arXiv:2303.04350v1 [cs.CG] 8 Mar 2023

Impr平面中覆盖路径和覆盖树的改进上界

Ahmad Biniaz*

摘要

对于一个平面点集，覆盖路径是指在平面中绘制的一条路径，其边为直线边，并且每个点都位于该路径的某个顶点上或某条边上。覆盖树的定义类似。设 $\pi(n)$为满足以下条件的最小数：平面中的每个含有 n 个点的集合都可以由一条至多含有 $\pi(n)$条边的非交叉路径覆盖。设 $\tau(n)$为无交覆盖树对应的数。Dumitrescu、Gerbner、Keszegh 和 T´oth（《离散与计算几何》，2014年）建立了以下不等式：

$$\frac{5n}{9} - O(1) < \pi(n) < \left(1 - \frac{1}{601080391}\right) n, \quad \text{and} \quad \frac{9n}{17} - O(1) < \tau(n) \leqslant \left\lfloor \frac{5n}{6} \right\rfloor.$$

我们给出以下改进的上界：

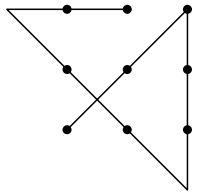
$$\pi(n) \leqslant \left(1 - \frac{1}{22}\right) n, \quad \text{and} \quad \tau(n) \leqslant \left\lceil \frac{4n}{5} \right\rceil.$$

在同一背景下，我们研究彩虹多边形。对于平面中的一个带颜色的点集，完美彩虹多边形是一个简单多边形，其内部或边界上恰好包含每种颜色的一个点。设 $\rho(k)$为满足以下条件的最小数：平面中的每个 k颜色点集都存在一个大小为 $\rho(k)$的完美彩虹多边形。Flores-Pe˜naloza、Kano、Mart´ınez-Sandoval、Orden、Tejel、T´oth、Urrutia 和 Vogtenhuber（《离散数学》，2021年）证明了 $20k/19 - O(1) < \rho(k) < 10k/7 + O(1)$。我们给出改进的上界 $\rho(k) < 7k/5 + O(1)$。

为获得改进后的界，我们提出简单的 $O(n \log n)$ 时间算法，以构造具有所需边数的路径、树和多边形。

1 引言

在平面上的点集上构造具有某些所需性质的折线路径，有着丰富的研究背景。例如，著名的旅行商路径问题旨在求一条总边长最短的折线路径 [6, 29]。近年来，人们对具有如下性质的路径日益关注：非交叉 [2, 9], 、使最长边长最短 [8], 、使最短边长最长 [4], ，以及使总转角或最大转角最小



转角 [1, 18], 并使转弯次数最少（这等价于使边数最少） [15, 30] ，仅举几例。

本文主要研究边数较少的折线路径。这与经典的九点谜题有关：该谜题要求用不超过 4 条线段的折线路径覆盖一个 3×3 网格的顶点。该谜题出现在 Sam Loyd 的《谜题大全》中， 1914 [27]。

*计算机学 与系，温莎大学，abiniaz@uwindsor.ca。研究经费由加拿大自然科学与工程研究委员会资助 .

设 P 为平面中的 n 个点。对于 P，生成路径是指在平面中绘制的一条具有直线边的路径，使得 P 中的每个点都位于该路径的某个顶点上，并且该路径的每个顶点都位于 P中的某个点上。换言之，它是一条恰好具有 $n-1$条边的哈密顿路径。上图中的路径不是生成路径，因为其中两个顶点不在给定的点上。对于 P，覆盖路径是指在平面中绘制的一条具有直线边的路径，使得 P 中的每个点都位于该路径的某个顶点上或某条边上。覆盖路径的顶点可以是平面中的任意点（不一定属于 P）。上图中的路径是一条具有 4 条边的覆盖路径。根据这些定义，任何生成路径也是覆盖路径，但覆盖路径不一定是生成路径。对于 P，覆盖树的定义类似：它是平面中绘制的一棵具有直线边的树，使得 P 中的每个点都位于该树的某个顶点上或某条边上。如果覆盖路径或树的各条边互不相交，则称其为非交叉。在相关文献中，覆盖路径和树的边也称为连接边 [5]。

近年来，覆盖路径和覆盖树受到了广泛关注，参见例如 [5, 15, 25]。尤其是，边数较少的覆盖路径可应用于机器人学和重型机械领域，因为在这些领域，转向是一项代价高昂的操作 [30]。边数较少的覆盖树则有助于红蓝分离 [20] 以及构造彩虹多边形 [19]。2010年，F. Mori´c [14]，以及之后的 Dumitrescu、Gerbner、Keszegh 和 T´oth [15]提出了许多关于覆盖路径和覆盖树的挑战性问题。具体而言，他们提出了以下两个问题，这也是本文的主要主题。正如 [14], 中所指出的，E. Welzl 也曾在 Gremo 2011年开放问题研讨会上提出过类似的问题。

1. 最小的数 $\pi(n)$ 是多少，使得平面上的任意 n 个点集都能用一条至多含 $\pi(n)$ 条边的非交叉路径覆盖？ 2. 最小的数 $\tau(n)$ 是多少，使得平面上的任意 n 个点集都能用一棵至多含 $\tau(n)$ 条边的非交叉树覆盖?

对于 $\pi(n)$ 和 $\tau(n)$，一个平凡的上界是 $n-1$（这源于无交生成路径的存在），一个平凡的下界是$\lceil \frac{n}{2} \rceil$（因为如果没有三点共线，那么每条边至多覆盖两个点）。2014年，Dumitrescu 等人 [15] 得出了以下非平凡界限，以及其他一些有趣的结果：

$$\frac{5n}{9} - O(1) < \pi(n) < \left(1 - \frac{1}{601080391}\right) n, \quad \text{and} \quad \frac{9n}{17} - O(1) < \tau(n) \leqslant \left\lfloor \frac{5n}{6} \right\rfloor.$$

最近，Flores-Pe˜naloza、Kano、Mart´ínez-Sandoval、Orden、Tejel、T´oth、Urrutia 和 Vogtenhuber [19] 在彩虹多边形的背景下提出了以下相关问题。对于平面上的一组带颜色的点，彩虹多边形 是指一个简单多边形，其内部或边界上每种颜色的点至多有一个。若一个彩虹多边形恰好包含每种颜色的一个点，则称其为完美的 。多边形的大小 是其边的数量（这与其顶点数量相同）。

3. 最小数量 $\rho(k)$（称为彩虹指标）是多少，才能保证平面上每个 k着色的点集（其中任意三点不共线）都包含一个大小为 $\rho(k)$的完美彩虹多边形?

问题 3 与覆盖树有关，因为（正如我们稍后在第 4 节将看到的）某些覆盖树可能会为 $\rho(k)$ 带来更好的上界。Flores-Pe˜naloza 等人 [19]证明了以下不等式：

$$\frac{20k}{19} - O(1) < \rho(k) < \frac{10k}{7} + O(1).$$

$\pi(n)$、 $\tau(n)$ 和 $\rho(n)$ 的上界是普适的（即任意点集都满足这些界），并且这些上界由算法得出，该算法能够构造大小为 [15, 19] 的路径、树和多边形。然而，下界是存在性的（即存在满足这些界的点集），并且它们由 [15] 中展示的同一个点集得出。或许对于每个特定的数，都存在能够达到更好下界的点配置。

1.1 我们的贡献

缩小 $\pi(n)$、 $\tau(n)$ 和 $\rho(n)$ 的下界与上界之间的差距，是 [15, 19] 明确提出的开放问题。本文报告这三个数的以下改进上界：

$$\pi(n) \leqslant \left(1 - \frac{1}{22}\right) n, \qquad \tau(n) \leqslant \left\lceil \frac{4n}{5} \right\rceil, \quad \text{and} \quad \rho(k) < \frac{7k}{5} + O(1).$$

$\pi(n)$ 和 $\tau(n)$ 的新界是 8 年来的首次改进。为得到这些界，我们提出了能够构造具有所需边数的无交叉覆盖路径、无交覆盖树和彩虹多边形的算法。这些算法简单，运行时间为 $O(n \log n)$，其中 n 是输入点的数量。对于路径而言，该运行时间是最优的，因为计算无交叉覆盖路径存在 $\Omega(n \log n)$ 的下界 [15]。然而，通过构造生成星，可以在 $O(n)$ 时间内计算出无交覆盖树。我们扩展了路径算法，并为无交叉覆盖环取得了 $(1 - \frac{1}{22})n + 2$ 的上界。这是旅行商巡回问题的一种自然变体，其目标是使连接边的数量最少；该问题是 NP 难的 [5]。

