格罗滕迪克双极限定理与模型论

Karim Khanaki

阿拉克理工大学，&

基础科学研究所（IPM）

摘要：本文是一篇以波斯语撰写的介绍性论文，探讨格罗滕迪克双极限定理及其与（新）稳定性计划的联系。我们回顾近期的研究成果与观察，并讨论历史和哲学问题。

1952，格罗滕迪克的双极限定理 。
1

在他的成果中 ，尤其是，[1]亚历山大·格罗滕迪克在莫斯科举行的国际数学家大会（1958）上获得菲尔兹奖。他在这一时期的工作及其对代数几何的影响，足以让他引以为傲（1950 -1955），当时他致力于拓扑向量空间。尽管一些分析学巨匠，包括迪厄多内，[2]认为这些成果已足以使他获得这份荣誉，但本文旨在研究格罗滕迪克在拓扑向量空间领域的一项重要成果。[3]本章将这些成果与巴拿赫的工作进行比较[4]。这一时期的研究成果后来出人意料地成为现代模型论的核心；下一章将探讨这一时期与模型论的联系，并介绍格罗滕迪克的[5]双极限定理。

压缩拓扑空间上所有实值连续函数的空间 $C(X)$，在本文后文中记作 A 上的[6]点收敛拓扑，$\mathbb{R}^X$ 对于 A 的一个子集而言是如此。[7]值得一提的是，若赋予一致拓扑，X那么在 $\prod_{x\in X}\mathbb{R}$ 积空间继承的子空间拓扑下，A 点收敛拓扑中的元素可以是并非连续的函数，更不用说是$C(X)$ 上的任意子集。

[1]亚历山大·格罗滕迪克（1928—2014）[2]让·迪厄多内（1906—1992）
[3]斯特凡·巴拿赫（1892—1945）

.第 644 页，[13] 请参阅[4]

[5]格罗滕迪克双重极限定理（DLT）[6]一致范数/上确界范数[7]逐点收敛拓扑[8]博雷尔可测

设 X。是一个压缩拓扑空间，X 是一个稠密子集。（格罗滕迪克二重极限定理 .的推论）命题 1.1：以下两个陈述等价 $C(X)$ A 的每个有界子集都是

若 A 中的点态收敛拓扑是 $C(X)$ 的子集，则（1）此时，X。和 A 中的网分别为 (x_m) 和 (f_n)，当且仅当（2）

$$\lim_n \lim_m f_n(x_m) = \lim_m \lim_n f_n(x_m),$$

且两个极限都存在。

اجازه دهید پیش از ارائه اثبات این قضیه چند نکته را بیان کنیم:

注 1、2。

任意拓扑空间以及网 X 均成立。事实上，[7] 若取为紧空间，以上命题（1）便是命题 6 的一个特例。注意，X 即使考虑[1]弱拓扑 A，$C(X)$ 仍然成立。关于点态收敛拓扑与弱收敛拓扑在有界子集上的比较，请参见第 462 节，[5]。

在本文的目的下，格罗滕迪克定理（即命题 1.1）在这一特殊情形下也已足够。我们将看到，(2) 可以表述为一族公式及类型空间的形式；第 3 章将把 (2) 中的断言 (3) 称为“[3]双重极限性质”。

证明 (2) 并不难，留给读者完成。 ⇐(1) 证明。1.1命题的证明

$X \ni x$假设存在一个函数 f，定义在 A 上，在点 $.$ 处不连续。为导出矛盾：(1) 取 ⇐，使得每个包含 x 的邻域都包含一个形如 $f(x)$ 的点，其中 U，因此存在一个 x_1 的邻域，使得它不包含 A 中的点。现在，考虑 f_1 上的函数 $f(y)$ $\notin U$，使得 $y|f_2(x_1)-f(x_1)| <$。在 f_2 上考虑函数 A，使得 $f(x_1)$ $\notin U$ 且 $|f_1(x_1)-f_1(x)| <$。选取 x_2 中的点，使得 $i =$ 1 ($|f_i$1, 2) $x_2(-f_i)x(| <)$1 2。现在，选取 $|f_2(x)-f(x)| <$1 和 1。选取函数 f_2，使得 $|f_2(x)$ $-f(x)| <$1 2 且 $|f_2(x_i)$ $-f(x_i)| <$1 2。继续这一过程，我们得到序列 (f_n) 和 (x_m)，使得对每个 $\notin U$ 和 x_n，$-f_i(x)| <$1 n，

