arXiv:2303.04367v2 [math.DS] 9 Mar 2023

K抛物型仿射阿贝尔作用的 AM-刚性

DANIJELA DAMJANOVIĆ、BASSAM FAYAD 和 MARIA SAPRYKINA

摘要。我们证明了环面上至少含有一个二步生成元的线性抛物型 $\mathbb{Z}^2$-作用 ρ_L 满足以下二分法：(*i*) 任意线性部分为 ρ_L 的仿射 $\mathbb{Z}^2$-作用，都有一个 $\mathbb{Z}$ 因子，该因子要么是恒等映射，要么是真正抛物型，因此不是 KAM 刚性的；或者 (*ii*) 几乎所有线性部分为 ρ_L 的仿射 $\mathbb{Z}^2$-作用，在保体积扰动下都是 KAM 刚性的。

目录

1. 引言、陈述与主要证明概述 2 1.1. 背景与上下文 2 1.2. 主要结果与代表性例子 4 1.3. 丢番图仿射抛物型作用 9 1.4. KAM 刚性 12 1.5. KAM 刚性作用的例子 13 1.6. 定理 C 证明概述 14 1.7. 关于推广与应用的评述 17 1.8. 论文结构 18 2. 定理 C 的证明——迭代部分 18 2.1. 问题的线性化与主要迭代步骤：命题 A 19 2.2. 迭代设置 20 2.3. 迭代方案的收敛 24 2.4. 共轭的体积保持性 25 3. 对偶轨道上的和与双重和的估计 25 3.1. 记号 26 3.2. 二步矩阵的对偶轨道上的和的估计 28 3.3. 双重和的估计。抛物型高秩技巧 29 4. 线性化问题的解。命题 A 的证明 36 4.1. 用余边界逼近 $p : \mathbb{Z}^2 \to C^\infty(\mathbb{T}^d)$ 36 4.2. 命题 D 在截断函数和向量场上的应用 44 4.3. 命题 A 的证明 49 参考文献 52

2010 数学学科分类。37C15, 37C85, 37D30。关键词与短语。局部刚性、群作用、抛物型映射、KAM 方法。

1. 引言、陈述与主要证明概述

1.1. **背景与上下文。** 光滑的（这里我们指 C^∞） $\mathbb{Z}^k$-作用 ρ 作用于光滑流形 M，称为 局部刚性，如果存在一个邻域 $\mathcal{U}$，位于 ρ的光滑 $\mathbb{Z}^k$-作用空间中，使得对每个 M，都存在一个光滑微分同胚 $\eta \in \mathcal{U}$，其定义在 h 上，满足 M，使得 $h \circ \rho(g) \circ h^{-1} = \eta(g)$，对所有 $g \in \mathbb{Z}^k$。

当作用群的秩为 $k = 1$ 时，我们处于经典动力系统（$\mathbb{Z}$-作用）的范畴，在这种情况下，尚无这种强形式的局部刚性存在的例子。此外，已知环面上的仿射映射并不具有局部刚性。

在经典动力系统中，唯一已知证明了较弱形式局部刚性的情形，是丢番图频率向量的环面平移 T_α 在 $\mathbb{T}^d$ 上的情形α （本讨论不涉及模无限模数的刚性）。事实上，由环面平移扰动的 Arnold正规形可知，具有丢番图平均平移向量的 T_α 的保体积扰动 α 与 T_α [A]光滑共轭。我们将这一现象称为*KAM* 刚性。

对于具有 $k \geq 2$ 的 $\mathbb{Z}^k$-作用，情况截然不同，局部刚性更为常见。

对于阿诺索夫（双曲）作用，Katok 和 Spatzier 证明了局部刚性，这是一个重要的突破 [KS]。在这一背景下，主要工具是利用作用的不变几何结构[GK，KS], 此后，这一方法被证明有助于获得具有此类几何结构的更一般类别部分双曲作用的局部刚性 [NT，DK3，W1，W2，VW]。我们指出，阿贝尔部分双曲作用还有许多其他局部和全局刚性结果，本文不一一列举，因为本文的重点是：在不存在任何形式的双曲性、也没有稳健不变几何结构的情况下，研究局部刚性。

在这一背景下，$\mathbb{Z}^k$-作用的两种著名刚性体现是：对同时丢番图环面平移的 KAM 刚性（见定义6） [M，DF，WX，P], 以及环面上高秩线性（和仿射）部分双曲作用的局部刚性[DK]。

同时丢番图环面平移生成的 $\mathbb{Z}^k$-作用可能完全没有丢番图元素，因此单个丢番图平移的结果并不适用；为了获得 KAM 刚性，必须以关键方式利用不同作用生成元之间的交换性。

对于[DK], 中所研究的线性部分双曲作用，导致光滑刚性的关键假设是，这类 $\mathbb{Z}^k$-作用具有高秩。一个由环面自同构构成的 $\mathbb{Z}^k$-作用是高秩的，如果存在一个 $\mathbb{Z}^2$ 子群，使得其所有非零元素都通过遍历自同构作用。该条件等价于作用不存在 $\mathbb{Z}$-因子，即：一个高秩 $\mathbb{Z}^k$-作用不能（即使允许取有限指数子群）分解为由某个（可能不同的）环面上的单个自同构生成的作用。该条件还等价于该作用具有指数混合性，而指数混合性在[DK]中局部刚性的证明里发挥了关键作用。最近，[W3] 中宣布，指数混合性能够为大类部分双曲仿射作用带来局部刚性。

上述两类环面上的作用——一类是由平移生成的椭圆型作用，另一类是部分双曲作用——都属于环面上的一般仿射 $\mathbb{Z}^k$作用。仿射作用是由仿射映射生成的作用，

而仿射映射是线性映射与平移的复合。这类作用在动力学上可能大不相同：它们可以是椭圆型的（作用的线性部分是恒等映射），也可以是部分双曲的（线性部分包含一个部分双曲映射，即具有某些特征值位于单位圆之外的映射），也可以是抛物型的（线性部分通过抛物型映射作用，即所有特征值均为 1 的映射），或者兼具所有这些特征。如果线性部分包含单位根，我们就取作用群中的一个有限指数子群，从而得到上述一般描述。下文中，我们始终假设已通过取有限指数子群消去了单位根。

本文聚焦于抛物作用中最复杂、也最令人惊讶的情形。在这种情形下，作用中的单个元素（即使满足丢番图条件）也不是 KAM 刚性的，而且作用的线性部分也不存在任何混合性。

首先，我们定义线性作用的一种性质，用以区分哪些作用可以作为 KAM 刚性仿射作用的线性部分，哪些则不能。

若存在一个仿射 $\mathbb{Z}^2$-作用 ρ，其线性部分为ρ_L，并且 ρ 的每个 $\mathbb{Z}$-因子（若存在）都由一个非平凡平移生成，则称线性 $\mathbb{Z}^2$-作用 ρ_L 在 $\mathbb{T}^d$ 上未锁定。因此，若对于任意线性部分为 ρ_L 的仿射作用 ρ，都存在一个不是平移的 $\mathbb{Z}$-因子 T_α, $\alpha \neq 0$，则称线性 $\mathbb{Z}^2$-作用 ρ_L 在 $\mathbb{T}^d$ 上锁定；参见定义 4。

我们的分析促使我们针对环面上的一般仿射$\mathbb{Z}^2$-作用提出以下分类问题：

问题 1. 对于任意线性 $\mathbb{Z}^2$-作用 ρ_L 在 $\mathbb{T}^d$ 上，以下二分法是否成立：

(i) 作用 ρ_L 是锁定的；或者 *(ii)* 作用 ρ_L 是未锁定的，并且几乎每个线性部分为ρ_L 的仿射作用 ρ 都是 *KAM* 刚性的。

前面提到的分类结果为上述问题在一大类作用中提供了肯定答案。对于同时丢番图平移作用，其线性部分是恒等映射，因而是未锁定的，所以属于该问题的情形 (ii) 。由于同时满足丢番图条件是一个全测度条件，文献 [M, DF, WX, P] 给出了该情形下这一问题的肯定答案。对于线性部分为高秩部分双曲的仿射作用，其线性部分是未锁定的，因为它完全没有 $\mathbb{Z}$-因子。因此，这些作用也属于类别 (ii)。根据 [DK]，这类作用具有局部刚性性质（因此也具有 KAM 刚性；事实上，这类仿射作用全部具有 KAM 刚性，而不仅仅是几乎全部）。此外，结合这两类作用也能为该问题给出肯定答案：[DF] 证明了环面上全测度集合中的仿射 $\mathbb{Z}^2$-作用具有 KAM 刚性，其中其线性部分是一个高秩作用与恒等映射的直积。

本文的主要目标是开发研究这一问题的新工具，针对抛物型 作用。我们的主要结果表明，对于包含二步元素的抛物作用（见定义 1），这一问题的答案是肯定的。我们希望本文开发的工具能够使我们以完全一般的方式解决分类问题 1 。

在本文中，作用中至少一个元素满足二步假设，这一点对证明至关重要，我们将在 §1.6 中详细讨论。简而言之，原因在于，如果一个二步仿射映射的丢番图平移部分所对应的上同调方程

有解，那么该解就是温和的。对于高步仿射映射，情况并非如此[DFS]。

1.2. **主要结果和代表性示例。** 我们将关注环面上保体积抛物型仿射 $\mathbb{Z}^2$-作用的保体积扰动的局部刚性问题 $\mathbb{T}^d$，其中 $d \in \mathbb{N}$。记 λ 为环面上的 Haar 测度 $\mathbb{T}^d$。

我们先定义一些基本概念。

定义 1。 我们称 $A \in SL(d,\mathbb{Z})$ 是步数为 S 的抛物型映射，如果 $(A-$ 恒等映射$)^S = 0$，并且$(A-$恒等映射$)^{S-1} \neq 0$. 线性部分为 $\mathbb{T}^d$ 的仿射映射 A 定义如下

$$a(x) = Ax + \alpha \mod 1, \quad x \in \mathbb{T}^d,$$

其中 $\alpha \in \mathbb{R}^d$。若仿射映射 a 的线性部分 A 是步数为 S的，则称 a 为步数为 S 的。我们用 $\mathrm{Aff}_S(\mathbb{T}^d)$ 表示所有步数至多为 S的抛物型仿射映射构成的空间。

步数为 S 的仿射抛物型 $\mathbb{Z}^2$-作用于 $\mathbb{T}^d$ 是一个同态 $\rho\colon \mathbb{Z}^2 \to \mathrm{Aff}_S(\mathbb{T}^d)$。我们用 ρ_L 表示由 ρ的线性部分生成的作用。

注意，任何线性部分为幺幂矩阵 $A \in \mathrm{SL}(d,\mathbb{Z})$（即所有特征值均为 1 的矩阵）的仿射映射，对于某个 $S \leq d$，都是步数为 S 的抛物型映射。

设 ρ 是环面 $\mathbb{T}^d$ 上的一个仿射抛物型 $\mathbb{Z}^2$ 作用。那么 ρ 由两个交换的仿射映射 a 和 b 生成，我们将 ρ 简记为其生成元 $\langle a, b\rangle$。a 和 b 的线性部分 A 和 B 也交换。但线性部分的交换性并不足以保证 a 和 b 交换。若 $a(x) = Ax + \alpha$ 模 1，且 $b(x) = Bx + \beta$ 模 1，则换位子 $[a,b]$ 是环面 $\mathbb{T}^d$ 上的一个平移，其平移向量为 $(A - \mathrm{Id})\beta - (B - \mathrm{Id})\alpha$；要使 $[a,b] = \mathrm{Id}$ 成立，该向量必须是整数向量。我们可以选择 a 和 b 到 $\mathbb{R}^d$ 的提升，使得整数向量 $(A-\mathrm{Id})\beta - (B - \mathrm{Id})\alpha$ 为零。因此，不失一般性，我们始终考虑 a 和 b 的提升 $Ax + \alpha$ 和 $Bx + \beta$，使得 $(A-\mathrm{Id})\beta = (B - \mathrm{Id})\alpha$。我们将始终使用这些提升，并分别仍以 a 和 b 表示它们。

我们还将使用简写记号 $A + \alpha$，表示 $\mathbb{T}^d$ 上线性部分为 A、平移部分为 α 的仿射映射。

定义 2. 我们用 $\mathcal{T}(A, B)$ 表示仿射作用中可能的平移部分的集合 (α, β)，其中线性部分为 $\langle A, B\rangle$，即

$$\mathcal{T}(A,B) := \{\alpha, \beta \in \mathbb{R}^d \mid (A - Id)\beta = (B - Id)\alpha\}.$$

给定仿射映射 $a(x) = Ax + \alpha$ 模 1，a 的扰动是环面上的一个微分同胚，它可以提升为 $\mathbb{R}^d$，在此处其形式为

$$F(x) = A(x) + \alpha + f(x)$$

对于某个小的 $\mathbb{Z}^d$-周期向量值函数 f。因此，我们将简单地用 $a + f$ 表示 a 的一个小扰动。我们将关注光滑保体积扰动的集合，并将其记为 $\mathrm{Diff}^\infty_\lambda(\mathbb{T}^d)$。

现在我们定义本文的核心概念：*KAM* 刚性 。请注意，仿射抛物作用总是具有平移因子。因此，我们不能指望它具有任何强于平移所能达到的局部刚性的性质。对于这类作用，我们只能期待 KAM 型局部刚性。

定义 3。 如果存在 $\mathbb{Z}^2$-作用 $\langle a,\ b\rangle$ 使其在保持 λ的扰动下具有 *KAM* 刚性，则称其为 *KAM* 刚性；其中存在 $\sigma\in\mathbb{N},\ r_0\in\mathbb{N},\ r_0\geq\sigma$，且 $\varepsilon>0$ 满足以下条件：
If $r\geq r_0$ 和 $\langle F,\ G\rangle=\langle a+f,\ b+g\rangle$ 是一个光滑的、保持 λ 的 $\mathbb{Z}^2$ 作用，使得

$$\|f\|_r\leq\varepsilon,\quad \|g\|_r\leq\varepsilon,\quad \widehat{f}:=\int_{\mathbb{T}^d}f d\lambda=0,\quad \widehat{g}:=\int_{\mathbb{T}^d}g d\lambda=0, \tag{1}$$

那么存在 $H=Id+h\in Diff^{\infty}_{\lambda}(\mathbb{T}^d)$ 使得 $\|h\|_{r-\sigma}\leq C(a,\ b)\varepsilon$ 并且

$$H\circ(a+f)\circ H^{-1}=a,\quad H\circ(b+g)\circ H^{-1}=b,$$

其中 $C(a,\ b)$ 是一个仅依赖于作用 $\langle a,\ b\rangle$ 的常数。

本文中，我们将简称*KAM* 刚性 为在保持λ的扰动下具有 *KAM* 刚性，因为这是我们所处的唯一情形。

不难找到抛物型可交换作用的例子 $\langle A,\ B\rangle$ 使得所有具有这一线性部分的仿射作用都不是 KAM 刚性的。事实上，交换条件可能会迫使仿射作用对于任意选择的 $(\alpha,\ \beta)\in\mathcal{T}(A,\ B)$ 都具有一个秩一因子，因此无法应用阿诺尔德 KAM 刚性。正如下文的例子所示，当仿射作用的秩一因子为恒等映射或真正抛物型（即具有非平凡线性部分）时，就会出现这种情况。我们称这样的配对为$\langle A,\ B\rangle$ 锁定（见下文定义 4 ）。

