有的非线性，对折纸动力学进行数据驱动建模仍颇具挑战。在本研究中，我们展示了如何通过整合折纸结构的几何信息，增强动态模态分解（DMD）方法，从而高效、准确地对折纸动力学进行建模。具体而言，我们开发并评估了带控制的动态模态分解的一种改进版本，并将其称为几何信息动态模态分解（giDMD）；我们在折纸链和双Kresling折纸结构上对其进行了测试，以揭示该方法的有效性和可解释性。我们表明，giDMD能够准确预测折纸链在不同频率下的动力学，并且可依据giDMD的特征识别拓扑边界态。此外，该方法能够准确预测双折纸结构中的周期性阱内运动，也能够识别双折纸结构中的动力学类型。giDMD学习得到的模型还揭示了影响折纸动力学的关键几何参数，体现了该方法的可解释性。准确预测混沌动力学仍是该方法面临的挑战。尽管如此，我们预计，所提出的giDMD方法将有助于预测和识别复杂折纸结构中的动力学，并为其应用于更广泛的轻质可展开结构铺平道路。

I. 引言

折纸作为一种古老的手工纸张折叠艺术，其精妙的设计原理不仅令艺术家和数学家着迷，也因其在工程应用中巨大的潜力（近年来这一潜力正日益得到发挥）而吸引工程师。通过将压痕与折叠原理应用于平面材料，可以形成折纸结构，从而实现刚度增强、 [1], 负泊松比 [2, 3]以及结构上的多稳态 [4–6]。这些进展也推动了折纸在 [7, 8],机器人技术、 [9, 10], 医疗设备以及具有前所未有力学性质的机械超材料 [11, 12]中的进一步应用。除了上述静态和准静态力学性质外，折纸还具有丰富的动力学特性，可用于构建有望实现冲击缓解和振动控制的工程装置；相关研究已采用实验、数值模拟和建模等方法开展 [13–17]。

近年来，基于数据驱动方法对动力系统进行建模和分析日益流行，这得益于其无需方程、无需先验知识的特点 [18–20]。具体而言，基于神经网络的机器学习方法已能够以极高的精度实现对折纸非线性动力学的建模 [16]。然而，基于神经网络的机器学习通常在训练阶段计算量大且耗时。此外，该模型如同一个庞大的黑箱，其决策过程难以理解，也无法明确揭示折纸动力学背后的物理机制，尽管近期一项基于循环神经网络的研究表明，该网络能够从隐藏层中模拟混沌折纸运动的李雅普诺夫指数 [16]。

动态模态分解（DMD）作为最有效的机器学习技术之一，因其简洁性和可解释性，近年来已应用于众多领域 [21]。鉴于 DMD 的优势及其与 Koopman 模态分解之间的联系，DMD 适用于表征各种非线性物理系统和 [22]生物系统 [23]。最初，DMD 是流体动力学领域为从高维数据中识别时空相干结构而开发的 [24, 25], 。除流体动力学外，DMD 已成功应用于生物信号和结构动力学分析 [26]，近年来也用于拓扑超材料研究 [27, 28]。在这些研究中，DMD 计算速度快，并能通过一系列具有物理相干性的结构提供出色的可解释性。然而，对于存在控制的系统，DMD 无法揭示控制在系统中发挥的作用。为此，人们提出了 DMD 的一种变体——带控制的动态模态分解（DMDc），以关联系统的状态与控制，突出控制的重要性并提高动态模态分解模型的准确性 [29]。另一方面，DMDc 往往在对若干非线性系统建模时准确性较低，甚至无法建模。因此，考虑到该领域对数据驱动建模的需求以及当前 DMD 公式本身的固有缺陷，研究适用于折纸动力学的改进版 DMD 是值得的。

在本研究中，我们提出了一种名为几何信息动态模态分解（giDMD）的数据驱动框架，能够捕捉时空

激励作用下克雷斯林折纸结构的动力学。通过将折纸的几何信息融入 DMDc，该方法不仅展现出相较于 DMDc 的高精度，还揭示了几何参数在动力学中的作用，体现出良好的可解释性。该方法还可应用于更复杂的克雷斯林折纸结构：折纸链和双折纸结构。对于折纸链，该方法能够精确预测不同频率下的动力学，并根据 giDMD 的特征识别拓扑边界态的频率。对于受到不同频率激励的双折纸结构，该方法能够准确预测阱内周期运动。giDMD 的特征还可用于识别阱间周期运动和混沌动力学；不过，后者在时间表示的准确性方面存在一定局限，这一点值得在未来研究中加以考虑。与基于神经网络的机器学习方法相比，我们的方法操作简便得多，也更具可解释性，为处理存在几何参数的折纸动力学提供了一种通用技术。

II. 克雷斯林折纸的几何信息增强DMD

图 1(a) 展示了单个克雷斯林折纸结构的侧视图和俯视图。该单个折纸结构具有两个耦合自由度：沿竖直方向的平移 u 以及绕竖直方向的旋转ϕ；折纸结构压缩后，顶面随之旋转。这种耦合行为由桁架模型描述，该模型由通过弹簧连接的集中质量和圆盘组成。附录 A 给出了折纸耦合特性的运动方程。折纸结构的压痕与折叠还引入了许多几何变量，这些变量标记在图 1 中。 h、 a、 b、 α、 β和 Ψ 分别表示高度、折痕线长度、折痕线与竖直方向之间的角度，以及折叠角（水平面与面板之间的夹角）。在折纸结构的压缩和拉伸过程中，根据几何约束，这些几何变量将随轴向位移和转动位移变化，如下所示：

$$h = h_0 - \delta u \tag{1}$$

$$a = \sqrt{(h_0 - \delta u)^2 + 4R^2 \sin^2(\frac{\delta\phi}{2} + \frac{\theta_0}{2} - \frac{\pi}{2N})} \tag{2}$$

$$b = \sqrt{(h_0 - \delta u)^2 + 4R^2 \sin^2(\frac{\delta\phi}{2} + \frac{\theta_0}{2} + \frac{\pi}{2N})} \tag{3}$$

$$\Psi = \arctan \frac{h_0 - \delta u}{R[\cos(\frac{\pi}{N}) - \cos(\delta\phi + \theta_0)]} \tag{4}$$

其中， δu 和 $\delta\phi$ 分别表示顶面与底面之间轴向位移和转动位移的差值。 h_0、 θ_0、 R 和 N 分别为初始高度、表示手性的初始旋转角、半径以及多边形截面的顶点数。因此，折痕线与竖直方向之间的角度可以很容易地计算出来。在激励作用下，轴向位移和转动位移会随时间变化，进而导致几何参数发生变化。图 1(b) 中给出了时刻 t 第 n个折纸单元的几何参数向量 g_t^n。