我们的算法与以往算法有一些相似之处：两者都是迭代式的，并使用标准的平面扫描技术，从左向右扫描各点。不过，为了达到新的界，我们采用了新的几何洞见，并利用凸层和 Erd″os-Szekeres 定理 [16]。

无论从算法层面来看有何影响，我们的结果都很重要，因为它们为普适数 $\pi(n)$、 $\tau(n)$ 和 $\rho(n)$ 提供了新的信息；类似的研究对象还包括交叉数 [3, 13, 22],、交叉族（两两相交的边）的大小 [28], 、斯坦纳比 [6, 23], ，以及离散几何中研究的其他数值和常数（例如 [8, 10, 17]）。

注记。 共线点有利于构造覆盖路径和树，因为它们通常能形成边数较少的路径和树。为避免打断论证，我们先介绍适用于不存在三点共线情形的点集的算法。最后，我们将说明如何处理共线情形。

1.2 相关问题与结果

如果不要求满足不相交性质，Dumitrescu 等人 [15] 证明，对于平面中的任意 n 个点，都存在一条（可能自交的）覆盖路径，其边数为 $n/2 + O(n/\log n)$。覆盖路径也从优化的角度得到了研究。Arkin 等人 [5]证明，在平面中的点集上，求边数最少的覆盖路径（也称为最少链节 覆盖路径问题和最少弯折 覆盖路径问题）是 NP 难问题。Stein 和 Wagner [30] 提出了一种 $O(\log z)$-近似算法，其中 z 为共线点的最大数量。

Keszegh [25] 确定了正方形网格顶点的 $\pi(n)$和 $\tau(n)$的精确值。覆盖路径的轴对齐版本也得到了深入研究，并提出了各种下界、上界和近似算法，以最小化此类路径的边数；例如参见 [7, 12, 24]。在平面中分离红点和蓝点的背景下，覆盖树也得到了研究，研究对象位于

平面 [20]中。用最少直线数覆盖平面中的点是另一个相关问题，同样得到了深入研究，例如参见 [11, 21, 26]。

关于彩虹多边形的相关问题和结果，读者可参阅 Flores- Pe˜naloza 等人的论文 [19]。特别是，他们通过证明对于 $k \in \{3,4,5,6\}$ 有 $\rho(k) = k$ 以及 $\rho(7) = 8$，确定了 k取较小值时的精确彩虹指标。

1.3 预备知识

对于平面中的两个点 p 和 q，我们将经过 p 和 q的直线记为 $\ell(p, q)$，将端点为 p 和 q的线段记为 pq。对于两条路径 δ_1 和 δ_2，其中 δ_1 在与 δ_2 开始处相同的顶点处结束，我们将它们的拼接记为 $\delta_1 \oplus \delta_2$。

如果点集 P 中的任意三个点都不共线，则称其处于一般位置。我们用 CH(P) 表示 P 的凸包。设 K 是平面中处于凸位置且任意两点不在同一条垂直线上的 k 点集；如果 K 中的所有点都位于经过 K中最左点和最右点的直线之上或之上（分别为下方），则称其为 k-帽（相应地，为 k-杯）。Erd˝os 和 Szekeres[16] 的经典结果表明，在平面中处于一般位置且任意两点不在同一条垂直线上的、至少含有 $\binom{2k-4}{k-2}+1$ 个点的任意点集，都包含一个 k-帽或一个 k-杯。这个界是紧的，即存在大小为 $\binom{2k-4}{k-2}$ 的点集，不包含任何 k-帽或 k-杯 [16]。

2 非交叉覆盖路径

本节证明 $\pi(n) \leqslant (1-1/22)n$。我们首先介绍一个关于平面内点集之间存在无交折线路径的经典结果；例如参见 [15, 20]。

引理 1. 设 P 是位于凸区域 C 内部的平面点集，p 和q 是 C 边界上的两个点。那么，$P \cup \{p, q\}$ 存在一条具有$|P| + 1$ 条边的无交生成路径，其端点为 p和 q，且其相对内部位于 C的内部。

事实上，由引理 1 得到的生成路径是$P \cup \{p, q\}$ 的一条无交覆盖路径，且它位于 $P \cup \{p, q\}$的凸包内。下面的引理表明，任意由 23 个点组成的点集都可以用一条具有 21 条边的无交路径覆盖。

引理 2。设 P 是平面中至少含有 23 个点的点集，且任意两个点的x坐标均不相同。设 H 为由经过 P最左端点和最右端点的垂直线所界定的垂直条带。那么，存在一条覆盖点集P P的无交叉覆盖路径，其中包含 $|P| - 2$ 条边，且该路径位于 H 内，其端点分别为 P的最左端点和最右端点。

证明。我们的证明是构造性的。设 l 和 r 分别为 P 中最左端和最右端的点。设 $P' = P \setminus \{l, r\}$，并注意到 $|P'| \geqslant 21$。我们假设 P' 处于一般位置。在证明的最后，我们将简要说明如何处理共线情形。根据 [16] 的结果，集合 P' 含有一个 5-帽或一个 5-杯。经过适当的反射，不妨设它含有一个 5-杯 K，其点 p_1、p_2、p_3、p_4、p_5 按从左到右的顺序排列，如图 1(a) 所示。在 P' 的所有 5-杯中，不妨设 K 是满足 p_1 为可能的最左点的一个。再在所有这样的 5-杯（左端点为 p_1）中，不妨设 K 是满足 p_5 为可能的最右点的一个。K 的这一选择意味着：H 与 ℓ（p_1、p_2）上方的半平面以及经过 p_1 的垂直线左侧的半平面的交集区域中不含 P' 的点；图 1(a) 中将该区域记为 E_1。类似地，H 与 ℓ（p_4、p_5）上方的半平面以及经过 p_5 的垂直线右侧的半平面的交集区域中不含 P' 的点；图 1(a) 中将该区域记为 E_2。

为简便起见，令 $\ell_{12} = \ell(p_1, p_2)$ 和 $\ell_{45} = \ell(p_4, p_5)$。我们分两种情形讨论：(i) l 位于 ℓ_{12} 下方，或 r 位于 ℓ_{45} 下方；(ii) l 位于 ℓ_{12} 上方且 r 位于 ℓ_{45} 上方。

(i) 在这种情形下，不妨利用对称性假设 l 位于 ℓ_{12} 下方，如图1所示。令 c 为 ℓ_{12} 与 ℓ_{45} 的交点，d 为 ℓ_{45} 与 H 的右边界的交点。由于 K 是一个杯形，c 位于 K 下方，因此在 H 中。考虑一条从 p_4 发出并经过 c 的射线。以 p_4 为中心顺时针旋转这条射线，直到它碰到三角形 $\triangle p_2 c p_4$ 中的某个点为止；见图 1(a)。注意，这样的点一定存在，因为 p_3 在 $\triangle p_2 c p_4$ 中。将首次碰到的点记为 p'_3（也可能出现 $p'_3 = p_3$ 的情形）。于是，p_1，p_2，p'_3，p_4，p_5 是一个 5-杯，我们将其记为 K'（同样，也可能出现 $K' = K$ 的情形）。令 c' 为旋转后的射线与 ℓ_{12} 的交点。根据我们对 p'_3 的选择，三角形 $\triangle c p_4 c'$ 内部为空，即其内部不含点集P中的任何点；图 1(a) 中将此三角形记为 E_3。

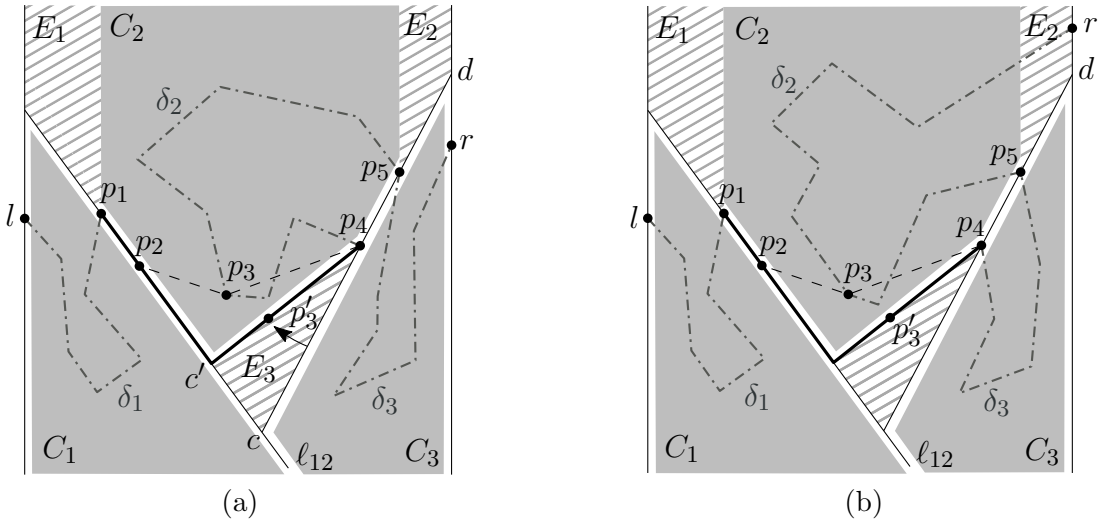


图1：引理 2 证明示意图。(a) l 位于 ℓ_{12} 下方，且 r 位于 ℓ_{45}下方。(b) l 位于 ℓ_{12} 下方，且 r 位于 ℓ_{45} 上方。