令 E_{ij} 表示一个整数矩阵，其第 (i,j) 个位置上的元素为 1，其余元素均为 0。

例 1 (以恒等映射为秩一因子的仿射作用)。 考虑 $\mathbb{T}^3$ 上的线性作用，它由 $A=$ 恒等映射 $+E_{21}$，$B=$ 恒等映射 $+E_{31}$生成。交换条件蕴含，对于所有 $(\alpha,\ \beta)\in\mathcal{T}(A,\ B)$，都有 $\alpha_1=\beta_1=0$。因此，任意仿射作用$\langle A+\alpha,\ B+\beta\rangle$限制在与变量 x_1对应的子环面上时，等于恒等映射（我们称该作用在由变量 $\mathbb{T}_1$ 张成的环面 x_1上投影为恒等映射，即该作用具有恒等因子）。因此，如下文所述，这种仿射作用不是 *KAM* 刚性的。

要了解例 1中的作用为何不是 KAM 刚性的，我们可以运用以下一般事实。

命题 1。 若抛型可交换作用 $\langle A,\ B\rangle$ 是下三角的，且 $\langle A+\alpha,\ B+\beta\rangle$ 满足 $\alpha_1=\beta_1=0$，则 $\langle A+\alpha,\ B+\beta\rangle$ 不是 *KAM* 刚性的。

证明。保持 $b=B+\beta$不变，并将 $a=A+\alpha$扰动为 $F(x_1,\ldots,x_d)=Ax+\alpha+(0,\ldots,0,\varepsilon\sin(2\pi x_1))$。映射 b和 F彼此交换，且 F满足 (1)。要证明 $A+\alpha$ 与 F之间不存在保体积共轭，考虑特殊的二维情形：$a(x_1,x_2)=A(x_1,x_2)=(x_1,x_2+x_1)$，而 $F(x_1,x_2)=(x_1,x_2+x_1+\varepsilon\sin(2\pi x_1))$（一般情形与之并无不同）。定义圆微分同胚 g：$x_1\mapsto x_1+\varepsilon\sin(2\pi x_1)$，以及共轭 $H(x_1,x_2)=(g(x_1)\ x_2)$。显然，H 不保面积，而且容易看出，除平移外，H 是 a 与 F之间唯一的共轭。□

注 1. 注意，若 $\langle a,\ b\rangle$ 有一个维数至少为 2 的恒等映射秩一因子，那么可以直接按照 (1) 对该作用作扰动，使其与仿射作用完全不共轭。为此，只需以保体积的方式扰动恒等因子本身，使得 (1) 成立。

例 2（具有真正抛物型秩一因子的仿射作用）。 假设

$$B = Id + E_{21} + E_{32}.$$

如果 A 是下三角的，且（A–恒等映射） 既不包含 E_{2j}，也不包含 E_{3j} （对任意 j），那么对于任意（α， β） $\in \mathcal{T}$（A， B），我们有 $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$，且 $A + \alpha$ 在通过投影到（x_1， x_2）得到的二维环面上充当恒等映射。于是，仿射作用 $\langle A + \alpha$， $B + \beta\rangle$以二维环面上的斜移（x_1， x_2）$\mapsto$（$x_1 + \beta_1$， $x_2 + x_1 + \beta_2$）为秩一因子，因此不具备 *KAM* 刚性，解释如下。

要了解例2中的作用为何不具备 KAM 刚性，可以使用以下一般事实。

命题2。对于任意 $r \in \mathbb{N}$，对于任意定义在 $\mathbb{T}^d$ 上且满足 $A \neq$ 恒等映射的抛物型仿射映射 $A + \alpha$，对于任意 $\varepsilon > 0$，存在 f 使得

$$\|f\|_r \leq \varepsilon, \quad \widehat{f} := \int_{\mathbb{T}^d} f d\lambda = 0,$$

且 $A + \alpha + f \in \mathit{Diff}^{\infty}_{\lambda}(\mathbb{T}^d)$ 不与 $A + \alpha$ 共轭。

证明。 不失一般性，我们可以考虑二维斜移的情形 $(x_1, x_2) \mapsto (x_1 + \beta_1, x_2 + x_1 + \beta_2)$。此映射可以扰动为 $(x_1, x_2) \mapsto (x_1 + \beta_1 + \varepsilon \sin(2\pi(x_1 + x_2))\ x_2 + x_1 + \beta_2)$，这是一个平移后的经典标准映射，不与斜移共轭。 □

例 1 和 2 中的现象可以归结为：对于任意选取的 $(\alpha, \beta) \in \mathcal{T}(A, B)$，仿射作用 $\langle A + \alpha, B + \beta\rangle$ 都存在一个秩一因子，该因子要么是恒等映射，要么是真正的抛物作用，从而排除了 KAM 刚性。这引出了以下定义。

定义 4 (锁定作用)。 当交换线性作用 $\langle A$， $B\rangle$ 满足：对 $(\alpha$， $\beta) \in \mathcal{T}(A$， $B)$的任意选取，仿射作用 $\langle A + \alpha$， $B + \beta\rangle$ 都具有一个秩一因子，该因子要么是恒等映射，要么是真正的抛物作用（即具有非平凡的线性部分），我们称 $\langle A$， $B\rangle$ 是锁定的。若一个作用不是锁定的，则称其为未锁定。

由命题 1和 2可立即得到如下推论。

推论 3。 若 $\langle A$， $B\rangle$ 是锁定的，则对 $(\alpha$， $\beta) \in \mathcal{T}(A$， $B)$的任意选取，$\langle a$， $b\rangle$ 的作用都不是 *KAM* 刚性的。

本文的主要结果表明，除锁定作用外，对于具有（至少）一个二步生成元的作用，在保持 λ 的扰动下，KAM 刚性对于平移部分的选取几乎必然成立。我们将这一二分法表述如下。

定理 A。 给定一个由抛物矩阵 $\langle A, B\rangle$ 所构成的可交换作用，其中 A 是二步的，则有以下二分法。

(i) 作用 $\langle A, B\rangle$ 是锁定的，因此对于任意选取的 $(\alpha, \beta) \in \mathcal{T}(A, B)$，$\langle a, b\rangle$ 的作用不是 *KAM* 刚性的。*(ii)* 作用 $\langle A, B\rangle$ 是未锁定的，并且对于几乎所有的 $(\alpha, \beta) \in \mathcal{T}(A, B)$选取，$\langle a, b\rangle$ 的作用在保体积扰动下是遍历的且具有 *KAM* 刚性。

对于二步作用的情形，我们有一个更严格的替代结论。

定理 B。 给定一对彼此可交换的 $\langle A,\ B\rangle$ 二步抛物矩阵，我们有以下二分法。

> ***(i)*** 对于任意选取的$(\alpha,\beta)\ \in \mathcal{T}(A,B)$，$\langle a,b\rangle$ 的作用有一个为恒等映射的秩一因子，因此它不是遍历的，也不是局部刚性的。***(ii)*** 对于几乎所有$(\alpha,\beta)\ \in \mathcal{T}(A,B)$的选取，$\langle a,b\rangle$ 的作用是遍历的，并且在保体积扰动下具有 *KAM* 刚性。

推论 3指出，(i) 妨碍 KAM 刚性。(i) 与(ii) 之间的二分法证明是本文的主要结果，我们将在下一节通过以下命题 5 和定理 C更精确地表述。

我们注意到，若将保体积 λ（以及相对于体积的平均值）改为保持任意一个公共不变测度，则这些结论仍然成立。

在以下观察中，我们讨论主要定理的假设为何重要。

观察 1 (KAM 刚性 与局部刚性：为什么需要丢番图条-件？)。 当一个线性 $\mathbb{Z}^2$作用不是高秩时，它有一个秩一因子，可用一对 ⟨恒等映射 C⟩表示。单个线性映射 C 不具有刚性，这意味着在这种情况下，局部刚性只能针对仿射作用来讨论。本文研究在作用的平移向量满足丢番图条件时，非锁定仿射抛物作用的刚性。粗略地说，我们对所有这样的子环面所对应的频率向量施加丢番图条件，在这些子环面上，作用中的某个元素以平移的方式作用。正如我们将在下一节看到的，这类条件可能有有限个，也可能有无限个。不过，无论如何都必须满足某些丢番图条件，因此这里只能讨论 KAM 型刚性。这些必要的丢番图条件源于仿射作用总有一个平移部分（这是因为交换线性映射对有一个特征值为 1 的公共特征子空间，见定义 5 和 §4.1.2）。所用的其他丢番图条件（参见定义 8）是证明中发挥关键作用的自然条件（参见 §4.1.3），尽管目前我们尚不清楚如何证明这些条件是结论成立所必需的（见问题 2）。

观察 2 （关于高步抛物作用：为什么假设一个生成元是二步？）。 假设该作用的一个元素是二步，在证明中起着至关重要的作用。特别是，在归纳 KAM 共轭方案的每一步中定义一个温和的共轭候选项时，这一假设不可或缺。关于这一假设用途的更多细节将在 §1.6 中给出。我们注意到，在这一或许过于严格的假设下开展研究，需要引入一些新思想和新技术。此外，某些现象（如共振）只会出现在两个生成元均为二步的子环面上（见 §1.3）。因此，我们倾向于聚焦于定理 A 所描述的特殊情形，并将一般情形留待未来研究。

观察 3 （从抛物作用到一般仿射作用：我们为何聚焦于抛物作用？）。 如果一个非高秩线性作用 $\langle A,\ B\rangle$ 具有一个秩一因子 ⟨恒等映射 C⟩，其中 C 不具有 1 作为特征值，那么由于交换约束，对于任何线性部分为 $\langle A,\ B\rangle$的仿射作用，恒等映射仍然是一个因子。因此，这些仿射作用的局部刚性也会像线性作用一样失效。基于这一论证，以及高秩作用（即线性部分中的所有元素均为遍历的，因而是部分双曲的）

是局部刚性的 [DK], 这一事实，为了按照 KAM局部刚性对环面上的仿射阿贝尔作用进行一般分类，抛物作用这一情形自然成为亟待解决的核心问题。

观察 4 （ $\mathbb{Z}^k$ 作用的情形，定义在 $k \geq 3$上）。 我们在此使用的相同方法，也能为某些类别的仿射 $\mathbb{Z}^k$-作用提供 KAM 刚性结果，这些作用具有 $k \geq 3$，详见备注 4 。值得注意的是，作用群的秩 k 越高，作用就可能变得越“锁定”。在 $\mathbb{T}^4$ 上最大秩抛物阿贝尔线性作用的一个例子是由恒等映射 Id $\mathbb{Z}^4$生成的 $+E_{12}$-作用、恒等映射 Id $+E_{14}$、恒等映射 Id $+E_{32}$ 以及恒等映射 Id $+E_{34}$。这种作用以最强的意义完全锁定：根本不存在以该作用为线性部分的仿射非线性 $\mathbb{Z}^4$-作用。我们认为，任何 $\mathbb{T}^d$上的最大秩抛物阿贝尔线性作用也都具有同样性质，都会被锁定。在这些情形下不存在 KAM 刚性。这表明，抛物型 $\mathbb{Z}^2$-作用是最有可能具有 KAM 刚性的常见情形。

观察 5 (KAM 刚性中交换性的作用。抛物型高秩技巧)。 与 [M]和 [DK], 一样，我们的局部刚性证明依赖于 KAM归纳共轭方案（参见 §1.6 ，其中概述了该方案）。在方案的每一步，都必须将一个上同调方程组求解到二次误差以内。

在 [M], 中，方程组的每个方程都是圆周旋转上的上同调方程。因此，只要平均值消失，每个方程都有形式解；但由于各个夹角不一定是丢番图的，这些解不一定是温和的。Moser 的主要观察是，余循环关系迫使这些形式解彼此相同且具有温和性。这意味着交换关系使我们能够将方程组求解到二次误差以内，并得到一个温和解。

在 [DK], 中，上同调方程组由若干单独的方程组成；除一个可数的障碍集外，这些方程都有温和解。交换性，或称高秩技巧，用于证明这些障碍可以消除到二次小误差以内。

正如我们将在 §1.6 中详细说明的那样，我们证明抛物作用的 KAM 刚性的方法结合了这两种局部刚性机制。

我们工作的主要挑战，是用抛物型技巧取代部分双曲高秩技巧。为进一步说明这一点，我们不妨冒险给出一段技术性描述；它现在看起来或许晦涩难懂，但在 §1.6 对证明的详细概述以及第 4 节的引言中，都会变得清晰得多。

高秩技巧通常依赖于整数向量（傅里叶频率）在部分双曲矩阵的对偶作用下呈指数增长。此外，[DK] 的高秩技巧的核心机制，是作用的部分双曲性所带来的以下推论：对于一个整数向量 $\bar{m}$ ，若它在对偶作用¯下的轨道上范数最小， A 而该对偶作用来自作用的第一生成元¯，那么可以沿 B 的两个方向（未来或过去）之一进行迭代，使得$\|\bar{A}^k\bar{B}^l m\|$ 始终大于 $c\|m\|$。

我们工作的一个主要难点，是要用抛物作用仅以多项式速率增长这一事实，替代上述论证。更令人棘手的是，事实¯对于某些在其 A轨道上达到最小值的整数向量 $\bar{m}$ ，其

经过 $\bar{B}^l$ 次迭代后， l的范数可能在很长一段时间内沿两个方向都持续减小，然后才开始增大。难点在于，如何通过为 $\bar{B}$选择一个迭代方向，确保双重迭代$\|\bar{A}^k\bar{B}^l m\|$ 始终大于 $\|m\|^\delta$，其中$\delta > 0$与 m (δ 相当， $1/S$ 其中 S 是作用的步数）。高秩技巧的这个抛物型版本见 §3.3），其中作用的“未锁定”性质再次发挥了重要作用。

关于抛物作用的局部刚性结果寥寥无几。一个例子是通过左乘在幂零流形上定义的作用。这类作用是抛物型的，而在 $\mathbb{R}^2$二步幂零流形上的此类作用 [D], 中，在满足丢番图条件时，证明了某种局部刚性。关于海森堡幂零流形上的 $\mathbb{Z}^2$作用，[DT]也得到了类似类型的结果。最近， [ZW], 证明了半单李群齐性空间上的某些大阿贝尔抛物型作用具有强局部刚性性质。

在引言余下部分，我们将给出主要刚性结果的精确定义和表述，并概述相关证明、举例说明，同时讨论可能的应用。

1.3. **丢番图仿射抛物型作用。** 本节将定义作用所需满足的全测度丢番图条件，以确保其具有 KAM 刚性。这些条件结合了两类条件：关于作用的最大平移因子的同时丢番图条件，以及关于作用中特殊元素的平移部分的丢番图条件，我们将这些特殊元素称为共振。

1.3.1. 最大平移因子。

定义 5 (最大平移因子)。 我们称作用 $\langle A, B\rangle$ 具有最大恒等因子，若存在一个维数为 $\mathbb{T}_1$ 的环面 d_1，使得 $\langle A, B\rangle$在此环面上的限制等于恒等映射。作用 $\langle a, b\rangle$ 在此因子上的限制称为 $\langle a, b\rangle$ 的最大平移因子。

定义6 (同时丢番图向量)。 我们称一对向量$(\alpha, \beta) \in \mathbb{T}^d \times \mathbb{T}^d$是同时丢番图的，若存在 γ, $\tau > 0$使得

$$\max\{|1 - e(k, \alpha)|, |1 - e(k, \beta)|\} > \frac{\gamma}{|k|^\tau},$$

其中 $e(m, x) = e^{2\pi i(m,x)}$。我们用 $(\alpha, \beta) \in SDC(\gamma, \tau)$ 表示这一性质。

注意，SDC 向量对在 $\mathbb{T}^d \times$中构成一个 Haar 测度为满测度的集合 $\mathbb{T}^d$.