[1]弱拓扑[2]类型空间[3]双重极限
性质（DLP）

$|f_{n+1}(x) - f(x)| < 1_n$，$(j = 1 \ldots, n)$ $|f_{n+1}(x_j) - f(x_j)| < 1_n$，$(i = 1 \ldots, n)$□ 现在很容易验证，(2) 中的断言违反了命题 1.1。$f(x_n) \notin U$ 和

如前文所述：第一，对于读者而言，值得注意的是，以上证明颇为简单。下文将阐明其在模型论与分析中的应用及重要性，而上述命题是格罗滕迪克命题的一个特殊情形，无需借助强大的拓扑学概念即可证明。第二，从认识论的角度来看，更重要的是，对于模型论学者而言，用模型论的语言来表述这样的证明，无法达到上述证明那样的清晰与简洁。
在探讨格罗滕迪克定理与模型论的联系之前（见后续章节），不妨先看看双重极限性质一个非常漂亮的应用。我们将在下文（4）中回到这一点。[24] 我们将在4.2中请读者关注巴拿赫空间理论中的这一命题。我们将通过函子分析来研究该命题。
（命题 2.2）[2]本文所讨论的内容安排如下。第3章将展示稳定性理论的基本定理是格罗滕迪克定理的一个推论。第4章将陈述本文所提出的结果。第5章将给出格罗滕迪克定理针对类型的一个改进。我们将阐明格罗滕迪克定理在模型论中的含义。最后一章将讨论尚未解决的问题及未来的研究方向。[3]稳定性理论

۲. ش .حال的基础定理，۱۹۷۱年稳定性理论

证明了2.2稳定性理论的基础定理[4]哈拉什，[21] 在格罗滕迪克定理问世二十年后，大约为1.1我们将看到，最后一个定理是该定理的推论

在陈述稳定性理论的基础定理之前，我们假设读者熟悉数学逻辑书籍中常见的模型论入门概念，包括语言、公式、理论、模型、满足（或被满足）。[5]我们还需要介绍几个其他概念

以及一阶逻辑语言中的一个 $\varphi(x, \ y)$（经典）理论-L，一个 T模型-L。本文接下来将介绍 MT

۱.۲. تعریف

[1]توجه داریم که چون X چگال است، می‌توانیم دنبالهٔ (x_n) را در X انتخاب کنیم.

[2]稳定性基本定理（FTS)

[3]一般稳定类型

[4]Saharon Shelah（1945年—）

[5]满足

若有序列（a_n），且具有序性质 M（即 OP 与 ˇ 按 ˊ 方式……），我们称 $\varphi(x, y)$ 在 $\varphi(x, y)$ 中满足（1），当且仅当 M 在 $\varphi(a_m, a_n)$ 中成立：存在 M 于 (b_n) 中。我们称 M 在 $\varphi(x, y)$ 中稳定，若它在 M 中不具有序性质。

如果对于 M 的每个模型，T 在理论 $\varphi(x, y)$ 中都是稳定的，我们就称 M 在 $\varphi(x, y)$ 中稳定。(2) 这样的公式称为「[۲]稳定 ˊ 公式」，这是 ˊ 的术语。

后文将给出一种类型-φ ˊ 定义，它类似于模型论中类型的定义，但有所不同。事实上，这个概念是局部化的，仅适用于 $\neg\varphi(x, b)$ 或 $\varphi(x, b)$ 形式的公式，而非所有语言公式。也就是说，它是依赖于 φ 公式的类型概念，其定义只取决于该公式。

