arXiv:2303.04324v2 [math.NT] 8 Jan 2024

Drinfeld 模的高度与奇异模数

Zhenlin Ran

摘要

设 q 为奇数， $q>5$，且 $\mathbb{F}_q$ 为含有 q 个元素的有限域。我们证明，秩为 2 $\mathbb{F}_q[t]$ 的 Drinfeld 模的奇异模数中，至多只有有限多个是代数单位。特别地，我们发展了一些关于 Drinfeld 模高度的技巧来解决这一问题。

Contents

1 引言 1 2 Drinfeld A-模的极小模型 3 3 高度 6 4 二次基本域上的算术 13 5 界定 $h(J)$ **16**关于复乘的更多内容 21

1 Introduction

奇异模数是复数域上一个复乘椭圆曲线的 j-不变量。众所周知，奇异模数是代数整数。2015 年，Habegger 证明了以下定理 [11]:

定理 1.1. 只有有限多个奇异模数是代数单位。

他的证明运用了丢番图几何中的许多经典工具。证明的核心思路是对酉奇异模数的 Weil 高度进行界定。具体而言，假设奇异模数是一个单位，则可通过应用 Clozel 和 Ullmo 的一个等分布定理 [8, 第 2 节3]，得到其 Weil 高度的上界。这是整个证明中最困难的部分，因为很难控制伽罗瓦轨道较大的奇异模数的数量。

本文考虑函数域中的对应情形，并证明 Drinfeld $\mathbb{F}_q[t]$-模也有相同的结论。

设 C 是有限域 $\mathbb{F}_q$ 上的一条光滑、射影且几何不可约曲线，其中有 q 个元素。固定一个闭点 $\infty \in C$，令 A 为 C 上在 8 之外正则的函数环。

例如，如果 C 是一条射影直线，那么 $A=\mathbb{F}_q[t]$ 对某个超越于 $\mathbb{F}_q$ 的 t 成立。定义在 A 上某个概形 S 上的 Drinfeld$A$-模是一个对 $(\mathbb{G}_a,\ \mathcal{L},\phi)$，满足 $\mathbb{G}_a,\ \mathcal{L}$ 是由可逆层 $\mathcal{L}$ 给出的 S 上的线丛，且 ϕ 是从 A 到 End$(\mathbb{G}_a,\ \mathcal{L})$ 的环同态，并满足一些额外条件（参见定义 2.1）。众所周知，秩 2 的 Drinfeld A-模是椭圆曲线的类比。椭圆曲线的大多数概念和结果都可以在秩 2 的 Drinfeld$A$-模中找到。例如，我们可以用与椭圆曲线相同的方式定义 Drinfeld $\mathbb{F}_q[t]$-模的奇异模数。本文的主定理如下：

定理 1.2. 设 q 为奇数且 $q>5$。秩为.....的奇异模数至多只有有限多个 k
2 德林费尔德 $\mathbb{F}_q[t]$-模是代数单位。

证明主定理的策略遵循 Habegger 的做法。正如我们先前指出的，Habegger 用来控制接近 j-函数根的二次虚数的伽罗瓦轨道数量的关键工具，是 Clozel 和 Ullmo 的一个等分布定理；该定理使他能够得到酉奇异模数的 Weil 高度上界。然而，据作者所知，目前还没有适用于 Drinfeld A-模、类似于 Clozel 和 Ullmo 所得结果的等分布结论，因此这一思路并不适用于我们的情形。为解决这一问题，我们转而研究二次虚点的算术性质。尽管我们针对 Drinfeld $\mathbb{F}_q[t]$-模所采用的方法在某种程度上较为初等，但我们可以证明，在 j-函数的一个根的某个小邻域内至多存在一个二次虚点（参见命题 4.5）。因此，我们也能够得到 Drinfeld $\mathbb{F}_q[t]$-模的酉奇异模数的 Weil 高度上界。

另一方面，Habegger 还给出了奇异模数的 Weil 高度下界，其增长速度超过了他所得到的上界。椭圆曲线情形的许多工具早已为人所知，而 Drinfeld A 模的对应工具尚不可用。我们沿用 Habegger 的策略，证明 Drinfeld 模情形的一些类似结果，由此得到 Drinfeld $\mathbb{F}_q[t]$ 模奇异模数的 Weil 高度下界。具体而言：

定理 1.3. 设 J 是一个秩 2 Drinfeld $\mathbb{F}_q[t]$ 模的奇异模数，其对应的判别式为 δ，导子为 f_0。存在一个关于 q 的可计算常数 C_q，使得

$$h(J)\geqslant(q^2-1)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\sqrt{q}+1}\right)\log\sqrt{|\delta|}+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{q}+1}\right)\log|f_0|-\frac{9}{4}\log\log|f_0|-C_q.$$

对于 Drinfeld A 模，Faltings 高度的对应概念是 Taguchi 高度；Taguchi 在 [21] 针对有限特征情形、在 [22] 针对一般特征情形引入了这一概念。特别地，我们为 Drinfeld $\mathbb{F}_q[t]$ 模得到了 Nakkajima 和 Taguchi 的一个类似结果，它明确描述了秩 2 Drinfeld $\mathbb{F}_q[t]$ 模的 Taguchi 高度在同源作用下的变化，其中一个秩 2 Drinfeld $\mathbb{F}_q[t]$ 模具有任意阶的复乘，另一个则具有极大阶的复乘。从这里出发，我们可以得到相应 Drinfeld $\mathbb{F}_q[t]$ 模分次高度的变化。由于 Drinfeld$A$ 模的分次高度是 Drinfeld A 模的 j-不变量 Weil 高度的推广，因此，通过应用 Wei 的一个定理（他在该定理中证明了 Drinfeld A 模的 Colmez 猜想），我们便得到上述奇异模数的 Weil 高度下界。

最近，Bilu、Habegger 和 K¨uhne 在椭圆曲线的情形下证明了一个更强的结果：不存在既是代数单位的奇异模数 [7]。他们采用的方法与

Habegger 的方法相同，而 [7] 中的方法是有效的。Habegger 的证明之所以无效，是因为他应用了等分布定理。与这项工作相比，Li [16]采用了完全不同的方法，运用了 Gross-Zagier、Gross-Kohnen-Zagier 及其推广。Li 可以将 [7] 的相同结果作为 [16, 定理 1.1]的一个特例推导出来。

本文安排如下:

- 在第 2 节中，我们回顾任意 A概形上的 Drinfeld A-模的概念，以及 Drinfeld A-模的极小模型。特别地，我们研究极小模型的一些性质。

- 在第3节中，我们介绍三种不同类型的高度，并研究它们之间的关系。特别地，我们研究 Drinfeld A-模在同源下高度的变化。
- 在第4节中，我们研究 Drinfeld A-模的 j-函数根附近二次虚点的数量。

- 在第5节中，我们给出 j-不变量的 Weil 高度上界，并证明主定理。
- 附录旨在给出一些关于复乘 Drinfeld A-模的结果，这些结果在一些常见文献中并未见到。特别地，本节用于证明命题 3.14。

致谢 作者非常感谢他的导师 Florian Breuer，在整个博士学习期间为他指导如此有趣的项目，并在各方面给予支持。他也感谢 Marc Hindry 和 Urs Hartl 分别邀请他访问巴黎和 M¨unster，使他有机会与他们进行愉快且富有助益的讨论，并向他们学习数学。他还感谢 Fabien Pazuki 和 Fu-Tsun Wei 与他进行了富有助益的讨论。特别感谢 Philipp Habegger 建议他研究引理 5.7。

2 Minimal models of Drinfeld A-modules

本节中，我们回顾 Drinfeld A-模及其相关极小模型的定义。特别地，我们证明了一个与阿贝尔簇的 N´eron 模型结果类似的结论。

设 C 是定义在 $\mathbb{F}_q$上的光滑、射影、几何不可约曲线，其中 $\mathbb{F}_q$ 是含有 q个元素的有限域。设 $\infty \in C$是一个闭点。我们记 $A := \Gamma(C\backslash\{\infty\}, \mathcal{O}_C)$ 为在点 8 之外正则的函数环。固定 k 为 A的分式域。令 M_k 表示 k的所有赋值构成的集合。对每个赋值 $v \in M_k$，我们按如下方式定义一个绝对值 $|\cdot|_v$:

$$|x|_v = q^{-\deg(v)v(x)}, \ \forall x \in k.$$

令 k_∞ 表示 k 关于 8 的完备化，并令 $\mathbb{C}_\infty$ 表示 k_∞. 的代数闭包的完备化

在本文中，我们用 log 表示以 q 为底的对数函数，并假设 q 为奇数。

定义 2.1. 设 S 是一个定义在 Spec(A) 上的概形，其结构态射为 $i: S \to$Spec(A)。定义在 S 上的 Drinfeld A-模是一个二元组 E $= (\mathbb{G}_a, \mathcal{L}, \phi)$，其中 $\mathcal{L}$ 是定义在 S 上的可逆层，且 ϕ 是从 A 到 End$(\mathbb{G}_a, \mathcal{L})$ 的同态，使得

(1) $\partial \circ \phi = i^{\#}$，其中 $i^{\#}: A \to \mathcal{O}_S(S)$，而 ∂ 是取自同态环 End$(\mathbb{G}_a, \mathcal{L})$ 的常数项的自然同态。；

(2) 对任意 $0 \neq a \in A$，态射 $\phi(a)$ 是有限的;

(3) 在 S 的任意一点，$\phi(a)$ 的次数对于某个 $a \in A$ 都是 > 1。

注 2.2. (1) 若 $\varphi \in$End$(\mathbb{G}_a, \mathcal{L})$，则 $\varphi = \sum_{n \geqslant 0} a_n \tau_p^n$，其中 $a_n \in \Gamma(S, \mathcal{L}^{1-p^n})$，且 τ_p 是相对 p-Frobenius。因此 $D \circ \phi$ 落在 $\mathcal{O}_S(S)$ 中。

(2) 我们将 End$(\mathbb{G}_a, \mathcal{L})$ 的 $\mathbb{F}_q$-线性自同态所构成的子代数记为 End$_q(\mathbb{G}_a, \mathcal{L})$。End$_q(\mathbb{G}_a, \mathcal{L})$ 的元素具有如下形式：$\sum_n a_n \tau_q^n$，其中 $a_n \in \Gamma(S, \mathcal{L}^{1-q^n})$。

(3) 对任意 $\varphi = \sum_{n \geqslant 0} a_n \tau_p^n \in$ End$(\mathbb{G}_{a,\mathcal{L}})$，该和是局部有限的 [15, 注 1.2.4]。

(4) 若 S 连通，则存在一个整数 $r > 0$使得 deg$(\phi(a)) = |a|_\infty^r$ [15, 命题 2.2.2]。整数 r 称为 Drinfeld 模 E 的秩。

(5) 从 $(\mathbb{G}_{a,\mathcal{L}}, \phi)$ 到 $(\mathbb{G}_{a,\mathcal{M}}, \psi)$ 的同态（分别为同源）是一个（分别为有限）同态$f: \mathbb{G}_{a,\mathcal{L}} \to \mathbb{G}_{a,\mathcal{M}}$，满足对所有 $a \in A$，都有 $f \circ \phi(a) = \psi(a) \circ f$。