1.3.2. 共振向量。 接下来我们将使用与线性部分相对应的对偶作用 $\langle A, B\rangle$，其在 $\mathbb{Z}^d$ 上诱导。对于矩阵 A，在 $\mathbb{Z}^d$ 上的对偶作用记作

$$\bar{A} := (A^{tr})^{-1}, \quad \bar{A} = \mathrm{Id} + \widehat{A}.$$

对于一般的 m 和 $(k, l) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, $\bar{A}^k\bar{B}^l m$ 有一个多项式表达式（见引理14）。然而，如果 m满足存在一对 $(k, l) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \setminus \{(0,0)\}$ 满足$\bar{A}^k\bar{B}^l m = m$，那么，由于这意味着 $\bar{A}^{ik}\bar{B}^{il} m = m$ 对所有 $i \in \mathbb{Z}$都成立，我们必然有（即使 A和 B 的步数更高）：

$$\bar{A}^k\bar{B}^l m - m = k\widehat{A}m + l\widehat{B}m = 0.$$

因此，若 $Am \neq m$ 或 $Bm \neq m$，我们可以为这样的 m 唯一确定一对 $(k,l) \in \mathbb{N}\times\mathbb{Z}$，使得以下情况之一成立：$(k,l) = (1,0)$，或 $(k,l) = (0,1)$，或 k 与 l 互素且 $k > 0$。对于所有这些情形，我们都使用相同的记号 $k \wedge l = 1$，并称 m 是共振的，而 (k,l) 是其对应的共振对。注意，由于交换性，如果 m 是共振的，那么 m 在 $\langle A,B\rangle$-轨道上的任何其他整数向量也都是共振的，且具有相同的共振对。因此，共振对对应于轨道，而非单个向量。我们将上述讨论总结如下

定义7（共振向量与共振对）。 任何满足 $m \in \mathbb{Z}^d \setminus \{0\}$ 且 $\bar{A}^k\bar{B}^l m = m$ 对某个 $(k,\ l)$ 成立，而 $\bar{A}m \neq m$ 或 $\bar{B}m \neq m$成立的向量，称为共振向量。我们采用以下记号：

$\mathcal{C}_2(k,\ l)$ 表示与共振对 $(k,\ l)$ 相关的所有共振 m 的集合，$\mathcal{C}_2 = \mathcal{C}_2(A,\ B) = \bigcup_{k\wedge l=1}\mathcal{C}_2(k,\ l)$ 表示所有共振向量的集合，$\mathcal{Q}(A,\ B)$ 表示所有共振对 $(k,\ l) \in \mathbb{Z}^2$的集合。

下面的引理表明，共振对的范数不超过其任一对应共振的范数。因此，在 $\langle A,B\rangle$-轨道上，它不超过其中最小的一个。

引理 4. 设 $a = A + \alpha$ 和 $b = B + \beta$ 是可交换仿射抛物映射。若$(k,\ l) \in \mathbb{Z}^2$ 是与共振 m 相关联的（唯一）一对，如定义 *8*所述，那么存在 $C = C(A,\ B) > 0$ 使得

$$C(|k| + |l|) \leq |m|.$$

证明。设 m 是一个共振向量，即设 $\bar{A}^k\bar{B}^l m = m$。如前所述，这意味着 $kAm = -lBm$。现在考虑以下两个整数向量：$x = Am$和$y = Bm$。根据假设，k 和 l 互素。这尤其意味着，向量 x 的每个分量 x_j 都能被 l整除。因此，$x_j \geq |l|$。所以，存在一个常数 $C(A)$（取决于 A），使得 $|m| \geq C(A)|l|$。同理，$|m| \geq C(B)|k|$，这就得到了所述结论。□

定义 8 (丢番图共振)。 设 $\langle a,\ b\rangle$ 是一个仿射抛物型 $\mathbb{Z}^2$-作用。数值 $\alpha_{k,l} = a^k b^l - A^k B^l$ 称为该作用中元素 $(k,\ l)$ 的平移部分。

如果共振 $m \in \mathcal{C}_2(k,\ l)$ 满足以下条件，则称其为$(\gamma,\ \tau)$-丢番图：

$$|1 - e(m,\alpha_{k,l})| > \frac{\gamma}{|m|^\tau}. \tag{2}$$

注 2。 正如本节末尾的例子所示，给定作用的共振向量和共振对的集合可能为空、有限非空或无限。

1.3.3. 作用的丢番图性质。 现在我们可以定义满足主要局部刚性结果的丢番图抛物型仿射作用。

定义 9 (丢番图作用)。 给定 $\gamma,\ \tau > 0$ 以及一个抛物型仿射 $\mathbb{Z}^2$-作用$\langle a,\ b\rangle$，其中 a 为二步，我们称 $\langle a,\ b\rangle$ 是 $(\gamma,\ \tau)$-丢番图的，若满足：

(1) $\langle a、\ b\rangle$ 的最大平移因子是 (γ,τ)-同时丢番图的（如定义 *6* 所述），且 ***(2)*** 每个共振 $m \in \mathcal{C}_2(A,B)$ 都是 (γ,τ)-丢番图的（如定义 *8* 所述）。

例 3. 设 $\langle A, B\rangle$ 是由 $A = Id + E_{21}$ 和 $B = Id$ 生成的 $\mathbb{T}^2$ 上的作用。仿射作用 $\langle A + (\alpha, 0)\ B + (0, \beta)\rangle$ 是 (γ, τ)-丢番图的，当且仅当 α 和β 都是 (γ, τ)-丢番图的。

证明。 事实上，在这种情形下 $\alpha_1 = \alpha$， $\beta_1 = 0$ 是该仿射作用的平移部分，而 SDC 条件简化为关于 α 的丢番图条件。

在这个例子中，所有满足 $m_2 \neq 0$ 的向量（m_1, m_2）都与同一个共振对 (0, 1) 共振，而关于共振的丢番图条件简化为关于 β的丢番图条件。 □

下面这个简单的观察是建立定理 A和 B中的二分定理的重要一步。

命题 5。 固定 $\tau > d$。设 $\langle A,\ B\rangle$ 是一个线性抛型 $\mathbb{Z}^2$-作用。我们有以下两种可能：

(i) $\langle A,\ B\rangle$ 如定义 4 中所述是锁定的。*(ii)* $\langle A,\ B\rangle$ 未锁定，并且对于几乎所有的 $(\alpha,\ \beta) \in \mathcal{T}(A,\ B)$， $\langle A + \alpha,\ B + \beta\rangle$ 是$(\gamma,\ \tau)$-丢番图的，其中某个 $\gamma > 0$。

若 A 和 B 均为二步，则另一种情形(i) 可归结为存在一个恒等的秩一因子。

注3. 请注意，命题第一部分中的任何生成元都不需要满足二步假设。

命题 5 的证明。 考虑由一对平移向量生成的 $\langle a, b\rangle$ 的最大平移因子，这对平移向量记为 $(\alpha^{(1)}, \beta^{(1)})$。条件 $(\alpha, \beta) \in \mathcal{T}(A, B)$对 $\mathbb{Z}$ 施加了一些关于向量 $\alpha^{(1)}$ 和 $\beta^{(1)}$的坐标之间的关系。于是有两种可能的情形。

第一种情形是，存在一个向量 $\bar{k} \in \mathbb{Z}^{d_1} \setminus \{0\}$，使得对于所有满足 $(\alpha, \beta) \in \mathcal{T}(A, B)$ 的情况，$(\bar{k}, \alpha^{(1)}) = (\bar{k}, \beta^{(1)}) = 0$；此时，采用满足 $X_1 := (\bar{k}, x^{(1)})$ 的坐标变换，将得到一个一维秩一因子，在该因子上作用为恒等映射。

如果第一种情形不成立，那么对于所有 $k \in \mathbb{Z}^{d_1} \setminus \{0\}$，$(k, \alpha^{(1)})$ 或 $(k, \beta^{(1)})$ 中至少有一个在 $\mathcal{T}(A, B)$ 上不恒为零。在这种情形下，我们可以将整数集 $\mathbb{Z}^{d_1} \setminus \{0\} = \mathcal{Z}_1 + \mathcal{Z}_2$ 划分，使得对于 $k \in \mathcal{Z}_1$，$(k, \alpha^{(1)})$ 在 $\mathcal{T}(A, B)$ 上不恒为零；而对于 $k \in \mathcal{Z}_2$，$(k, \beta^{(1)})$ 在 $\mathcal{T}(A, B)$ 上不恒为零。现在，对于任意 $k \in \mathcal{Z}_1$ 和任意 $\delta > 0$，我们有 $\lambda\{\alpha^{(1)} \in \mathbb{T}^{d_1} :\ \|(k, \alpha^{(1)})\| \leq \delta |k|^{-d_1 - 1}\} \leq c\delta |k|^{-d_1 - 1}$，其中 $c = c(d)$ 为一个常数。对所有 $k \in \mathcal{Z}_1$ 求和，再对所有 $k \in \mathcal{Z}_2$ 求和，并利用阿尔泽拉-阿斯科利定理，我们得到：对于几乎每个 $(\alpha, \beta) \in \mathcal{T}(A, B)$，存在 $\gamma > 0$，使得对每个 $k \in \mathcal{Z}_1$，都有 $\|(k, \alpha^{(1)})\| \geq \gamma |k|^{-d_1 - 1}$；并且对每个 $k \in \mathcal{Z}_2$，都有 $\|(k, \beta^{(1)})\| \geq \gamma |k|^{-d_1 - 1}$。这意味着，对于几乎每个 $(\alpha, \beta) \in \mathcal{T}(A, B)$，$\langle a, b\rangle$ 的最大平移因子是 (γ, τ)-同时丢番图的。

接下来，我们考虑一个共振 $m \in \mathcal{C}_2(A, B)$，并令 $k \wedge l = 1$ 为其唯一对应向量 $\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$，满足 $kAm + lBm = 0$。于是有两种可能的情形。

情形 1. 存在一个共振 m，使得对每个 $(\alpha, \beta) \in \mathcal{T}(A, B)$，都有 $e(m, \alpha_{k,l}) = 1$。下面给出证明。

引理 6. 在情形 *1* 的假设下，作用 $\langle a,\ b\rangle$ 具有一个真正抛物型的秩一因子。

证明。 设 $m \in \mathcal{C}_2(k,l)$ 是一个共振，此时对于 $A' := A^k B^l$，我们有 $\bar{A}'m = m$，$\bar{B}m = m$，而 $Am \neq m$ 或 $Bm \neq m$。为明确起见，假设 $Bm \neq m$。我们还知道，对于 $\alpha' := \alpha_{k,\,l}$，$e(m,\alpha') = 1$。

经过变量替换后，我们可以假设 m 是基向量之一，也就是说，$m_i = 0$ 对于 $i \neq i_1$ 和 $m_{i_1} = 0$。我们还假设矩阵 B 和 A' 的主对角线上均为 1。

由于 $Bm \neq m$ 和 $A'm = m$，我们有 B 含有某个 $E_{i_1 i_2}$，而 A' 不含任何 $E_{i_1 *}$（其中 $*$ 遍历所有可能的指标）。再经过一次坐标变换，我们可以假设 B 除了 $E_{i_1 i_2}$ 之外不含任何其他 $E_{i_1 *}$。（事实上，如果 B 含有 $\sum_{j=2}^{s} k_j E_{i_1 i_j}$，我们可以对 $k \neq i_2$ 使用坐标变换 $x_{i_2} \mapsto \sum_{j=2}^{s} k_j x_{i_j}$、$x_k \mapsto x_k$。）

由 a' 与 b 的交换性可知，$\alpha'_{i_2} = 0$，且 A' 不包含任何 $\widehat{\widehat{E_{i_2 *}}}$（否则 $\widehat{\widehat{A'B}}$ 将不包含任何 $E_{i_1 *}$，而 $\widehat{\widehat{BA'}}$ 则会包含一些）。此外，假设 $e(m,\,\alpha_{k,\,l}) = 1$ 可转化为 $\alpha'_{i_1} = 0$。

如果 B 不含有形如 $E_{i_2 *}$ 的元素，我们便可得出结论：作用 $\langle a',\ b\rangle$，其中 $a' = a^k b^l$ 在环面 $\mathbb{T}_{i_2,\,i_1}$ 上分解，a' 在该环面上作为恒等映射作用，而 b 是真正抛物型的。

如果 B 有一个元素 $E_{i_2 i_3}$，那么同样经过坐标变换后，我们可以假设 B 除了 $E_{i_2 i_3}$ 之外不包含任何其他 $E_{i_2 *}$。

与之前一样，我们有两个推论：1） $\alpha'_{i_3} = 0$；2） A' 不包含任何 $E_{i_3 *}$（否则 $\widehat{\widehat{A'B}}$ 将不包含任何 $E_{i_2 *}$，而 $\widehat{\widehat{BA'}}$ 则会包含一些）。

如果 B 没有 $E_{i_3 *}$ 这一类型的元素，我们就得出结论：环面 $\mathbb{T}_{i_3,\,i_2,\,i_1}$ 是作用 $\langle a', b\rangle$ 的一个因子，在该因子上 $a' = a^k b^l$ 的作用是恒等映射，而 b 是真正抛物型的。

通过归纳论证，我们得到了该引理的证明。 □

若情形 1 不成立，那么我们必处于以下情形：

情形 2. 对于每个共振 m，存在 $(\alpha,\beta) \in \mathcal{T}(A,B)$，使得 $e(m,\alpha_{k,\,l}) \neq 1$，那么根据 $\alpha_{k,\,l}$ 关于变量 (α,β) 的线性性，我们可知 (α,β) 的测度 $\in \mathcal{T}(A,B)$，使得

$$|1 - e(m,\alpha_{k,l})| \leq \frac{\gamma}{|m|^{d+1}}$$

小于 $c\frac{\gamma}{|m|^{d+1}}$，其中 $c = c(d)$ 为常数。对所有可能的共振求和并使用阿尔泽拉-阿斯科利定理，我们得到：对于几乎每个 $(\alpha,\beta) \in \mathcal{T}(A,B)$，都存在 $\gamma > 0$，使得每个共振都是 $(\gamma, d+1)$ 丢番图的。