对于 ۳.$b \in M$，如果不存在包含 p 的其他集合，我们称 p 型为完备型。显然，每个 $tp_\varphi(a/M)$ 型都是完备的。记作 $S_\varphi(M)$ 的完备 M 类；设 $tp_\varphi(a/M)$ 表示所有在 M 上的 a-φ、$a \in M$-φ 型均由 a 在 M 中实现的 $b \in M$ $\neg\varphi(x, b)$ 型的集合，即与 M 在 φ-$\varphi(x, b)$ 型公式的集合，或与 $\varphi(x, b)$、$\neg\varphi(x, b)$ 型公式的某个相容集合相对应。

若存在参数 M，使得 $\psi(y)$，我们称公式 [۴] M 在类型 $S_\varphi(M)$ 中可定义。若且唯若 $\psi(b)$ 成立，当且仅当 $p \ni \varphi(x, b)$，我们便说 $b \in M$ 对每个……都成立。这一概念由莫菲曼于七十年代独立提出，是模型论中非常重要的自然概念。我们将在第 3 章看到，这一概念对应于拓扑学中的“连续性”概念，因此其重要性不言而喻。

现在，我们准备陈述基本定理。

假设 T和一个公式 $\varphi(x, y)$ 是一个理论。命题 2.2：以下陈述彼此等价：(1) T理论是稳定的 $\varphi(x, y)$（即 ˊ 的稳定性理论 ˊ 的基本命题）。

---

[1]序性质（OP）[2]稳定公式可以把类型（或方程组）想象成一组方程，它们都有一个共同解，φ 简单来说，[۳] 当然是在一个大模型中。[4]可定义于 M[5]Haim Gaifman（1934-）

(2) 对每个 M 模型，T 的每个-φ 类型都是可定义的 M。
(3) 对每个 M 模型，T 的类型数量至多为 M，即 $|M|$。

从这一事实（3）$\Leftarrow$（2）是标准的，在大多数模型论教材中都能找到。（1）$\Leftarrow$（3）的证明（$M \ni a$ 是）φ（a, y）可以得出这样的结论：构成 $\Leftarrow$（1）即基础命题的主要部分的公式数量是 $|M|$ 有限的。下一章将展示如何做到这一点。为此，我们需要将格罗滕迪克定理翻译成模型论的语言。可1.1由该命题得出的推论

۲.۳ 注记

证明（1）将借助[2]完全不同的证明（2）（将在下一章中运用格罗滕迪克定理给出）。事实上，经典证明具有“[3]组合”性质。

自莫利（Morley）于1965年提出一项极为重要的定理后（2），稳定理论和类型的概念便成为模型论研究的核心。迄今为止，稳定理论中的许多重要例子及其应用都已得到研究；在新模型论的证明性方法中，[4]于六十年代提出了稳定性理论的一整套特征。此后，稳定性理论的许多成果也在数学的其他领域中被发现。例如，关于[5]的几何猜想[6]，已在所有特征下得到证明。

二十一世纪模型论的重要目标之一，是将非稳定理论中获得的结果推广到稳定理论中（3）。第五章将介绍这些结果之一。

۳. بِن‌یاکوف، ترجمهٔ قضیهٔ گروتندیک به زبان نظریهٔ مدل‌ها، ۲۰۱۵

本亚科夫引用道：[۲] [۹]

当[7]在一次研讨会上问道：“我问的是谁，以及什么？”（2013）

当时，作为对他们回答的反驳，他首次定义了稳定公式的概念，

دادم که شبیه یک شوخی بو[8]“格”روتندیک، در دههٔ پنجاه.» [۱۰]

---

[1] 此外，这些公式——φ 型公式——被定义为 $M \ni a$ 的有限布尔组合形式。(a, y)

[2] 命题（3）是对稳定理论的命名，因为这类理论中的类型数量保持稳定。

[3] 组合的

[4] 迈克尔·达尔文·莫利（1930—2020）

[5] 莫利范畴性定理

[6] 埃胡德·赫鲁绍夫斯基（1959年—）

[7] 莫德尔–朗猜想

[8] 不稳定理论

[9] 伊泰·本·雅科夫

[10] 它们是模型论中合理且广为人知的答案。

「没有性质」与「类型可定义」.更准确地说，作为模型论的一项成果，这一命题由舍拉证明：稳定性理论的基本定理等价于格罗滕迪克命题的内容。[۲۱]