点集P P' 中的点位于三个凸区域 C_1、C_2、C_3 的内部或边界上，如图1(a)和图1(b)所示。区域 C_1 是 H 与ℓ_{12}下方半平面的交集。区域 C_3 是 H、ℓ_{12} 上方半平面和 ℓ_{45}下方半平面的交集。区域 C_2 是 H 与五个半平面的交集（分别为直线 ℓ_{12}、ℓ_{45}、$\ell(c', p_4)$ 上方的半平面、经过 p_1的垂直线右侧的半平面，以及经过 p_5的垂直线左侧的半平面）。设 P_i 为点集P P 中位于每个 C_i内部（但不在边界上）的点的集合。那么 $P_1 \cup P_2 \cup P_3 = P \setminus \{l, p_1, p_2, p'_3, p_4, p_5, r\}$，因此 $|P_1| + |P_2| + |P_3| = |P| - 7$。

我们按如下方式为 P 构造一条覆盖路径。四个点 p_1、p_2、p'_3、p_4 可由路径（p_1、c'、p_4）覆盖，该路径有两条边 p_1c' 和 $c'p_4$。令 δ_1 为一条具有 $|P_1|+1$条边的不相交路径，它是对（P_1、C_1、l、p_1）应用引理 1 得到的，其中 l 和 p_1 在引理中分别扮演 p和 q 的角色。现在我们考虑两种子情况。

- r 位于下方 ℓ_{45}。在此情形下，r 位于 C_3的边界上，如图 1(a)所示。令 δ_2 和 δ_3 为分别对（P_2、C_2、p_4、p_5）和（P_3、C_3、p_5、r）应用引理 1 得到的、分别具有 $|P_2|+1$条边和 $|P_3|+1$条边的不相交路径。通过连接这些路径，我们得到一条无交叉覆盖路径 $\delta_1 \oplus$（p_1、c'、p_4）$\oplus \delta_2 \oplus \delta_3$，用于覆盖 P。该路径有（$|P_1|+1$）$+2+$（$|P_2|+1$）$+$（$|P_3|+1$）条边，并且位于 H中。

- r 位于 ℓ上方 $_{45}$。 在这种情形下，r 位于凸区域 $C_2 \cup E_2$的边界上，如图 1(b)所示 .

设 δ_2 和 δ_3 分别是对(P_2, $C_2 \cup E_2$, p_5, r)和(P_3, C_3, p_4, p_5)应用引理 1得到的不相交路径。那么，$\delta_1 \oplus (p_1, c', p_4) \oplus \delta_3 \oplus \delta_2$ 是 P的一条无交叉覆盖路径。该路径有 $|P| - 2$ 条边，且位于 H中。

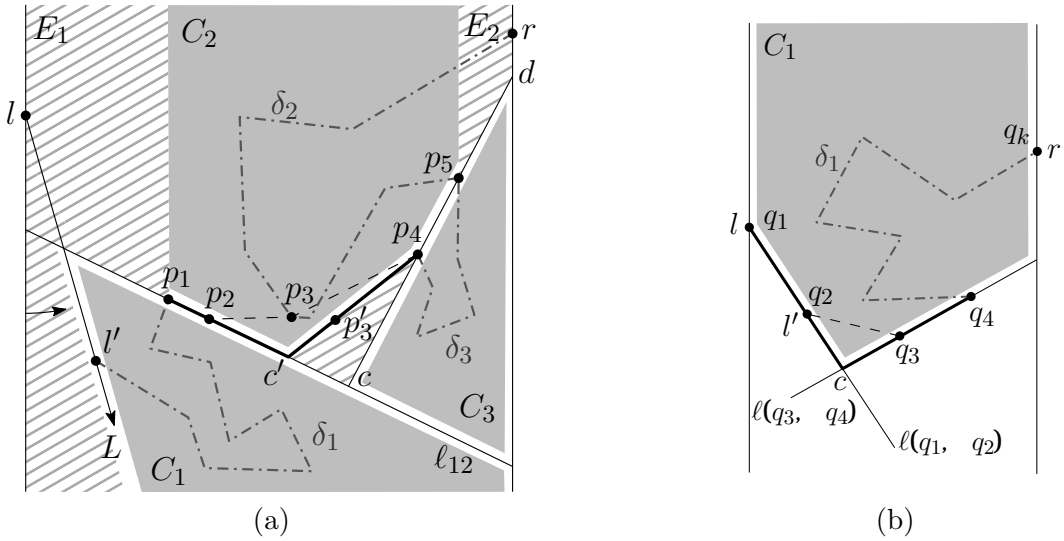


图 2：引理 2 证明的示意图，其中 l 位于 ℓ_{12} 上方，且 r 位于 ℓ_{45}上方。$l' \neq p_1$，以及 (b) $l' = p_1$ 和 $r' = p_5$ （此处 $p_1 = q_2$ 和 $p_5 = q_{k-1}$）。

(ii) 在这种情形下，l 位于 ℓ_{12} 上方，且 r 位于 ℓ_{45}上方。设 L 和 R 分别为从 l 和 r发出的向下射线。绕 l 逆时针旋转 L，一旦碰到点集P P中的一点 l' 便停止。由于 E_1 为空，l' 要么是 p_1，要么是位于 ℓ_{12}下方的点；见图 2(a)。绕 r 顺时针旋转 R，一旦碰到点集P P中的一点 r' 便停止。由于 E_2 为空，r' 要么是 p_5，要么是位于 ℓ_{45}下方的点。我们区分两种子情况。

- $l' \neq p_1$ 或 $r' \neq p_5$。不失一般性，根据对称性，我们假设 $l' \neq p_1$，如图 2(a) 所示。按照情形 (i) 中的定义，令 c、c'、d、p_3' 和 5-杯 K'，并回忆三角形 $\triangle cp_4c'$ 内部没有点。P' 中的点位于三个凸区域 C_1、C_2、C_3 的内部或边界上，如图 2(a) 所示。区域 C_1 是 H 与ℓ_{12} 下方半平面的交集，并且是与 ℓ 上方半平面（l、l'）的交集。区域 C_2 和 C_3 按照情形 (i) 中的方式定义。令P_i 为 P 中位于每个 C_i 内部（但不在边界上）的点集。那么 $P_1 \cup P_2 \cup P_3 = P \setminus \{l, l', p_1, p_2, p_3', p_4, p_5, r\}$，因此 $|P_1| + |P_2| + |P_3| = |P| - 8$。

  我们用边（l, l'）覆盖 l和 l'，并用路径（p_1, c', p_4）覆盖四个点 p_1、p_2、p_3'、p_4；该路径包含两条边。分别对（P_1, C_1, l', p_1）、（P_2, $C_2 \cup E_2$, p_5, r）和（P_3, C_3, p_4, p_5）应用引理 1，可得到无交叉路径 δ_1、δ_2和 δ_3，它们分别包含 $|P_1| + 1$、$|P_2| + 1$和$|P_3| + 1$ 条边；见图 2(a)。通过将这些路径连接起来，我们得到一条覆盖 P的无交叉覆盖路径（l, l'）$\oplus\, \delta_1 \oplus$（p_1, c', p_4）$\oplus\, \delta_3 \oplus \delta_2$。该路径有 $1 +$（$|P_1| +1$）$+ 2 +$（$|P_3| + 1$）$+$（$|P_2| + 1$）$= |P| - 2$ 条边，且位于 H中。