从引理 6 的证明可知，若该作用是二步的，则情形 1 不可能发生。

□

1.4. **KAM 刚性。** 现在我们可以精确表述定理 (ii) 的第 A 和 B 部分。以下是我们的主要刚性结果。

定理 C. 设 $\langle A,B\rangle$ 是一个未锁定的线性抛物型 $\mathbb{Z}^2$-作用，且至少有一个二步生成元。若 $(\alpha,\beta) \in \mathcal{T}(A,B)$ 满足 $\langle a,b\rangle$ 是某个 (γ,τ)-丢番图的，并且 $\gamma > 0$ 和 $\tau > 0$，则 $\langle a,b\rangle$ 是 *KAM* 刚性的。

定理 A 和 B 可直接由定理 C 和命题 5 推出。

注 4. 如果一个仿射 $\mathbb{Z}^k$-作用 $k \geq 3$ 包含一个至少有一个二步生成元的丢番图仿射 $\mathbb{Z}^2$-作用，那么定理 *C* 便直接推出该 $\mathbb{Z}^k$-作用的 *KAM* 刚性。这是因为定理 *C* 为该 $\mathbb{Z}^2$-作用

所给出的光滑共轭会将整个 $\mathbb{Z}^k$-作用扰动共轭过去。这一简单观察是丢番图 $\mathbb{Z}^2$-作用的交换性和遍历性的结果。这一论证已在 [DK] （见 [DK]中的引理 *3.2*）中使用，用于从某个 $\mathbb{Z}^k$-作用的 $\mathbb{Z}^2$-子作用的局部刚性得出该作用的局部刚性。

1.5. **KAM 刚性作用的例子**。

首先，让我们回到简单的例子 3。

命题 7。 设 $\langle A,\ B\rangle$ 是 $\mathbb{T}^2$ 上的作用，由 $A=$ 恒等映射 $+E_{21}$ 和 $B=$ 恒等映射给出。若 α 和 β 是丢番图数，则仿射作用 $\langle A+(\alpha,0)\ B+(0,\beta)\rangle$ 是 *KAM* 刚性的。

证明。正如前面所解释的，当 α_1 是丢番图数时，该作用的平移因子是 SDC。另一方面，所有共振都具有 $(m_1,m_2)=(0,m_2)$,$m_2\neq 0$ 的形式，对应的共振对为 (0,1)。由于 $\alpha_{0,1}=(0,\beta)$，我们得到如下结论。当 β 是 (γ,τ)- 丢番图数时，条件 (2) 对常数 (γ,τ) 成立。因此，定理 C 蕴含 $\langle A+(\alpha,0)\ B+(0,\beta)\rangle$ 的 KAM 刚性。□

显然，如果 α 是刘维尔数，相应的作用就不是 KAM 刚性的。为此，只需将 $A+(\alpha,0)=(x_1,x_2)\mapsto(x_1+\alpha,x_2+x_1)$ 扰动为 $(x_1,x_2)\mapsto(x_1+\alpha,x_2+x_1+\varepsilon\varphi(x))$，其中 $\varphi(x)$ 是一个零均值光滑函数，它不是关于夹角为 α 的旋转的余边界。然而，尽管我们的 KAM 刚性证明大量使用了共振的丢番图性质，我们仍无法确定 β 满足丢番图条件是否是 KAM 刚性的必要条件。

问题 2. 作用 $\langle A+(\alpha,\ 0)\ B+(0,\ \beta)\rangle$ 是否为 *KAM* 刚性，α 满足丢番图条件且 β 是刘维尔数时？

下面的例子给出了一种 KAM 刚性作用，它具有无穷多个共振，且有无穷多个共振对。

命题 8。 令 $\langle A,\ B\rangle$ 为 $\mathbb{T}^7$ 上的如下作用：$A=$恒等映射 $+E_{52}+E_{61}+E_{73}$ 和$B=$恒等映射 $+E_{42}+E_{43}+E_{64}+E_{73}$。对于几乎所有的 $(\alpha,\ \beta)\in\mathcal{T}(A,\ B)$，仿射作用$\langle A+\alpha,\ B+\beta\rangle$ 是 *KAM* 刚性的。

证明。交换条件 $(\alpha,\beta)\in\mathcal{T}(A,B)$ 成立，当且仅当 $\beta_1=\alpha_4$、$\beta_2=0$ 和 $\beta_3=\alpha_3=-\alpha_2$ 成立。该作用的平移因子是对应于前三个坐标的三维环面，平移为 $\alpha^{(1)}=(\alpha_1,\alpha_2,-\alpha_2)$ 和 $\beta^{(1)}=(\alpha_4,0,-\alpha_2)$。容易看出，若向量 (α_1,α_2) 和 $(\alpha_4,-\alpha_2)$ 是丢番图的，则数对 $(\alpha^{(1)},\beta^{(1)})$ 满足 SDC。事实上，记 $\|x\|$ 为 $x\in\mathbb{R}$ 到整数的最近距离，对于任意 $m=(m_1,m_2,m_3)$，有：

$$\begin{aligned}\max(\|(m,\alpha^{(1)})\|,\|(m,\beta^{(1)})\|)&=\max(\|m_1\alpha_1+(m_2-m_3)\alpha_2\|,\|m_1\alpha_4-m_3\alpha_2\|)\\&\geq\gamma(|m_1|+|m_2-m_3|)^{-\tau}+\gamma(|m_1|+|m_3|)^{-\tau}\\&\geq\gamma'|m|^{-\tau'}.\end{aligned}$$

现在来讨论共振。它们是满足 $m_6=0$ 的 m 的集合，并且两个向量 $v_m=(m_5,m_7)$ 和 $w_m=(m_4,m_4+m_7)$ 共线，且不同时为零。因此，m_5 或 m_7 至少有一个不为零。共振对是满足 $k_mv_m+l_mw_m=0$ 的配对 $k_m\wedge l_m=1$。例如，

$$m=(m_1,m_2,m_3,n+1,n,0,n(n+1)),\quad(m_1,m_2,m_3,n)\in\mathbb{Z}^3\times\mathbb{Z}^*$$

是一个共振向量，其共振对为 $(n+1,-n)$。最后，固定任意一个共振 m，注意到由于对 α_5、α_7 没有任何限制，且 m_5 或 m_7 至少有一个不为零，因此对于几乎所有的 $(\alpha,\beta)\in\mathcal{T}(A,B)$，$\alpha_{k_m,\ l_m}$ 上的丢番图条件都成立。□

1.6. **定理 C 的证明概述。** 证明基于一个归纳方案，通过连续共轭将扰动作用 $\langle F,\ G\rangle$（其中 $F=a+f$ 和 $G=b+g$）变为仿射作用 $\langle a,\ b\rangle$。与 KAM 方法中的通常情形一样，在归纳的每一步，都要在导数损失的情况下求解线性化共轭方程；这种损失可能由小除数或其他原因引起。方案的二次收敛速度抵消了这种 先验上有害的影响。

在我们的背景下，线性化共轭方程通常称为上同调方程，其基本形式如下：

$$\begin{aligned} h\circ a - Ah &= f,\\ h\circ b - Bh &= g. \end{aligned} \tag{3}$$

在我们的背景下，与经典 KAM 方案相比，主要有以下两点不同：

(i) 上述各个作用生成元对应的上同调方程（3）通常无解，因为存在无限可数的障碍集。Katok 和 Robinson [KR]的研究通过二步例子首次揭示了这些障碍。（在[FF]中也发现，任意步幂零流都存在大量分布障碍。另请参见 [CF]，其中研究了阿贝尔作用上同调方程的若干特定情形。）

(ii) 对于三步及更高步的抛物型仿射映射，若平移部分满足丢番图条件，则只要方程组（3）中的某个方程有解，且右端光滑，该解便是光滑的。然而，导数损失的阶数并不固定（换言之，线性化上同调方程是稳定的，但解并非驯性）。

在另一项研究中，我们证明，对于最简单的 C^r 三步映射$(x_1,x_2,x_3)\ \mapsto(x_1+\alpha_1,\ x_2+x_1,x_3+x_2)$，导数损失大约为 $r/2$，即使丢番图角再理想也不例外 α_1。这与二步情形有显著差异；对于二步情形，[KR] 证明了在解存在时，解具有驯性。

为处理(i)，通常的做法是利用交换关系，为上同调方程寻找近似解。过去，这一方法已用于两个相关问题。首先，Moser [M], 证明，在保持旋转数的条件下，SDC 对易圆周旋转是局部刚性的。这一结果被推广至高维，见[DF、WX和P]。其次，Damjanović 和 Katok 在[DK] 中证明了环面上高秩部分双曲仿射阿贝尔作用的局部刚性（也就是说，这种作用的所有元素都是遍历自同构，或具有此类线性部分的仿射映射）。

在 Moser 的情形中，目标是将一对交换的 $R_{\alpha_i}+f_i,\ i=1$ 线性化。上同调方程具有如下形式：$h(x+\alpha_i)-h(x)=f_i(x)-\int f_i$。它们在生成元 R_{α_i} 上存在形式解，而交换关系使我们能够将形式解提升为近似驯性解。事实上，莫泽技巧是针对每个傅里叶模态 n，利用线性化共轭方程中的一个方程或另一个方程，定义共轭映射的相应系数 h_n

映射，根据 SDC 条件所保证的、对于 $i=1$ 或 $i=2$ 而言哪个 $\|n\alpha_i\|$“不太小”来选择。由此得到一个候选共轭 h，它是驯性的，即与非线性项 f 和 g 的阶相同，且导数阶数有固定损失。此外，交换关系加上 SDC 条件确保所构造的 h 能以二次 误差解出上同调方程（稍微宽泛地使用记号，所谓二次 是指误差的阶为非线性项 f 和 g 的某个幂 $k>1$，且导数阶数有固定损失）。

上述过程使得我们能够实施经典的 KAM 二次迭代方案，而由于保留旋转数这一条件，常数项 $\int f_i$ 的问题得以解决。

在 [DK] 如（3）中的各个方程都有驯性解，前提是一个可数障碍集中的障碍全部消失。每个障碍都可形式化地计算为沿对偶轨道对非线性项的傅里叶系数进行加权求和 f 和 g。在这种情形下，交换关系使我们能够用障碍消失的函数来近似非线性项，且近似误差为二次阶。这一方法被称为“高秩技巧”。同样，此处的近似是二次的，并会造成有限的导数损失。

我们关于抛物作用 KAM 刚性的证明结合了两种局部刚性机制：“莫泽技巧”和“高秩技巧”。作用的平移部分以及共振（即沿对偶作用的某个元素保持不变的傅里叶模）通过一种类似于莫泽技巧的机制来处理。定义 9 中关于作用的丢番图条件在此发挥着关键作用。需要指出的是，将莫泽技巧用于处理共振会带来一些技术难题，并影响整个证明。事实上，对于共振傅里叶模态 m，我们需要使用作用中的元素 F^kG^l，其中（k，l）是与 m 相关联的共振对。这迫使我们在每一步都针对作用中的大量元素，而不仅仅是两个生成元，来执行线性化 KAM 迭代方案。当然，在每一步中，我们无法对所有共振对（k，l）都控制 F^kG^l 中的所有非线性项，因为 k 和 l 可以任意大。幸运的是，与共振模态 m 相关联的共振对的阶为 m （见引理 4）。这意味着，如果在 KAM 方案的某一步中，我们在求得线性化共轭方程的近似解之前，将非线性项截断到 N 阶，那么我们只需对阶为 N 的 F^kG^l 和 l 进行控制。这一点很容易纳入归纳过程，因为 a 和 b 具有抛物型性质。

对于“非共振”的傅里叶模态，这里采用了一种类似于 [DK]的高秩技巧。事实上，对于一个非共振模态 m，我们可以通过 h_m 来定义非线性项的傅里叶系数之和 f，沿仿射作用的二步生成元的对偶轨道，取“良好方向”上的和：即沿未来或过去求和（与利夫希茨理论中的做法类似）。生成元为二步这一事实意味着，参与这些部分和的傅里叶模会在过去方向或未来方向的求和中增长，从而使我们能够定义一个温和的候选共轭 h，正如[KR]中所观察到的。请注意，上文提到的困难(ii) 表明，若作用中没有任何元素是二步的，那么仅仅是在一般的高步情形下定义一个温和的候选共轭，就已经是一项挑战。与抛物型高秩技巧的适用性相关的其他困难，将在下一段中解释。

一旦 h 构造完成，我们就会发现，只有在特殊模态 $\bar{m}$ 上，也就是沿着¯的对偶轨道中范数最低的模态，所构造的 A h才无法解上文的上同调方程 a （在 $\bar{m}$处，良好方向会从过去切换到未来）。在 $\bar{m}$ 处求解方程时的误差，确实就是沿着 $\bar{m}$对非线性项的傅里叶系数求得的完整和，其中非线性项沿 $\bar{A}$取值。这些和的形式为 $\Sigma_m^A(f)$ $=\sum_{k\in\mathbb{Z}} f_{\bar{A}^k m}\lambda_m^{(k)}$（其中 $\lambda_m^{(k)}$是模为一的“无害”乘子，与作用的平移部分有关；精确定义见第3.1 节），它们就是无法求解上述上同调¯方程的障碍 A。

高秩技巧利用交换性证明，这个完整的和等于二次函数的双重和 ϕ ，该函数衡量这对(f,g) 在 (3) 中未能在作用 $\langle a,b\rangle$ 之上构成余循环的误差（更多说明见第2.1 节和第4.1.4 节）。将这些障碍表示为以下双重和似乎很有成效：

$$\Sigma_m^A(f)=\sum_{l\geq 0}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\phi_{\bar{A}^k\bar{B}^l m}\lambda_m^{(k)}\mu_m^{(l)}=-\sum_{l\leq -1}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\phi_{\bar{A}^k\bar{B}^l m}\lambda_m^{(k)}\mu_m^{(l)}. \tag{4}$$

与部分双曲情形相比，我们这里控制双重和背后的现象有一个重要区别。在部分双曲高秩情形中，文献 [DK], 所讨论的双重和中出现的傅里叶模态¯，在两个方向之一（对 B而言是未来或过去）上基本上会递增，这是由于作用具有部分双曲性，并立即导出方程 (3) 的近似解，其二次误差只需有限地损失导数的数量。

在我们的情形中，由于作用中存在一个高步生成元，双重求和中出现的对偶轨道可能在任一方向上都没有增长。事实上，对于某些模态，这种情况总会发生： m在（4）中出现的双重轨道会从 $|m|$ 到 $|m|^{1/(S-1)}$双向衰减，其中 S 是作用的步数。这就是上文提到的困难(ii) 。

我们论证的一个关键要素，是证明这样一个事实：对于至少含有一个二步生成元的未锁定抛物型线性作用，从 $|m|$ 到 $|m|^{1/(S-1)}$的衰减已是最严重的情况。我们的证明利用了二步元素的存在，而将其推广到更高步作用，则是研究一般情形时面临的另一项挑战。