我们将 $\phi(a)$ 简记为 ϕ_a，表示 $a \in A$。若 S 是一个域的谱，则 S 上的线丛在同构意义下唯一；此时，我们只用 ϕ来指定 S 上的 Drinfeld 模，并默认取其一个平凡化，将此类 Drinfeld A-模视为满足定义 2.1 的 (1)–(3) 的环同态 ϕ。本文假设，对于任意 Drinfeld 模 $(\mathbb{G}_{a,\mathcal{L}}, \phi)$, ϕ，它是 q-线性的，且 $\tau := \tau_q$。

定义 2.3.（Taguchi）设 S 是 A 上的有限型整正规概形，其函数域为 F。设 ϕ是 F上的 Drinfeld A-模。ϕ在 S上的一个模型$\mathscr{M} = (\mathbb{G}_{a,\mathcal{L}}, \varphi, f)$ 是 S上的一个 A-模概形 E $= (\mathbb{G}_{a,\mathcal{L}}, \varphi)$，使得 f: E $\times_S$ 谱$(F) \to \phi$是 F上的 Drinfeld 模同构。若给定 ϕ在 S上的任意其他模型 $\mathscr{M}\mathscr{N} = (\mathbb{G}_{a,\mathcal{L}'}, \varphi', f')$，存在唯一的同态 $\mathscr{N} \to \mathscr{M}$，其在泛纤维上诱导一个与 f 和 f'相容的同构，则称 $\mathscr{M}$是极小的。

命题 2.4. [22, 命题 2.2] 设 S 和 F 如定义 2.3 所述，并进一步假设S 是一个魏尔除子与卡蒂埃除子这两个概念一致的概形。则存在 ϕ在 S 上的一个极小模型。

注记 2.5. (1) 若 ϕ 有极小模型，则该极小模型在同构意义下唯一;

(2) 通过检查纤维可知，ϕ 在 S 上的每个模型在 S上都是光滑的。

(3) 根据第 [22, 条注释（4），第299], 页，每个模型都同构于一个标准模型。为避免与“标准 Drinfeld 模”这一术语混淆，我们将第 [22, 条注释（4），第 299]页中的标准模型称为规范化模型。也就是说，规范化模型是指其泛纤维恰好是定义在 F上的给定 Drinfeld 模的模型。

设 ϕ 是一个秩为 r 、定义在 F 上的 Drinfeld A-模，其中 F 是 k的有限次数扩张域；并设R 是 A 在 F中的整闭包。对于任意 $a \in A$，记:

$$\phi_a = a\tau^0 + \cdots + \Delta_a \tau^{r \deg(a)}.$$

L且 $\mathscr{M} = (\mathbb{G}_{a,\mathcal{L}}, \varphi)$ 是 ϕ 在 R上的规范化极小模型。那么 $\Delta_a \in \mathcal{L}^{1-q^{r \deg(}}$ $^{a)}$.

注记 2.6。我们可以通过 R-模的同构，将 Spec(R) 上的可逆层与 F 中的R 分式理想等同起来。为避免歧义，本文中我们默认使用这种等同，并将 Spec(R) 上的可逆层视为 F 中的R 分式理想。因此，我们不区分 Spec(R) 上的可逆层与 F 中的 R 分式理想。此外，我们不区分 R 的素理想与其对应的 F 上的赋值。也就是说，若取一个素理想 $v \in$Spec(R)，则 $v(I)$ 表示分式理想 I 在 v 处的赋值。

命题 2.7。设 ϕ, R, F 如上。

1. 若 ϕ 在 R 上处处有良约化，则 ϕ 在 R 上的极小模型 $\mathscr{M}$ 是一个定义在 R 上的 Drinfeld$A$-模。2. 若 ϕ 在 R 上处处有良约化， ϕ' 是定义在 F 上的另一个 Drinfeld 模，且 $f\colon \phi \to \phi'$ 是定义在 F 上的 Drinfeld 模之间的同源，则 f 是它们的规范化极小模型之间的同源。

证明。为证明第一个结论，我们可以假设 $\mathscr{M}$ 已规范化，因此只需证明对每个 $0 \neq a \in A$， ϕ_a 都是有限的。由于 ϕ 在 R上处处良约化，对 R [22, 上的每个赋值 v，我们都有 $v(\Delta_a) = v(\mathcal{L}^{1-q^{r}{}^{(a)}_{\text{次数}}})$，例见第 301] 页。这意味着 Δ_a 对应于 End($\mathbb{G}_a$中的一个同构, $\mathcal{L}$)。由命题 1.2.6] ，我们可知对任意 $a \in A$， ϕ_a 都是有限的。因此第一个结论成立。

为证明第二个结论，我们先写出:

$$\phi'_a = a\tau^0 + \cdots + \Delta'_a \tau^{r \deg(a)}, \ \forall a \in A; \quad f = f_0\tau^0 + \cdots + f_n\tau^n.$$

对任意 $a \in A$，我们有 $f\phi_a = \phi'_a f$。比较系数可得

$$f_n \Delta_a^{q^n} = \Delta'_a f_n^{q^{r \deg(a)}}. \tag{1}$$

设 $\mathscr{M}' = (\mathbb{G}_a, \mathcal{L}', \varphi')$ 为 ϕ'的规范化极小模型。那么 f唯一地延拓为一个从 $\mathscr{M}$ 到 $\mathscr{M}'$ 的态射，其泛纤维为 f [22, 命题 2.5]。因此，我们可以交替用 f 表示这两个态射，而不会造成任何歧义。由于 ϕ 处处良约化， ϕ'也处处良约化。上述论证再次推出 $v(\Delta'_a) = v(\mathcal{L}'^{1-r \deg(a)})$。由 (1) 可知，对 R上的每个赋值 v

$$v(f_n) = v(\mathcal{L}') - q^n v(\mathcal{L}) = v(\mathcal{L}'\mathcal{L}^{-q^n}).$$

Thu根据第一个结论证明中的相同论证， f 是有限的，因此是一个同源 y. □

注记 2.8。这个命题实际上指出了一个著名结果的类似结论：如果数域上的阿贝尔簇处处具有良约化，那么它的 N´eron 模型就是一个阿贝尔概形；此外，处处具有良约化的阿贝尔簇之间的同源可以延拓为它们的 N´eron 模型之间的有限平坦同态。在我们的情形中， f的平坦性是有限性的结果，因为两个线丛之间的同态拟有限当且仅当它是平坦的 [15, 命题 1.2.5]。

3 HEIGHTS

本节中，我们研究 Taguchi 高度、Weil 高度和分次高度。特别地，我们计算秩 2 Drinfeld $\mathbb{F}_q[t]$-模在同源作用下 Taguchi 高度和分次高度的变化。

田口高度

令 A、k、k_∞ 和 $\mathbb{C}_\infty$ 如第 2 节所述。在 [22], 中，Taguchi 引入了他所谓的 Drinfeld A-模的微分高度，如今称为田口高度。他在与 Drinfeld A-模相关的格为自由格时定义了这一概念。Wei 将 Taguchi 的定义推广到了任意 Drinfeld A-模，见 [24, 第 5] 节。我们摘录 Wei 的以下定义。更多细节请参阅 [23, 第 4] 节或 [24, 注 2.10]。

定义 3.1. 设 Λ 是 $\mathbb{C}_\infty$ 中秩为 r 的一个 A-格，并设 $\mathcal{O}_\infty$ 是 k_∞ 中的 8 进整数环。选取 $k_\infty \otimes \Lambda$ 的一组正交 k_∞-基 $\{\lambda_i\}_{i=1}^r$，使得:

(1) $\lambda_i \in \Lambda$ 对于 $1 \leqslant i \leqslant r$; (2) $|a_1\lambda_1 + \cdots + a_r\lambda_r|_\infty = \max\{|a_i\lambda_i|_\infty : 1 \leqslant i \leqslant r\}$ 对所有 a_1, ..., $a_r \in k_\infty$; (3) $k_\infty \otimes \Lambda = \Lambda + (\mathcal{O}_\infty\lambda_1 + \cdots + \mathcal{O}_\infty\lambda_r)$。

$D_A(\Lambda)$ A-格 Λ 的余体积定义如下:

$$D_A(\Lambda) := q^{1-g_k} \cdot \left(\frac{\prod_{i=1}^r |\lambda_i|_\infty}{\#\left(\Lambda \cap (\mathcal{O}_\infty\lambda_1 + \cdots + \mathcal{O}_\infty\lambda_r)\right)}\right)^{\frac{1}{r}} = \left(\frac{\prod_{i=1}^r |\lambda_i|_\infty}{\#(\Lambda/(A\lambda_1 + \cdots + A\lambda_r))}\right)^{\frac{1}{r}},$$

其中， g_k 是域 k的亏格。

设 F/k是一个有限域扩张， R是 F中 A的整闭包。对于 F 上方位于 8 之上的每个无穷处 w，我们可以通过 w将 F 嵌入 $\mathbb{C}_\infty$ 。令 F_w 为关于 w 的 F 的完备化，并嵌入 $F_w \hookrightarrow \mathbb{C}_\infty$。Spec$(R)$ 上的度量线丛 $(\mathcal{L}, \|\cdot\|)$ 是一个秩为 1 的射影R-模 $\mathcal{L}$，并配备范数

$$\|\cdot\|_w : \mathcal{L} \otimes_R F_w \to \mathbb{R}$$

对于 F的所有无穷处 w。 R上度量线丛 $(\mathcal{L}, \|\cdot\|)$ 的次数 deg$(\mathcal{L}, \|\cdot\|)$ 为

$$\deg(\mathcal{L}, \|\cdot\|) := \log \#(\mathcal{L}/lR) - \sum_{w|\infty} \epsilon_w \log \|l\|_w$$

对于某个 $l \in \mathcal{L}$，且 ϵ_w 是 w处的局部次数。根据乘积公式，它与 l 的选择无关。请注意，取范数时，我们隐含地表示将 k上的绝对值$|\cdot|_\infty$ 延拓。在上述等式中，绝对值的延拓取为在 k 上保持不变的延拓，而下文采用的规范化方式有所不同。读者请注意，在此定义中，我们取 F_w 上的无穷绝对值，使其在 k上保持不变。

设 ϕ 是一个秩为 r、定义在 F 上的 Drinfeld A-模，且 $\mathscr{M} = (\mathbb{G}_a, \mathcal{L}, \varphi, f)$ 是 R 上 ϕ 的极小模型，其中 E = $(\mathbb{G}_a, \mathcal{L}, \varphi)$ 是一个 A-模概形，而 $\mathcal{L}$ 是 Spec(R) 上的可逆层。