- $l' = p_1$ 和 $r' = p_5$。在这种情形下，CH(P)边界上的下链至少有 5 个顶点，其中包括 l、l'、r、r'，以及位于由 L、R 和 ℓ 构成的三角形内的一个点(p_1, p_5)。令$k \geqslant 5$ 为此链的顶点数。令 q_1, q_2、.....、q_k 表示此链上按从左至右顺序排列的顶点，如图 2(b)所示。则 $q_1 = l$、$q_2 = l' = p_1$、$q_k = r$ 和 $q_{k-1} = r' = p_5$。

令 c 为 $\ell(q_1, q_2)$ 与 $\ell(q_3, q_4)$ 的交点，它位于 H 中。于是，四个点q_1、q_2、q_3、q_4可由路径 (q_1, c, q_4) 覆盖。 P中的所有点都位于凸区域 C_1 的内部或边界上；该区域是 H 与 $\ell(q_1, q_2)$ 和 $\ell(q_3, q_4)$ 上方半平面的交集；此区域在图 2(b)中以阴影表示。令 P_1 为 P 中位于 C_1 内部（但不在边界上）的点。则 $P_1 = P \setminus \{q_1, q_2, q_3, q_4, q_k\}$ 和$|P_1| = |P| - 5$。令 δ_1 为将引理 1 应用于 (P_1, C_1, q_4, q_k) 所得到的、具有 $|P_1| + 1$ 条边的覆盖路径，其中 q_4 和 q_k 分别对应引理中的 p 和 q。则 $(q_1, c, q_4) \oplus \delta_1$ 是 P 的一条无交叉覆盖路径。这条路径有 $2 + (|P_1| + 1) = |P| - 2$条边，且位于 H 中。

至此，我们关于 P' 处于一般位置的证明就结束了。

只需对上述构造稍作调整，即使 P' 不处于一般位置也能奏效。为完整起见，这里简要介绍一种替代构造（或许也更简单），适用于 P' 中有三个或更多共线点的情形。设 p_1、p_2、p_3 是P'中从左到右排列的三个共线点，ℓ_{13}是经过这些点的直线。我们选择 p_1，p_2，p_3，使得 P' 中没有点位于 ℓ_{13} 上且在 p_1 左侧或 p_3右侧。由对称性可知，有两种情形：(i) l 位于 ℓ_{13} 上或其上方，且 r 位于 ℓ_{13}上或其下方；(ii) l 和 r 均位于 ℓ_{13}下方。

在情形 (i) 中，我们首先对 l、p_1 以及 ℓ_{13} 上方的所有点应用引理 1，得到一条路径。然后用一条边连接 p_1 和 p_3，这条边也覆盖 p_2。接着，我们对 r、p_3 以及 ℓ_{13} 下方的所有点应用引理 1，得到另一条路径。由此得到一条含有 $|P| - 2$ 条边的覆盖路径。

在情形 (ii) 中，我们从 l 出发，沿 CH(P) 的顶点按顺时针方向行走（同时覆盖经过的顶点），并在第一个满足以下条件的顶点处停下：设该顶点为 p_0，其下一个顶点为 x，后者位于 ℓ_{13} 上或上方（也可能是 $p_0 = l$ 这种情形）。将 l 与 p_0 之间经过的路径记为 δ_l。首先假设 x 位于 ℓ_{13} 上方。我们连接 p_0 和 x。然后，对 x、p_1 以及 ℓ_{13} 上方的所有点应用引理 1，得到一条路径。接着用一条边连接 p_1 和 p_3，这条边也覆盖 p_2。然后，对 p_3、r 以及 ℓ_{13} 下方剩余的点应用引理 1，将当前路径延伸为覆盖 P 的覆盖路径。现在假设 x 位于 ℓ_{13} 上，此时 $x = p_1$。如果 P' 中没有点位于 ℓ_{13} 上方，那么我们用一条边连接 p_1 和 p_3，然后对 p_3、r 以及 ℓ_{13} 下方剩余的点应用引理 1，将其延伸为覆盖 P 的覆盖路径。假设有点位于 ℓ_{13} 上方。我们从 r 出发，沿 CH(P) 的顶点逆时针行走，重复上述过程；由对称性，不妨假设 p_3 是第一个位于 ℓ_{13} 上或上方的经过顶点。令 p_4 表示 CH(P) 上紧接在 p_3 之后的顶点。注意，p_4 位于 ℓ_{13} 上方。令 c 为直线 $\ell(p_0, p_1)$ 与直线 $\ell(p_3, p_4)$ 的交点。为得到一条覆盖路径，我们从 δ_l 出发，将其端点 p_0 连接到 c，并连接 c 和 p_3；这两条边覆盖 p_1 和 p_4。然后，我们继续沿用由对 p_3、r 以及剩余的点应用引理 1 所得到的路径。

□

下面的推论虽然非常简单，但对分析我们的算法很有帮助。

推论 1. 设 Q 是平面中一个至少包含22 个点的集合，l 是其中最左边的点。那么，存在一条由 Q 条边构成的无交叉覆盖路径，它位于经过 l 的垂直线右侧，并且以 l 为一个端点。

证明。 我们在 Q中所有点的右侧添加一个虚拟点 r。令 $P = Q \cup \{r\}$。根据引理 2，我们得到一条适用于 P的无交叉覆盖路径 δ，它有 $|P| - 2$ 条边。 回想一下，r 是 δ的一个端点。还要回想引理 2 的证明：在所有情形下，r 都会通过一条由引理 1 得到的路径与 δ 相连。这条路径的任何一条边的内部都不含 P 中的点（即使两条连续的边恰好共线，我们也将它们视为两条不同的边）。因此，覆盖 r 的那条边 δ 的内部不含任何点。 因此，从 δ中移除 r 及其关联边后，我们得到一条覆盖路径，它有 $|Q| - 2$ 条边，适用于 Q，且满足该推论的条件。 □

定理 1。 平面上任意包含 n 个点的点集都存在一条至多含$\lceil 21n/22\rceil - 1$ 条边的无交叉覆盖路径。因此，$\pi(n) \leqslant (1 - 1/22)n$。这样的路径可以在 $O(n$对数 $n)$ 时间内计算出来。

证明。 设 P 是平面中的一组 n 点。经过适当的旋转后，我们可以假设 P 中任意两点的 x坐标都不相同。在平面中画出若干垂直线，使每条直线都经过 P中的一个点，任意两条相邻直线之间恰有21个 P 点， P 中没有点位于最左侧直线的左边，且 P 中位于最右侧直线右边的点至多有21个；见图 3。每对相邻直线确定一个包含23个点的垂直条带：内部有21个点，边界上有2个点（相邻两个条带边界上的点在两个条带中都计数）。根据引理 2，对于每个条带中的23个点，我们可以得到一条有21条边的无交叉覆盖路径。每条路径都位于相应的条带内，其端点是条带边界上的两个点。将每个条带左边界上的点分配给该条带后，可以发现，每22个点都能得到一条有21条边的路径。

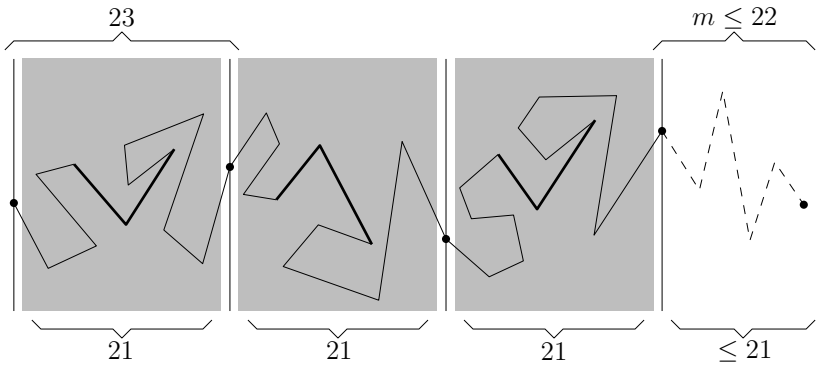


图 3：定理 1 证明的示意图。

令 m 为位于最右侧直线之上或右侧的点数，并注意到 $m \leqslant 22$。我们区分两种情形： $m = 22$ 和 $m < 22$。

若 $m = 22$ （在此情形下， n 可被 22 整除），则我们使用推论 1，以一条含 20 条边的无交叉路径覆盖这 22 个点。这条路径与在各条带内构造的路径的并集，构成点集 P的无交叉覆盖路径。这条路径的边总数为 $21n/22 - 1$。

若 $m < 22$，则 $m = n - 22\lfloor n/22\rfloor$。在此情形下，我们用一条 x-单调路径覆盖这 m 个点，该路径含有 $m - 1$ 条边（图 3 中的虚线线段）。同样，这条路径与在各条带内构造的路径的并集，构成点集 P的无交叉覆盖路径。这条路径的边总数为 $21\lfloor n/22\rfloor + m - 1 = n - \lfloor n/22\rfloor - 1 = \lceil 21n/22\rceil - 1$。

引理 2 和推论 1 的每次调用都需要常数时间。因此，在 $O(n\log\ n)$ 时间内旋转并对点集排序后，算法的其余部分只需线性时间。 □

O我们在定理 1 中的路径构造，对覆盖环也达到了类似的界 .