这意味着，使用我们构造的共轭变换 h 来求解（3）中的第一个方程时，所得误差是二次的，但会损失一定比例的所考虑导数的数量（对于步数为 $proportion$的映射，该比例为 $(S-2)/(S-1)$ 步数为S 的映射），即便丢番图条件再理想也不例外。

好消息是，这种导数损失只出现在二次误差中，而不会影响共轭映射的估计（在这方面，一个生成元上的二步假设至关重要）。因此，这种重要的导数损失不会影响 KAM 方案的收敛；只需对误差的C^0 范数进行二次控制即可（事实上， L^2 就足够了）。

一旦证明 h 将第一个方程（3）满足到二次误差的程度（以C^0 范数计），就可以再次利用交换关系以及 A 为二步的这一事实，证明 h也将第二个方程满足到二次误差的程度（见第 4.1.1节）。

最后，我们指出，方程（3）通常可以求解，唯有一组 $2d$ 常数项除外，它们对应于 f 和 g的平均值。与 Moser 研究交换圆周微分同胚的情形不同，这些常数并非都与某些动力学不变量相关。不过，我们可以利用受扰动映射的体积保持性

以及非线性项的零平均值，在 KAM 方案的每一步固定共轭微分同胚的平均值，从而将常数项吸收到二次误差中。KAM 方案的这一第三个差异，将在 §2.2 末尾详细说明。

如前所述，若将保持体积 λ 改为保持 F 和 G的任意共同不变测度，我们的论证仍然成立。只需在全文中将λ替换为任意共同不变测度即可。事实上，在线性化的证明中，我们并未用到 λ 在 a 和 b下不变。此外，由于对某些 k 和 l， $a^k b^l$是唯一遍历的，线性化实际上意味着作用 $\langle F, G\rangle$存在唯一的不变测度，且该测度是 Haar 测度经共轭映射拉回所得。

1.7. **关于扩张与应用的评论。** 我们的结果自然引出了这样的问题：本文所发展的方法在多大程度上适用于更一般的情形。下面对此作一些评论。

◇ 关于非阿贝尔作用的应用。值得注意的是，我们的定理 C 可以直接应用于某些可解仿射作用。阿贝尔-by-循环群 G 是一个有限呈示无挠群，且有短正合列 $0 \to \mathbb{Z}^k \to G \to \mathbb{Z} \to 0$ （关于 ABC 群的详细讨论，见 [WX] ）。在此背景下，我们称子群 $\mathbb{Z}^k$ 为 G的阿贝尔部分。设 $\rho : G \to \mathrm{Aff}(\mathbb{T}^d)$ 是 G 的一个仿射作用，且 $\rho(\mathbb{Z}^k)$ 为抛物型。那么，由作用 $\rho(\mathbb{Z}^k)$ 的 KAM 刚性结果，可以推出 G 作用的 KAM 刚性。此前 [WX] 已采用这种方法，从阿贝尔部分的 KAM 刚性推出 ABC 作用的 KAM 刚性，但当时只考虑阿贝尔部分 $\rho(\mathbb{Z}^k)$ 由平移生成的特殊情形。近来，文献 [P2], 研究了以下特定 ABC 群在 $\mathbb{T}^3$ 上的作用： $\Gamma = \langle U, V, F : UV = VU, FU = U^2 VF, FV = UVF\rangle$。 Γ 作用在 $\mathbb{T}^3$ 上的一个例子是，当 $U = \mathrm{Id} + E_{12}$ 且 $V = \mathrm{Id} + E_{13}$ 时

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

阿贝尔作用 $\langle U, V\rangle$ 是未锁定的，因此，具有此类线性部分的丢番图仿射作用具有 KAM 刚性，这由定理 C 得出，进而意味着，具有此类阿贝尔部分的仿射 Γ作用也具有 KAM 刚性。

与我们的二分结果类似，我们希望运用本文提出的方法，对具有抛物型阿贝尔部分的线性 ABC 作用 $\rho_L : G \to \mathrm{Aut}(\mathbb{T}^d)$ 得到分类结果。大致有 3 种主要情形：

(i) ρ_L 是锁定的：对于每个线性部分为 ρ_L 的仿射 G 作用 ρ， ρ 都有一个秩一因子，该因子要么是恒等映射，要么是真正的抛物作用。

(ii) ρ_L 未锁定，但具有锁定的阿贝尔部分：对于每个线性部分为 ρ_L 的仿射 G作用 ρ， $\rho(\mathbb{Z}^k)$ 都有一个秩一因子，该因子要么是恒等映射，要么是真正的抛物作用，但 ρ_L 未锁定。

(iii) ρ_L 具有未锁定的阿贝尔部分。

定理 C适用于情形 (iii)。在情形 (ii) 中，尽管定理 C并不直接适用，但我们预期我们的方法，甚至证明中构造解的方法，也适用。

一个有趣的代数问题是：哪些通过自同构作用于环面的可解群可能具有未锁定的阿贝尔部分？上文描述的群 Γ在 $\mathbb{T}^3$ 上既允许锁定作用（情形 (i)），也允许具有未锁定阿贝尔部分的作用（情形 (iii)），但不允许情形 (ii) [P2]。我们指出，由三个初等矩阵（即形如恒等映射 $+E_{ij}$的矩阵）生成的三维离散海森堡群 H_3 在任意 $\mathbb{T}^d$ 上都是锁定的（尤其是其阿贝尔部分也是锁定的），而 H_3 通过环面自同构实现的线性作用是否总是锁定的，目前尚不清楚。

$\diamond$ 关于与幂零流的联系。设 N 是步数为 k 的幂零李群，N 中有一个格 Γ，则商空间 N/Γ 是步数为 k 的幂零流形。N 的任意单参数子群都通过在 N/Γ 上的左乘定义一个光滑幂零流。类似地，N 的一个与 $\mathbb{R}^k$ 同构的子群 A 在 N/Γ 上定义一个 $\mathbb{R}^k$ 幂零作用。Flaminio 和 Forni [FF] 已证明幂零流具有无限维上同调，而幂零作用则可能具有有限维上同调，例如 [CF] 或 [D] 中的情形。在 [D] 中，这一结果被用于证明一类具有强丢番图性质、作用于二步幂零流形上的幂零作用具有 KAM 型局部刚性结果。本文所研究的作用与幂零作用之间有着密切联系。具体而言，若取一个 $\mathbb{R}^k$ 幂零作用在某个截面上的回归映射，就能得到一个抛物型仿射 $\mathbb{Z}^k$ 作用；而 $\mathbb{R}^k$ 幂零作用则可视为环面上此类 $\mathbb{Z}^k$ 作用的悬挂。我们希望，本文中为研究环面上的抛物作用的 KAM 刚性而提出的一些思路，能够对幂零作用的局部刚性研究有所帮助。这是一个更一般的问题；除上述研究外，目前尚未取得进展。

1.8. **本文结构。** 本文余下部分将致力于证明定理 C。证明分为三部分。在 §2 中，我们陈述主要的归纳 KAM 共轭步骤，即命题 A，然后说明如何由此推出定理 C 。在 §3 中，我们给出沿着 A 和 B的对偶轨道的和与双重和所需的一些估计，这些估计将用于构造线性化共轭方程中出现的上同调方程的近似解。在 §4 中，我们利用后面的这些估计证明命题 A。每一部分开篇都会详细介绍其内容以及证明中涉及的思路。

2. 定理 C的证明——迭代部分

证明基于一种 KAM 方案，它有三个特点，使其有别于通常利用 KAM 方案证明局部刚性的方式。

通常的 KAM 迭代如下进行：从一个 ε-扰动 $\langle F, G\rangle$ of$\langle a, b\rangle$开始。通过将共轭问题线性化并近似求解线性方程，我们得到一个共轭映射 $\mathcal{H}_1 = (\mathrm{Id} + \mathrm{h}_1)$，它将 $\langle F, G\rangle$ 共轭到一个作用$\langle F_1, G_1\rangle$，而该作用是 $\langle a, b\rangle$的 ε^k-扰动，其中 $k > 1$。于是，相对于 $\langle F, G\rangle$ 与$\langle a, b\rangle$的偏离程度，我们称 $\langle F_1, G_1\rangle$是 $\langle a, b\rangle$的二次小扰动。重复这一过程，在第 n 次迭代中，我们构造共轭映射$\mathcal{H}_n = (\mathrm{Id} + \mathrm{h}_1) \circ \ldots \circ (\mathrm{Id} + \mathrm{h}_n)$，使其满足

$$\begin{cases} \mathcal{H}_n^{-1} \circ F \circ \mathcal{H}_n & = a + \mathrm{f}_{n+1}, \\ \mathcal{H}_n^{-1} \circ G \circ \mathcal{H}_n^{-1} & = b + \mathrm{g}_{n+1}, \end{cases} \tag{5}$$

其中 f_{n+1} 和 g_{n+1} 的阶为 $\varepsilon_n^k = \varepsilon_{n+1}$，而 h_n 的阶为 ε_n。

截断（或更一般地，应用平滑算子）通常只用于在求解线性化问题的每步迭代中弥补固定的正则性损失。在这里，由于可能存在无穷多个共振，若不进行截断，我们可能无法得到误差的任何二次估计。这是证明的第一个特殊之处，相关细节见第4.1.1节。

另一点是，在 KAM 过程的每一步中，我们只近似求解线性化方程 到常数项为止。这个常数项可能很大，使得第 n 步的误差达到 ε_n 的量级，而不是 ε_{n+1} （这是我们所希望的），因此 先验地，序列 $\mathcal{H}_n$ 不一定收敛。这正是我们运用体积保持假设的地方。具体而言，体积保持假设使我们能够在第 $\mathbf{h}_n$ 步 n 调整平均值，从而使新的总误差 $(\mathbf{f}_{n+1},\mathbf{g}_{n+1})$ 达到 ε_{n+1} 的量级。Herman 在丢番图环面平移 [H] 中采用了同样的方法。将这一方法应用于群作用时会遇到一些困难，详见 §2.2。

证明的第三个特点是，尽管在每一步中 $\mathbf{h}_n$ 的估计是温和的，但每一步误差的估计却并不温和。这意味着，导数阶数的损失通常不是一个固定常数，而是导数阶数的一个比例（当第二个生成元的步数趋于无穷时，该比例趋于 1 ）。然而，这并不影响方案的收敛性。近期， [ZW] 中也采用了类似的观察。

2.1. **问题的线性化与主要迭代步骤：命题 A**。给定两个作用生成元 $a+\mathbf{f}$和 $b+\mathbf{g}$的小扰动 a和 b，以及它们之间的交换条件：

$$(a+\mathbf{f})\circ(b+\mathbf{g})=(b+\mathbf{g})\circ(a+\mathbf{f}), \tag{6}$$

我们希望求解 $H=id+\mathbf{h}$ 的共轭问题

$$H\circ(a+\mathbf{f})=a\circ H,\quad H\circ(b+\mathbf{g})=b\circ H. \tag{7}$$

交换条件（6）可改写为

$$\mathbf{f}(b+\mathbf{g})-B\mathbf{f}-(\mathbf{g}(a+\mathbf{f})-A\mathbf{g})=0,$$

由此可将条件（6）视为一个线性算子作用于 $\mathbf{f}$、$\mathbf{g}$ 再加上一个关于 $\mathbf{f}$、$\mathbf{g}$ 的二次非线性部分：

$$[\mathbf{f}\circ b-B\mathbf{f}-(\mathbf{g}\circ a-A\mathbf{g})]+[\mathbf{f}(b+\mathbf{g})-\mathbf{f}\circ b-(\mathbf{g}(a+\mathbf{f})-\mathbf{g}\circ a)]=0. \tag{8}$$

现在我们引入一些记号。对于任意给定的 $\mathbf{h}$，令

$$D_{1,0}\mathbf{h}:=\mathbf{h}\circ a-A\mathbf{h},$$
$$D_{0,1}\mathbf{h}:=\mathbf{h}\circ b-B\mathbf{h}.$$

采用这些记号，方程（8）可写成

$$D_{0,1}\mathbf{f}-D_{1,0}\mathbf{g}=-\mathbf{f}(b+\mathbf{g})+\mathbf{f}\circ b+\mathbf{g}(a+\mathbf{f})-\mathbf{g}\circ a.$$

类似地，由于我们要寻找的共轭映射 H 是在恒等映射的邻域内，即具有 $H=$ 恒等映射$+\mathbf{h}$ 的形式，且 $\mathbf{h}$ 很小，因此我们的共轭问题（7）可线性化为

$$D_{1,0}\mathbf{h}=\mathbf{f}+[\mathbf{h}(a+\mathbf{f})-\mathbf{h}\circ a],$$
$$D_{0,1}\mathbf{h}=\mathbf{g}+[\mathbf{h}(b+\mathbf{g})-\mathbf{h}\circ b].$$

在迭代过程的第 n 步，对于给定的 $\mathbf{f}_n$、$\mathbf{g}_n$ ，我们证明可以找到$\tilde{\mathbf{f}}_n$、 $\tilde{\mathbf{g}}_n$、$\mathbf{h}_n$ 以及向量 $\mathbf{V}_n$ 和 $\mathbf{W}_n$ ，使得

$$D_{1,0}\mathbf{h}_n = \mathbf{f}_n + \tilde{\mathbf{f}}_n + \mathbf{V_n},$$
$$D_{0,1}\mathbf{h}_n = \mathbf{g}_n + \tilde{\mathbf{g}}_n + \mathbf{W_n},$$

其中 $\mathbf{V_n}$ 和 $\mathbf{W_n}$ 的阶与 $\mathbf{f}_n$、$\mathbf{g}_n$相同，而新的函数 $\mathbf{f}_n$，$\tilde{\mathbf{g}}_n$ 是二次的。在后面的章节中，当我们建立迭代过程时，将会看到，体积保持假设会迫使常数项 $\mathbf{V_n}$ 和 $\mathbf{W_n}$ 也具有二次阶。

我们将主要的迭代步骤表述为一个命题。在后面的章节中，命题A将用于执行迭代、证明其收敛，并证明主要结果——定理C。

下文中，若仿射作用 $\langle a, b\rangle$ 的线性部分 $\langle A, B\rangle$是未锁定的，我们就称该作用为未锁定的。若 $\langle a, b\rangle$ 是丢番图仿射作用，那么它的线性部分自动是未锁定的，但我们仍在陈述中强调这一点，因为未锁定这一性质将在证明中起关键作用。

命题 *A.* 设 $\langle a, b\rangle$ 是一个未锁定的 (γ, τ)-丢番图抛物型仿射作用，其中 a 为二步。设 $F = a + f$ 和 $G = b + g$ 是生成 $\langle a, b\rangle$的扰动 $\langle F, G\rangle$ 的对易微分同胚。对于 $r \geq 0$，令 $\Delta_r = max\{\|f\|_r, \|g\|_r\}$。