由于 $\mathbb{G}_{a,\ \mathcal{L}} \to \mathrm{Spec}(R)$ 是有限型光滑概形，且相对维数为 1，因此 $\Omega^1_{\mathbb{G}_{a,\ \mathcal{L}}/R}$ 是秩为 1 的局部自由层。令 $e\colon \mathrm{Spec}(R) \to \mathbb{G}_{a,\ \mathcal{L}}$ 为单位截面，则定义

$$\omega_{\mathbf{E}/R} := e^*(\Omega^1_{\mathbb{G}_{a,\mathcal{L}}/R}).$$

因此，$\omega_{\mathbf{E}/R} \cong \mathcal{L}^{-1}$ 是 $\mathcal{L}$ 在理想类群(R)中的逆元。为避免歧义，我们将$\omega_{\mathbf{E}/R}$ 视为秩为 1 的投射 R-模。设 w 是 F 的一个无穷场所，$\mathbf{E}_w$ 是通过标量扩张 $R \to F_w$得到的定义在 F_w 上的 Drinfeld 模。设 Λ_w 是 $\mathbb{C}_\infty$ ([10, 中秩为r 的相应 A-格（定理4.6.9] 或命题2.1.5]）。若 x 是 $\mathbb{G}_a/F_w$,的坐标函数，则 dx 是 $\omega_{\mathbf{E}_w/F_w}(\cong \mathcal{L}^{-1} \otimes_R F_w)$的一个生成元。我们在$\omega_{\mathbf{E}_w/F_w}$ 上赋予度量 $\|\cdot\|_w$，使得

$$\|dx\|_w := D_A(\Lambda_w).$$

定义3.2. 设 ϕ是定义在 F上的秩为 r的 Drinfeld A-模，$\mathscr{M} = (\mathbb{G}_{a,\mathcal{L}}, \varphi, f)$ 是它在 R上的极小模型，其中 $\mathbf{E} = (\mathbb{G}_{a,\mathcal{L}}, \varphi)$ 是定义在 R上的一个 A-模概形。ϕ 在 F 上的 Taguchi 高度为

$$h_{\mathrm{Tag}}(\phi/F) := \frac{1}{[F:k]} \deg(\omega_{\mathbf{E}/R}, \|\cdot\|),$$

其中，度量 $\|\cdot\|$ 如上所给出。

显然，Drinfeld A-模 ϕ 的 Taguchi 高度取决于域 F的选择。然而，如果 ϕ 在 F上处处稳定约化，那么将 F 作有限域扩张时，该高度保持不变。由于每个 Drinfeld A-模都具有处处潜在稳定约化，因此我们可以将 ϕ 的稳定Taguchi高度定义为

$$h^{\mathrm{st}}_{\mathrm{Tag}}(\phi) := h_{\mathrm{Tag}}(\phi/F'),$$

其中，F' 是 F的有限次数域扩张，在该域上 ϕ 处处具有稳定约化。下面的同源引理是标准结果。

引理 3.3. 设 $f\colon \phi_1 \to \phi_2$ 是域 F 上具有处处稳定约化的 Drinfeld A-模之间的一个同源。则有:

$$h^{\mathrm{st}}_{\mathrm{Tag}}(\phi_2) - h^{\mathrm{st}}_{\mathrm{Tag}}(\phi_1) = \frac{1}{r}\log|\deg(f)| - \frac{1}{[F:k]}\log \#(R/D_f),$$

其中，D_f 是 f 的逆差（参见 [22, 第5节4] 或 [19, 第1节3]）。

注3.4. 设 G 为 ϕ_1 和ϕ_2的极小模型之间的诱导同态的核。如果 $f\colon \phi_1 \to \phi_2$ 是域 F 上处处良约化的 Drinfeld A-模之间的同源，那么根据命题 2.7，我们看到 f 诱导了极小模型之间的一个同源。在此情形下，根据 [14, 公式 4.9.6]，D_f 是 G [18, 附录 D 定义 8]中的绝对不同。

如果 ϕ 是域 F上的秩为 r 的 Drinfeld A-模，我们定义:

$$v(\phi) := -\min_{a\in A\setminus\{0\}} \min_i \left\{ \frac{v(a_i)}{q^i - 1} : 1 \leqslant i \leqslant r\deg(a) \right\},$$

其中 a_i的系数属于 $\phi_a = a\tau^0 + \sum_{i=1}^{r\deg(a)} a_i \tau^i$.

引理 3.5. 设 $f\colon \phi_1 \to \phi_2$ 是 F 上 Drinfeld A-模之间的一个同源，在 R 上处处良约化。若 $v \in$Spec (R) 是一个有限处，则

$$v(D_f) = v(f_0) + v(\phi_1) - v(\phi_2),$$

其中 $f_0 = \partial(f)$ 是线性项系数。

证明。设 $\mathscr{M}_1$ 和 $\mathscr{M}_2$ 分别是 ϕ_1 和 ϕ_2 在 R 上的规范化极小模型。只需证明局部情形，即可假设 R 是离散赋值环。设 v 是 R 上的赋值。先考察规范化极小模型为 $\mathscr{M}_1 = (\mathrm{Spec}(R[X]), \varphi_1, \mathrm{Id})$ 和 $\mathscr{M}_2 = (\mathrm{Spec}(R[Y]), \varphi_2, \mathrm{Id})$ 的情形。用 f 表示 $\mathrm{Spec}(R[X])$ 与 $\mathrm{Spec}(R[Y])$ 之间的同源。记 $f^{\#}\colon R[Y] \to R[X]$ 为相应的环同态。因此我们有

$$f^{\#}(Y) = f_0 X + f_1 X^q + \cdots + f_n X^{q^n} \in R[X].$$

f 的核 G 因而由 $\mathrm{Spec}(R[X]/(f^{\#}(Y)))$ 给出。根据 [14, 方程 4.9.5、4.9.6], , G 的绝对逆差为 $(f_0) \subset R$。因此 $D_f = (f_0)$ （注 3.4 ）。根据极小模型的构造 [22, 命题 2.2], , 注意到在此情形下 $v(\phi_1) = v(\phi_2) = 0$。因此我们的断言在此情形下成立。

为证明一般情形，令$\mathbb{G}_a$, $\mathcal{L}_i$ 为 $i = 1$上的 ϕ_i的规范化极小模型的线丛。我们假设 $\mathcal{L}_i = (a_i)$ 是某个 $a_i \in F$的分式理想。因此我们有

$$f_j \in (a_2 a_1^{-q^j}).$$

特别地， $f_0 = a_2 a_1^{-1} b$ 对某个 $b \in R$成立。现在将上述论证中的变量X 替换为 $a_1^{-1}X$, 并将 Y替换为 $a_2^{-1}Y$, 可得 $D_f = (b) = (f_0 a_1 a_2^{-1})$。因此我们有

$$v(D_f) = v(f_0) + v(a_1) - v(a_2).$$

这就证明了我们的断言。 □

对数高度

k 上的绝对值 $|\cdot|_\infty$ 自然延拓为 $\mathbb{C}_\infty$上的唯一绝对值，其在 k_∞ 上的限制仍取相同的值，我们将其记为 $|\cdot|_\infty$。若 F/k是一个有限域扩张，且 w是 F 上位于 $v \in M_k$之上的一个赋值，则我们将与 w 关联的绝对值规范化为

$$|y|_w = |\mathrm{N}_{F_w/k_v}(y)|_v^{\frac{1}{[F:k]}}, \ \forall y \in F.$$

由于 k 的非完善度为 1（见下文注 3.6）， 对任意赋值 $v \in M_k$ ， 我们有:

$$F \otimes_k k_v \cong \prod_{w|v} F_w. \tag{2}$$

设 M_F 为如上所述经过归一化的赋值集合 w 。由 (2) ， 我们得到以下两个性质:

- 乘积公式: 对于每个 $y \in F$, $\sum_{w \in M_F} \log |y|_w = 0.$
- 扩张公式: $[F\colon k] = \sum_{w|v} [F_w\colon k_v].$

注 3.6. 若 F 是特征为 $p \neq 0$的域，我们将 F 的非完善度定义为满足 $[F:\ F^p] = p^n$的数 n。(2) 中的同构在更一般的单扩张情形下也成立。Becker 和 MacLane 的一个定理 [1, 定理 6] 告诉我们，任意有限扩张 L/F都可以由至多 $\max\{1, n\}$ 个元素生成。

设 $\overline{k}$ 为 k 在 $\mathbb{C}_\infty$ 中的代数闭包，并记 $\mathbb{P}^n(\overline{k})$ 为 $\overline{k}$ 上的 n 维射影空间。若 $\mathbf{x} = (x_0 : \cdots : x_n) \in \mathbb{P}^n(\overline{k})$，且 F 是包含这些坐标的 k 的有限扩张，则 $\mathbf{x}$ 的 Weil 高度为:

$$h(\mathbf{x}) := \sum_{w \in M_F} \max_j \log |x_j|_w.$$

与数域情形一样，这一定义与域 F 和坐标的选择均无关。将仿射空间嵌入射影空间，即可自然地定义仿射空间中点的韦伊高度。特别地，对于 $x \in \overline{k}$，若 F 是包含 x 的 k 的有限扩张，则有

$$h(x) = \sum_{w \in M_F} \log \max\{1, |x|_w\} = \sum_{w \in M_F} \log^+ |x|_w.$$

以下引理的证明与 [2, 命题 1.6.6] 的证明几乎相同。为方便读者，我们在此给出证明。

引理 3.7. 设 $A = \mathbb{F}_q[t]$。令 $\alpha \in k^{\mathrm{sep}}$ 为次数 d 的 $f(X)$，且 $f(X)$ 是 A 上 α 的最小多项式，其首项系数为 a_d，根为 α_j、 $j = 1$、.....、 d。则

$$dh(\alpha) = \log |a_d| + \sum_{j=1}^{d} \log^+ |\alpha_j|.$$

证明。设 F/k 是一个包含 α 的有限伽罗瓦扩张。令 $G :=$ 伽罗瓦群(F/k)。集合 $\{\sigma(\alpha)\}_{\sigma \in G}$ 中的每个共轭恰好出现 $[F : k]/d$ 次。我们有

$$a_d \prod_{\sigma \in G} (X - \sigma(\alpha))^{\frac{d}{[F:k]}} = f(X).$$

应用高斯引理 [2, 引理 1.6.3], ，我们得到对于任意有限处 $w \in M_F$

$$|a_d|_w \prod_{\sigma \in G} \max\{1, |\sigma(\alpha)|_w\}^{\frac{d}{[F:k]}} = 1. \tag{3}$$