接下来，我们将说明，福凯如何将格罗滕迪克命题的内容翻译成模型论的语言，并借此证明一个基本命题，从而得到一个稳定性理论。

与上一章类似，我们定义全体类型的集合 M，并记作 $S_{\tilde{\varphi}}(M)$。设 $\tilde{\varphi}($ $y, x)$：$= \varphi(x, y)$ （也就是说， y和 x 的角色互换了）。

对每个函数 $M \ni a$，若 $\rightarrow \{$ 是 0, 1 值函数，则按如下方式定义 f_a：$f_a(q)$ $=$；否则令其为 1。显然，如果 b 中的所有函数对于某个满足 φ (a, b) 的实现都成立，就可以赋予 $S_{\tilde{\varphi}}(M)$ 一个拓扑。这里有两个关键点：(1) 在每个类型中，由 $tp_{\varphi}(a/M)$ 在类型空间中诱导的拓扑是紧致的；(2) $f_a S_{\varphi}(M)$ 在类型 $M \ni a$ 上是连续的（在拓扑意义下收敛到某个点）。这两点的验证留给读者。（1）注意，$tp_{\varphi}(a/M)$ 这类类型当且仅当其对应函数连续时才是紧致的；（2）由于拓扑 $S_{\tilde{\varphi}}(M)$ 完全不连通，只有当它能用一个带参数的"公式"来定义时，$A = \{f_a$ 才是可定义的。集合 $S_{\varphi}(M)$ 中的 $M \ni a$。

若 $\varphi(a, b) :=$ ۰ 成立，且 $\varphi(a, b)$ 时，若定义 $\varphi(a, b) :=$ ۱，则还需注意，虽然二者都满足 M在 $\varphi(x, y)$ 中的稳定性很容易检验，但在这种情况下，我们有 M在 (b_m) 和 (a_m) 的序列

$$\lim_n \lim_m \varphi(a_m, b_n) = \lim_m \lim_n \varphi(a_m, b_n),$$

前提是两个极限都存在。

اکنون آماده‌ایم که اثبات قضیهٔ بنیادینِ نظریهٔ پایداری (۲.۲) را کامل کنیم.

$tp(a/M)$ 的所有类型空间的集合 $X_{\circ}$和 $S_{\tilde{\varphi}}(M)$ 的空间 X。假设定理 2.2。证明 (2)⇐(1)$A = \{f_a$：集合在 X中是紧的。注意到 $X_{\circ}$是稠密的，且 X是闭的。因此，考虑到 ($a \in M$的) 定理 M在 $\varphi(x, y)$ 上的稳定性，便可得出 $C(X)$ 中存在一个余紧子集 $a \in M\}$，它由 $S_{\varphi}(M)$ 上的某个函数在每个类型中给出。因为 A 中的每个函数都是连续的，所以结论成立。1.1

证明：当且仅当其对应函数连续时，$S_{\varphi}(M)$ 可定义；在一个类型中，且 ′k A 集合□ [1]是完备的。

در ادامه کنکاشی عمیق‌تر در معنای نظریه مدلی قضیهٔ گروتندیک خواهیم داشت.