DMDc 是一种数据驱动方法，用于对受控系统建模，其中包括折纸结构受输入（控制）激励的情形。DMDc 使用状态转移矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和控制矩阵 $\boldsymbol{B}$，根据下式关联系统位移 d_t 与控制 d_t^c：

$$d_{t+1} = \boldsymbol{A}d_t + \boldsymbol{B}d_t^c \tag{5}$$

根据 $\boldsymbol{B}$ 是否已知，DMDc 获取模型 [27]的流程有所不同。本文提出一种基于 DMDc 的变体，称为几何信息增强DMD。具体而言，我们将整合折纸几何变量 g_t^n相关先验知识的 DMDc 学习框架称为几何信息增强DMD（giDMD）。更具体地说，在本文的折纸研究中，我们为第 n个折纸 x_t^n 构建了增广状态 $x_t \in \mathbb{R}^{4n}$，其中包含轴向和旋转方向上的位移 d_t^n 与速度 v_t^n。我们还通过串接控制的增广状态与几何参数向量，构建增广控制 $y_t \in \mathbb{R}^l$，其中 l 为控制变量的数量。几何参数向量还包含与角度相关量的三角函数（正弦和余弦函数）；但为简洁地展示这一通用方法，图 1(b) 中未予以绘示。群体动力学建模中也采用了类似的增广状态和控制变量方法 [28]。因此，系统可建模为以下形式：

$$x_{t+1} = x_t + \boldsymbol{K}y_t \tag{6}$$

其中 $\boldsymbol{K} \in \mathbb{R}^{4n\times l}$。在 giDMD 中，受 [28]，早期工作的启发，状态转移矩阵 $\boldsymbol{A}$ 被假设为单位矩阵（$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{I}$），因为我们假设 x_{t+1} 与 x_t 之间的差异可归因于控制的贡献。方程 (6) 可改写为：

$$x_{t+1} - x_t = \boldsymbol{K}y_t \tag{7}$$

此外，公式（7）可以写成矩阵形式：

$$\boldsymbol{X}' - \boldsymbol{X} = \boldsymbol{K}\boldsymbol{Y} \tag{8}$$

$$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{K}\boldsymbol{Y} \tag{9}$$

其中，$\boldsymbol{X}' \in \mathbb{R}^{4n\times(T-1)}$ 相较于 $\boldsymbol{X} \in \mathbb{R}^{4n\times(T-1)}$向前推进了一个快照，而 $\boldsymbol{Y} \in \mathbb{R}^{l\times(T-1)}$ 包含 m个控制变量和（$T-1$）个快照。

因此，矩阵 $\boldsymbol{K}$ 是 giDMD 建模的关键，可通过以下优化问题求解：

$$\arg\min_{\boldsymbol{K}} \frac{1}{2}\|\boldsymbol{S}-\boldsymbol{K}\boldsymbol{Y}\|^2+\eta R(\boldsymbol{K}) \tag{10}$$

其中，$R(\cdot)$是一个促进稀疏性的正则化项，η 是用于确定正则化强度的超参数。稀疏矩阵 $\boldsymbol{K}$ 有助于阐明几何形状在折纸动力学中的作用，并发现占主导地位的几何分量。在我们的优化问题中，我们采用非凸正则化项 l_0 范数，并使用序贯阈值最小二乘法进行求解；该方法也广泛用于动力学发现 [30]。l_0 正则化通过促使低于某一阈值的模型系数被完全忽略来发挥作用。具体而言，首先进行标准的最小二乘拟合。随后，设定参数 η，以指定 $\boldsymbol{K}$ 中系数的最小幅值，并将所有幅值低于该阈值的系数置零。重复这一拟合与阈值处理过程，直至收敛。如此便可得到稀疏矩阵 $\boldsymbol{K}$，在精度与尽量减少控制元素数量之间取得平衡。

接下来，我们展示本方法相较于标准 DMDc 的优越性。我们使用桁架模型模拟单个折纸单元在 5 赫兹谐波激励下的动力学，具体细节见附录A。由于折纸特征之间存在耦合行为，输出包括轴向位移u 和转动位移 ϕ。使用 60% 的训练数据通过 DMDc 对折纸动力学建模时，预测的两种位移 $\hat{u}$ 和 ϕ 与图 1(c) 中模拟得到的位移 u 和 ϕ 之间存在较大偏差。根据$\frac{|u-\hat{u}|_2}{|u|_2}$ 和 $\frac{|\phi-\hat{\phi}|_2}{|\phi|_2}$ 计算得出的相对误差，对于 u 和 ϕ分别约为 50% 和 247%。相比之下，giDMD模型取得了显著改进，如图 1(d) 中预测结果（红线）与真实值（蓝线）相吻合所示。u 和 ϕ 的相对误差分别约为 0.26% 和 1.37%。快速傅里叶变换得到的频谱（图 1(c) 和图 1(d) 中的插图）也体现了这一改进。在 5 赫兹激励下，由于非线性，频谱中除激励频率外还出现了另一个峰值。与 DMDc 形成鲜明对比的是，giDMD 能够预测频谱中的两个峰值，这表明 giDMD 可以充分捕捉折纸动力学。在时域和频域中精度的大幅提升，证明了 giDMD 在折纸动力学建模方面的有效性。

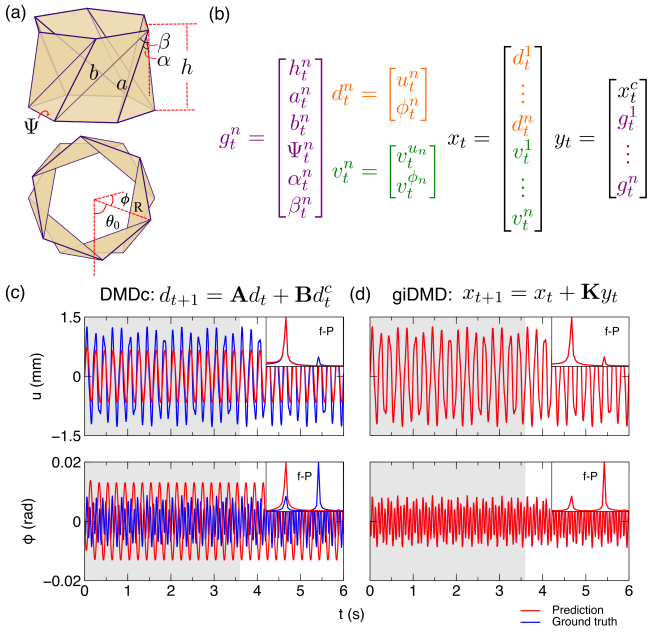


图 1. giDMD 示意图及 DMDc 与 giDMD 的比较。(a) 单个克雷斯林折纸的侧视图和俯视图，并标示几何参数。(b) giDMD 数据驱动框架的数据矩阵。几何参数 g 由高度 h、折痕线长度 a, b、折叠角 Ψ以及折痕线方向 α, β构成。状态 x 包括位移 p 和速度 v，控制 y 则涉及输入 x^c 和几何参数 g的状态。(c) 使用 DMDc 得到的预测。(d) 使用 giDMD 得到的预测。第一行和第二行分别显示使用 DMDc 得到的轴向位移 u 和转动位移 ϕ 的预测。灰色阴影区域表示训练数据。蓝色和红色分别表示真实值和预测值。四幅图中的插图显示了快速傅里叶变换后频率 (f) 与功率幅值 (P) 之间的关系。

III. 折纸链中的拓扑边界状态

我们的方法在上述单个折纸结构中已展现出有效性。接下来，我们将在更复杂的折纸结构中进一步展示该方法。首先，我们将该方法应用于由折纸结构构成的弹性拓扑超材料。这种弹性拓扑超材料的灵感源自电子拓扑绝缘体：振动局限于体内，却沿边界或表面传播。弹性拓扑超材料中拓扑保护的抗缺陷波传播现象一直备受关注 [31–36]。近期，折纸结构已被用作构件来构造拓扑超材料 [14]。我们采用已有设计，构造出图2(a)所示的折纸链。黑色虚线框出的晶胞包含两个折纸结构，它们具有相反的