因此，我们有

$$\begin{aligned}
[F:k]h(\alpha) &= \sum_{w\in M_F}\sum_{\sigma\in G}\log^+|\sigma(\alpha)|_w,\\
&= \sum_{w|\infty}\sum_{\sigma\in G}\log^+|\sigma(\alpha)|_w + \sum_{w\nmid\infty}\sum_{\sigma\in G}\log^+|\sigma(\alpha)|_w\\
&= \sum_{\sigma\in G}\sum_{w|\infty}\log^+|\sigma(\alpha)|_w + \sum_{w\nmid\infty}\sum_{\sigma\in G}\log^+|\sigma(\alpha)|_w\\
&= \frac{[F:k]}{d}\sum_{w|\infty}\sum_{j=1}^{d}\log^+|\alpha_j|_w - \frac{[F:k]}{d}\sum_{w\nmid\infty}\log|a_d|_w, \quad \text{by (3)}\\
&= \frac{[F:k]}{d}\sum_{w|\infty}\sum_{j=1}^{d}\log^+|\alpha_j|_w + \frac{[F:k]}{d}\sum_{w|\infty}\log|a_d|_w, \quad \text{by product formula}\\
&= \frac{[F:k]}{d}\left(\log|a_d| + \sum_{w|\infty}\sum_{j=1}^{d}\frac{[F_w:k_\infty]}{[F:k]}\log^+|\sigma_w(\alpha_j)|\right),\\
&= \frac{[F:k]}{d}\left(\log|a_d| + \sum_{w|\infty}\frac{[F_w:k_\infty]}{[F:k]}\sum_{j=1}^{d}\log^+|\alpha_j|\right)\\
&= \frac{[F:k]}{d}\left(\log|a_d| + \sum_{j=1}^{n}\log^+|\alpha_j|\right).
\end{aligned}$$

引理现在得证。 □

定义 3.8. 设 ϕ 是一个秩为 r、定义在 F 上的 Drinfeld A-模。其全局分次次数 $h_G(\phi)$（相应地，在 F 上方的赋值 w 处的局部分次次数 $h_G^w(\phi/F)$ ）为

$$h_G(\phi) := \frac{1}{[F:k]}\sum_{w\in M_F}\deg(w)w(\phi)\ \left(\text{resp. } h_G^w(\phi/F) := \frac{\deg(w)w(\phi)}{[F:k]}\right).$$

注 3.9. (1) 显然， ϕ 的全局分次高度不依赖于域 F 的选择，并且在同构下保持不变，而 ϕ 的局部分次高度则不具备这些性质。

(2) 全局分次高度是对“有限”Taguchi 高度的一种直接诠释（参见 [21, 定义 2.3]）。

(3) 设 ϕ 是一个秩为 r、定义在 F 上的 Drinfeld $\mathbb{F}_q[t]$-模。那么它由以下条件刻画:

$$\phi_t = t\tau^0 + g_1\tau + \cdots + g_r\tau^r,\ g_i \in F, g_r \neq 0.$$

令 $m = \mathrm{lcm}\{q-1, ..., q^r-1\}$。我们定义 $J := (j_1 : \cdots : j_r) \in \mathbb{P}^{r-1}(\overline{k})$，其中

$$j_i = g_i^{m/(q^i-1)},\ \text{for } i = 1, ..., r.$$

若 $r=2$，则 $j_\phi := j_1/j_2$ 是 Drinfeld $\mathbb{F}_q[t]$-模 ϕ的 j不变量。它与椭圆曲线的 j不变量起着相同的作用。于是， ϕ 的全局分次高度定义为:

$$h_G(\phi) = \sum_{w\in M_F} \max_{1\leqslant i\leqslant r} \log|g_i|_w^{1/(q^i-1)}.$$

因此，全局分次高度与 [5, Equation 6] 中的高度一致。显然， $mh_G(\phi) =h(J)$。

命题 3.10. 设 ϕ 是一个秩为 r 、定义在 F 上的 Drinfeld A-模，且 F/k 是可分扩张。对于任意 $\sigma \in$伽罗瓦群(k^{sep}/k), , 记由 Drinfeld A-模 ϕ 的系数经 σ 作用后得到的 Drinfeld A-模为 $\sigma(\phi)$ 。则有

$$h_G(\phi) = h_G(\sigma(\phi)).$$

证明。由注 3.9 (1)，可设 F/k 是伽罗瓦扩张，因此对于任意 $\sigma \in$ 伽罗瓦群(F/k)，Drinfeld A-模 $\sigma(\phi)$ 定义在 F 上。对于任意两个赋值 $v \in M_k$ 和 $w \in M_F$，若 w 位于 v 之上，则可知 $w\circ\sigma$ 也是一个位于 v 之上的赋值。因此， σ 会置换位于 v 之上的赋值。根据代数数论中的一个结果， w 和 $w\circ\sigma$ 的次数相同。因此

$$h_G(\sigma(\phi)) = \sum_{v\in M_k}\sum_{\substack{w\in M_F\\ w|v}} \deg(w\circ\sigma)w\circ\sigma(\phi) = \sum_{v\in M_k}\sum_{\substack{w\in M_F\\ w|v}} \deg(w)w(\phi) = h_G(\phi).$$

□

定理 3.11. 设 $f\colon \phi_1 \to \phi_2$ 是定义在 F 上、具有处处良约化的 Drinfeld A-模之间的同源，且其定义在谱 Spec(R) 上。那么有:

$$h^{\mathrm{st}}_{\mathrm{Tag}}(\phi_2) - h^{\mathrm{st}}_{\mathrm{Tag}}(\phi_1) = \frac{1}{r}\log|\deg(f)| - \sum_{\substack{w|\infty\\ w\in M_F}} \log|f_0|_w + h_G^{\mathrm{fin}}(\phi_2) - h_G^{\mathrm{fin}}(\phi_1),$$

其中， f_0 是 f 的线性系数，而对于 $i=1$，2， $h_G^{\mathrm{fin}}(\phi_i)$ 是对 F 的所有有限赋值处求和所得的局部分次高度之和。

证明。应用引理 3.3 和引理 3.5，可得:

$$h^{\mathrm{st}}_{\mathrm{Tag}}(\phi_2) - h^{\mathrm{st}}_{\mathrm{Tag}}(\phi_1) = \frac{1}{r}\log|\deg(f)| - \frac{1}{[F:k]}\sum_{\substack{w\in M_F\\ w\nmid\infty}} \deg(w)(w(f_0)+w(\phi_1)-w(\phi_2)). \tag{4}$$

应用乘积公式，可得:

$$\sum_{\substack{w\in M_F\\ w\nmid\infty}} \deg(w)w(f_0) = -\sum_{\substack{w\in M_F\\ w|\infty}} \deg(w)w(f_0). \tag{5}$$

在我们的规范化下，有

$$\log|f_0|_w = \frac{-\deg(w)w(f_0)}{[F:k]}. \tag{6}$$

现在将 (6) 和 (5) 代入 (4)，即可得到我们的公式。 □

具有复乘的 Drinfeld A-模的高度

我们先回顾 Drinfeld 模的复乘理论。设 ϕ 是秩为 r 的 Drinfeld A-模，其定义在 $\mathbb{C}_\infty$ 上。若自同态环 $\mathcal{O} := \mathrm{End}(\phi)$ 是秩为 r 的射影 A-模，我们就称 ϕ 具有复乘，并称 $K := \mathcal{O} \otimes_A k$ 为 ϕ 的复乘域。在这种情况下，K/k 是次数为 r 的虚扩张。这里，虚扩张是指 K 只有一个赋值延伸无穷场所 8（属于 k）。与阿贝尔簇的情形一样，Drinfeld 模也有一套标准的复乘理论：

定理 3.12。（复乘主定理）设 ϕ 是一个秩为 r、定义在 $\mathbb{C}_\infty$ 上且具有复乘的 Drinfeld A-模。设 $\mathcal{O}$ 为 ϕ 的自同态环，K 为复乘域。以下陈述成立：

1. 存在一个有限扩张 $H_\mathcal{O}/K$，使得 $\mathrm{Gal}(H_\mathcal{O}/K) \cong$ 通过 Artin 映射与 $\mathrm{Pic}(\mathcal{O})$ 对应。域 $H_\mathcal{O}$ 是 $\mathcal{O}$ 的环类域。K 中的素理想 8 完全分裂于 $H_\mathcal{O}$，并且 $\mathcal{O}$ 在 $\mathcal{C}$ 之外非分歧，其中 $\mathcal{C}$ 是 $\mathcal{O}$ 的导子，即 $\mathcal{O}$ 与 $\mathcal{O}_K$ 的最大公理想。

2. ϕ 在 $H_\mathcal{O}$ 的每个有限处都有良约化。

3. 若 $r = 2$ 且 $A = \mathbb{F}_q[t]$，则 ϕ 的 j-不变量 j_ϕ 在 A 和 $H_\mathcal{O} = K(j_\phi)$ 上是整的。

读者可以在 [12], 中找到上述论述的证明，以及关于 Drinfeld A-模复乘理论的完整论述。

设 ϕ 是一个秩为 r、由复乘域 K中的序 $\mathcal{O}$ 复乘的 Drinfeld A-模。回顾一下，$\mathcal{O}$ 的真理想 I 是 K 中的 $\mathcal{O}$ 分式理想，满足

$$\{x \in K : x \cdot I \subset I\} = \mathcal{O}.$$

我们将 $\mathcal{O}$ 的真分式理想模去主理想所得的幺半群记作 $\mathrm{Pr}(\mathcal{O})$。显然，$\mathrm{Pic}(\mathcal{O}) \subset \mathrm{Pr}(\mathcal{O})$，且 $\mathrm{Pic}(\mathcal{O})$ 在 $\mathrm{Pr}(\mathcal{O})$上有自然作用。由于 ϕ 具有由 $\mathcal{O}$给出的复乘，其关联格同构于 $\mathcal{O}$的真理想 I_ϕ。

引理 3.13. 设 ϕ_1 和 ϕ_2 是两个秩为 r、由同一序$\mathcal{O}$复乘的 Drinfeld A-模，且 I_1（分别为 I_2）是 $\mathcal{O}$ 的真理想，使得 ϕ_1（分别为 ϕ_2）的关联格同构于 I_1（分别为 I_2）。若 I_1 和 I_2 在 $\mathrm{Pic}(\mathcal{O})$对 $\mathrm{Pr}(\mathcal{O})$ 的作用下属于同一轨道，则 $h_G(\phi_1) = h_G(\phi_2)$。特别地，若 $\mathrm{Pr}(\mathcal{O}) = \mathrm{Pic}(\mathcal{O})$，则所有由 $\mathcal{O}$ 复乘的 Drinfeld A-模都具有相同的分次高度。

证明。不失一般性，假设 ϕ_i 的关联格为 I_i，其中 $i = 1, 2$。我们选取一个可逆理想 $J \in \mathrm{Pic}(\mathcal{O})$，使得 $I_1 = J^{-1} \cdot I_2$。因此，I_1 与关联于 $J * \phi_2$ 的格相似（参见 [12, 命题 5.10 和公式 (5.18)]）。另一方面，$J * \phi_2$ 同构于一个 Drinfeld A-模 ϕ_2'，它是通过对 ϕ_2 [24, 的系数施加伽罗瓦作用得到的（定理 A.1 (2)]）。我们注意到，总能选取合适的 I_1 和 I_2，使 J 为整的，从而我们的论证是有意义的。现在由注 3.9 (1) 和命题 3.10，即可完成证明。 □

本文余下部分中，我们始终固定 $A = \mathbb{F}_q[t]$。Nakkajima 和 Taguchi 给出了以下椭圆曲线结果的证明 [17]。这里我们只给出少量论证，以便将他们的公式调整为适用于 Drinfeld A-模。

命题 3.14. 设 ϕ_1 和 ϕ_2 是两个秩 2 的 Drinfeld A-模，分别具有由 $\mathcal{O}_K$ 和$\mathcal{O}$ 给出的复乘，其中 K 是虚二次域， $\mathcal{O}_K$ （分别为 $\mathcal{O}$ ）是极大序（分别为任意序）。记 $\mathcal{O} = A + f_0\mathcal{O}_K$ 为某个 $f_0 \in A$。若 F/K 是一个有限域扩张，且 ϕ_1 和 ϕ_2 均定义在 F 上并处处良约化，则

$$h^{\mathrm{st}}_{\mathrm{Tag}}(\phi_2) - h^{\mathrm{st}}_{\mathrm{Tag}}(\phi_1) = \frac{1}{2}\log|f_0| - \frac{1}{2}\sum_{v|f_0}\deg(v)e_{f_0}(v),$$

其中 v 遍历 f_0 的所有首一素因子，而对于 $l := q^{\deg(v)}$

$$e_{f_0}(v) = \frac{(1-\chi(v))(1-l^{-v(f_0)})}{(l-\chi(v))(1-l^{-1})},$$

且若 v 在 K中分裂，则为 $\chi(v) = 1$ ；若 v 在 K中分歧，则为 $\chi(v) = 0$ ；若 v 在 K中惰性，则为 $\chi(v) = -1$.