存在常数 C, C_r, $C_{r'}$ 和 $D = D(a,\ b,\ \gamma,\ \tau,\ d)$ 使得对于任意 $N \in \tilde{\mathbb{N}}$，都存在向量场 $\mathbf{f}_N$, $\tilde{\mathbf{g}}_N$、$\mathbf{h}_N$，以及向量 $\mathbf{V}$和和 $\mathbf{W}$，使得

$$D_{1,0}\mathbf{h}_N + \tilde{\mathbf{f}}_N = \mathbf{f} + \mathbf{V},$$
$$D_{0,1}\mathbf{h}_N + \tilde{\mathbf{g}}_N = \mathbf{g} + \mathbf{W},$$

并且只要 $0 \leq r,\ D < r'$，以下估计就成立：

$$\begin{aligned} \|\mathbf{h}_N\|_r &\leq C_r\, N^D \Delta_r, \\ \|\tilde{\mathbf{f}}_N\|_0,\ \|\tilde{\mathbf{g}}_N\|_0 &\leq C N^D \Delta_0 \Delta_1 + C_{r'} N^{-r'+D} \Delta_{r'}, \\ \|\tilde{\mathbf{f}}_N\|_r,\ \|\tilde{\mathbf{g}}_N\|_r &\leq C_r N^D \Delta_r, \\ |\mathbf{V}|, |\mathbf{W}| &\leq C\Delta_0. \end{aligned} \tag{9}$$

命题 A 的证明推迟至 §3。

2.2. **迭代设置。** 本节将建立用于证明定理 C 的迭代过程。迭代步骤包括三个子步骤：线性化、应用命题 A ，以及利用扰动的体积保持性质来调整共轭微分同胚的平均值。

命题 9. 设 $\langle a,\ b\rangle$ 是一个未锁定的 $(\gamma,\ \tau)$-丢番图抛物型仿射 $\mathbb{Z}^2$ 作用，其中 a 是二步。存在一个仅取决于作用 $D > 0$ 的常数 $\langle a,\ b\rangle$，使得以下结论成立。

令 $\langle a + \mathbf{f}\ \ b + \mathbf{g}\rangle$ 是一个保体积扰动，使得

$$ave(\mathbf{f}) = ave(\mathbf{g}) = 0.$$

假设我们已经构造了截至第 n 步的共轭， $\mathcal{H}_{n-1} =$ (恒等映射 $+\mathbf{h}_{n-1}) \circ \cdots \circ$ (恒等映射 $+\mathbf{h}_1$)，使得 $ave((\mathcal{H}_{n-1}) -$ 恒等映射) $= 0$ 并且

$$\mathcal{H}_{n-1} \circ \langle a + \mathbf{f}, b + \mathbf{g} \rangle \circ \mathcal{H}_{n-1}^{-1} = \langle a + \mathbf{f}_n, b + \mathbf{g}_n \rangle.$$

记 $\Delta_{r,\ n}$ ：$=$ 最大值$\{\|\mathbf{f}_n\|_r,\ \|\mathbf{g}_n\|_r\}$。

那么，对于任意 $N \in \mathbb{N}$，存在 $\mathbf{h}_n$ （其取值取决于 N），使得对于 $0 \le r$、 $D \le r'$ 以及某些常数 C、 C_r、 $C_{r'}$，若 $N^D \Delta_{1,\ n} < 1$，则有：

(*i*) $\|\mathbf{h}_n\|_r \le C_r N^D \Delta_{r,\ n}$;

(*ii*) 对于

$$\begin{aligned}
\mathbf{f}_{n+1} &:= (\mathrm{Id} + \mathbf{h}_n) \circ (a + \mathbf{f}_n) \circ (\mathrm{Id} + \mathbf{h}_n)^{-1} - a, \\
\mathbf{g}_{n+1} &:= (\mathrm{Id} + \mathbf{h}_n) \circ (b + \mathbf{g}_n) \circ (\mathrm{Id} + \mathbf{h}_n)^{-1} - b, \\
\Delta_{r,n+1} &:= \max\{\|\mathbf{f}_{n+1}\|_r, \|\mathbf{g}_{n+1}\|_r\},
\end{aligned}$$

以下估计成立：

$$\begin{aligned}
\Delta_{0,n+1} &\le C_r N^D \Delta_{0,n} \Delta_{1,n} + C_{r'} N^{-r'+D} \Delta_{r',n}, \\
\Delta_{r,n+1} &\le C_r N^D \Delta_{r,n};
\end{aligned} \tag{10}$$

(*iii*) 对于 $\mathcal{H}_n$ ：$=$ （恒等映射 $+\mathbf{h}_n$） $\circ \mathcal{H}_{n-1}$，有： ave（$\mathcal{H}_n -$ 恒等映射） $= 0$。

证明。 非线性问题是求取 $\mathbf{h}_n$ 使得

$$(\mathrm{Id} + \mathbf{h}_n) \circ \langle a + \mathbf{f}_n, b + \mathbf{g}_n \rangle = \langle a + \mathbf{f}_{n+1}, b + \mathbf{g}_{n+1} \rangle \circ (\mathrm{Id} + \mathbf{h}_n) \tag{11}$$

其中 $\mathbf{h}_n$ 以及 $\mathbf{f}_{n+1}$、$\mathbf{g}_{n+1}$ 满足命题中的估计。

下面简要概述证明思路。将上述非线性问题线性化后，我们首先应用命题 A 来确定 $\mathbf{h}_n$ 以及向量 $\mathbf{V}_n$、$\mathbf{W}_n$，使得 $|\mathbf{V}_n| + |\mathbf{W}_n| \le C\Delta_{0,\ n}$ 并且

$$(\mathrm{Id} + \mathbf{h}_n) \circ \langle a + \mathbf{f}_n, b + \mathbf{g}_n \rangle = \langle a + \mathbf{f}_{n+1} + \mathbf{V}_n, b + \mathbf{g}_{n+1} + \mathbf{W}_n \rangle \circ (\mathrm{Id} + \mathbf{h}_n), \tag{12}$$

其中 $\mathbf{h}_n$ 以及 $\mathbf{f}_{n+1}$、$\mathbf{g}_{n+1}$ 满足（i）和（ii）中的估计。我们注意到，若将一个阶为 Δ_0 的平移向量加到 $\mathbf{h}_n$ 上，则方程（12）仍然成立，只是 $\mathbf{f}_{n+1}$、$\mathbf{g}_{n+1}$、$\mathbf{V}_n$、$\mathbf{W}_n$ 变为新的量，且仍满足相同的估计。基于体积保持条件、初始扰动的零平均值条件以及归纳条件 $ave((\mathcal{H}_{n-1})$ –恒等映射) $= 0$，适当选择平移向量后，我们便能够将常数 $\mathbf{V}_n$ 和 $\mathbf{W}_n$ 吸收到 $\mathbf{f}_{n+1}$ 和 $\mathbf{g}_{n+1}$ 中。

线性化。 我们首先对非线性共轭问题进行线性化。方程（12）经过改写后，将新扰动 $(\mathbf{f}_{n+1}, \mathbf{g}_{n+1})$中的误差表示为上述非线性共轭问题的线性化项以及额外误差之和：

$$\begin{aligned}
\mathbf{f}_{n+1}(\mathrm{Id} + \mathbf{h}_n) &= (\mathbf{h}_n \circ a - A\mathbf{h}_n) + \mathbf{f}_n - \mathbf{V}_n + (\mathbf{h}_n \circ (a + \mathbf{f}_n) - \mathbf{h}_n \circ a), \\
\mathbf{g}_{n+1}(\mathrm{Id} + \mathbf{h}_n) &= (\mathbf{h}_n \circ b - B\mathbf{h}_n) + \mathbf{g}_n - \mathbf{W}_n + (\mathbf{h}_n \circ (b + \mathbf{g}_n) - \mathbf{h}_n \circ b).
\end{aligned} \tag{13}$$

为了估计上述方程左端的项，我们需要估计以下两个项：

$$\begin{aligned}
E_1 :=& \mathbf{h}_n \circ a - A\mathbf{h}_n + \mathbf{f}_n - \mathbf{V}_n,\ \mathbf{h}_n \circ b - B\mathbf{h}_n + \mathbf{g}_n - \mathbf{W}_n, \\
E_2 :=& \mathbf{h}_n \circ (a + \mathbf{f}_n) - \mathbf{h}_n \circ a,\ \mathbf{h}_n \circ (b + \mathbf{g}_n) - \mathbf{h}_n \circ b.
\end{aligned} \tag{14}$$

下面我们估计 E_1 和 E_2的 C^0 范数，其中变换$\mathbf{h}_n$由命题A给出。这将推出 C^0 范数$\mathbf{f}_{n+1}$ 和$\mathbf{g}_{n+1}$的估计。

应用命题 A。

现在将命题 A 应用于 $\mathbf{f}_n$、$\mathbf{g}_n$。固定 $N \in \mathbb{N}$。对于固定的 N，由命题A 可得 $\mathbf{h}_n := (\mathbf{h}_n)_N$、$(\mathbf{f}_n)_N$、$(\mathbf{g}_n)_N$以及向量 $\mathbf{V}_n$和 $\mathbf{W}_n$。命题 A 中的第一个估计直接给出：

$$\|\mathbf{h}_n\|_r \le C_r N^D \Delta_{r,n}. \tag{15}$$

注意，假设 $N^D\Delta_1$, n 有界于某个常数意味着$\|\mathbf{h}_n\|_1$ 有界于某个常数。这是一个众所周知的事实（例如参见 [L，引理 AII。26]），逆映射 (恒等映射 $+\mathbf{h}_n)^{-1}$ = 恒等映射 $+\mathbf{h}'_n$ 满足$\mathbf{h}'_n$ 也满足以下估计：

$$\|\mathbf{h}'_n\|_r \le C_r \|\mathbf{h}_n\|_r. \tag{16}$$

误差 E_1恰好是 $((\mathbf{f}_n)_N, (\mathbf{g}_n)_N)$，因此由命题A 中的第二个估计可得，对任意 $r' > 0$:

$$\|E_1\|_0 \le C N^D \Delta_{0,n}\Delta_{1,n} + C_{r'} N^{-r'+D} \Delta_{r',n}. \tag{17}$$

关于 E_2 的估计可通过使用标准估计（例如参见 [DF]中的附录）以及估计式（15）：

$$\|E_2\|_0 \le C\|\mathbf{h}_n\|_1 \Delta_{0,n} \le C N^D \Delta_{1,n}\Delta_{0,n}. \tag{18}$$

将两个误差合并起来，可得新的误差满足：

$$\Delta_{0,n+1} \le C N^D \Delta_{0,n}\Delta_{1,n} + C_{r'} N^{-r'+D} \Delta_{r',n}. \tag{19}$$

对于任意 C^r ，$\mathbf{f}_{n+1}$ 和$\mathbf{g}_{n+1}$ 的范数估计 r （第二个估计，即（10））由这些映射的定义（13）可得。下面说明如何得到$\mathbf{f}_{n+1}$的估计。对于$\mathbf{g}_{n+1}$ ，证明方法相同。

由（13），可写为：

$$\mathbf{f}_{n+1} = \widetilde{\mathbf{f}_n}(\mathrm{Id} + \mathbf{h}'_n) + (\mathbf{h}_n \circ (a + \mathbf{f}_n) - \mathbf{h}_n \circ a) \circ (\mathrm{Id} + \mathbf{h}'_n),$$

其中，$\mathrm{Id} + \mathbf{h}'_n = (\mathrm{Id} + \mathbf{h}_n)^{-1}$，且$\mathbf{h}'_n$ 满足估计（16）。然后，应用映射复合的标准估计（例如参见[Hör，定理 A。8]）以及~我们已知的 $\|\mathbf{f}_n\|_r$ 的界（由命题 A得出），可得：

$$\begin{aligned}\|\mathbf{f}_{n+1}\|_r \le& \|\widetilde{\mathbf{f}_n}(\mathrm{Id} + \mathbf{h}'_n)\|_r + \|\mathbf{h}_n \circ (a + \mathbf{f}_n) - \mathbf{h}_n \circ a) \circ (\mathrm{Id} + \mathbf{h}'_n)\|_r \\ \le& C_r(\|\widetilde{\mathbf{f}_n}\|_r + \|\mathbf{h}'_n\|_r) \le C_r N^D \Delta_{r,n}.\end{aligned}$$

调整共轭微分同胚的平均值。现在我们将调整 $\mathbf{h}_n$ 的平均值，使得（13$_n$ ）中的常数项 $\mathbf{V}_n$ 和 W尽可能小，分别达到 $\|\mathbf{f}_{n+1}\|_0$ 和 $\|\mathbf{g}_{n+1}\|_0$的程度。这里起关键作用的是关于初始误差的体积保持和零平均值的假设。正如我们将在引理 $\mathbf{h}_n$ 中看到的，对 11的平均值进行调整不会依赖于作用元素。我们将验证它对一个作用生成元有效；另一个生成元可以用同样的方法处理。

引理10。 假设 $\mathbf{h}$满足

$$a+\mathbf{f}_{n+1}+\mathbf{V}_n=(Id+\mathbf{h})\circ(a+\mathbf{f}_n)\circ(Id+\mathbf{h})^{-1}, \tag{20}$$

其中 $|\mathbf{V}_n|=O(\Delta_{0,n})$ 且 $\mathbf{f}_{n+1}$ 满足估计 (10)。

ˆ对于任意满足 $|C|=O(\Delta_{0,n})$ 的向量 C，函数 $\mathbf{h}=\mathbf{h}+C$ 满足

$$a+\hat{\mathbf{f}}_{n+1}+\hat{\mathbf{V}}_n=(Id+\hat{\mathbf{h}})\circ(a+\mathbf{f}_n)\circ(Id+\hat{\mathbf{h}})^{-1}, \tag{21}$$

ˆ ˆ其中 $|\mathbf{V}_n|=O(\Delta_{0,n})$ 且 $\mathbf{f}_{n+1}$ 满足 (10)。

证明。 利用 (20)，我们可以写成：

$$\begin{aligned}(\mathrm{Id}+\mathbf{h}+C)\circ(a+\mathbf{f}_n)&=(\mathrm{Id}+\mathbf{h})\circ(a+\mathbf{f}_n)+C=(a+\mathbf{f}_{n+1}+\mathbf{V}_n+C)\circ(\mathrm{Id}+\mathbf{h})\\&=(a+\mathbf{f}_{n+1}+\mathbf{V}_n+C)\circ(\mathrm{Id}-C)\circ(\mathrm{Id}+\mathbf{h}+C)\\&=(a+\mathbf{f}_{n+1}\circ(\mathrm{Id}-C)+(\mathbf{V}_n-(A-\mathrm{Id})C))\circ(\mathrm{Id}+\mathbf{h}+C)\\&=(a+\hat{\mathbf{f}}_{n+1}+\hat{\mathbf{V}}_n)\circ(\mathrm{Id}+\mathbf{h}+C),\end{aligned}$$

ˆ ˆ 其中 $\mathbf{f}_{n+1}:=\mathbf{f}_{n+1}\circ$(恒等映射 $-C$) 且 $\mathrm{V}_n:=\mathrm{V}_n-$($A-$恒等映射)$C$。因此，估计 (10) 对于 ˆ ˆ $\mathbf{f}_{n+1}$ 成立，因为它对 $\mathbf{f}_{n+1}$ 和 $|C|=O(\Delta_{0,n})$ 成立。显然，$|\mathrm{V}_n|$ 与 $|C|=O(\Delta_{0,n})$ 的量级相同。□