推论 2. 平面上每个包含 n 个点的点集都存在一个至多含有 $\lceil 21n/22\rceil + 1$ 条边的非交叉覆盖环。可以在 $O(n\log\ n)$ 时间内计算出这样的环。

证明。 设 δ 为定理 1 在大小为 n的点集 P 上构造的路径。回顾定理证明中的 m 。若 $m < 22$，则 δ 的两个端点分别是 P中最左和最右的点。因此，通过引入一个新的点 p，使其 y坐标足够大，并将其与 δ的两个端点相连，我们便得到 P的一个无交叉覆盖环。若 $m = 22$，则可以适当选择推论 1 中引入的虚拟点，使其充当 p。 □

3 非交叉覆盖树

本节证明以下定理，该定理给出了一种算法，可计算出边数约为 $4n/5$ 的无交覆盖树。需要说明的是，树的边 数与其线段 数不同（每条线段要么是一条边，要么是由树中若干条共线边组成的链）。例如，图5(b)中的树有 10 条边和 7 条线段，其中线段 p_1p_7 和 p_5p_8 分别由 3 条和 2 条共线边组成。

定理 2. 平面上的任意 n 个点集都存在一棵至多含有$\lceil 4n/5\rceil$ 条边的非交叉覆盖树。因此， $\tau(n)$ $\leqslant \lceil 4n/5\rceil$。这样的树可以在 $O(n\log n)$ 时间内计算得到。

证明。 设 P 是平面上的一个 n 点集。经过适当旋转后，我们可以假设 P 中任意两点的 x 坐标都不同。我们给出一种迭代算法，用于计算 P 的一棵非交叉覆盖树，该树至多含有 $\lceil 4n/5\rceil$ 条边。简而言之，该算法从左向右扫描这些点，在每次迭代中（最后一次迭代除外），考虑 4 或 5 个新点，并分别用 3 或 4 条新边覆盖它们。因此，新边数与已覆盖点数之比至多为 $4/5$。我们先描述算法的一次中间迭代；首次和末次迭代将在稍后说明。 我们假设每次迭代中扫描到的点都处于一般位置。在证明的最后，我们将说明如何处理共线情形。 令 m 表示迄今为止已扫描的点数，并令 l 表示最右侧的已扫描点（稍后便会明白我们为何选用字母 l ）。在每次中间迭代开始时，我们都维持以下不变量。

> **不变量**。 目前为止已扫描的所有 m 点，都由一棵非交叉树 T 覆盖，该树至多有 $4\lfloor m/5\rfloor$ 条边。树 T 位于经过 l的垂直线左侧，且 l 在 T 中的度为1。

在当前（中间）迭代中，我们扫描四个新点，即 a、 b、 c和 r ，其中 r是最右侧的点。设 H 为由经过 l 和 r 的垂直线界定的垂直条带（l是 H中最左侧的点， r是最右侧的点）；见图4(a)。设 $Q=\{l,a,b,c,r\}$。根据CH(Q)的顶点数，我们分三种情形讨论。注意， r 和 l 是CH(Q)的两个顶点。

- CH(Q)有三个顶点。设 a 为CH(Q)的第三个顶点。那么 b 和 c 位于CH(Q)的内部，如图4(a)所示。在这种情形下，CH(Q)的两个顶点（例如 l 和 r）位于 ℓ（b、 c）的同一侧。因此， l、 b、 c和 r 构成一个凸四边形。经过适当的重新标记，假设 l、 b、 c、 r 沿该四边形的边界依次出现。设 x 为 ℓ（l、 b）与 ℓ（r、 c）的交点，该点位于三角形 $\triangle lra$内。我们用位于 H中的三条边 xl、 xr和 xa 覆盖这四个已扫描点 a、 b、 c和 r 。将这些边添加到 T中。在新树中， r 的度为1（无论CH(Q)的哪两个顶点位于 ℓ（b、 c）的同一侧）。不变量仍然成立，我们继续进行下一次迭代。

- CH(Q) 有五个顶点。 我们先说明这种情形，因为论证较短，而且接下来还会用到。在这种情形下， Q 包含一个4-帽或4-杯，其端点为 l 和 r。经过适当的反射和重新标记后，不妨设它含有4-杯 l， b， c， r，如图4(b)所示。令 x 为 $\ell(l,\ b)$与 $\ell(r,\ c)$的交点，并注意到它位于 H中。我们用三条边 xl、 xr和 xa 覆盖a、 b、 c和 r ，这三条边均位于 H中。将这些边加入 T。在新树中， r 的度为1。不变量在下一次迭代中仍成立。

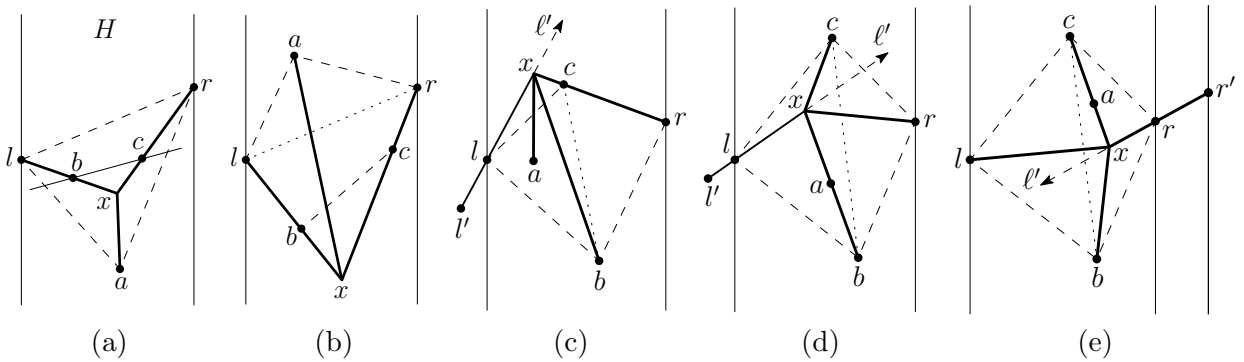


图 4：定理 2 的证明示意图。(a) CH(Q) 有三个顶点。(b) CH(Q) 有五个顶点。(c)-(e) CH(Q) 有四个顶点。

- CH(Q) 有四个顶点。 经过适当的重新标记后，不妨设 b 和 c 是CH(Q)的两个顶点（不同于 l 和 r）。因此， a 位于CH(Q)的内部。如果 b 和 c 都位于 $\ell(l,\ r)$的上方或下方，那么 $l,\ b,\ c,\ r$ 构成一个4-帽或4-杯，此时我们按前一种情形的方式覆盖这些点。因此，不妨设其中一点（例如 b）位于 $\ell(l,\ r)$下方，而 c 位于 $\ell(l,\ r)$上方，如图4(c)–(e)所示。我们考虑两种子情况。

  – a 位于三角形 $\triangle lbc$中。根据不变量， l 在 T中的度为 1。令 l' 为 l 在 T中的相邻顶点。令 ℓ' 为从 l' 出发并经过 l的射线。我们考虑两种子情况：(i) 线段 bc 与 ℓ' 不相交；(ii) 线段bc与 ℓ'相交。

    在情形 (i) 中，线段 bc 位于 ℓ'下方或上方。根据对称性，不妨假设它位于ℓ'下方。于是 a 和 r 也位于 ℓ'下方，如图 4(c) 所示。在这种情形下， $\ell(r,\ c)$与 ℓ'相交。令x 为它们的交点，并注意到该点位于 H中。我们用 $l'x$ 替换T 的边 $l'l$ （这不会增加边的数量，因为 l 的度为 1）。注意， $l'x$ 包含 l。然后，我们通过向 T添加三条边 xr、 xb和 xa，覆盖 a、 b、 c和 r 。因此， T 的边数增加了 3。此外， r 在新树中的度为 1，并且所有新引入的边都位于经过 r的垂直线左侧。因此，不变量在下一次迭代中仍然成立。