证明。首先注意到，具有复乘的秩 2 Drinfeld A-模的 Taguchi 高度不依赖于解析生成相应 Drinfeld A-模的格的选取。因此，我们可以假设 ϕ_1 由 $\mathcal{O}_K$ 给出， ϕ_2 由 $\mathcal{O}$给出，并且同源 $f: \phi_1 \to \phi_2$ 由 $f_0\mathcal{O}_K \subset \mathcal{O}$给出。

对于 $\chi(v) = 1$的情形，由定理 A.2 可知， ϕ_1 在位于 v上方的任意赋值处都有普通约化。应用 [17, 命题 4] 中的相同论证，可得 $e_{f_0}(v) = 0$。论证中 Drinfeld A-模的约化过程由定理 A.4 给出。对于超奇异约化的情形，我们这里的论证与 [17, 第 2 节2] 完全相同，只需作一处修改：取 $l = q^{\deg(v)}$。 □

推论 3.15。假设满足命题 3.14 中的相同条件。以下公式成立 ue

$$h_G(\phi_2) - h_G(\phi_1) = \log|f_0| - \frac{1}{2}\sum_{v|f_0}\deg(v)e_{f_0}(v) + h^{\infty}_G(\phi'_2) - h^{\infty}_G(\phi'_1),$$

其中 ϕ'_1 是由格 $\mathcal{O}_K$ 给出的 Drinfeld A-模， ϕ'_2 由 $\mathcal{O}$给出，而 $h^{\infty}_G(\phi'_i)$ 是 ϕ'_i 在无穷处对于 $i = 1$、2 的局部分次高度之和。

证明。由引理 3.13，我们可以令 ϕ_i 为 ϕ'_i、 $i = 1$、2。这便是定理 3.11 和命题 3.14 的直接推论。 □

4 Arithmetic on quadratic fundamental domain

在本文余下部分，我们假设 Drinfeld A-模 ϕ 的秩为 2，且具有复乘。设 $\Omega := \mathbb{C}_\infty \backslash k_\infty$为 Drinfeld 上半平面，使得 $\mathrm{PGL}_2(A)\backslash\Omega$ 是粗模空间中秩为 2 的 Drinfeld A-模在 $\mathbb{C}_\infty$上的 $\mathbb{C}_\infty$-点。与椭圆曲线的情形一样，存在双射：

$$\mathrm{PGL}_2(A)\backslash\Omega \rightleftharpoons \{\text{Lattices of rank 2 in } \mathbb{C}_\infty/\cong\} \rightleftharpoons \mathbb{C}_\infty.$$

因此，我们得到一个自然的 j-函数 $j: \Omega \to \mathbb{C}_\infty$。具有复乘的秩 2 Drinfeld A-模的 j 不变量集，恰好是该 j-函数在虚二次自变量处的像。

遗憾的是，Drinfeld 上半平面并不像复数的 Poincar´e 上半平面那样具有良好的几何性质。不过，我们仍然可以定义二次基本域。

定义 4.1.（参见 [4, 定义 3.4]）二次基本域为

$$\begin{aligned}\mathcal{D} = \{z \in \Omega : z \text{ satisfies an equation of the form } az^2 + bz + c = 0,\\ \text{where } a, b, c \in A,\ a \text{ is monic, } |b| < |a| \leqslant |c| \text{ and}\\ \gcd(a, b, c) = 1\}.\end{aligned} \tag{7}$$

任意与复乘 Drinfeld 模对应的秩 2 格都与 Λ_z 相似，其中 $z \in \mathcal{D}_K$；这里 Λ_z 表示由 z 和 1 生成的格，且 $\mathcal{D}_K := \mathcal{D} \cap K$，其中 K/k 是 $\mathbb{C}_\infty$中的一个虚二次扩张。与椭圆曲线的情形不同，这样的 z 不一定唯一。

命题 4.2. [3, 命题 1.2.1] 设 q 为奇数，且 K 是 k的二次扩张。那么K 是一个库默尔扩张，并可写成 $K = k(\sqrt{\delta})$ 的形式，其中 $\delta \in A$无平方因子。设 m =deg(δ)。则有

1. 赋值 8 在 K 中分歧，当且仅当 m 为奇数；2. 赋值 8 在 K 中惰性，当且仅当 m 为偶数，且 δ 的首项系数不是 $\mathbb{F}_q$中的平方；3. 赋值 8 在 K 中分裂，当且仅当 m 为偶数，且 δ 的首项系数是$\mathbb{F}_q$中的平方。

设 $\delta \in A$ 是奇数次多项式，或是首项系数不是 $\mathbb{F}_q$ 中平方的偶数次多项式，并设 $\sqrt{\delta} \in \overline{k}$ 是 $X^2 - \delta$ 的一个根。由命题 4.2，域 $K := k(\sqrt{\delta})$ 是一个虚二次域。设 $\mathcal{O}_K$ 是它的极大阶。若 $\mathcal{O} \subset \mathcal{O}_K$ 是判别式为 δ 的子阶，则存在某个 $f \in A$，使得 $\mathcal{O} = A + f\mathcal{O}_K$；这样的 f 称为 $\mathcal{O}$ 的导子。$\mathcal{O}_K$ 的判别式 δ_0 称为 K 和 $K = k(\sqrt{\delta_0})$ 的基本判别式。$\mathcal{O}$ 的判别式为 $\delta = 4f^2\delta_0$。

我们用 T_δ 表示由满足 a、b、$c \in A$ 且满足 (7) 的三元组 $(a$、b、$c)$ 构成的集合。对于 $(a$、b、$c) \in T_\delta$，我们定义

$$z(a, b, c) = \frac{-b + \sqrt{\delta}}{2a} \in K = k(\sqrt{\delta}).$$

映射 $(a$、b、$c) \mapsto j(z(a$、b、$c))$ 是从 T_δ 到 $j(z$ 的伽罗瓦共轭的双射).

引理 4.3. 若 8 在 K 中分歧，则不存在任何 $z \in \mathcal{D}_K$，使得对于任意 $u \in \mathbb{F}_{q^2}\backslash\mathbb{F}_q$，$z$ 都位于以 u 为中心、半径为 1 的开球内。

证明。对于某个 $u \in \mathbb{F}_{q^2}\backslash\mathbb{F}_q$，我们假设存在 $z \in \mathcal{D}_K$ 使得 $|z - u| < 1$。在这种情况下，我们有 $|z| = 1$，因为 $|u| = 1$。此外，存在一个满足 (7) 的三元组 (a, b, c)，使得 $b^2 - 4ac = \delta$，且 z 是方程的根：

$$aX^2 + bX + c = 0.$$

我们写作 $K=k(\sqrt{\delta_0})$，其中 $\delta_0\in A$ 是无平方因子的。根据命题 4.2，且由于 K 是 k的虚二次扩张，我们可知 δ_0 的次数为奇数，或者次数为偶数且首项系数不是 $\mathbb{F}_q$中的平方。此外，我们有

$$|az^2+bz|=|c|.$$

由于 $|bz|=|b|<|a|=|az^2|$，我们有 $|a|=|az^2+bz|=|c|$，这意味着 a 和 c 的次数相同，而 b 的次数小于 a 和 c的次数。因此 δ 的次数为偶数。由于 $\delta=4f^2\delta_0$，我们看到δ_0 的次数为偶数，因此其首项系数在 $\mathbb{F}_q$中不是平方。这等价于说 ∞ 在 K中是惰性的。 □

注 4.4. 如果 δ的次数为偶数，且其首项系数在 $\mathbb{F}_q$中不是平方，那么 $\sqrt{\delta}\in\mathbb{F}_{q^2}((\frac{1}{t}))$.此外，如果存在某个 $z\in\mathcal{D}_K$，其判别式为 δ，且满足 $|z-u|<1$，那么 δ 的首项系数为 $4u^2$。这也表明，这样的 z 只能接近满足 $u^2\in\mathbb{F}_q$的那些 $u\in\mathbb{F}_{q^2}\backslash\mathbb{F}_q$。

命题 4.5. 设 $u\in\mathbb{F}_{q^2}\backslash\mathbb{F}_q$。满足$|z(a、b、c)-u|<\sqrt{|\delta|}^{-1}$，且 $\deg(\delta)>0$ 的 $(a、b、c)\in T_\delta$ 的个数至多为 1。

证明。由于 δ 的次数为正，我们有 $\sqrt{|\delta|}\geqslant 1$。因此我们有 $|z-u|<\sqrt{|\delta|}^{-1}\leqslant 1$。由引理 4.3 的证明可得

$$\delta=\alpha_{2e}t^{2e}+\cdots+\alpha_0,\ \alpha_i\in\mathbb{F}_q \text{ for } i=0,...,2e \text{ and } e \text{ is a positive integer.}$$

因此我们有

$$\sqrt{\delta}=\lambda_e t^e+\cdots+\lambda_0+\lambda_{-1}t^{-1}+\lambda_{-2}t^{-2}\cdots$$

其系数属于 $\mathbb{F}_{q^2}$。通过识别 $(\sqrt{\delta})^2=\delta$，我们得到:

$$\begin{aligned}
\alpha_{2e}&=\lambda_e^2;\\
\alpha_{2e-1}&=\lambda_e\lambda_{e-1}+\lambda_{e-1}\lambda_e;\\
&\vdots\\
\alpha_e&=\lambda_e\lambda_0+\lambda_{e-1}\lambda_1+\cdots+\lambda_1\lambda_{e-1}+\lambda_0\lambda_e;\\
&\vdots\\
\alpha_0&=\lambda_e\lambda_{-e}+\lambda_{e-1}\lambda_{-(e-1)}+\cdots+\lambda_{-(e-1)}\lambda_{e-1}+\lambda_{-e}\lambda_e.
\end{aligned}$$

首先注意到 $\lambda_e=2u\neq 0$，因为 $|z-u|<1$。我们首先断言，当 $i=0、1、...、e$ 时，$(2u)^{-1}\lambda_i\in\mathbb{F}_q$。