在证明的前一部分中，我们构造了 $\mathbf{h}_n$，使得

$$a+\mathbf{f}_{n+1}-\mathbf{V}_n=(\mathrm{Id}+\mathbf{h}_n)^{-1}\circ(a+\mathbf{f}_n)\circ(\mathrm{Id}+\mathbf{h}_n).$$

若$\mathbf{h}_n$ 满足方程（20），我们可以应用引理 10 来调整 $\mathbf{h}_n$的平均值。下面的引理说明了在迭代的第 C 步中如何选取常数向量 n $H_{n-1}=\mathcal{H}_{n-1}-$恒等映射，并回忆一下，根据假设，$ave\,(H_{n-1})=0$。

引理 11。 设 $C=-\int_{\mathbb{T}^d}\mathbf{h}_n\circ\mathcal{H}_{n-1}$，并设 ˆ $\mathbf{h}_n=\mathbf{h}_n+C$。设 ˆ $\mathcal{H}_n=(id+$ˆ$\mathbf{h}_n)\circ\mathcal{H}_{n-1}=$ˆ ˆ 恒等映射 $+H_n$。则 $ave\,(H_n)=0$。

ˆ ˆ证明。 $\mathcal{H}_n=$（恒等映射 $+\mathbf{h}_n$）$\circ\mathcal{H}_{n-1}$ 蕴含

$$\hat{H}_n=H_{n-1}+\hat{\mathbf{h}}_n\circ\mathcal{H}_{n-1}.$$

根据归纳假设，$ave(H_{n-1})=0$。然后，对上面的方程两边取平均值，得到 $ave(H_n)=0$。□

选取 C 如引理11所示后，应用引理10可得方程 :

$$a+\hat{\mathbf{f}}_{n+1}+\hat{\mathbf{V}}_n=(\mathrm{Id}+\hat{\mathbf{h}}_n)\circ(a+\mathbf{f}_n)\circ(\mathrm{Id}+\hat{\mathbf{h}}_n)^{-1},$$

这意味着

$$a+\hat{\mathbf{f}}_{n+1}+\hat{\mathbf{V}}_n=(\mathrm{Id}+\hat{H}_n)\circ(a+\mathbf{f})\circ(\mathrm{Id}+\hat{H}_n)^{-1}.$$

ˆ 由此，在右侧复合恒等映射 $+H_n$，得到

$$A\hat{H}_n+\hat{\mathbf{f}}_{n+1}(\mathrm{Id}+\hat{H}_n)+\hat{\mathbf{V}}_n=\mathbf{f}+\hat{H}_n\circ(a+\mathbf{f}).$$

对上式方程两边关于体积取平均值，并利用 f 具有零平均值以及 $a+f$ 保体积这一假设，可得 $\mathrm{V}_n=-\mathbf{f}_{n+1}$(恒等映射 $+H_n$)。这意味着 $\mathrm{V}_n=O(\|\mathbf{f}_{n+1}\|_0)$，也就是说，常数 V_n 可以并入 $\mathbf{f}_{n+1}$。

ˆ由引理 10 可知，估计式（10）对$\mathbf{f}_{n+1}$成立。最后，我们将ˆ新的 $\mathbf{f}_{n+1}$ 定义为 $\mathbf{f}_{n+1}$。

□

2.3. **迭代方案的收敛。** 有了命题9的结果后，KAM 方案的构造及其收敛性与 KAM 方法的常见应用基本相同（例如，参见 [DK]中的第 5.4 节）。

假设 $\langle a, b\rangle$ 是一个 (γ,τ)-丢番图作用。令 $\langle a+\mathbf{f}\ b+\mathbf{g}\rangle$ 是 $\langle a, b\rangle$ 的一个小的光滑扰动。由于我们要证明 KAM 刚性，也假设 $\langle a+\mathbf{f}\ b+\mathbf{g}\rangle$ 保体积，且 $\mathbf{f}$ 和 $\mathbf{g}$ 的平均值为零。

给定上述初始扰动，令：

$$\mathbf{f}_1 = \mathbf{f};\ \ \mathbf{g}_1 = \mathbf{g}.$$

回顾一下，我们使用记号 $\Delta_{r,\ 1} := \max\{\|\mathbf{f}_1\|_r, \|\mathbf{g}_1\|_r\}$.

令 D 为命题 9 中的常数，它仅依赖于 $\langle a,\ b\rangle$。

固定 $k = \frac{4}{3}$，并令 $l = 8D + 16$。

在第一步，我们假设：

$$\Delta_{0,1} < \varepsilon,\ \ \Delta_{l,1} < \varepsilon^{-1}$$

对于足够小的 $\varepsilon > 0$。我们将证明，可以将 ε 选得足够小，使迭代过程收敛。

现在我们来描述迭代过程。根据命题 9，存在 $\mathbf{h}_1$ ，使其满足命题中所声称的估计。接着，变换 $\mathrm{Id} + \mathbf{h}_1$ 将 $\langle a+\mathbf{f}_1, b+\mathbf{g}_1\rangle$ 共轭为一个新扰动，我们将其记为 $\langle a+\mathbf{f}_2, b+\mathbf{g}_2\rangle$。对这一过程进行迭代。

此时，在应用命题 N 时，我们仍可自由选择截断的层级 9 ，具体是在迭代的第 n 步。如果在第 n 步，我们选择的截断为

$$N_n = \varepsilon_n^{-\frac{1}{3(D+2)}},$$

其中 $\varepsilon_n = \varepsilon^{(k^n)}$，那么对于足够小的 ε，我们可以归纳证明，对所有 n，以下估计均成立：

$$\begin{aligned} \Delta_{0,n} &< \varepsilon_n = \varepsilon^{(k^n)}, \\ \Delta_{l,n} &< \varepsilon_n^{-1}, \end{aligned} \tag{22}$$

and

$$\|\mathbf{h}_n\|_1 < \varepsilon_n^{\frac{1}{2}}. \tag{23}$$

这里我们用字母 C 表示任意一个仅依赖于固定的 l、 D和未扰动作用 $\langle a$、 $b\rangle$的常数。

假设我们处于迭代的第 n 步，并且对于 n，估计（22）成立。首先，我们利用标准插值不等式验证条件 $N^D\Delta_{1,\ n} < 1$ 成立

$$\Delta_{1,n} \le C\Delta_{0,n}^{1-\frac{1}{l}}\Delta_{l,n}^{\frac{1}{l}}, \tag{24}$$

以及假设（22）：

$$N_n^D\Delta_{1,n} \le C\varepsilon_n^{\frac{-D}{3(D+2)}}\varepsilon_n^{1-\frac{1}{l}}\varepsilon_n^{-\frac{1}{l}} = C\varepsilon^{\frac{-D}{3(D+2)}+1-\frac{2}{l}}.$$

由于对于所选的 l，项 $3^{\frac{-D}{D+2()}} + 1 - \frac{2}{l}$ 为正，通过将初始 ε 取得足够小，我们可得上述表达式小于 1。

然后，通过应用命题 $\mathbf{h}_n$、$\mathbf{f}_{n+1}$ 和$\mathbf{g}_{n+1}$ 构造映射9。同一命题结合（22）和插值不等式（24），再加上我们对 l的选择，意味着当 ε充分小时，（23）成立：

$$\|h_n\|_1 \le CN_n^D \Delta_{1,n} \le CN_n^D \Delta_{0,n}^{1-\frac{1}{l}} \Delta_{l,n}^{\frac{1}{l}} \le C\varepsilon_n^{-\frac{D}{3(D+2)}+1-\frac{2}{l}} \le \varepsilon_n^{\frac{1}{2}}.$$

现在我们验证 (22) 对 n 替换为 $n+1$ 时成立。

首先 我们利用命题 9中的估计，计算 l 范数。 :

$$\Delta_{l,n+1} \le CN_n^D \Delta_{l,n} \le C\varepsilon_n^{\frac{-D}{3(D+2)}}(1+\varepsilon_n^{-1}) \le 2C\varepsilon_n^{\frac{-D}{3(D+2)}-1} < \varepsilon_n^{-\frac{1}{3}-1} = \varepsilon_n^{-\frac{4}{3}} = \varepsilon_{n+1}^{-1}.$$

最后，我们估计 0-范数（再次利用命题 9中的估计和插值不等式）：

$$\begin{aligned}\Delta_{0,n+1} &\le CN_n^D \Delta_{0,n}^{1-\frac{1}{l}} \Delta_{l,n}^{\frac{1}{l}} \Delta_{0,n} + CN_n^{-l+D} \Delta_{l,n} \\ &\le C(\varepsilon_n^{-\frac{D}{3(D+2)}+2-\frac{2}{l}} + \varepsilon_n^{\frac{l-D}{3(D+2)}-1}) \le \varepsilon_n^{\frac{4}{3}} = \varepsilon_{n+1},\end{aligned}$$

因为根据我们对 l 的选择，两个表达式 $-3^{D}_{(D+2)}+2-\frac{2}{l}$ 和 $3^{\frac{l-D}{D+2()}}-1$ 都严格大于 $4\ 3$。

因此，(22) 中的估计对所有 n均成立。这意味着 $\mathcal{H}_n$ 在 C^1 范数下收敛到某个 $\mathcal{H}_\infty$，它将初始扰动共轭到 $\langle a,\ b\rangle$。共轭 $\mathcal{H}_\infty$ 对每个 C^m 都 $m>0$（即该过程在任意范数下都收敛）这一事实，可以用标准方法通过插值估计证明（例如参见 [DK]中的第 5.4 节末尾）。

2.4. **共轭映射的体积保持。**现在我们有 $\mathcal{H}_\infty$ 将扰动 $\langle F,G\rangle$ 共轭到 $\langle a,b\rangle$。由于 $\langle F,G\rangle$ 被假设为保体积， 共轭关系意味着体积经 $\mathcal{H}_\infty$ 推前后在 $\langle a$下不变$b\rangle$。由于 a^kb^l 对于某个 k 和 l是唯一遍历的映射，映射 $\mathcal{H}_\infty$ 保体积。

定理C 的证明现已完成，除了命题A的证明尚待完成。本文其余部分将致力于证明命题A。□

3. 沿对偶轨道的和与双重和的估计

本小节给出沿 A 和 B 的对偶轨道上的和与双重和所需的估计，这些估计对于求解上同调方程和证明命题A至关重要。本节的主要结果是命题B 和C。

在命题B 中，我们研究沿二步对偶轨道的部分和。这些和将在命题A的证明中用于估计共轭映射的范数。我们还首次给出了沿二步对偶轨道的全和估计，这将是估计在共振傅里叶模态处求解上同调方程时误差的关键。

如第 4.1.4 节所述，沿二步对偶轨道的完整求和可以借助 高秩技巧重新解释为一个二次小量函数的双重求和 ϕ，该函数衡量这一对 $(f,\ g)$ 在（3）中未能在作用$\langle a,\ b\rangle$之上构成余循环的误差。命题 C讨论这些双重求和。本命题中得到的估计将用于估计求解非共振傅里叶模态处上同调方程时的误差。

3.1. **记号。** 本小节概述本文其余部分所用的记号。

- 假设 $\langle A, B\rangle$ 是解锁的交换线性抛物作用。我们考虑作用于 $\mathbb{T}^d$ 上的两个交换仿射映射 $a(x) = Ax + \alpha$ 和 $b(x) = Bx + \alpha$，其中 a 是二步，b 是 S 步（见定义 1）。步数为 S 的作用 $\langle a, b\rangle : \mathbb{Z}^2 \to \mathrm{Diff}_\lambda^\infty(\mathbb{T}^d)$ 的元素记作 $a^k b^l, (k,l) \in \mathbb{Z}^2$。
- 令

$$A = \mathrm{Id} + \widetilde{A}; \quad B = \mathrm{Id} + \widetilde{B}.$$

用这些记号，a 为二步且 b 为 S 步意味着：$\widetilde{A}^2 = \widetilde{B}^S = 0$。
- 令 $\bar{A} = (A^{tr})^{-1}$, $\bar{B} = (B^{tr})^{-1}$。$\langle \bar{A}, \bar{B}\rangle$ 在 $\mathbb{Z}^d$ 上的线性作用称为 $\langle A, B\rangle$ 的对偶作用。令

$$\bar{A} = \mathrm{Id} + \widehat{A}; \quad \bar{B} = \mathrm{Id} + \widehat{B}.$$

显然，$\bar{A}$ 和 $\bar{B}$ 也分别是二步和 S 步，这意味着 $\widehat{A}^2 = \widehat{B}^S = 0$。

- 令 S 为该作用的步数，则

$$\eta = 0.99\frac{1}{S};$$

- 对每个 $m \in \mathbb{Z}^d$，我们关联一个 $s = s(m)$，称为 m的步数，使得

$$\widehat{B}^s m = 0, \quad \widehat{B}^{s-1} m \neq 0.$$

记

$$\delta = \delta(m) = 0.99\frac{1}{s}. \tag{25}$$

显然，对于任意 $m \in \mathbb{Z}^d$，都有 $s(m) \leq S$，因此 $\delta(m) \geq \eta$。
- 对每个 $(k,l) \in \mathbb{Z}^2$，令 $\alpha_{k,l}$ 表示 $a^k b^l$的平移部分：

$$\alpha_{k,l} := a^k b^l - A^k B^l.$$

- 给定一个连续函数 $h : \mathbb{T}^d \to \mathbb{R}$，用 h_m表示其傅里叶系数：

$$h(x) = \sum_{m \in \mathbb{Z}^d} h_m e(m,x), \quad e(m,x) := e^{2\pi i(m,x)}.$$

采用上述记号，对于 $a(x) = Ax + \alpha$，我们有：

$$h \circ a = \sum_{m \in \mathbb{Z}^d} h_{\bar{A}m} e(\bar{A}m, \alpha) e(m,x), \quad (h \circ a)_m = h_{\bar{A}m} e(\bar{A}m, \alpha).$$

- 对于 $(k,l) \in \mathbb{Z}^2$，记 $\partial_{k,l}$ 为余边界算子：对于 $h \in C^\infty(\mathbb{T}^d)$，令

$$\partial_{k,l}(h) := h(a^k b^l) - h.$$

特别地，余边界的 m 阶傅里叶系数的表达式为

$$(\partial_{k,l}(h))_m = h_{\bar{A}^k \bar{B}^l m} e(\bar{A}^k \bar{B}^l m, \alpha_{k,l}) - h_m.$$