手性，由初始旋转角 θ_0表示。

应用周期性边界条件（布洛赫定理）后，可基于小振幅近似，利用线性化桁架模型（附录A）计算能带结构。如图2(b)所示，第一布里渊区内出现四条能带。两条下能带几乎重合，而两条上能带在第一布里渊区边缘交叉，形成一个简并点。为表征该系统的拓扑，我们计算一维系统的拓扑不变量Zak相位。由于能带在第一布里渊区边缘简并，因此通过威尔逊环本征值计算拓扑不变量Zak相位： φ 第 q条和第（$q+1$）条能带的Zak相位，如下所示：

$$\varphi_{q,q+1} = -\sum_{k=0}^{k-1} \mathrm{Im}\ln \begin{vmatrix} \langle U_k^q | U_k^q \rangle & \langle U_k^q | U_{k+1}^{q+1} \rangle \\ \langle U_k^{q+1} | U_{k+1}^q \rangle & \langle U_k^{q+1} | U_{k+1}^{q+1} \rangle \end{vmatrix} \tag{11}$$

其中， U_k^q 表示布洛赫波矢 k处第 q条能带的模态 [37]。由此得到$\varphi_{1,\ 2} = \varphi_{3,\ 4} = \pi$，其标记于图2(b)中。下能带的拓扑不变量非零，也确保了下能带与上能带之间存在拓扑非平庸带隙。

根据体边对应关系，截断折纸链的带隙内会出现拓扑边界态。图2(c)计算了由16个晶胞组成的截断折纸链的本征模态。正如预期，带隙内出现了两个简并模态。检查 $k_x = 0$ 图2(d)中的轴向和转动模态形状后，我们确认这两个简并模态是拓扑边界态，因为位移集中在边界处。

随后，采用小振幅近似（即线性区域），通过桁架模型（附录A）计算折纸链中的波传播。图2(e)展示了不同激励频率下各隔板的轴向位移随时间的变化，这些频率分别对应通带（15 赫兹）、阻带（50 赫兹）和拓扑边界态（145 赫兹）。在15 赫兹时，振动会影响整个折纸链；而在50 赫兹时，振动局限于边界处，这符合该带隙频率下的预期。在拓扑边界态出现的145 赫兹时，振动同样局限于边界处，但振幅更大，表明相应本征模态受到激发。

利用60%的训练数据（0 s至3 s）提出了折纸链的giDMD模型。预测结果与真实值高度吻合，图2(e)和图2(f)中呈现出相同的模式，且总体相对误差小于0.1%。giDMD能够跨频率对折纸链进行高精度建模，这证实了其对复杂结构进行建模的能力

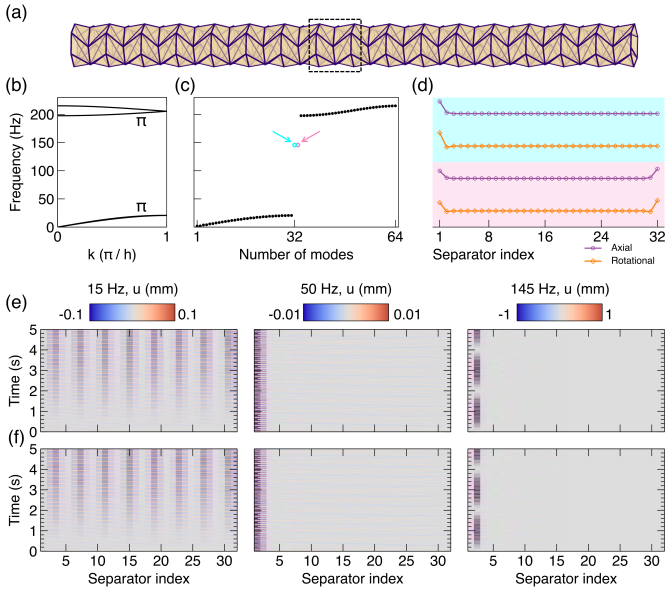


图2. giDMD在折纸链上的应用。(a) 由手性交替的克雷斯林折纸组成的折纸链示意图。折纸的设计参数为 $h_0 = 30$ 毫米、$\theta_0 = \pm 70°$、 $R = 36$ 毫米，其中 h_0、 θ_0和R 分别为初始高度、初始旋转角和横截面半径。(b) 由(a)中黑色虚线框出的晶胞计算得到的能带结构。下能带和上能带的Zak相位为 π。(c) 由16个晶胞组成的超胞的模态。黑点表示体能带。青色和粉色圆点表示带隙内的拓扑边界态。(d) 拓扑边界态的轴向和旋转模态。(e) 在通带（15 赫兹）、阻带（50 赫兹）和拓扑边界态（145 赫兹）对应的不同频率下，沿折纸链的模拟轴向位移。(f) 使用60%训练数据（0秒至3秒）得到的对应轴向位移预测值。

在相应动力学近线性区域内。

我们取用于计算折纸链中每个隔板轴向位移的 $\boldsymbol{K}$ 矩阵的前 31 行。如图3(a)所示，在所有三种情况下，$\boldsymbol{K}$ 矩阵都相当稀疏，非零值集中在指示高度 h、折痕线与竖直方向之间的角度 α, β以及相应正弦函数 $\sin\alpha$, $\sin\ \beta$信息的位置。这表明，这些几何变量对折纸链的轴向位移至关重要，并且是其主要影响因素。尤其是在拓扑边界态的频率（145 赫兹）下，$\sin\ \alpha$, $\sin\beta$的值小于另外两种频率下的值，说明这两个几何变量在形成拓扑边界态时的重要性较低。这可能是因为边界附近的振动强烈局域化，导致大多数几何变量几乎保持不变。此外，非零值会随着行数增加而线性移动

的 $\boldsymbol{K}$，这表明每个隔板的位移与最近折纸元件的几何变量有关。

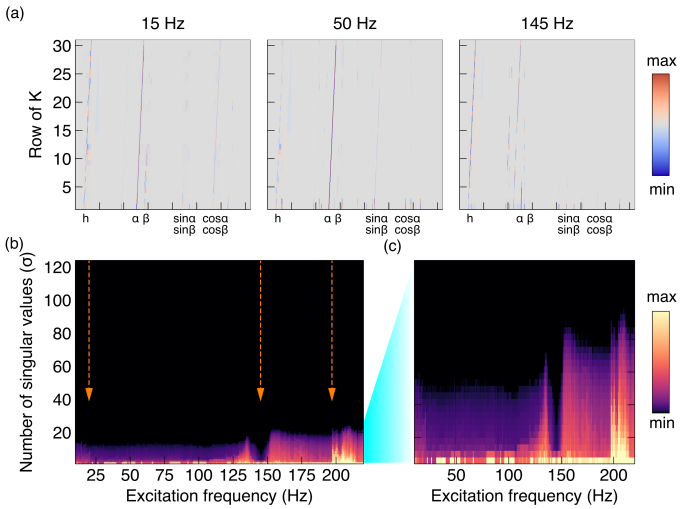


图3. 折纸链中拓扑边界态的识别。(a) $\boldsymbol{K}$ 矩阵中对应于折纸链在15赫兹、50赫兹和145赫兹下轴向位移的各行。对应的控制变量如下所示。(b) 在10至220赫兹的不同激励频率下，$\boldsymbol{K}$ 矩阵的奇异值谱。两侧橙色虚线箭头表示带隙范围，中间的箭头表示拓扑边界态的频率。(c) 使用32个奇异值绘制的放大视图。