当 $i=e$ 时，我们的断言显然成立。我们用归纳法，并假设当 $0<n\leqslant e$ 时，该结论对 $\lambda_e、...、\lambda_n$ 成立。由上面的等式可得

$$\alpha_{e+n-1}=\lambda_e\lambda_{n-1}+\lambda_{e-1}\lambda_n+\cdots+\lambda_n\lambda_{e-1}+\lambda_{n-1}\lambda_e.$$

两边同时乘以 $(2u)^{-2}$，得到

$$(2u)^{-2}\alpha_{e+n-1}=(2u)^{-1}\lambda_e(2u)^{-1}\lambda_{n-1}+\cdots+(2u)^{-1}\lambda_{n-1}(2u)^{-1}\lambda_e.$$

由于除 $(2u)^{-1}\lambda_e(2u)^{-1}\lambda_{n-1}$ 外的所有项都属于 $\mathbb{F}_q$ 和 $\lambda_e=2u$，因此我们有 $(2u)^{-1}\lambda_{n-1}\in\mathbb{F}_q$。

现在回想一下 $z = \frac{-b+\sqrt{\delta}}{2a}$，其三元组为 $(a、\ b、\ c) \in T_\delta$ 和 $\delta = b^2 - 4ac$。那么 $|z-u| < \sqrt{|\delta|}^{-1}$ 等价于

$$\deg(a) - \deg(\sqrt{\delta} - b - 2au) > \deg(\sqrt{\delta}) = \deg(a).$$

因此我们有 $\deg(\sqrt{\delta} - b - 2au) < 0$。设

$$a = \sum_{i=0}^{e} a_i t^i,\ b = \sum_{i=0}^{e} b_i t^i,\ \text{with all } a_i, b_i \in \mathbb{F}_q.$$

因此，对于所有 $i = 0、\ldots、\ e$，我们都有 $\lambda_i - 2a_i u = b_i$。由于 $(2u)^{-1}\lambda_i \in \mathbb{F}_q$，可知对于所有 $i = 0、\ldots、\ e$，$b_i = 0$ 和 $a_i = (2u)^{-1}\lambda_i$。因此，$a、\ b、\ c$ 完全由 $|z(a、\ b、\ c) - u| < \sqrt{|\delta|}^{-1}$. 决定 □

5 Bounding $h(J)$

本节将证明我们的主要结果 .

关于 $h(J)$ 的上界

设 ϕ 是定义在 $\mathbb{C}_\infty$ 上、秩为 2 的复乘 Drinfeld A-模，且 J 是其在 A 上次数为 d 的 j-不变量。设 $\mathcal{O} = \mathrm{End}(\phi)$，且 $K = \mathcal{O} \otimes_A k$。我们将 $J = J_1、\ldots、\ J_d$ 记为 J 的全部伽罗瓦共轭，并将相应的点记为 $z_1、\ldots、\ z_d$，分别位于 $\mathcal{D}_K$ 中。于是，对每个 i，都有满足下列方程的 z_i：

$$a_i X^2 + b_i X + c_i = 0,\ (a_i, b_i, c_i) \in T_\delta$$

并且对于某个 $\delta \in A$，$b_i^2 - 4a_i c_i = \delta$ 是 $\mathcal{O}$ 的判别式。在本小节中，我们证明：

命题 5.1. 假设采用上述记号，且 J 是代数单位，则有

$$h(J) \leqslant \left(1 + \frac{q^2 - q}{d}\right)(q+1)\log\sqrt{|\delta|} + O_q(1),$$

其中 $O_q(1)$ 是仅依赖于 q 的某个常数。

我们先固定一些记号。设 u 是满足 $u \in \mathbb{F}_{q^2} \backslash \mathbb{F}_q$ 的一点，并令

$$|z|_A := \inf_{a \in A} |z - a|,$$

$$|z|_{\mathrm{i}} := \inf_{x \in k_\infty} |z - x|.$$

引理 5.2. [3, 命题 3.2.5] 若 $z \in \mathcal{D}_K$，则 $|z|_{\mathrm{i}} = |z|_A = |z| \geqslant 1$。

引理 5.3. 对每个 z_i，都有 $h(z_i) \leqslant \log\sqrt{|\delta|}$.

证明。设 (a, b, c) 是 A 中满足 (7) 的一个三元组，使得 z_i 是方程的一个根：

$$aX^2 + bX + c = 0$$

判别式为 δ。令 $\bar{z_i}$ 为 z_i 的共轭。于是

$$|z_i \cdot \bar{z_i}| = \frac{|\delta|}{|a^2|}.$$

由引理 3.7 可得

$$2h(z_i) = \log|a| + \log|z_i| + \log|\bar{z_i}| = \log\frac{|\delta|}{|a|} \leqslant \log|\delta|.$$

证明至此完成。 □

引理 5.4. [6, 引理 2.6.9] 设 $z \in \Omega$ 满足 $|z|_A > q^{-1}$。若 $u \in \mathbb{F}_{q^2}\backslash\mathbb{F}_q$ 且 $|z-u| < q^{-1}$，则存在 $\zeta \in \mathbb{C}_\infty$，使得 $|\zeta| < 1$ 满足

$$\begin{aligned} j(z) &= t^q u^{-2}(1-u^{q-1})^{-2}(z-u)^{q+1}(1+\zeta), \\ |j(z)| &= q^q|z-u|^{q+1}. \end{aligned}$$

令 $h(J)$ 为 J的 Weil 高度。因此，由引理 3.7 可得

$$dh(J) = \sum_{i=1}^{d}\log^+|J_i| = \sum_{i=1}^{d}\log^+|j(z_i)|.$$

若假设 J 是代数单位，则有:

$$\begin{aligned} dh(J) = dh(J^{-1}) &= \sum_{i=1}^{d}\log^+|j(z_i)|^{-1} \\ &= \sum_{\substack{u\in\mathbb{F}_{q^2}\backslash\mathbb{F}_q \\ |z_i-u|<\sqrt{|\delta|}^{-1}}} \log^+|j(z_i)|^{-1} + \sum_{\substack{u\in\mathbb{F}_{q^2}\backslash\mathbb{F}_q \\ \sqrt{|\delta|}^{-1}\leqslant|z_i-u|\leqslant q^{-1}}} \log^+|j(z_i)|^{-1} + dO_q(1). \end{aligned} \tag{8}$$

第一个等式源于我们的假设，即 J 是一个单位。要证明第三个等式成立，只需证明

$$\sum_{q^{-1}\leqslant|z_i-u|} \log^+|j(z_i)|^{-1} \leqslant d\lambda_q, \tag{9}$$

其中 λ_q 是一个仅依赖于 q的常数。我们需要一些论证来说明这一点。回想一下，德林费尔德上半平面的基本域（参见 [9, 定理 6.4，命题 6.6]）由下式给出

$$\mathcal{F} := \{z \in \mathbb{C}_\infty : |z| = |z|_{\mathrm{i}} \geqslant 1\}.$$

我们注意到，z 是 j-函数的零点，当且仅当 z 在 $\mathrm{GL}_2(A)$ [9, (3.9)]的 M¨obius 作用下与某个$u \in \mathbb{F}_{q^2}\backslash\mathbb{F}_q$ 共轭。根据 [9, 推论 6.7], ， $\mathcal{F}$ 中的 j 的零点恰好就是这些$u \in \mathbb{F}_{q^2}\backslash\mathbb{F}_q$。此外， $\mathcal{F}$ 是闭的。这是因为，若取一个序列 $\{z_n\} \subset \mathcal{F}$，使得 $\{z_n\}$收敛到 $z \in \Omega$，那么当 n充分大时， $|z_n - z| < \epsilon$ 且 $|z| = |z_n| \geqslant 1$。因此

$$|z|_{\mathrm{i}} = \inf_{x\in k_\infty}|z-x| = \inf_{x\in k_\infty}|z-z_n+z_n-x| = |z_n|_{\mathrm{i}} = |z_n| = |z|,$$

这意味着 $z \in \mathcal{F}$。现在可以轻松推出不等式 (9)。

我们还注意到，在我们的假设下，必然有 $\deg(\delta) > 0$。事实上，如果 $\deg(\delta) = 0$，那么 $z_i \in \mathbb{F}_{q^2}\backslash\mathbb{F}_q$。在这种情况下， $J = 0$。

引理 5.5。在采用上述记号的情况下，我们有

$$\sum_{|z_i-u|<\sqrt{|\delta|}^{-1}} \log^+ |j(z_i)|^{-1} \leqslant 2(q+1)\log\sqrt{|\delta|} - q.$$

证明。由于 $z_i \in \mathcal{D}_K$，由引理 5.2 可得 $|z|_A \geqslant 1$。因此，根据引理 5.4，我们有

$$\log |j(z_i)|^{-1} = -q - (q+1)\log|z_i - u|. \tag{10}$$

设 $L = k(z_i, u)$，则 $[L: \text{当 } z_i \in \mathbb{F}_q(t)(u) = \mathbb{F}_{q^2}(t) \text{ 时，} k] = 2$；否则，$[L: k] = 4$。在第一种情况下，只有一个 $w \in M_L$ 位于 $\infty \in M_k$ 之上。因此，在我们的规范化下有 $|z_i - u|_w = |z_i - u|$。在第二种情况下，M_L 中有两个位于 $\infty \in M_k$ 之上的赋值，我们取 w 为其中之一。因此有 $|z_i - u| = |z_i - u|_w^2$。无论哪种情况，我们都得到

$$\log|z_i - u| \leqslant 2\sum_w \log^+ |z_i - u|_w = 2h(z_i - u).$$

注意，对于任意 $\alpha \in \overline{k}$，都有 $h(\alpha) = h(1/\alpha)$，并且我们有

$$\log|z_i - u| \geqslant -2h(z_i - u) \geqslant -2(h(z_i) + h(u)) = -2h(z_i).$$

现在将此不等式代入（10），并应用引理 5.3，得到

$$\log |j(z_i)|^{-1} \leqslant 2(q+1)\log\sqrt{|\delta|} - q.$$

由命题 4.5 可知，这样的 z_i 至多有一个，因此得证。 □

现在我们可以证明命题 5.1 了。

证明。我们还需要估计

$$\sum_{\substack{u\in\mathbb{F}_{q^2}\setminus\mathbb{F}_q \\ \sqrt{|\delta|}^{-1}\leqslant|z_i-u|\leqslant q^{-1}}} \log^+ |j(z_i)|^{-1}.$$

由（10）和 $\sqrt{|\delta|}^{-1} \leqslant |z_i - u|$，我们有

$$\sum_{\substack{u\in\mathbb{F}_{q^2}\setminus\mathbb{F}_q \\ \sqrt{|\delta|}^{-1}\leqslant|z_i-u|\leqslant q^{-1}}} \log^+ |j(z_i)|^{-1} \leqslant \left(-q + (q+1)\log\sqrt{|\delta|}\right) \cdot \sum_{\substack{u\in\mathbb{F}_{q^2}\setminus\mathbb{F}_q \\ \sqrt{|\delta|}^{-1}\leqslant|z_i-u|\leqslant q^{-1}}} 1.$$