۴. پیلی، معنای نظریه مدلی قضیهٔ گروتندیک، ۲۰۱۶

格罗滕迪克在文章[2]中提出了这一命题，距离他对皮利ٔ型可定义性的观察仅有很短时间。实际上，这一命题与全局类型的可定义性相吻合。下文将对此作出说明，从而更清楚地展现模型论命题的含义。 [۱۶]

如果一个模型中的所有类型都能在该模型上实现（该模型足够大），我们就称它为ٔ大模型，并用 $\mathbb{M}$ 来表示。

在上一节中，我们对完整类型-φ 作了定义。设 M 为一个模型， $\mathbb{M}$ 为一个大模型；如果用 $\mathbb{M}$ 替换 M，那么每个 $\psi(y)$ 公式都称为在 M 上可定义的 $p(x)$ 全局类型-φ。当且仅当 $p \ni \varphi(x,b)$ 成立时，我们才说$\psi(b)$ 是全局的；也就是说，对每个$b \in \mathbb{M}$，都存在参数M，其中p 属于 $\phi(x)$。我们称。 M 中实现的′为有限可定义的全局类型-φ。对于每个 p，都存在公式；该公式在 M 中实现。

2.1 注释。$A = \{f_a\colon \quad a \in M\}$ 和 $X = S_{\tilde{\varphi}}(M)$ 假设，采用上一节的记号（在点态收敛拓扑中）， A Pillay 证明了，在函数空间中所有满足[16] 的函数之间存在一一对应关系。在 M 中 ′有限的全局类型——φ 的全体

设 T 是一个 M 理论， $\varphi(x,y)$ 是一个 T 模型。命题 4.1（格罗滕迪克双极限定理的模型论含义）。以下两个陈述等价：(1) $\varphi(x,y)$ 在 M 模型中稳定。最近的观察使菲利普能够全面呈现格罗滕迪克定理模型论含义的图景。

此外，也容易证明，每个类型都对应于一个连续函数，该函数由有限个公式的布尔组合定义[1]。$M \ni a$ 这就是 $\varphi(a,\ y)$ 公式[2]Anand Pillay (1951-)的研究领域是全局类型，超出了本文讨论的范围。读者可参阅有关怪物模型的著作[3]。也可以参阅ٔ有限′模型论的精确定义[4]。[5]在 M中有限可满足

(2) 每个类型都具有广延性 $S_\varphi(M)$，并且有限可满足于 M 中的某个类型-φ 世界 M，且在 M 上可定义。

注释 4.2。

类似于格罗滕迪克论文中的原始证明（即命题 1.1），完全 [16] 给出的证明（1）基于伯恩斯坦的一种思想，在[7]中，格罗滕迪克也提到，命题 4.1 强于命题 2.2，因为它考察的是「模型内部的稳定性」（这并非某个理论必然具备的性质）。这一成果在[23] 中被称为「稳定性理论的基本定理」。皮利提醒我们，格罗滕迪克在 [15] 的论文中证明了一项与格罗滕迪克定理类似的成果；此外，在[16] 中，皮利也证明了一个与格罗滕迪克定理基本相同的结论（当然是在模型论语言中），这令人惊叹。[10] 的论文 3 中，格罗滕迪克定理被推广到称为连续逻辑的广义逻辑。维纽在论文 12 中取得了一项重要成果；作为模型内部稳定性概念的一项应用，克里文和毛里在论文 5 和 4 中证明了：在稳定的巴拿赫空间中，$\leq p < \infty$存在 ℓ_p 有限维子空间（1），并且 $S_\varphi(M) \ni p$ 任意类型都可以扩张为某个稳定类型（5）。这一概念在模型论中十分重要，也有许多重要应用。关于这些内容，请读者参阅模型论教材，例如[14]。

类型论的一个概念，[16] 这段关于格罗滕迪克定理的历史并非模型论的内容，也不足以用于研究这些理论。它适用于「稳定」理论，主要提出了「稳定遗传性得以实现 M 于有限时称为 M 类型论意义上的稳定遗传性-φ，而非类似不稳定性质的强稳定性）。在那里，他提出了一个合适的概念 M 来回答菲利的问题：「稳定遗传性适用于什么样的理论？」 M 可以认为，格罗滕迪克定理也为「更强」这一概念提供了类似的结果，即以稳定遗传性的方式刻画（无序性一章中会在模型论里对此作出精确阐述）。关于稳定遗传性 的更强概念（实际上称为「？」）。要回答这个问题，需要进行一番研究。