    在情形 (ii) 中，射线 ℓ' 经过 $\triangle lbc$。点 a 位于 ℓ'的下方或上方。根据对称性，不妨假设它位于 ℓ'下方，如图 4(d) 所示。令 x 为 $\ell(a,\ b)$ 与 ℓ'的交点，该交点位于 $\triangle lbc$中。我们用 $l'x$替换 T 的边 $l'l$ 。然后，通过向 T添加三条边 xr、 xb和 xc ，覆盖 a、 b、 c和 r 。因此， T 的边数增加了 3，顶点 r 在新树中的度为 1，并且所有新边都位于经过 r的垂直线左侧。该不变量在下一次迭代中仍然成立。

  – a 位于三角形 $\triangle rbc$中。 这里是我们使用四条新边覆盖五个顶点的情形。事实上，比率 $4/5$ 正是由这一情形得出的（在前面的情形中，我们能够用三条新边覆盖四个点）。在这一情形中，我们扫描 r 之后的下一个点，记为 r'，如图 4(e) 所示。现在令 ℓ' 为从 r' 出发并经过 r的射线。当前情形实质上是前一情形的垂直反射，其中 r 和 r' 分别起到 l 和 l'的作用。我们以类似于前一情形的方式处理这一情形。分析过程也类似，只是现在我们将边$r'x$ 视为一条新边。因此，我们用四条新边覆盖五个点 a、 b、 c、 r和 r'。所有新边都位于经过 r'的垂直线左侧，并且 r' 在新树中的度为一。因此，在下一次迭代中，不变量仍然成立。

这是一次中间迭代的结束。由我们的构造可知，所得树具有非交叉性质。这次迭代表明，覆盖树大约需要 $4n/5$ 条边。要得到所声称的精确界，我们需要仔细考察算法的第一次和最后一次迭代。

在算法的第一次迭代中，我们只扫描最左侧的输入点。这个点将在第二次迭代（即第一次中间迭代）中充当 l 。第二次迭代的不变量成立，因为此时树中没有边。如果我们在第二次迭代中恰好使用边 $l'l$ ，那么我们取 $l' = l$ ，并任意指定射线 ℓ' 的方向，使其朝向右侧。根据上述构造，只有在第二次迭代中扫描四个点（a、 b、 c、r）时才会出现这种情况。此时，前五个点（l、 a、 b、 c、 r）由四条边覆盖，因此下一次迭代的不变量成立。在算法的最后一次迭代中，还剩下 $w \leqslant 4$ 个未扫描的点。我们用 w 条边将这些 w 个点连接到最右侧的已扫描点。因此，该算法用至多 $\lceil 4n/5 \rceil$ 条边构造一棵覆盖所有点的非交叉树。

如果扫描到的点中有三个或更多共线，则用一条边覆盖所有共线点，并将该边的左端点连接到 l。然后将其余每个扫描点连接到l。新增边的数量至多为 3 条（扫描到 4 个点时）或 4 条（扫描到 5 个点时）。

每次迭代都只需常数时间。因此，在用 $O(n\log\ n)$时间旋转并排序这些点后，算法的其余部分只需线性时间。 □

4 完美彩虹多边形

回顾一下，对于一组带颜色的点，完美彩虹多边形是一个简单多边形，其内部或边界上恰好包含每种颜色的一个点。图 5(a) 展示了一个大小为 9（九条边）的完美彩虹多边形，它对应一个带 8 种颜色的点集（即由 8 种不同颜色标记的点）。彩虹多边形与不相交覆盖树之间存在一种关系（如下文所述）。我们利用这种关系（类似于 [19]），并给出一种算法，能够为任意 k色点集构造大小至多为 $7k/5 + O(1)$的完美彩虹多边形。

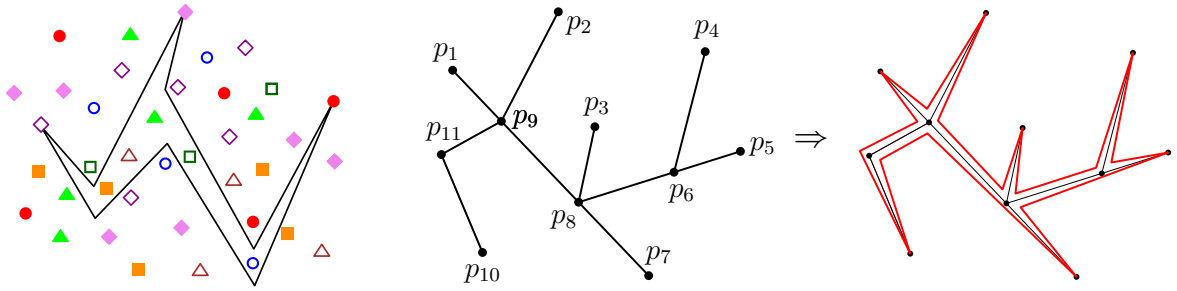


图 5：（a）一个针对 8 种颜色点集的大小为 9 的完美彩虹多边形。（b）左：一棵有十条边的非交叉树，可划分为七条线段 $\{p_1p_7, p_2p_9, p_3p_8, p_4p_6, p_5p_8, p_{10}p_{11}, p_{11}p_9\}$； p_6 和 p_8 是重数为 1 的两个分叉点，而 p_9 是重数为 2 的分叉点。右：由这棵树得到一个简单包围多边形。

我们采用 [19]中的以下符号和定义。设 T 为一棵非交叉几何树。回顾一下， T 的一条线段是 T中一条共线边链。设 M 是将 T 的边划分为数量最少的两两不交叉线段的一种划分。用 s 表示 M中的线段数。 T的分叉点 （相对于 M而言）是指位于某条线段$ab \in M$内部、同时又是 M中另一条线段端点的顶点 f。 f的重数 是一个 $\{1, 2\}$中的数值

其确定方式如下。如果以 f 为端点的线段位于 ℓ的两侧（a， b），则 f 的重数为2；否则（这些线段位于直线的一侧）， f 的重数为1。图5(b)中的树给出了一个例子。用 t 表示 T中所有分叉点的重数之和。以下引理根据 s 和 t，给出了包围 T 的多边形的大小。

引理 3 (Flores-Pe˜naloza 等 [19])。 设 T 是一棵非交叉几何树， M 是将其边划分为尽可能少的两两不交叉线段的一种划分。设 s 是 M 中线段的数量， t 是 T 中分叉点的总重数。如果 $s \geqslant 2$ 且 $t \geqslant 0$，那么对于每个 $\varepsilon > 0$，都存在一个大小为 $2s + t$、面积至多为 ε 的简单多边形，将 T 包围起来。

引理 3 背后的直观理解很简单。例如，如果我们从平面中挖去树 T，那么形成的空洞就可以表示为所需的多边形。或者，如果我们从 T 的一个顶点出发，沿着 T （紧贴其边）走一圈，直到回到起点，那么走过的巡回路径就可以表示为所需的多边形。参见图5(b)。

鉴于引理 3，更好的覆盖树（即 $2s + t$ 更小）会得到更好的多边形（即边更少）。在定理 4（证明见第4.1节）中，我们证明，平面上处于一般位置的任意一组 k个点，都存在一棵无交覆盖树，使得 $s \leqslant \lceil \frac{3k}{5} \rceil + 2$和 $t \leqslant \lceil \frac{k}{5} \rceil$。有了这个引理和定理，我们便提出了计算完美彩虹多边形的算法。

算法（简而言之）。 设 P 是平面上一组处于一般位置、由 k 种不同颜色着色的 n 个点。该算法从每种颜色中任意选取一个点，用一棵无交树覆盖所选点（依据定理 4），然后根据这棵树得到一个完美彩虹多边形（依据引理 3）。

分析。 令 K 为所选点集，令 T 为根据定理 4 得到的 K 的覆盖树。于是，$s \leqslant \lceil \frac{3k}{5} \rceil + 2$且 $t \leqslant \lceil \frac{k}{5} \rceil$。因此，由引理 3 得到的完美彩虹多边形的大小为

$$2s + t \leqslant 2\left(\left\lceil \frac{3k}{5} \right\rceil + 2\right) + \left\lceil \frac{k}{5} \right\rceil \leqslant \left\lceil \frac{7k}{5} \right\rceil + 6.$$

根据定理 4，树 T可在 $O(k \log k)$ 时间内得到。要从 T 中得到一个多边形（避开 $P \setminus K$中的点），我们需要在引理 3 中选择合适的 ε 。如 [19], 所述， T 的边与 $P \setminus K$ 中的点之间的最小距离的一半是合适的 ε；通过计算 T的边与 $P \setminus K$中的点构成的 Voronoi 图，可在 $O(n\log\ n)$ 时间内找到该值。因此，算法的总运行时间为 $O(n \log\ n)$。以下定理总结了本节的结果。