与动态模态分解类似，线性算子的特征值可以表征系统动力学；我们使用 $\boldsymbol{K}$ 矩阵的奇异值来识别系统的“状态”。图3(b)展示了$\boldsymbol{K}$ 矩阵在10 Hz至220 Hz范围内的奇异值谱，以说明两者的差异。在通带区域（$f \leq 20$Hz，$f \geq 198$Hz），前几个奇异值显著大于阻带区域（20 Hz $\leq f \leq$ 198 Hz）内的奇异值。在拓扑边界态的频率处，奇异值尤其小于其他任何频率处的奇异值，详见图3(c)中的放大视图。与其他频率相比，拓扑边界态频率处较小的奇异值可能是由于缺少来自 sin α、sin β 的贡献所致。我们还注意到，145 Hz附近的奇异值也较小，但最小值出现在145 Hz。145 Hz以外的奇异值较大，而带隙区域内（20 Hz $\leq f \leq$ 198 Hz）的奇异值则用于描述带隙导致的边界附近局域态。

IV. 双折纸结构中的动态运动

下一个示例是一个在激励下呈现丰富动态运动的双折纸结构。如图4(a)所示，该结构由两个手性相反的双稳态折纸元件组成，其中u_0 和 ϕ_0 分别是第一个隔板处的轴向激励和旋转激励，u_1、ϕ_1 和 u_2、ϕ_2 分别是第二个和第三个隔板处的轴向位移和转动位移。在先前报道的实验研究 [16], 中，在不同频率的激励下，该结构会呈现周期运动（$5-9$ Hz，$14-16$ Hz，18 Hz，$23-24$ Hz）和混沌运动（$10-13$ Hz，17 Hz，$19-22$ Hz）。请注意，由于结合了两个双稳态折纸元件，周期运动还可进一步分为阱内周期运动（$5-9$ Hz，18 Hz，$23-24$ Hz）和阱间周期运动（$14-16$ Hz）。阱内和阱间行为在参考文献 [16]中有进一步阐述。实验装置如图4(b)所示，详细信息见附录A。尽管该结构比前一个示例简单，但它处于大振幅激励区域，因此呈现出相应的非线性动力学特征，包括上述混沌运动。

为展示我们的方法，我们选取两个典型情形，分别以5 赫兹和17赫兹表示周期运动和混沌运动。通过稀疏回归得到 $\boldsymbol{K}$ 矩阵后，我们检查负责计算轴向位移 u_1的 $\boldsymbol{K}$ 矩阵首行。5 赫兹下的情形如图4(c)所示。$\boldsymbol{K}$ 矩阵的首行是稀疏的，非零值仅出现在若干位置，分别代表 h、a、Ψ、α、β、α 和 β的正弦函数与余弦函数，这表明这些几何变量决定了第二隔板的轴向运动。相比之下，在17赫兹频率下，非零值出现在类似的位置，但数值要小得多，如图4(d)所示。此外，由于 α 和 β 的正弦函数与余弦函数的数值小于其他几何变量，它们对第二隔板轴向运动的贡献较小。与折纸链不同，折痕线长度和折叠角对其轴向位移的贡献并不显著；而在当前情形中，折痕线长度和折叠角是双折纸结构轴向位移的主要贡献因素。这可能是因为折纸链受到的振幅激励较小（即处于线性区域），因此可用h表示 a、b 和 Ψ。稀疏回归后，a、b 和Ψ 的贡献可近似表示为 h；而双折纸结构受到大振幅激励（处于非线性区域），因此无法使用 h 表示 a、b 和 Ψ。

随后，我们预测频率为 5 赫兹和 17赫兹时的轴向位移 u_1 和 u_2。如图4(e)所示，预测结果与真实值高度吻合，

即使仅使用 60% 的训练数据，红色曲线与蓝色曲线也几乎重合，充分证明了这一点。与此形成鲜明对比的是，频率为 17赫兹时的预测结果与真实值并不完全吻合（图4(f)）。虽然无法预测混沌运动中的突变，但预测结果仍清楚地区别于周期运动（图4(e)），也就是说，它们体现了观测到的混沌动力学的特征。其中，u_1比 u_2 更混沌，因此在 u_2中的预测效果更好。请注意，其他频率下的阱内周期运动预测结果与图4(e)相似，而其他频率下的混沌运动预测结果则与图4(f)相似。

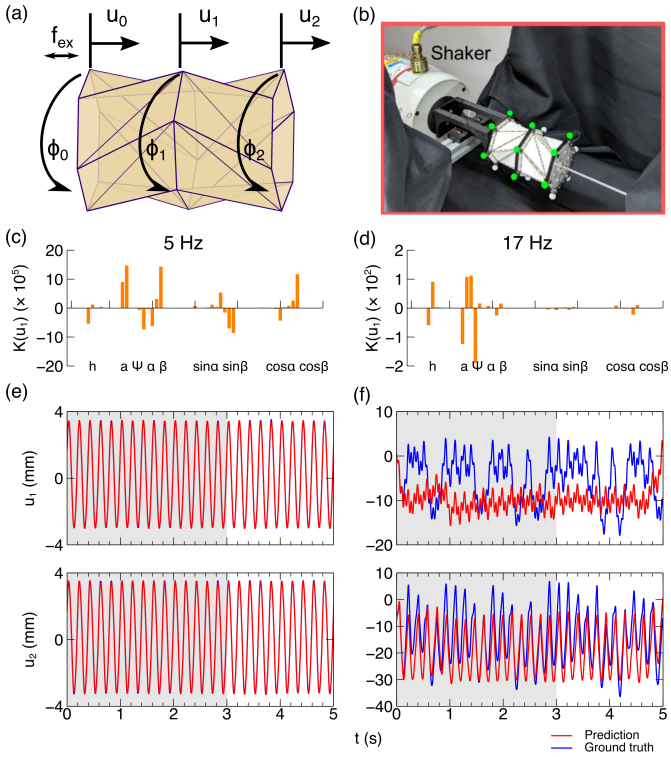


图4. giDMD在双折纸结构中的应用。(a) 具有相反手性的双折纸结构示意图。(b) 振动测试实验装置图，图片来自参考文献 [16]。版权归2020年施普林格·自然所有。折纸结构的设计参数为 $h_0 = 50$ 毫米、$\theta_0 = \pm 70°$、 $R = 36$ 毫米，其中 h_0、 θ_0 和 R 分别为横截面的初始高度、初始旋转角和半径。输入激励由振动台施加，运动由两台运动相机捕捉，并通过数字图像相关程序进行量化。(c)(d) 分别对应频率为5 赫兹和17赫兹时轴向位移 u_1 的 $\boldsymbol{K}$ 矩阵行。相应的控制变量如下所示。(e) 使用giDMD预测频率为5 赫兹时的轴向位移 u_1 和 u_2 。(f) 使用giDMD预测频率为17赫兹时的轴向位移 u_1 和 u_2 。灰色阴影区域表示训练数据。真实值以蓝色显示，预测值以红色显示。