[1] William Frederick Eberlein（1917—1986）
[2] 稳定性的强基本定理（SFTS）[3] Jose Iovino[4] Jean-Louis Krivine（1939—）[5] Bernard Maurey（1948—）[6] p的共继承者

٢٠٢١，作为可实现类型的类型 .٥

模型论中有一个名为「稳定遗传类型」的概念，其渊源可追溯到代数几何中的「泛点」（在域上）(K。简单来说，V一个多样形上的一点；在的著作中，模型论里的「类型」概念（在K上）若不属于任何真子多样形，便称为泛型点，或称[19]、[18]（参见文献）。这一概念最初由波瓦兹为稳定理论引入，随后由特维尔伯格]、特和菲利将其推广到任意理论。本文将介绍「稳定遗传」这一概念，并探讨它与此前成果的联系。[20]

“M完整类型-φ”和“通用类型”的定义类似于“M完整类型”的定义。区别在于，后两者并非只包含 φ 公式，而是包含 L 语言的全部公式。类似地，“M中可实现的有限”和“M可定义性”这两个概念也可针对通用类型以及 M 完整类型来定义，即“通用类型-φ”和 M 完整类型。

设 $p(x)$ 是一个通用类型，在 p 中可由有限 M 模型实现。对于M中的一个序列，我们如下构造$a_{\alpha+1}$元素。选取a_1元素 $\{a_i : i \leq \alpha\}$，使得p类型的所有公式仅包含参数 M 中的$M \cup \{a_i : i \leq \alpha\}$ 元素。归纳地，假设对于 p 类型的所有公式，我们选取的元素仅包含参数 M 中属于[6]的那些元素；这样定义的序列就是一个像那样的序列 $\{a_i : i < \alpha\}$，并且满足条件。显然，两个序列具有相同的类型，但序列未必唯一。我们注意到仍然是 M 上的 p（即不可区分）。此外，每个序列都不可区分。

令 M 是 p 上的一个全局类型，并且在 有限模型中实现。假设 $p(x)$ 是一个稳定的生成元类型。定义 .٥ .١ 集合 $\phi(x)$，并且对每个公式 M 上的 p，若 $\{a_i : i < \omega + \omega\}$ 是任意 Morley 序列，则其补集是有限的或余有限的：$\{i : \phi(a_i)\}$

.٢ .٥ 注释

[1]安德烈·韦伊（1906—1998）[2]簇[3]布鲁诺·普瓦扎（1946—）[4]Predrag Tanović（1961—）

注意，这些元素都可以在大模型 中找到。

[6]Morley 序列

这里的 α 是任意基数，且可以大于 ω。

[8]不可辨别的

，恰恰相反，这个说法并不正确。（M上）可定义的（M上）所有类型都泛型稳定（1），但有些类型（M在）′上）同时可定义且有限（M上），也就是说，存在一些类型（。[4]可参见）。它们并非泛型稳定模型

若存在一种类型M（在′中），它同时是有限且M可定义的，那么[1] NIP是（2）中的理论（[9]），参见。它是M稳定的。

借助西蒙斯的一些想法，[22][3]在一个极其优美的命题中阐明了稳定通用类型分析的一个方面：[6][2]猜想。

设p是一个全局类型$p(x)$，而T是M在数理逻辑语言中的一个模型T。假设命题 3.5 成立，即存在M于$(a_i : \ i < \omega)$中，那么稳定通用类型的任何序列M

$$\lim_i tp(a_i/\mathbb{M}) = p.$$

这等价于上述极限，同时也定义为（[٢]列的拓扑）中的极限。上述命题中的各个$\phi(a_i)$最终，当且仅当 $\phi(x) \in p$在带有参数的全局模型中$\phi(x)$对公式而言有意义。$n \leq i$如果 $\phi(a_i)$成立：也就是说，对于某个自然数 n，它们成立

命题 ５．٣ 中的注意事项４．٥。一个基本要点是，存在一个与 p相合的子列（因此，尽管证明中并不需要存在这样的“内部”子列，但这一点很重要），而每个 p相合的摩尔根子列都是[٤]，这是弗，[٥]尼格罗布在函数分析方面一项非常重要的成果；然而，这一根源命题是模型论′完全′哥德尔的。它有[٣]格兰德