如果满足存在某个 z_i 使得 $|z_i - u| < \sqrt{|\delta|}^{-1}$ 的 $u \in \mathbb{F}_{q^2}\setminus\mathbb{F}_q$ 的数量为 N，那么我们有

$$\sum_{\substack{u\in\mathbb{F}_{q^2}\setminus\mathbb{F}_q \\ \sqrt{|\delta|}^{-1}\leqslant|z_i-u|\leqslant q^{-1}}} \leqslant d - N.$$

结合引理 5.5，得到

$$\begin{aligned} dh(J) &\leqslant 2N(q+1)\log\sqrt{|\delta|} + (d-N)(q+1)\log\sqrt{|\delta|} + dO_q(1) \\ &= (d+N)(q+1)\log\sqrt{|\delta|} + dO_q(1). \end{aligned}$$

因此，应用事实 $N \leqslant q^2 - q$.即可得出结论 □

关于 $h(J)$的下界

引理 5.6. 设 ϕ^0 是一个秩 2 的 Drinfeld A-模，其复乘由虚二次域 K中的极大阶 $\mathcal{O}_K$ 给出。记 K 的亏格为 g_K。则有:

$$h^{\mathrm{st}}_{\mathrm{Tag}}(\phi^0) \geqslant \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{q}+1}\right) g_K - \frac{5q-3}{4(q-1)}.$$

证明。由 [24, 第5.2节中的稳定Taguchi高度公式，1],可得

$$h^{\mathrm{st}}_{\mathrm{Tag}}(\phi^0) = \frac{g_K}{2}\log q_K + \frac{1}{2}\left(\log q_\infty - \log q_K\right) - 1 + \frac{\gamma_K}{2\ln q},$$

其中， q_K 是 K中常数域的基数， q_∞ 是 K_∞的剩余域的基数，而 γ_K 是 K [13, 方程（0.2）]中的欧拉–克罗内克常数。提醒读者， [24, 方程 5.1] 中稳定Taguchi高度的定义，是我们的稳定Taguchi高度乘以常数 $\ln q$。由 [13, 方程 1.4.6] 可得

$$\frac{\gamma_K}{2\ln q} \geqslant \frac{-g_K}{\sqrt{q}+1} + \frac{q-3}{4(q-1)}.$$

现在利用事实 q_K， $q_\infty \in \{q,\ q^2\}$，即可得到下界。 □

引理 5.7。设 $e_{f_0}(v)$ 如命题 3.14 中所述，且 $f_0 \in A$。则有

$$\frac{1}{2}\sum_{v|f_0} \deg(v) e_{f_0}(v) \leqslant \frac{9}{4}\log\log|f_0| + C_q,$$

其中， v 遍历 f_0的所有首一素因子，而 C_q 是一个依赖于 q的可计算常数。

Proof. 首先，我们需要一个函数域的默滕斯型公式，即以下不等式 :

$$\sum_{|v|\leqslant x} \frac{\log|v|}{|v|} \leqslant \log x + C_q,$$

其中， v是首一素多项式， C_q 是关于 q的一个常数。为此，我们注意到

$$\sum_{|v|\leqslant x} \frac{\log|v|}{|v|} = \sum_{i=1}^{n:=\lfloor \log x\rfloor} \frac{i}{q^i}\cdot a_i,$$

其中 a_i i 是次数为 i的首一素多项式的数量。由 [20, 定理 2.2] 可得

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{i}{q^i}\cdot a_i = \sum_{i=1}^{n}\left(1 + O(q^{-i/2})\right) \leqslant \log x + C_q.$$

回忆一下,

$$e_{f_0}(v) = \frac{(1-\chi(v))(1-l^{-v(f_0)})}{(l-\chi(v))(1-l^{-1})},\ \text{where } l = |v|.$$

注意， $|l| \geqslant 3$ 和 $\chi(v) \in \{-1, 0, 1\}$。因此我们得到

$$e_{f_0}(v) \leqslant \frac{2}{l - l^{-1}} \leqslant \frac{9}{4l}.$$

因此我们有

$$\sum_{v|f_0} \deg(v) e_{f_0}(v) \leqslant \frac{9}{4} \sum_{v|f_0} \frac{\log l}{l} = \frac{9}{4} \left(\sum_{\substack{v|f_0 \\ |v| \leqslant \log|f_0|}} \frac{\log l}{l} + \sum_{\substack{v|f_0 \\ |v| > \log|f_0|}} \frac{\log l}{l} \right).$$

我们已经证明

$$\sum_{\substack{v|f_0 \\ |v| \leqslant \log|f_0|}} \frac{\log l}{l} \leqslant \log\log|f_0| + C_q.$$

对于另一项，我们有

$$\sum_{\substack{v|f_0 \\ |v| > \log|f_0|}} \frac{\log l}{l} \leqslant \frac{\log\log|f_0|}{\log|f_0|} \cdot \sum_{\substack{v|f_0 \\ |v| > \log|f_0|}} 1.$$

利用乘积公式可知， f_0至多有 $\log|f_0|$ 个首一素因子。由于 [20,定理 2.2] 是有效的，所有常数项都可合并为一个可计算常数 C_q。 □

定理 5.8. 设 J 是一个秩 2 Drinfeld A-模的奇异模数，其对应的判别式为 δ，导子为 f_0。存在一个关于 q 的可计算常数 C_q，使得

$$h(J) \geqslant (q^2-1)\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{q}+1}\right)\log\sqrt{|\delta|} + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{q}+1}\right)\log|f_0| - \frac{9}{4}\log\log|f_0| - C_q.$$

证明。回忆一下，对于满足 δ_0 无平方因子的 $K = k(\sqrt{\delta_0})$， K 的亏格 g_K 由下式给出（参见 [4, 第 3] 节）

$$g_K = \begin{cases} \frac{\log|\delta_0|-1}{2} & \text{if } \deg(\delta_0) \text{ is odd}, \\ \frac{\log|\delta_0|-2}{2} & \text{if } \deg(\delta_0) \text{ is even}. \end{cases}$$

我们引用 [5, 公式 (23)], 中的一个结果，该结果指出

$$|h_G^{\infty}(\phi') - h_G^{\infty}(\phi)| \leqslant \frac{q}{q-1} - \frac{q^r}{q^r-1},$$

其中， ϕ 和 ϕ' 是两个秩为 r的同源 Drinfeld A-模。利用推论 3.15、引理 5.6、引理 5.7，以及 $h_G(\phi) \geqslant h_{\mathrm{Tag}}^{\mathrm{st}}(\phi)$ 和 $h(J) = (q^2-1)h_G(\phi)$ 这些事实，我们完成证明。 □

注 5.9。（1）我们注意到， [5, 公式 (23)] 仅对 [5,引理 4 之前的定义2]中的约化 Drinfeld 模成立。然而，引理 3.13 保证，在秩 2 的情形下，我们总能选取 Drinfeld 模的分次高度，使其关联格为复乘序，因此该 Drinfeld 模是约化的。

（2）还可以取 $q \geqslant 3$ ，使我们的陈述与 q无关，即

$$h(J) \geqslant 4(2-\sqrt{3}) \log \sqrt{|\delta|} + \frac{1}{2} \log |f_0| - \frac{9}{4} \log \log |f_0| - C_3.$$

现在我们可以证明主定理了。重述如下：

定理 5.10. 设 q 为奇数且 $q > 5$。秩 2 Drinfeld $\mathbb{F}_q[t]$-模的奇异模数中，属于代数单位的至多只有有限多个。

证明. 设 J 是一个代数单位奇异模数。由命题 5.1 和定理 5.8 可得

$$h(J) \leqslant \left(1 + \frac{q^2-q}{d}\right)(q+1) \log \sqrt{|\delta|} + O_q(1) \tag{11}$$

and

$$h(J) \geqslant (q^2-1)\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{q}+1}\right) \log \sqrt{|\delta|} + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{q}+1}\right) \log |f_0| - \frac{9}{4} \log \log |f_0| - C_q, \tag{12}$$

其中 δ 是一个复乘 Drinfeld 模的自同态环的判别式，该模的 j-不变量为 J。通过简单计算，并在必要时令 d 足够大，我们发现对于 $q > 5$

$$\left(1 + \frac{q^2-q}{d}\right)(q+1) \log \sqrt{|\delta|} < (q^2-1)\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{q}+1}\right) \log \sqrt{|\delta|}.$$

若设

$$\lambda_1 := \left(1 + \frac{q^2-q}{d}\right)(q+1),\ \lambda_2 := (q^2-1)\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{q}+1}\right),$$

那么上述不等式表明 $\lambda_2 - \lambda_1 > 0$。结合 (11) 和 (12)，得到

$$(\lambda_2 - \lambda_1) \log \sqrt{|\delta|} < O_q(1) + C_q - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{q}+1}\right) \log |f_0| + \frac{9}{4} \log \log |f_0|.$$

注意到 $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{q}+1}\right) \log |f_0| - \frac{9}{4} \log \log |f_0| \geqslant 0$。因此，对于任意这样的 δ，存在一个关于 $\log \sqrt{|\delta|}$ 的常数上界。引理 5.3 表明，这也是 $h(z_i)$ 对于 z_i 的一个常数上界。注意到 z_i 的次数为 2。因此，Northcott 定理推出了我们的定理。 □

Appendix A More on Complex Multiplication

我们采用第 2 节中的记号。本附录主要致力于证明命题 3.14。事实上，这里陈述的结果对于椭圆曲线早已为人所知。下面的结果或许也已为许多专家所知。由于关于 Drinfeld 模的文献匮乏，为方便读者起见，本文在此给出详细推导。

设 ϕ_1 和 ϕ_2 都是秩为 r 的 Drinfeld A-模，定义在带有复乘的 $\mathbb{C}_\infty$ 上。设 F/k 是一个有限域扩张，使得 ϕ_1 和 ϕ_2 都定义在 F 上，并具有处处良约化。设 R 是 A 在 F 中的整闭包，并分别记 $\mathscr{M}_1$、$\mathscr{M}_2$ 为 ϕ_1、ϕ_2 在 R 上的极小模型。若 $f\colon \mathscr{M}_1 \to \mathscr{M}_2$ 是一个同源，则在素理想 $v \in\in \mathrm{Spec}(R)$ 处取约化后，它诱导出 Drinfeld 模之间的一个同源。

引理 A.1. 设 ϕ_1^v 和 ϕ_2^v 是定义在 $\mathbf{k}(v)$ 上的 Drinfeld 模，分别由 $\mathscr{M}_1$ 和 $\mathscr{M}_2$ 在 v 处取约化得到，其中 $\mathbf{k}(v)$ 是 v 处的剩余域。令 $\mathrm{Hom}_F(\phi_1,\phi_2)$ 表示在 F 上 ϕ_1 与 ϕ_2 之间的同源集合，$\mathrm{Hom}_{\mathbf{k}(v)}(\phi_1^v,\phi_2^v)$ 类似定义。则存在一个典范的 A-模单射：

$$\mathrm{Hom}_F(\phi_1,\phi_2)\hookrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbf{k}(v)}(\phi_1^v,\phi_2^v).$$