进行谱分析以展示激励下不同频率的响应。在图5(a)中，对归一化后的实验数据进行快速傅里叶变换，得到 u_1 和 u_2 在不同频率下的频谱。显然，每个面板沿对角线方向均出现了与激励频率相同的响应。除此之外，随着低频分量增加，可以清楚地识别出周期运动和混沌运动。图5(a)和图5(b)还标出了结构的“状态”，其中绿色、橙色和紫色阴影区域分别表示阱内周期运动、阱间周期运动和混沌运动。图5(b)展示了基于预测结果得到的 u_1和 u_2 的频谱。可以看出，在阱内周期运动区域（$5-9$ 赫兹、18赫兹、 $23-24$ 赫兹），频谱与真实值高度吻合。然而，giDMD未能预测阱间周期运动（$14-16$ 赫兹）：预测结果在某个时刻发散至无穷大，导致谱分析失败。阱间周期运动描述的是 u_1 和 u_2 之间存在较大差异，同时 ϕ_1 和 ϕ_2之间也存在较大差异的情形，即折纸隔板之间存在显著的轴向差异和旋转差异。在这种情况下，预测中的发散现象是由giDMD模型产生的不稳定动力系统所致。如何扩展giDMD方法以捕捉此类情形，仍是一个有待进一步研究的有趣未解问题。在混沌运动区域（$10-13$ 赫兹、17赫兹、$19-22$ 赫兹），尽管未能捕捉到混沌运动中的间歇性变化（如图5(f)所示），预测结果的频谱在定性上仍与真实值一致，表现为低频范围内的幅值增大。这些发现表明，giDMD在一定程度上能够预测混沌运动。

与第三节类似，我们研究 $\boldsymbol{K}$ 矩阵以识别双折纸结构的“状态”。图5(c)展示了不同频率下 $\boldsymbol{K}$ 矩阵的奇异值 σ，不同频率下呈现出不同的奇异值谱。我们注意到，在与混沌运动对应的频率范围内，奇异值明显小于其他频率。为表征折纸动力学，图5(c)中以亮绿色和深绿色分别表示 u_1 和 u_2 的李雅普诺夫指数，这些指数通过 Rosenstein 方法 [38]计算得出。众所周知，较大的李雅普诺夫指数意味着动力学具有更强的混沌性。根据我们的结果可以推断，较小的奇异值对应较大的李雅普诺夫指数。在图5(d)中，我们选取每个 $\boldsymbol{K}$ 矩阵的第二个奇异值σ_2 ，与 u_1 （上图）和 u_2 （下图）的李雅普诺夫指数进行比较。可以看出，混沌运动（数值最小）、阱间周期运动和阱内周期运动（数值最大）之间存在明显的边界。此外，按对数尺度表示的第二奇异值与李雅普诺夫指数之间存在较强的相关性，该相关性由距离相关性（距离协方差与距离标准差乘积之比）表征，

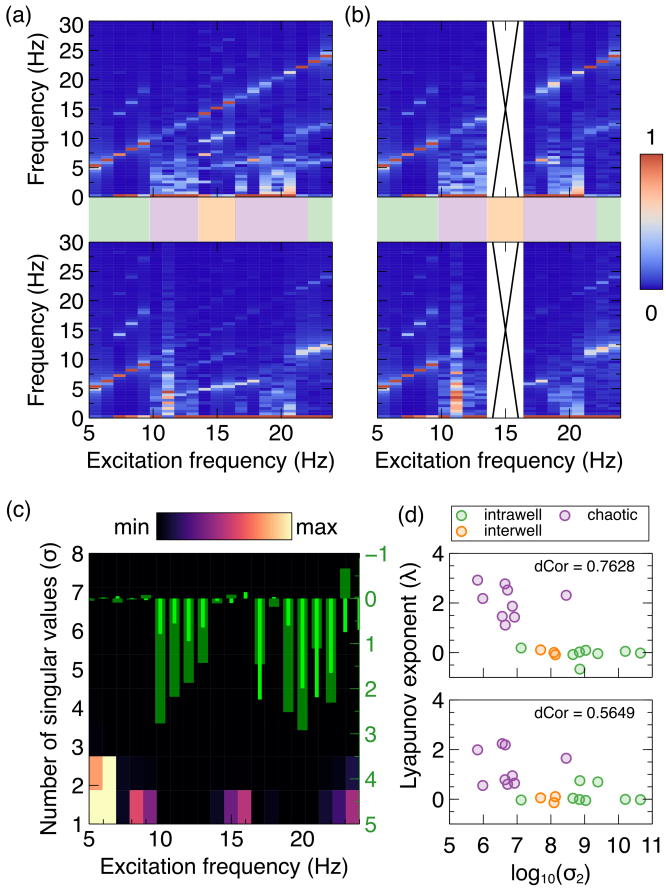


图5. 阱内周期运动、阱间周 期运动和混沌运动的识别。(a) 激励频率从 5 到 24 Hz 时，实验轴向位移 u_1 （第一幅图）和 u_2 （第二幅图）的频谱分析。(b) 基于预测轴向位移 u_1 （第一幅图）和 u_2 （第二幅图）进行的相应谱分析。带叉号的白色区域表示预测失败。绿色、橙色和紫色阴影区域分别表示阱内周 期运动、阱间周期运动和混沌运动的频率。(c) 激励频率从 5 到 24 Hz 时， $\boldsymbol{K}$ 矩阵的奇异值谱。深绿色和亮绿色分别表示不同激励频率下 u_1 和 u_2 的李雅普诺夫指数。(d) 不同激励频率下，第二奇异值 σ_2 与李雅普诺夫指数 λ 之间的关系。阱内周期运动、阱间周期运动和混沌运动分别用绿色、橙色和紫色圆圈表示。两幅图均显示了对数尺度下的第二奇异值与李雅普诺夫指数之间的距离相关性。

由此得到 $dCor = 0.7628$ 和 $dCor = 0.5649$ ，分别对应 u_1 和u_2。在多项研究中，动力学系统的奇异值与李雅普诺夫指数之间的相关性已有所体现，并已用于计算李雅普诺夫指数 [39, 40]。因此，根据奇异值 $\boldsymbol{K}$，可以识别双折纸结构的动力学性质。

V. 讨论与结论

$\boldsymbol{K}$ 矩阵在 giDMD 中充当控制矩阵，将控制 $\boldsymbol{Y}$ 转换为 $\boldsymbol{S}$，表示为 $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{X} - \boldsymbol{X}'$。由于状态 $\boldsymbol{X}$ 对应于每个时间步各隔板的位移和速度，因此 $\boldsymbol{S}$ 包含速度和加速度信息。本质上， $\boldsymbol{K}$ 用于描述折纸结构中由几何参数决定的速度和加速度。 $\boldsymbol{K}$ 矩阵的稀疏性表明，折纸结构的速度和加速度仅与少数几何参数有关。这一点也可由附录A所示的折纸运动控制方程及推导出的方程得知。这些折纸运动控制方程显式或隐式地包含几何参数的组合。这就是 giDMD 在折纸动力学中表现良好、且仅与若干几何变量相关，从而得到稀疏$\boldsymbol{K}$ 矩阵的原因。从某种意义上说，可以认为附录A中的内容代表了针对所研究折纸系统的传统建模方法（基于本构定律），而 giDMD 则是其现代数据驱动变体。事实上，我们的方法基于稀疏回归实现动力学发现，其思路与非线性动力学的稀疏识别（SINDy） [30]十分相似。giDMD 中的稀疏 $\boldsymbol{K}$ 与 SINDy 中的稀疏 $\boldsymbol{\Xi}$ 都用于从函数库中选出活跃项（giDMD 中的控制变量和 SINDy 中的候选函数）。不过，两者也存在一些差异。SINDy 提供了一个庞大的候选函数库，作为表示动力学的可能基底；而 giDMD 中的 $\boldsymbol{Y}$ 仅包含折纸几何变量。此外，SINDy 使用系统的精确速度和加速度，而 giDMD 中的 $\boldsymbol{S}$ 受 DMDc 方法启发，由位移差分和速度差分构成，这与 SINDy 的实现方式不同。为使叙述一致，正文中将训练比例固定为 60%；同时，我们还在附录B和附录 C 中展示了其他训练比例下的 giDMD 建模，包括误差分析以及折纸结构状态的识别。