自然而然会提出这样的问题：上述命题的逆命题是否成立？它们之间是否存在联系？此外，还有一个（见上一节）型问题。接下来我们将回答这些问题。

[1]非独立性性质[2]Kyle Gannon[3] Pierre Simon[4]Stone 拓扑[5]让·布尔甘（1954—2018）[6]David Heaver Fremlin（1942—）[7] Michel Pierre Talagrand（1952—）

“[٢]依赖”这一概念也称为“[١]最终依赖”这一概念，M对于一个模型，[١١]是稳定的。由于这一概念具有技术性，读者可参见本文中的定义 1.3。（在模型论中，参见.....）。我们称模型 M“最终稳定”，当且仅当以下两个条件都成立：(a) 对每个公式 M都是最终依赖的。 M(b) (١.٢ 参见定义

我们现在准备给出下面的命题，它与格罗滕迪克定理相似，并且适用于类型在泛型意义下是稳定的情形，[6] 和 [2 2]，运用[1 1] 中的一些思想来证明。它还回答了一个问题。

T设 M 是你们语言中的一个理论 T。([3]格罗滕迪克二重极限定理 的强化版 定理 5.5。) 那么，下列说法等价： M(1) M 是泛型稳定的 (2) M 上的每个完备类型都有一个扩张，使其成为泛型稳定的全局类型。

注释 5.6

注意：-型φ 第一，完整的类型并非仅适用于4.1上述命题的两个更强版本（1）已阐述了型的概念第二，-型不像此前那样φ 已实现了准稳定序列的概念。我们还有一种比可定义且有限的型更强的稳定键构，一般

（参见）。1.1 借助模型论工具是可行的，甚至无需使用此命题的证明（2）准稳定键构，一种新的型，一般而言[，]最后一个命题补全了命题4.10中的内容。这一命题本身很重要且有用（[命题4.4、11]）的证明使用了聚合的概念；该概念强于命题5.3中的聚合。另请参见定义4.3、5.3命题）Nogami。[定义4.3、11] 由于这一概念较为专业，特此向读者说明。
这很可能会有所收获。1.1类似的结果可以通过函子分析翻译出来可以用语言5.5命题（3）来表述。这类结果还可能有其他应用。

[1]渐近依赖[2]依赖性[3]格罗滕迪克双极限定理的强化（RDLT）

۶. سخن پایانی

这段历程漫长，但仍在继续。尽管格罗滕迪克双极限定理在模型论中的发展历程相对曲折，围绕它仍可提出许多问题，其中之一便是概念的自然推广。克勒尔测度是一类自然推广，其应用十分广泛，也仍有很大的发展空间。克勒尔测度的推广[1]R.L.Z.的测度5.5。（自然地，命题[9]和 [8]（参见）也为模型论中的稳定生成子提供了适当的概念及重要的类似结果。此外，通常的稳定生成子克勒尔可以在另一篇文章中另述一段历程。5.5命题

[2]迈克尔·阿蒂亚，[1] 这篇优美的数学文章。我们先明确一下这篇文章数学哲学。请允许我先在结尾提出一个观点：他主张「数学的统一」应当是数学最重要的目标之一，强调建立不同领域之间的联系；数学中最深刻、最优美、最有用的成果，甚至包括他晚年的工作，都体现了数学不同分支的统一。事实上，阿蒂亚一生都在致力于此。格罗滕迪克的双重极限定理便是他强调这一点的一个例证，它无疑实现了「数学」与「物理」的统一。它是关于「数学的统一」的

تشکر و قدردانی

谨此感谢 Khanaki 博士，感谢他对本文初稿的有益建议。我也谨向 IPM（基础科学研究所）致以谢意，并感谢其提供的经费支持。本研究由 IPM 资助，项目编号为 «۱۴۰۱۰۳۰۱۱۷»。