定理 3. 平面上一组处于一般位置、大小为 n 的 k-颜色点集，必定存在一个大小至多为 $\lceil 7k/5 \rceil + 6$ 的完美彩虹多边形。因此， $\rho(k) \leqslant \lceil 7k/5 \rceil + 6$。可在 $O(n\log\ n)$ 时间内计算出这样的多边形。

注记。 一般位置假设对我们的算法是必要的，因为如果一个未选中的点（即 $P \setminus K$ 中的一个点）落在线段 T 上，那么得到的多边形就不是有效的彩虹多边形，因为其中包含两个或更多个颜色相同的点。

4.1 BetterCovering 树

回顾上一节中的参数 s 和 t 。本节将构造一棵覆盖树，使得 $2s + t$ 比 [19]的对应值更小。在构造过程中，我们将展示

（见图 6）由树得到的多边形的结构；这有助于读者看出，该多边形每 5 个点对应 7 条边，从而直观地验证界限$7k/5 + O(1)$。我们的构造与定理 2 证明中的构造有一些相似之处。不过，由于目标不同，这两种构造的细节也有所不同。我们将简要介绍它们的共同部分。

定理 4. 设 K 是平面上处于一般位置的 k 个点的集合。那么，可以在 $O(k \log k)$ 时间内，为 K 构造一棵无交覆盖树，其中包含至多 $\lceil \frac{3k}{5} \rceil + 2$ 条两两不交叉线段，且至多有 $\lceil \frac{k}{5} \rceil$ 个重数为 1 的分叉点。

证明。 经过适当旋转后，假设 K 中任意两点的 x 坐标都不相同。我们介绍一种从左向右扫描这些点的迭代算法。每次迭代（最后一次迭代可能除外）扫描 5 个新点，并用 3 条新线段和 1 个重数为 1 的新分叉点将它们覆盖。与之前一样，我们先描述算法的一次中间迭代；稍后再描述第一次和最后一次迭代。设 m 为目前已扫描的点数，l' 为最右侧已扫描的点。在每次中间迭代开始时，我们都维持以下不变量。

不变量。 目前已扫描的所有 m 点均由一棵非交叉树 T 覆盖，该树至多有 $3\lfloor (m-2)/5 \rfloor + 2$ 条线段，并且有 $\lfloor (m-2)/5 \rfloor + 1$ 个重数为 1 的分叉。树 T 位于经过 l' 的垂直线左侧，且 l' 在 T 中的度为 1。

在第一次迭代中（稍后将对此进行描述），我们向 T 添加一条经过 K 最左侧点的长竖直线段，使得 T 中任何其他线段的延长线都会与这条线段相交。

在当前（中间）迭代中，我们扫描接下来的五个点，即 l、a、b、c和 r，其中 l 最靠左，r 最靠右。设 H 为由经过 l和 r的垂直线所围成的垂直条带。设 $Q = \{l, a, b, c, r\}$。我们考虑三种情形。

- CH(Q) 有三个顶点。 设 l、r、a 为 CH(Q) 的顶点。设 l、b、c、r 为构成一个凸四边形的四个点，它们沿着该四边形的边界依次出现。设 x 为 $\ell(l, b)$ 与 $\ell(r, c)$ 的交点，且该交点位于 $\triangle lra$ 中。设 f 为 T 与一条从 x 发出并经过 l 的射线的第一个交点，如图 6(a) 所示。我们通过向 T 添加三条线段 xf、xr 和 xa 来覆盖这些点。这只产生一个新的分叉点，即 f，其重数为 1。因此，不变量在下一次迭代中仍然成立。

- CH(Q) 有五个顶点。 在这种情形下，Q 有一个 4-帽或 4-杯，其端点为 l 和 r。设l、b、c、r 为这样的帽或杯，如图6(b)所示。按照前一种情形的定义，取 x 和 f，然后通过向 T 添加三条线段 xf、xr和 xa 来覆盖这些点。这会产生一个新的分叉点，即 f，其重数为 1。因此，不变量在下一次迭代中仍然成立。

- CH(Q) 有四个顶点。 经过适当的重新标记，不妨设 b 和 c 位于 CH(Q) 上。如果 b和 c都位于 $\ell(l, r)$ 的上方或下方，那么 l, b, c, r 构成一个 4-帽或 4-杯，在这种情况下，我们按照前一种情形覆盖这些点。因此，不妨设 b 位于 $\ell(l, r)$ 下方，而 c位于 $\ell(l, r)$ 上方。直线 $\ell(b, l)$ 和 $\ell(c, l)$ 将 l左侧的半平面划分为三个区域（图6(c)和图6(d)中的阴影区域）。根据 l' 在这些区域中的包含关系，我们区分两种情形（回顾一下，l' 是前一次迭代中扫描到的最右侧点）。

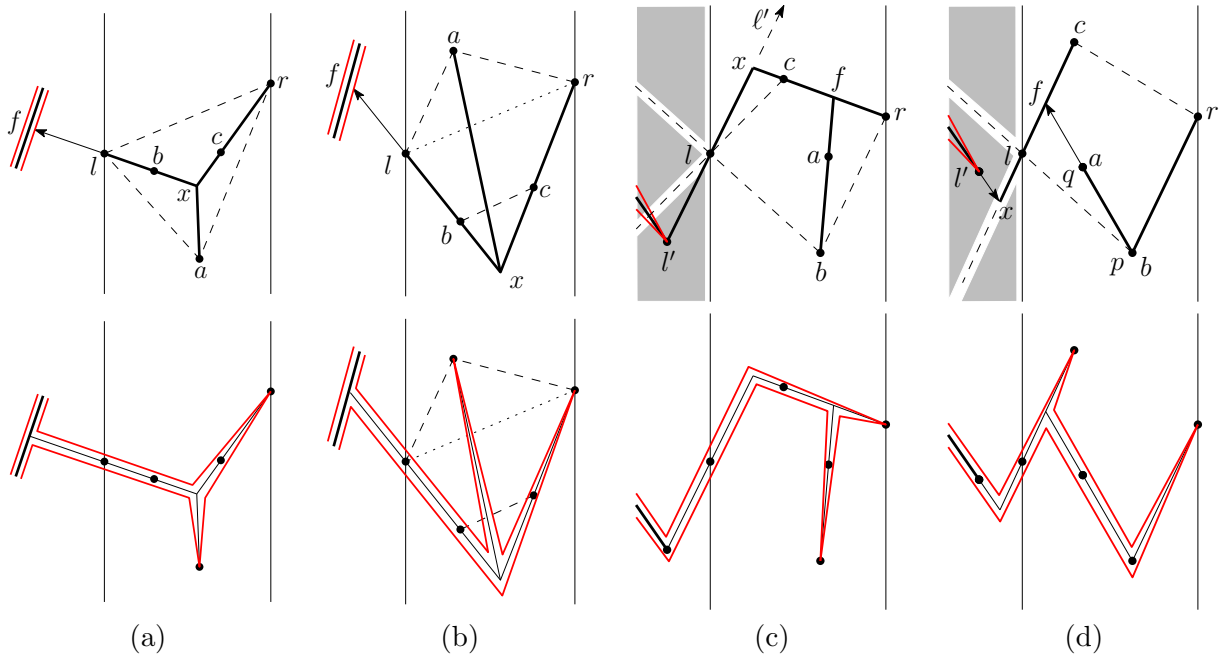


图 6：定理 4 证明示意图。(a) CH(Q) 有三个顶点。(b) CH(Q) 有五个顶点。(c)–(d) CH(Q) 有四个顶点。

– l' 位于 $\ell(b, l)$ 上方或 $\ell(c, l)$ 下方。利用对称性，不妨设 l' 位于 $\ell(c, l)$ 下方；见图 6(c)。令 ℓ' 为从 l' 发出并经过 l的射线。于是， a、 b、 c和 r 都位于 ℓ'下方。令 x 为 $\ell(r, c)$ 与 ℓ' 的交点，且该交点位于 H中。考虑从 b 发出并经过 a的射线。这条射线在一点处与 lx或 rx 相交，记该点为 f。我们通过向 T添加三条线段 xr、 xl'和bf 来覆盖这些点。这只产生一个新的分叉点，即 f ，其重数为 1。因此，不变量在下一次迭代中仍然成立。