在本研究中，我们提出了 giDMD 方法，可从纯观测数据（实验数据和仿真数据）中学习引发折纸耦合运动的折纸动力学。与 DMDc 相比，我们通过预测准确度展示了 giDMD 更优的性能。在应用该方法的两个折纸结构示例中，giDMD 不仅能够预测不同频率下的折纸行为，还展现出识别折纸结构“状态”的能力。此外，giDMD 还揭示了

几何形状对于折纸控制运动定律的重要性。giDMD 在折纸动力学的线性（或近线性）区域表现更佳，但在描述非线性区域内的混沌动力学方面仍面临一些挑战。在后一种情况下，giDMD 在实现准确预测这一目标时开始失效，但仍有助于识别折纸状态。giDMD 具备显著能力，能够以高效（计算速度快）且可解释的方式对折纸动力学进行建模。尽管我们主要在两种特定结构上展示了该方法，但未来所研究的折纸结构可以跨越不同尺度，变得更加复杂，且不局限于克雷斯林折纸。事实上，将 giDMD 进一步拓展至其他此类几何非线性系统，是目前正在积极研究的课题，相关成果将在适当时候报告。

致谢

我们衷心感谢美国国家科学基金会的资助：S.L.、Y.M.、K.Y. 和 J.Y.（项目编号：1933729），以及 P.G.K.（项目编号：DMS 2204702）。J.Y. 感谢 SNU-IAMD 和 Brain Pool Plus 计划的支持；该计划由韩国国家研究基金会通过科学技术与信息通信部资助（0420-20220160）。K.Y. 获船井信息技术基金会资助。

附录A：数据采集

1. 实验数据

在双折纸结构的示例中，giDMD模型使用了原始实验数据。实验数据和实验程序详见参考文献 [16]。动态测试是在双三角柱形折纸结构上进行的。折纸的设计参数为 h_0 =50 mm、 $\theta_0 = \pm 70°$、 R = 36mm，分别对应初始高度、初始旋转角和横截面半径。左侧折纸的手性为负（$\theta_0 = -70°$），右侧折纸的手性为正（$\theta_0 = +70°$）。双折纸结构的左端连接到振动台（LDS V406 M4-CE, Br¨uel & Kjær），振动台向系统施加单频谐波激励。两台运动相机以每秒240帧的速度拍摄了连接在分隔件上的球形标记点的运动，并通过数字图像相关进行量化。使用三角测量法确定球形标记点的三维坐标，从而得到每个分隔件的轴向位移 u和转动位移 ϕ 。

2. 仿真数据

在单个折纸结构和折纸链的示例中，动态模态分解模型使用了仿真数据。数值模拟中使用的设计参数和力学参数分别见表 I 和表 II。

表 I. 单个折纸结构和折纸链的设计参数

m (kg)	j (kg · m^2)	N	h_0 (m)	R (m)	θ_0 (°)
58.8×10^{-3}	6.77×10^{-5}	6	30×10^{-3}	36×10^{-3}	± 70

表 II. 单个折纸结构和折纸链的力学参数

k_a (N · m^{-1})	k_b (N · m^{-1})	k_Ψ (N · m · rad^{-1})
6055	3743	7.277×10^{-3}

力学参数 k_a, k_b 表示沿折痕 a, b方向的轴向弹簧常数，而 k_Ψ 表示沿底部折痕的扭转弹簧常数。

基于桁架模型，对单个折纸结构和折纸链在不同频率激励下进行仿真，该模型将克雷斯林单元视为连接分隔件的多边形间弹簧，分隔件具有质量m 和转动惯量 j [6, 13, 14]。分隔件的运动方程可表示为：

$$m_n \ddot{u}_n + F_n(\delta u_n, \delta\phi_n) - F_{n-1}(\delta u_{n-1}, \delta\phi_{n-1}) = 0 \tag{A1a}$$

$$j_n \ddot{\phi}_n + T_n(\delta u_n, \delta\phi_n) - T_{n-1}(\delta u_{n-1}, \delta\phi_{n-1}) = 0 \tag{A1b}$$

其中 $\delta u_n = u_n - u_{n+1}$ 和 $\delta\phi_n = \phi_n - \phi_{n+1}$。下标 n 表示第 n 个隔板。方程 (A1a) 和方程 (A1b) 中的力和扭矩可以进一步展开为各弹簧贡献的求和，如下所示：

$$\begin{aligned} F_n(\delta u_n, \delta\phi_n) =& k_{an} N(\delta u_n - h_0)(1 - \frac{a_0}{a_n}) + k_{bn} N(\delta u_n - h_0)(1 - \frac{b_0}{b_n}) \\ &+ 2k_{\Psi n} N R h_0 (\Psi_0 - \Psi_n) \frac{\cos\frac{\pi}{N} - \cos(\delta\phi_n + \theta_0)}{R^2[\cos\frac{\pi}{N} - \cos(\delta\phi_n + \theta_0)]^2 + (h_0 - \delta u_n)^2} \end{aligned} \tag{A2a}$$

$$T_n(\delta u_n,\delta\phi_n) = k_{an}NR^2\sin(\delta\phi_n+\theta_0-\frac{\pi}{N})(1-\frac{a_0}{a_n}) + k_{bn}NR^2\sin(\delta\phi_n+\theta_0+\frac{\pi}{N})(1-\frac{b_0}{b_n}) + 2k_{\Psi n}NRh_0(\Psi_0-\Psi_n)\frac{\sin(\delta\phi_n+\theta_0)(h_0-\delta u_n)}{R^2[\cos\frac{\pi}{N}-\cos(\delta\phi_n+\theta_0)]^2+(h_0-\delta u_n)^2} \tag{A2b}$$

其中，下标为 0 的参数表示初始折纸构型。

能带结构的计算基于晶胞的线性化桁架模型，以表示小振幅激励。晶胞包含两个折纸元件，其前部分隔件分别表示位置（1）和（2）。线性化运动方程可表示为：

$$m_n\ddot{u}_n^{(1)}-\alpha_{11}(u_n^{(2)}-u_n^{(1)})-\beta_{11}(u_{n-1}^{(2)}-u_n^{(1)})-\alpha_{12}(\phi_n^{(2)}-\phi_n^{(1)})-\beta_{12}(\phi_{n-1}^{(2)}-\phi_n^{(1)})=0 \tag{A3a}$$

$$m_n\ddot{u}_n^{(2)}-\alpha_{11}(u_n^{(1)}-u_n^{(2)})-\beta_{11}(u_{n+1}^{(1)}-u_n^{(2)})-\alpha_{12}(\phi_n^{(1)}-\phi_n^{(2)})-\beta_{12}(\phi_{n+1}^{(1)}-\phi_n^{(2)})=0 \tag{A3b}$$

$$j_n\ddot{\phi}_n^{(1)}-\alpha_{21}(u_n^{(2)}-u_n^{(1)})-\beta_{21}(u_{n-1}^{(2)}-u_n^{(1)})-\alpha_{22}(\phi_n^{(2)}-\phi_n^{(1)})-\beta_{22}(\phi_{n-1}^{(2)}-\phi_n^{(1)})=0 \tag{A3c}$$

$$j_n\ddot{\phi}_n^{(2)}-\alpha_{21}(u_n^{(1)}-u_n^{(2)})-\beta_{21}(u_{n+1}^{(1)}-u_n^{(2)})-\alpha_{22}(\phi_n^{(1)}-\phi_n^{(2)})-\beta_{22}(\phi_{n+1}^{(1)}-\phi_n^{(2)})=0 \tag{A3d}$$