证明。容易验证该映射是 A-模态射。由命题 2.7 和 [22,命题2.5]，我们得到

$$\mathrm{Hom}_F(\phi_1,\phi_2)=\mathrm{Hom}_R(\mathscr{M}_1,\mathscr{M}_2).$$

设 $f\in \mathrm{Hom}_R(\mathscr{M}_1,\mathscr{M}_2)$ 是一个同源。那么它是有限的，这意味着它在 v 处约化后的首项系数非零。由此可证其单射性。 □

从现在起，我们假设 $A=\mathbb{F}_q[t]$ 和 ϕ 是定义在 $\mathbb{C}_\infty$ 上、具有极大阶 $\mathcal{O}_K$ 复乘的秩 2 Drinfeld A-模，其中 $K\subset\mathbb{C}_\infty$ 是 k 上的二次虚域。此外，我们假设 ϕ 是由 A-格 $\mathcal{O}_K$ 得到的，并且 ϕ 定义在 F 上。设 $P\in A$ 是一个素元。

定理 A.2. 对任意赋值 $v\in$ 谱(R)，ϕ 在 v 处的约化是普通的，当且仅当 $v\cap k$ 在 $\mathcal{O}_K$ 中分裂。

证明。设 $P=v\cap k$ 和 $\bar\pi$ 是 ϕ^v 的 Frobenius 态射。由引理 A.1 可知

$$K=\mathrm{End}_F(\phi_1)\otimes_A k\hookrightarrow \mathrm{End}_{\mathbf{k}(v)}(\phi^v)\otimes_A k:=D.$$

根据 [10, 命题 4.12.17]，我们推得 ϕ 在 v 处为普通约化，当且仅当 $K=$ 自同态环$_{\mathbf{k}(v)}(\phi^v)\otimes_A k$。这等价于说 $\mathcal{O}_K=$自同态环$_{\mathbf{k}(v)}(\phi^v)$。我们可以通过 Drinfeld 模 ϕ^v将 A 嵌入 $\mathrm{End}_{\mathbf{k}(v)}(\phi^v)$。令 $E:=k(\bar\pi)$。那么，只有一个素理想 $\mathscr{P}$ 属于 E 且包含 $\bar\pi$，而 $\mathscr{P}$ 位于 P [10, 之上（定理 4.12.8]）。

如果 ϕ 在 v处有普通约化，那么 $E\cong K$ 如 $\bar\pi\notin k$。同样根据 [10, 命题 4.12.17]，位于 P之上的 E 中有多个素数。因此，P 在 $\mathcal{O}_K$中分裂。接下来我们证明反向结论。首先，写作 $P\mathcal{O}_K=\mathcal{P}\mathcal{P}'$。假设 ϕ 在 v 处的约化是超奇异的。因此可得 $\dim_k D=r^2=4$。由于 ϕ 在 v处有良约化，ϕ^v 在 $\mathbf{k}(v)$上的秩为 2。因此我们有 $2=$秩$(\phi^v)=t\cdot[E\colon k]$，其中 t 是一个整数，且满足 $t^2=\dim_E D$。由于 $\dim_k D=4=\dim_E D\cdot[E\colon k]$，我们有 $t=2$。因此，$E=k$。特别地，$\bar\pi\in A$。在这种情况下，显然 $\mathscr{P}=(P)\subset A$。另一方面，我们可以将 ϕ 扩张到 $\mathrm{End}_F(\phi)$，从而得到定义在 F上的 Drinfeld $\mathcal{O}_K$-模 ψ。再次在 v 处取约化，可得定义在 $\mathbf{k}(v)$上的 Drinfeld $\mathcal{O}_K$-模 ψ^v。显然，$\bar\pi$ 是 ψ^v的 Frobenius 元。由于 $\bar\pi\in A\subset K$，K 中只有一个包含 $\bar\pi$的素理想。然而，$\bar\pi\in P\mathcal{O}_K=\mathcal{P}\mathcal{P}'$。这就产生了矛盾。

□

推论 A.3. 若 $P\mathcal{O}_K=\mathscr{P}\mathscr{P}'$ 处的 $\mathscr{P}$ 和 $\mathscr{P}'$ 是 $\mathcal{O}_K$ 中位于 P 之上的两个不同素理想，则对于 P 之上的任意赋值 $v\in$Spec(R)，自然态射 $\mathrm{End}_F(\phi)\to\mathrm{End}_{\mathbf{k}(v)}(\phi^v)$ 是同构。

约化过程

令 $\mathscr{M}$ 为 ϕ 的极小模型。我们设 $\mathscr{M}[P]:=\mathrm{Ker}(\phi_P\colon \phi\to\phi)$。此外，假设 $P\mathcal{O}_K=\mathscr{P}\mathscr{P}'$，其中 $\mathscr{P}$ 和 $\mathscr{P}'$ 不同。于是很容易看出：

$$\mathscr{M}[P](\bar A)=\mathscr{M}[P](\mathbb{C}_\infty)\cong\mathcal{O}_K/P\mathcal{O}_K=\mathscr{P}/P\mathcal{O}_K\oplus\mathscr{P}'/P\mathcal{O}_K\cong\mathcal{O}_K/\mathscr{P}\oplus\mathcal{O}_K/\mathscr{P}'.$$

¯存在一个自然态射 $\theta\colon \mathscr{M}[P](A)\to\phi^v[P](\overline{\mathbb{F}_q})$，通过在 $v\in$谱(R) 处取约化，使得 v 位于 P 之上。

定理 A.4. 若进一步假设 $\pi \in \mathscr{P} \subset \mathcal{O}_K$ = 自同态环$_F(\phi)$ = 自同态环$_R(\mathscr{M})$ 是 Frobenius 元 $\bar{\pi}$ 的提升，则 θ 是满射，且 θ 的核同构于 $\mathcal{O}_K/\mathscr{P}$。

证明。由于 $P\mathcal{O}_K = \mathscr{P}\mathscr{P}'$，根据定理 A.2 $\phi^v[P](\overline{\mathbb{F}_q})$ 非平凡且有限。我们通过 ϕ^v 将 A 嵌入 End $_{\mathbf{k}(v)}(\phi^v) = \mathcal{O}_K$。作为一个 $\mathcal{O}_K$-模，我们有 $\phi^v[P](\overline{\mathbb{F}_q}) \cong \mathcal{O}_K/I$，其中某个真理想为 $I \subset \mathcal{O}_K$。因此，我们有 $\phi^v_P \cdot \mathcal{O}_K/I = 0,$，这意味着 $P \in I$。显然

$$\#\{\phi^v[P](\overline{\mathbb{F}_q})\} < \#\{\mathscr{M}[P](\mathbb{C}_\infty)\}.$$

因此，要么是 $I = \mathscr{P}$，要么是 $I = \mathscr{P}'$。由于 $\bar{\pi}$ 在 $\phi^v[P](\overline{\mathbb{F}_q})$ 上的作用非平凡，我们可知 $I = \mathscr{P}'$。因此， θ 的核是 $\mathscr{P}'/P\mathcal{O}_K$，它同构于 $\mathcal{O}_K/\mathscr{P}$。 □

注记 A.5. (1) 如果我们将 $\mathcal{O}_K$ = End$_F(\phi)$ = End$_R(\mathscr{M})$ 视为相同，那么 $\mathscr{P}$ 就是那些约化后的线性系数为 0 的同源的集合。

(2) Urs Hartl 向作者展示了另一种利用 Drinfeld 模的典范子群证明定理 A.4 的方法。这两种方法的核心基本相同。

References

[1] M. Becker and S. Maclane，不可分代数扩张的最小生成元个数，《美国数学会通报》，46（1940），第182–186页。[2] E. Bombieri and W. Gubler，《丢番图几何中的高度》，New Mathematical Mono- graphs，剑桥大学出版社，2006。[3] F. Breuer，关于 Andr´e-Oort 猜想与 Drinfeld 模曲线，博士论文，Universit´e Denis Diderot，2002。[4] F. Breuer，Drinfeld 模曲线乘积的 Andr´e-Oort 猜想，Journal f¨ur die reine und angewandte Mathematik，2005（2005），第115–144页。[5] F. Breuer F. Pazuki and M. H. Razafinjatovo，Drinfeld 模的高度与同源，《算术学报》，197（2021），第111–128页。[6] M. Brown，Drinfeld 模的奇异模数与超奇异模数，《数学创见》110（1992），第419–440页。[7] Y. Buli P. Habegger and L. Kühne，没有奇异模数是单位，International Math- ematics Research Notice，2020（2020），第10005–10041页。[8] L. Clozel and E. Ullmo ´Hecke 点的等分布，《自守形式、几何与数论论文集》，John Hopkins Univ. Press，马里兰州巴尔的摩，2004，第193–254页。[9] E.-U. Gekeler，Drinfeld 模形式综述，《土耳其数学杂志》，23（1999），第485–518页。[10] D. Goss，《函数域算术的基本结构》，施普林格出版社 Berlin Heidelberg，1998。

[11] P. Habegger，作为代数单位的奇异模数，《代数与数论》，9（2015），第1515–1524页。[12] D. Hayes，全局函数域中的显式类域论，《代数与数论研究》，Academic Press，纽约—伦敦，1979，第173–217页。[13] Y. Ihara，关于全局域的欧拉–克罗内克常数及具有小范数的素数，《代数几何与数论：献给 Vladimir Drinfeld 五十岁生日》，Birkh¨auser Boston，马萨诸塞州波士顿，2006，第407–451页。[14] L. Illusie，Barsotti-Tate 群的形变，Ast´erisque，127（1985），第151–198页。[15] T. Lehmkuhl，Drinfeld 模曲面的紧化，第197卷，《美国数学会回忆录》，2009。[16] Y. Li，复乘椭圆曲线的奇异单位与同源，《组合数学》，157（2021），第1022–1035页。[17] Y. Nakkajima and Y. Taguchi，Chowla-Selberg 公式的推广，Journal f¨ur die reine und angewandte Mathematik，419（1991），第119–124页。[18] M. Raynaud，(p,...,p) 型群概形，Bulletin de la Soci´et´e Math´ematique de France，102（1974），第241–280页。[19] ——，高度与同源，Ast´erisque，127（1985），第199–234页。[20] M. Rosen，《函数域中的数论》，《数学研究生教材》，Springer New York，2002。[21] Y. Taguchi，有限特征域上 Drinfeld 模相关伽罗瓦表示的半单性，《杜克数学杂志》，62（1991），第593–599页。[22] ——，无限特征域上 Drinfeld 模相关伽罗瓦表示的半单性，《数论杂志》，44（1993），第292–314页。[23] F.-T. Wei，全局函数域上的克罗内克极限公式，《美国数学杂志》，139（2017），第1047–1084页。[24] F.-T. Wei，关于全局函数域上的克罗内克项，《数学创见》，220（2020），第847–907页。

ZhenlinRan， University of Newcastle, Australia电子邮件地址：zhenlin.ran@newcastle.edu.au