– l' 位于 ℓ（b、 l）下方，且位于 ℓ（c、 l）上方。图 6(d) 描绘了这种情形。根据不变量，l'在 T中的度为一，即它恰好与 T中的一条线段关联。我们将这条线段向右延长，直到它首次与 ℓ（b、 l）或 ℓ（c、 l）相交。根据对称性，不妨设延长线与 ℓ（c、 l）相交；我们将交点记为 x。在a 和 b中，令 p 表示具有较大 x坐标的点，令 q 表示另一个点。于是，从 p 发出并经过 q 的射线会与 T 中的一条线段或线段 xc相交。考虑第一条这样的线段，并令 f 表示交点。我们通过向 T添加三条线段 xc、 rp和 pf 来覆盖这些点。（与 l' 关联的线段刚刚延长至 x。）只生成了一个新的分叉点，即 f ，其重数为 1。因此，不变量对下一次迭代仍然成立。

这是一次中间迭代的结束。所得树的不相交性质由我们的构造保证。

在算法的第一次迭代中，我们扫描点集 K中最左侧的两个点，即 p_1 和p_2 ，其中 p_1 位于 p_2 的左侧。我们向 T （起初为空）添加一条穿过 p_1的长竖直线段 s_1。然后，我们再向 T 添加第二条线段 s_2 ，将 p_2 连接到s_1的中点。这个中点是一个重数为 1 的分叉点。点 p_2 将在第二次迭代（即第一次中间迭代）中充当 l' 的角色。请注意，此时不变量成立，因为我们用 2 条线段和 1 个分叉点覆盖了 $m = 2$ 个扫描点。在最后一次迭代中，

算法中，我们还剩下 $w = (k-2) - 5\lfloor (k-2)/5 \rfloor \leqslant 4$ 个点。我们用一条x-单调路径，将这些 w 个点通过 w 条线段连接到最右侧的扫描点。因此，最终的树最多有 $3\lfloor (k-2)/5 \rfloor + 2 + w \leqslant \lceil 3k/5 \rceil + 2$ 条线段，以及最多 $\lfloor (k-2)/5 \rfloor + 1 \leqslant \lceil k/5 \rceil$ 个重数为 1 的分叉点。

每次迭代都只需常数时间。因此，将点集P中的点旋转并排序需要 $O(k \log k)$ 时间，之后算法的其余部分需要线性时间。 □

5 结论

一个自然的开放问题是改进已给出的上界，或改进关于$\pi(n)$、 $\tau(n)$和 $\rho(k)$的已知下界。以下是进一步改进 $\pi(n)$和 $\tau(n)$的一些方向：

- 在引理 2 的证明中，我们使用了一个 5-帽或 5-杯，因此每次迭代都必须扫描 21 个点（这是 Erd˝os 和 Szekeres 的结果所致）。如果能够改用 4-帽或 4-杯，就可以进一步改进 $\pi(n)$的上界。

- 在定理 2 的证明中，我们的迭代算法在除最后一种情形外的所有情形中，都用 3 条边覆盖 4 个点；最后一种情形（其中 CH(Q) 有四个顶点，且 a位于 $\triangle rbc$中）则用 4 条边覆盖 5 个点。$4n/5$ 是 $\tau(n)$上界的来源。如果能够证明这种情形不会频繁发生（例如，证明它不会连续出现在三次迭代中，或者为点选择不同的排序），就能略微改进 $\tau(n)$的上界。

参考文献

[1] A. Aggarwal、D. Coppersmith、S. Khanna、R. Motwani 和 B. Schieber。《角度度量旅行商问题》。*SIAM* 计算杂志，29(3):697–711，1999年。另见$SODA'97$。[2] O. Aichholzer、S. Cabello、R. F. Monroy、D. Flores-Pe˜naloza、T. Hackl、C. Huemer、F. Hurtado 和 D. R. Wood。几何图中的边删除与非交叉构形。离散数学与理论计算机科学，12(1):75–86，2010年。[3] O. Aichholzer、F. Duque、R. F. Monroy、O. E. Garc´ıa-Quintero 和 C. Hidalgo-Toscano。改进直线型与伪直线交叉常数的持续项目。图算法与应用杂志，24(3):421–432，2020年。[4] E. M. Arkin、Y. Chiang、J. S. B. Mitchell、S. Skiena 和 T. Yang。关于最大散布旅行商问题。*SIAM* 计算杂志，29(2):515–544，1999年。另见$SODA'97$。[5] E. M. Arkin、J. S. B. Mitchell 和 C. D. Piatko。最少链路守望者巡游。信息处理快报，86(4):203–207，2003年。[6] S. Arora。欧几里得旅行商问题及其他几何问题的多项式时间近似方案。*ACM* 杂志，45(5):753–782，1998年。[7] S. Bereg、P. Bose、A. Dumitrescu、F. Hurtado 和 P. Valtr。以最少转弯次数遍历一个点集。离散与计算几何，41(4):513–532，2009年。另见 $SoCG'07$。

[8] A. Biniaz。欧几里得瓶颈有界度生成树比率。离散与计算几何，67(1):311–327，2022年。另见 SODA'20。[9] J. Cern´y、Z. Dvor´ak、V. Jel´ınek 和 J. K´ara。几何图中的非交叉哈密顿路径。离散应用数学，155(9):1096–1105，2007年。[10] T. M. Chan。欧几里得有界度生成树比率。离散与计算几何，32(2):177–194，2004年。另见 SoCG 2003。[11] J. Chen、Q. Huang、I. Kanj 和 G. Xia。点线覆盖问题的近最优算法。CoRR，abs/2012.02363，2020年。[12] M. J. Collins。以最少转弯次数覆盖一个点集。国际计算几何与应用期刊，14(1-2):105–114，2004年。[13] ´E. Czabarka、O. S´ykora、L. A. Sz´ekely 和 I. Vrto。双平面交叉数。II. 使用概率方法比较交叉数与双平面交叉数。随机结构与算法，33(4):480–496，2008年。[14] E. D. Demaine 和 J. O'Rourke。CCCG 2010年的开放问题。载于《第22届加拿大计算几何会议会刊》，2011年。[15] A. Dumitrescu、D. Gerbner、B. Keszegh 和 C. D. T´oth。平面点集的覆盖路径。离散与计算几何，51(2):462–484，2014年。[16] P. Erd˝os 和 G. Szekeres。几何学中的一个组合问题。Compositio Mathematica，2:463–470，1935年。[17] S. P. Fekete 和 H. Meijer。关于最小星形树与最大匹配。离散与计算几何，23(3):389–407，2000年。另见 SoCG 1999。[18] S. P. Fekete 和 G. J. Woeginger。平面中的角度受限巡回。计算几何：理论与应用，8:195–218，1997年。[19] D. Flores-Pe˜naloza、M. Kano、L. Mart´ınez-Sandoval、D. Orden、J. Tejel、C. D. T´oth、J. Ur- rutia 和 B. Vogtenhuber。平面着色点集的彩虹多边形。离散数学，344(7):112406，2021年。[20] R. Fulek、B. Keszegh、F. Mori´c 和 I. Uljarevi´c。关于避开点集的多边形。图与组合，29(6):1741–1753，2013年。[21] M. Grantson 和 C. Levcopoulos。以最少直线数覆盖一个点集。载于《第6届算法与复杂性国际会议（CIAC）会刊》，第6–17页，2006年。[22] F. Harary 和 A. Hill。关于完全图中的交叉数。爱丁堡数学学会会刊，13:333–338，1963年。[23] A. O. Ivanov 和 A. A. Tuzhilin。斯坦纳比 Gilbert-Pollak猜想仍未解决：澄清声明。Algorithmica，62(1-2):630–632，2012年。[24] M. Jiang。关于以最少转弯次数覆盖点。国际计算几何与应用期刊，25(1):1–10，2015年。

[25] B. Keszegh. 平面网格的覆盖路径与树. *Geombinatorics Quarterly*, 24, 2014年.[26] S. Langerman and P. Morin. 用物体覆盖物体. 离散与计算几何, 33(4):717–729, 2005. Also in *ESA'02*.[27] S. Loyd. 《*5000*个谜题、把戏与难题大全》. The Lamb Publishing Company, 1914.[28] J. Pach, N. Rubin, and G. Tardos. 平面点集决定许多两两相交的线段. 数学进展, 386:107779, 2021年. Also in *STOC'19*.[29] C. H. Papadimitriou. 欧几里得旅行商问题是NP完全的. 理论计算机科学, 4(3):237–244, 1977.[30] C. Stein and D. P. Wagner. 最少折弯旅行商问题的近似算法. In第*8*届国际整数规划与组合优化会议论文集 (*IPCO*), pages 406–422, 2001.