其中，系数可根据参考文献 [14] 中的详细说明，由每个晶胞势能的二阶导数推导得到。根据表 I 和表 II 中的设计参数和力学参数，可确定这些系数为 $\alpha_{11}=\beta_{11}=26850\,\mathrm{N\cdot m^{-1}}$、$\alpha_{12}=-\beta_{12}=-819.8\,\mathrm{N\cdot rad^{-1}}$和 $\alpha_{22}=\beta_{22}=26.07\,\mathrm{N\cdot m\cdot rad^{-1}}$。随后，将周期性边界条件（布洛赫定理）应用于线性化的运动方程，从而得到 $u_{n-1}^{(2)}=u_n^{(2)}e^{-2ikh_0}$、$\phi_{n-1}^{(2)}=\phi_n^{(2)}e^{-2ikh_0}$ $u_{n+1}^{(1)}=u_n^{(1)}e^{2ikh_0}$ 和 $\phi_{n+1}^{(1)}=\phi_n^{(1)}e^{2ikh_0}$。通过求解特征值方程，可获得能带结构 $\omega(k)$ 关于第一布里渊区内布洛赫波矢 k 的函数：

$$[\hat{D}(k)+\omega^2]U=0 \tag{A4}$$

此处，ω 表示角频率。$\hat{D}(k)$是关于k的动力学矩阵，U 是对应的本征模态$U=[\sqrt{m}u^{(1)},\sqrt{m}u^{(2)},\sqrt{j}\phi^{(1)},\sqrt{j}\phi^{(2)}]^T$。

附录 B：不同训练比例下的误差分析

尽管上述示例中 giDMD 模型的训练比例设为 60%，我们还研究了构建有效且可靠的模型以描述折纸动力学所需的训练比例是否充足。我们计算了两个示例在不同训练比例下的相对误差（双折纸结构见图6(a)，折纸链见图6(b)）。图6(a)分别展示了左、右面板中的轴向位移和转动位移的相对误差。可以看出，对于双折纸结构的大多数阱内周期运动情形，20% 的训练比例足以构建有效的 giDMD 模型。然而，无论训练比例如何，giDMD 都无法对阱间周期运动建模。训练比例达到 20% 时，即可开始有效地对混沌运动建模。相应模型无法准确描述正文图4(f)所示的混沌运动间歇性变化，因此相对误差较大。不过，如图5(b)所示，该模型能够呈现混沌运动的频谱特征（较大的低频分量）。值得注意的是，较高的训练比例并不总能保证得到有效的 giDMD 模型，训练比例较高区域中的白色区域即说明了这一点。图6(b)分别展示了上、下面板中的轴向位移和转动位移的相对误差。可以看出，训练比例达到 30% 时即可构建有效模型。此外，还可以高精度地构建适用于不同频率的模型。

附录 C：不同训练比例下的状态识别

如正文所述，折纸结构的“状态”可能由 $\boldsymbol{K}$ 矩阵的奇异值决定。我们进一步计算了不同训练比例下 $\boldsymbol{K}$ 矩阵的奇异值，以识别折纸结构的“状态”。对于 $\boldsymbol{K}$ 矩

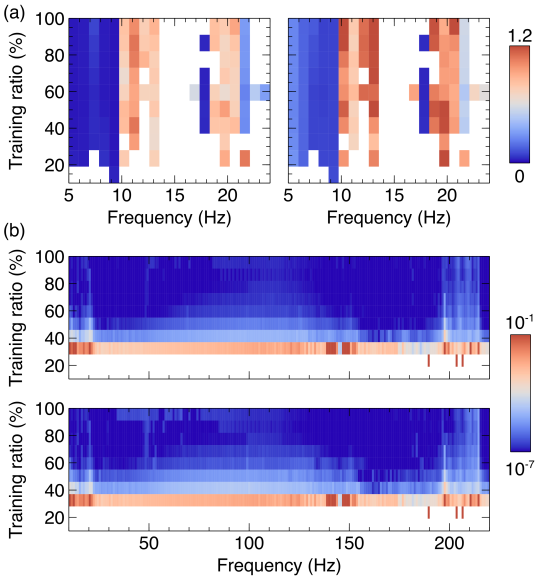


图 6. 双折纸结构和折纸链在不同训练比例下的预测精度。(a) 左图和右图分别显示双折纸结构在不同频率下，轴向位移和转动位移的相对误差随训练比例的变化。(b) 左图和右图分别显示折纸链在不同频率下，轴向位移和转动位移的相对误差随训练比例的变化。(a) 和 (b) 中的白色区域表示预测失败。

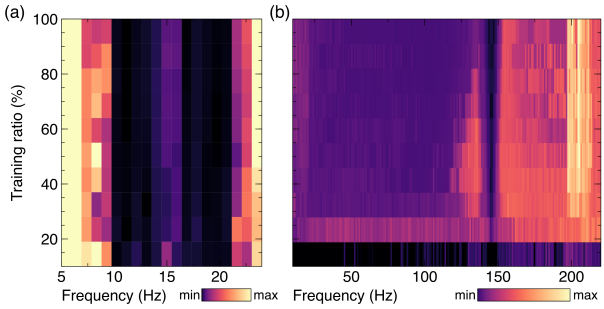


图 7. 双折纸结构和折纸链在不同训练比例下的 $\boldsymbol{K}$ 矩阵的奇异值。(a) 双折纸结构在不同频率下， $\boldsymbol{K}$ 矩阵的第一个奇异值随训练比例的变化。(b) 折纸链在不同频率下， $\boldsymbol{K}$ 矩阵的第五个奇异值随训练比例的变化。

阵，计算双折纸结构（图7(a)）在不同训练比例下的第二个奇异值，并计算折纸链（图7(b)）的第五个奇异值。图7(a)显示，即使训练比例仅为10%，也可以通过不同的数值初步识别阱内周期运动、阱间周期运动和混沌运动，不过需要注意的是，在这一训练比例下，不同频率对应的giDMD模型尚不足以描述折纸动力学。对于折纸链，采用第五个奇异值进行识别，以获得更明显的对比，尽管其他奇异值也能发挥作用。即使模型尚未有效建立，在训练比例为20%时也能识别出拓扑边界态。对训练比例的研究表明，我们的giDMD方法能够在早期阶段识别折纸结构的“状态”，有助于对折纸结构进行早期诊断。