参考文献

[1] 阿蒂亚，M.，（1978）数学的统一性，伦敦数学会通报，第10卷，第69–76页。[2] 本·雅科夫，I.，（2014）继A. 格罗滕迪克之后的模型论稳定性与类型的可定义性，符号逻辑通报，20，第491–496页。[3] Bourgain，J.、Fremlin，D.H. 和塔拉格朗，M.，（1978）贝尔可测函数的逐点紧集。美国数学杂志，100(4)：第845–886页，1978年。

[1]凯斯勒测度[2]迈克尔·阿蒂亚（1929—2019）

[4] Conant, G., Gannon, K., Hanson, J., (2023)《非正式场景中的凯斯勒测度》，模型论期刊，即将发表。[5] Fremlin, D.,《测度论》第*4*卷：拓扑测度空间，TorresFremlin，科尔切斯特，(2006)。[6] Gannon, K., (2022)《类型与凯斯勒测度的序列逼近》，《*Fundamenta Mathematicae*》，257，305-336。[7] Grothendieck, A., (1952)《一般函数空间中的紧性判据》，美国数学杂志74，168-186。[8] Hrushovski, E., Peterzil, Y., and Pillay, A., (2008)《群、测度与非独立性质》，美国数学会杂志，第21卷，第2期，第563–596页。[9] Hrushovski, E., and Pillay, A., (2011)《论非独立性质与不变测度》，《欧洲数学会杂志》，13，1005-1061。[10] Iovino, J., (1999)《稳定模型与自反巴拿赫空间》。符号逻辑杂志，64，1595-1600。[11] Khanaki, K., (2022)《关于莫利序列收敛的评注》，https://arxiv.org/abs/2110.15411[12] Krivine, J.-L., and Maurey, B., (1981)《稳定巴拿赫空间》。《以色列数学杂志》，39(4):273-295。[13] Pietsch, P.,《巴拿赫空间与线性算子史》。Birkhäuser Boston，马萨诸塞州，(2008)。[14] Pillay, A.,《稳定性理论导论》，牛津逻辑指南(1983)。[15] Pillay, A., (1982)《模型的初等扩张的维数与齐性》。《符号逻辑杂志》，47(1): 147-160。[16] Pillay, A., (2016)《泛稳定性与格罗滕迪克》，南美逻辑杂志，第2卷，第2期，第437-442页[17] Pillay, A., and Tanović, P., (2011)《泛稳定性、正则性与准极小性》，《模型、逻辑与高维范畴》，*CRM* 会议录讲义，卷*53*，美国数学会，普罗维登斯，罗德岛州，第189–211页。MR 2867971[18] Poizat, B., (1983)《具有正则泛型类型的稳定群》，符号逻辑杂志，第48卷，第2期(1983年6月)，第339-355页[19] Poizat, B., (1981)《稳定群的可定义子群》，符号逻辑杂志，第46卷，第1期(1981年3月)，第137-146页。[20] Poizat, B.,《稳定群》，数学调查与专著，第87卷，普罗维登斯，罗德岛州：美国数学会，第xiv页+129，(2001) doi:10.1090/surv/087, ISBN 0-8218-2685-9，MR 1827833（由1987年法文原版译出。）

[21] Shelah, S.,（1971）稳定性、有限覆盖性质与超稳定性; 一阶理论中公式的模型论性质，《数学逻辑年刊》，第3卷，第3期，第271-362页。[22] Simon, P.，（2015）NIP 理论中的不变类型，《数学逻辑杂志》，第15卷，第02期，1550006。[23]Starchenko, S.，（2017）论Grothendieck的稳定性方法，未发表笔记，https://www3.nd.edu/sstarche/papers/groth-stab.pdf[24] Young, N.J.，（1971）论Pták双极限定理，《爱丁堡数学学会会刊》，第17卷，第3期，第193-200页

(IPM) 伊拉姆工业大学基础科学学院基础科学研究所（卡里姆·哈尼）https://www.arakut.ac.ir/fa/khanaki.html：
khanaki@arakut.ac.ir：