[1] E. T. Filipov、T. Tachi 和 G. H. Paulino，将折纸管组装成坚固且可重构的结构与超材料，《美国国家科学院院刊》**112**, 12321 (2015). [2] C. Lv、D. Krishnaraju、G. Konjevod、H. Yu 和 H. Jiang，基于折纸的机械超材料，Scientific Reports **4**, 1 (2014年). [3] H. Yasuda 和 J. Yang，具有负泊松比和双稳态的内凹型折纸基超材料，《物理评论快报》**114**, 185502 (2015). [4] C. Jianguo、D. Xiaowei、Z. Ya、F. Jian 和 T. Yongming，具有克雷斯林图案的圆柱形折纸结构的双稳态行为，《机械设计学报》**137**, 061406 (2015). [5] B. H. Hanna、J. M. Lund、R. J. Lang、S. P. Magleby 和 L. L. Howell，水炸弹底座：一种对称的单顶点双稳态折纸机构，《智能材料与结构》**23**, 094009 (2014年). [6] H. Yasuda、T. Tachi、M. Lee 和 J. Yang，用于非易失性机械存储器操作的基于折纸的可调桁架结构，《自然·通讯》**8**, 1 (2017). [7] S. Miyashita、S. Guitron、M. Ludersdorfer、C. R. Sung 和 D. Rus，《一种无需系留、可自折叠、行走、游泳并可降解的微型折纸机器人》，载于 *2015 IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA)* 2015 1490 1496 (IEEE,) pp. – . [8] S. A. Zirbel 、 R. J. Lang 、 M. W. Thomson 、 D. A. Sigel、P. E. Walkemeyer、B. P. Trease、S. P. Magleby 和 L. L. Howell，《在基于折纸的可展开阵列中适应厚度》，《机械设计学报》**135** (2013)。[9]B. J. Edmondson、L. A. Bowen、C. L. Grames、S. P. Magleby、L. L. Howell 和 T. C. Bateman，《Oriceps：折纸启发式镊子》，载于 *Smart Materials Adaptive ,, Structures and Intelligent Systems* 56031 美国机械工程师学会，2013) 卷，p. V001T01A027。[10] T. G. Nelson、R. J. Lang、S. P. Magleby 和 L. L. How- ell，《受曲线折叠启发的可展开柔顺滚动接触元件（d-core）》，《机构与机器理论》**96**, 225 (2016)。

[11] X. Deng、J. Zhao、J. Cai 和 X. Liu，《具有任意单曲率构型的可调折纸超材料》，《机构与机器理论》**171**, 104745 (2022)。[12]S. Lyu、B. Qin、H. Deng 和 X. Ding，《泊松比可调的基于折纸的胞状机械超材料：构造与分析》，《国际机械科学杂志》**212**, 106791 (2021)。[13] H. Yasuda、Y. Miyazawa、E. G. Charalampidis、C. Chong、P. G. Kevrekidis 和 J. Yang，《通过产生稀疏孤波实现基于折纸的冲击缓解》，《科学进展》**5**, eaau2835 (2019)。[14] Y. Miyazawa、C.-W. Chen、R. Chaunsali、T. S. Gormley、G. Yin、G. Theocharis 和 J. Yang，《克雷斯林折纸中的拓扑态转移》，《通讯材料》**3**, 1 (2022)。[15] C. Huang、T. Tan、Z. Wang、S. Zhang、F. Yang、Z. Lin 和 Z. Yan，《用于机器学习辅助自供能步态生物特征识别的折纸动力学软压电能量采集器》，《能源转换与管理》**263**, 115720 (2022)。[16] H. Yasuda、K. Yamaguchi、Y. Miyazawa、R. Wiebe、J. R. Raney 和 J. Yang，《混沌折纸动力学的数据驱动预测与分析》，《通讯物理》**3**, 1 2020( )。[17] C. Zhou、B. Wang、J. Ma 和 Z. You，《折纸防撞盒的动态轴向压溃》，《国际机械科学杂志》**118**, 1 (2016)。[18] K. Champion、B. Lusch、J. N. Kutz 和 S. L. Brunton，《数据驱动发现坐标与控制方程》，《美国国家科学院院刊》**116**, 22445 (2019)。[19] R. Iten、T. Metger、H. Wilming、L. Del Rio 和 R. Ren- ner，《利用神经网络发现物理概念》，《物理评论快报》**124**, 010508 (2020)。[20] M. Raissi、P. Perdikaris 和 G. E. Karniadakis，《物理信息神经网络：用于求解涉及非线性偏微分方程的正问题与反问题的深度学习框架》，《计算物理学杂志》**378**, 686 (2019)。[21] J. H. Tu、C. W. Rowley、D. M. Luchtenburg、S. L. Brun- ton 和 J. N. Kutz，《论动态模态分解：理论与应用》，《计算动力学杂志》**1**, 391 (2014)。[22] J. N. Kutz、S. L. Brunton、B. W. Brunton 和 J. L. Proc- tor，*Dynamic mode decomposition: data-driven modeling of complex systems* 2016

(SIAM,)。[23] P. J. Schmid，《数值数据与实验数据的动态模态分解》，《流体力学杂志》**656**, 5 2010( )。[24] H. N. Ingabire、K. Wu、J. T. Amos、S. He、X. Peng、W. Wang、M. Li、J. Chen、Y. Feng、N. Rao，*et al.*，《基于动态模态分解的心电信号分析》，《IEEE生物医学与健康信息学杂志》**26**, 2124 (2021年)。[25] A. Saito 和 T. Kuno，基于动态模态分解的数据驱动实验模态分析，《声学与振动杂志》**481**，115434（2020年）。[26] S. Li、P. G. Kevrekidis 和 J. Yang，利用动态模态分解表征弹性拓扑态（2022年）。[27] J. L. Proctor、S. L. Brunton 和 J. N. Kutz，带控制的动态模态分解，SIAM 动力系统期刊 **15**，142（2016年）。[28] E. Hansen、S. L. Brunton 和 Z. Song，利用动态模态分解进行群体建模，《IEEE Access》（2022年）。[29] E. Kaiser、J. N. Kutz 和 S. L. Brunton，低数据极限下用于模型预测控制的非线性动力学稀疏辨识，《皇家学会会刊 A 辑》**474**，20180335（2018年）。[30] S. L. Brunton、J. L. Proctor 和 J. N. Kutz，利用非线性动力系统稀疏辨识从数据中发现控制方程，《美国国家科学院院刊》**113**，3932（2016年）。[31] G. Ma、M. Xiao 和 C. T. Chan，声学和机械系统中的拓扑相，《自然综述：物理》**1**，281（2019年）。[32] S. Li、I. Kim、S. Iwamoto、J. Zang 和 J. Yang，弹性超材料中的谷各向异性，《物理评论 B》**100**，195102（2019年）。[33] T.-W. Liu 和 F. Semperlotti，可调谐声学谷霍尔边缘态：可重构声子弹性波导中的研究，《物理评论应用》**9**，014001（2018年）。[34] S. Li 和 J. Yang，螺旋弹性谷超材料中的拓扑相变，《物理评论应用》**15**，014058（2021年）。[35] J. Vila、R. K. Pal 和 M. Ruzzene，弹性六角晶格中拓扑谷模态的观测，《物理评论 B》**96**，134307（2017年）。[36] S. Li、D. Zhao、H. Niu、X. Zhu 和 J. Zang，软材料中弹性拓扑态的观测，《自然·通讯》**9**，1（2018年）。[37] H.-X. Wang、G.-Y. Guo 和 J.-H. Jiang，经典波中的能带拓扑：用于拓扑数和脆弱拓扑的威尔逊环方法，《新物理学杂志》**21**，093029（2019年）。[38] M. T. Rosenstein、J. J. Collins 和 C. J. De Luca，利用小型数据集计算最大李雅普诺夫指数的实用方法，《物理 D：非线性现象》**65**，117（1993年）。[39] K. Geist、U. Parlitz 和 W. Lauterborn，计算李雅普诺夫指数的不同方法比较，《理论物理进展》**83**，875（1990年）。[40] L. Barreira 和 C. Valls，通过奇异值考察李雅普诺夫正则性，《美国数学会会刊》**369**，8409（2017年）。