- 我们将研究如下类型的映射 $p : \mathbb{Z}^2 \to C^\infty(\mathbb{T}^d)$，通常记作：$p(k,l) \in C^\infty$ for $(k,l) \in \mathbb{Z}^2$。对于这类映射，我们定义算子$Lp : \mathbb{Z}^2 \times \mathbb{Z}^2 \to C^\infty(\mathbb{T}^d)$如下。对于任意 (k,l)、$(s,t) \in \mathbb{Z}^2 \times \mathbb{Z}^2$，记

$$Lp((k,l),(s,t)) := \partial_{k,l} p(s,t) - \partial_{s,t} p(k,l).$$

- 令 m 满足 $Am \neq m$（因此，$Am \neq 0$）。定义
$$\mathcal{M}(A) = \{m \in \mathbb{Z}^d \mid \langle m, \widehat{A}m\rangle > 0\},$$
$$\mathcal{N}(A) = \{m \in \mathbb{Z}^d \mid \langle m, \widehat{A}m\rangle < 0\}.$$
- 假设 A 是二步的，且 m 满足 $\bar{A}m \neq m$。那么我们有 $\bar{A}^k m = m + kAm$。若 $\bar{m}$ 是 A 轨道 m 上的最低点，则称之为
$$|\bar{m}| \leq |\bar{m} + k\widehat{A}\bar{m}| \quad \text{for all } k \in \mathbb{Z}.$$
于是我们得到一次“切换”：$\bar{m} \in \mathcal{M}(A)$，但 $\bar{A}^{-1}\bar{m} \in \mathcal{N}(A)$，反之亦然。注意，$\bar{m}$ 是相应 A 轨道上唯一一个发生 $\mathcal{N}(A)$ 与 $\mathcal{M}(A)$ 之间“切换”的点。

  我们用 $m = \bar{m}$ 表示 m 是其自身 A 轨道上的最低点，否则用 $m \neq \bar{m}$ 表示。
- 设
$$\lambda_m^{(-1)} := \lambda_m := e(m, \alpha), \quad \mu_m^{(-1)} := \mu_m := e(m, \beta),$$
$$\lambda_m^{(k)} = \lambda_{\bar{A}m}\lambda_{\bar{A}^2 m} \dots \lambda_{\bar{A}^k m}, \quad k = 1, 2, \dots, \quad \lambda_m^{(0)} = 1,$$
$$\lambda_m^{(k)} = (\lambda_m \lambda_{\bar{A}^{-1}m} \dots \lambda_{\bar{A}^{k+1}m})^{-1}, \quad k = -2, -3, \dots,$$
$$\mu_m^{(k)} = \mu_{\bar{B}m}\mu_{\bar{B}^2 m} \dots \mu_{\bar{B}^k m}, \quad k = 1, 2, \dots, \quad \mu_m^{(0)} = 1,$$
$$\mu_m^{(k)} = (\mu_m \mu_{\bar{B}^{-1}m} \dots \mu_{\bar{B}^{k+1}m})^{-1}, \quad k = -2, -3, \dots.$$
- 对于步数为二步的 A 和 $m \in \mathbb{Z}$，考虑沿 A 的对偶轨道取以下部分和：
$$\Sigma_m^{+,A}(f) := \sum_{k=0}^{\infty} f_{\bar{A}^k m}\lambda_m^{(k)}, \quad \Sigma_m^{-,A}(f) := \sum_{k=-\infty}^{-1} f_{\bar{A}^k m}\lambda_m^{(k)},$$
$$\Sigma_m^{A}(f) := \Sigma_m^{+,A}(f) + \Sigma_m^{-,A}(f).$$
最后这个双边求和定义了所谓的“障碍算子”。
- 令 $U \subset \mathbb{Z}^d$ 是对任意 $m \in U$，都有 $\bar{A}m \in U$ 的集合。考虑一个由 $\bar{A}m$ 索引的实数集合：$\xi = (\xi_m) = \{\xi_m \mid m \in U\}$。稍微滥用一下记号，我们令算子 $\partial_{s,t}$ 作用于 ξ。也就是说，
$$(\partial_{s,t}\xi)_m = \xi_{\bar{A}^s\bar{B}^t m} e(\bar{A}^s\bar{B}^t m, \alpha_{s,t}) - h_m.$$
由于指标集合在该作用下不变，因此这个表达式定义良好。

  注：之所以需要这个记号，是因为我们将针对不同的（不变）指标集合，以不同方式通过傅里叶系数定义共轭函数 h：$\mathcal{C}_1$、$\mathcal{C}_2$ 或 $\mathcal{C}_3$（见下文）；而且，在将 h 定义为函数之前，我们需要用傅里叶系数来求解方程。
- 下面对 $\mathbb{Z}^d \setminus \{0\}$ 的分解将在我们的分析中用到。
$$\mathbb{Z}^d \setminus \{0\} = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2 \cup \mathcal{C}_3,$$
其中集合 $\mathcal{C}_j$ 定义如下。

  $\mathcal{C}_1$。**(退化情形)**。$\mathcal{C}_1$ 是满足 $Am = Bm = m$ 的 m 集合。

$\mathcal{C}_2$。**(共振非退化情形)**。对于 $(k,l) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{0\}$，如果满足以下条件，我们称 $m \in \mathcal{C}_2(k,l)$：- $m \notin \mathcal{C}_1$；- $\bar{A}^k \bar{B}^l m = m$。我们定义 $\mathcal{C}_2 = \bigcup_{(k,\ l)\in\mathbb{Z}^2\setminus\{0\}} \mathcal{C}_2(k,l)$。

$\mathcal{C}_3$。**(非共振情形)**。 $\mathcal{C}_3 = \mathbb{Z}^2 \setminus (\{0\} \cup \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2)$。

3.2. **沿二步矩阵对偶轨道的和的估计**。在接下来的构造中，我们将处理向量 m，它们属于 $\mathbb{Z}^d$ 的某些子集，这些子集在 A 和 B的作用下保持不变。回顾第 $\mathcal{M}(A)$ 节中的记号 $\mathcal{N}(A)$，见第 3.1节。

命题 B。 设 A 为二步矩阵，并假设 $Am \neq m$。
(1) 考虑一个在 $\bar{A}$的作用下保持不变的集合 $U \subset \mathbb{Z}^d$。令 $(\xi_m) = \{\xi_m \in \mathbb{R} \mid m \in U\}$，并假设对所有 $m \in U$，都有 $|\xi_m| \le c_0 |m|^{-r}$。那么存在 $c > 0$ 使得

- 如果 $m \in \mathcal{M}(A) \cap U$，那么 $\sum_{k=0}^{\infty} |\xi_{\bar{A}^k m}| \le c|m|^{-r+1}$，- 如果 $m \in \mathcal{N}(A) \cap U$，那么 $\sum_{k=-\infty}^{-1} |\xi_{\bar{A}^k m}| \le c|m|^{-r+1}$，- 此外，如果 $m = \bar{m}$（即 m 是其 A-轨道上的最低点），那么

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\xi_{\bar{A}^k m}| \le c|m|^{-r+1}.$$

(2) 考虑集合 U 和 (ξ_m)，如 (1) 中所述，以及 $\lambda_m^{(1)}$，如第3.1节所述。假设对于每个 $m \in U$，数集 (ζ_m) 满足

$$\zeta_{\bar{A}m} \lambda_m^{(1)} - \zeta_m = \xi_m.$$

那么存在 $c > 0$，使得对于每个 $m \in U$，都有：

$$|\zeta_m| \le c|m|^{-r+1}.$$

(3) 存在 $c > 0$，使得对于任意函数 $\xi \in C^r$，都有：
- 如果 $m \in \mathcal{M}(A)$，那么 $|\Sigma^{+,\ A}_{m}(\xi)| \le c\|\xi\|_r |m|^{-r+1}$，- 如果 $m \in \mathcal{N}(A)$，那么 $|\Sigma^{-,\ A}_{m}(\xi)| \le c\|\xi\|_r |m|^{-r+1}$。- 此外，如果 $m = \bar{m}$ 是其 A-轨道上的最低点，那么

$$|\Sigma_m^A(\xi)| \le c|m|^{-r+1}.$$

证明。 条目 (1) 直接由下面的估计得出，该估计将在本文中多次使用。

子引理 1。 设 A 为二步，且 $Am \neq m$。那么存在 $c = c(r,\ A) > 0$ 使得：

- 若 $m \in \mathcal{M}(A)$，则 $\sum_{k=0}^{\infty} |\bar{A}^k m|^{-r} \le c|m|^{-r+1}$；- 若 $m \in \mathcal{N}(A)$，则 $\sum_{k=-\infty}^{-1} |\bar{A}^k m|^{-r} \le c|m|^{-r+1}$。- 此外，若 $m = \bar{m}$（即 m 是其 A-轨道上的最低点），则

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\bar{A}^k m|^{-r} \le c|m|^{-r+1}.$$

证明。由于 $\bar{A}$ 是二步且 $\bar{A}m \neq m$，对于任意 $m \in \mathbb{Z}^d$ 和 $k \in \mathbb{Z}$，我们有 $\bar{A}^k m = m + kAm$。

考虑情形 $m \in \mathcal{N}(A)$，即 $\langle m, Am\rangle > 0$（注意严格不等式）。令 p 表示向量 Am 在向量 $m+Am$ 上的投影。显然，p 非零，且与 $m+Am$ 方向相同。因此，$|m+kAm| = |(m+Am)+(k-1)Am| \geq |m+Am|+(k-1)|p| > |m|+(k-1)|p|$。故对于适当的常数 $c = c(r, A)$，有：

$$\sum_{k=0}^{\infty} |\bar{A}^k m|^{-r} \leq \sum_{k=0}^{\infty} |(m + k\widehat{Am})|^{-r} \leq c|m|^{-r+1}.$$

为证明最后一个不等式，注意对任意的 x、$y > 0$ 和 $r > 1$，有：

$$\sum_{l=1}^{\infty} (x + ly)^{-r} \leq \frac{c_1}{y(r-1)} (x+y)^{-r+1},$$

这可通过与积分 $y^{-r} \int_{t=1}^{\infty} (\frac{x}{y} + t)^{-r} dt$ 进行比较来证明。

$m \in \mathcal{N}(A)$ 的情形，即 $\langle m, Am\rangle < 0$，类似。事实上，向量 $(-Am)$ 在 m 上的投影与 m 方向相同，因此上述计算仍然成立。

现在令 m 为其 A-轨道上的最低点。那么，向量 Am 和 $m - Am$ 构成、两边为 Am 和 $m - Am$ 的三角形，可知 $\langle m + Am, Am\rangle > 0$ 以及 $\langle m - Am, Am\rangle > 0$ 均成立。然后，我们可以利用上述两个估计得出

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\bar{A}^k m|^{-r} = \sum_{k=-\infty}^{-1} |\bar{A}^k m|^{-r} + \sum_{k=0}^{\infty} |\bar{A}^k m|^{-r} \leq c'|m|^{-r+1}.$$

□

为证明（2），对固定的 m，在点 $\bar{A}^k m$ 处将给定方程分别写成 $k \geq 0$ 或 $k \leq -1$ 的形式，乘以适当的常数后相加，从而在左边得到一个望远镜和。于是可得 $|\zeta_m| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |\xi_{\bar{A}^k m}|^{-r}$ 或 $|\zeta_m| \leq \sum_{k=-\infty}^{-1} |\xi_{\bar{A}^k m}|^{-r}$。由（1）即可得到该估计。

为证明证明 (3)，回想一下，任意 $\xi \in C^r$ 的傅里叶系数对所有 $m \in \mathbb{Z}^d$ 都满足：

$$|\xi_m| \leq \|\xi\|_r |m|^{-r}.$$

于是，对每个 $k \in \mathbb{Z}$，我们有：$|\xi_{\bar{A}^k m}| \leq \|\xi\|_r |\bar{A}^k m|^{-r}$。问题归结为条目 (1) 的情形。□

3.3. **双重求和的估计。抛物型高秩技巧。**双重求和将用于以下情形 $m \in \mathcal{C}_3$（非共振情形）。对于每个 m，其中一个双重和比另一个更容易估计。对应于 l 的符号将称为 l 在给定 m 下的“良好符号”。

命题 C（双重求和估计）。假设 $\langle a, b\rangle$ 是未锁定的抛物型仿射二 S 作用，其中 a 是二步。设 $m \in \mathcal{C}_3$ 是其 A 轨道上的最低点。

对于足够大的 r s，存在一个常数 $c = c(r, A, B) > 0$，使得对于 $\eta = 0.99/S$，以下条件至少有一项成立：

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}}\sum_{l\geq 0}|\bar{A}^k\bar{B}^l m|^{-r} \leq c|m|^{-\eta r+8}, \qquad \sum_{k\in\mathbb{Z}}\sum_{l<0}|\bar{A}^k\bar{B}^l m|^{-r} \leq c|m|^{-\eta r+8}.$$

命题 C的证明对我们的分析至关重要；它相当技术性，并占据了本节余下的篇幅。

3.3.1. 未锁定的推论。 回顾定义4中的未锁定概念。我们来做两个观察。

Le引理 12。 假设作用 $\langle a, b\rangle$ 是未锁定的。若 $\widehat{B}^2 m \neq 0$，则 $\widehat{A}m \neq 0$.

证明。 设 $\widehat{B}^2 m \neq 0$，并反设 $\widehat{A}m = 0$。考虑函数$_\sim g(x) = e(m, Bx)$。注意到

$$g(ax) = g(Ax+\alpha) = e(m, \widetilde{B}(x+\widetilde{A}x+\alpha)) = e(m, \widetilde{B}x)e(m, \widetilde{B}\widetilde{A}x)e(m, \widetilde{B}\alpha).$$

由于 $m\widetilde{A} = (\widehat{A}m)^t = 0$，且（由交换性 $ab = ba$）我们有 $\widetilde{B}\alpha = \widetilde{A}\beta = 0$，因此得出 $g(ax) = g(x)$。

另一方面，

$$g(bx) = e(m, \widetilde{B}x)e(m, \widetilde{B}^2 x)e(m, \widetilde{B}\beta) = g(x)e(m, \widetilde{B}^2 x)e(m, \widetilde{B}\beta).$$

由于 $m\widetilde{B}^2 = \widehat{B}^2 m \neq 0$，我们得出作用 (a, b) 有一个非平移的秩一因子。□

第二个观察是

引理 13. 假设作用 $\langle a, b\rangle$ 是未锁定的，且 $\widehat{A}^2 m = 0$。若 $\widehat{B}^s m = 0$ 对于某个 $s \geq 2$ 成立，则 $\widehat{A}\widehat{B}^{s-1}m = 0$。

证明。令 $\widehat{B}^s m = 0$，并用反证法假设 $\widehat{A}\widehat{B}^{s-1}m \neq 0$。定义 $f(x) = e(m, \widetilde{A}\widetilde{B}^{s-1}x)$。容易验证，$f(ax) = f(x)$，且 $f(bx) = f(x)$（利用关系 $\widetilde{A}\widetilde{B}^{s-1}\alpha = \widetilde{A}^2\widetilde{B}^{s-2}\beta$, $\widetilde{A}\widetilde{B}^{s-1}\beta = \widetilde{B}^s\alpha$）。因此，作用 $\langle A+\alpha, B+\beta\rangle$ 有一个等于恒等映射的秩一因子，这与假设矛盾。□

3.3.2. 的多项式展开。回顾 §3.1中的记号。

引理14。 假设 $\langle a, b\rangle$ 是非锁定抛物仿射作用，且 a 是二步的。对于任意 $m \in \mathcal{C}_3$, k, $l \in \mathbb{Z}$, $s = s(m)$，存在 $t = t(m, A, B)$, $1 \leq t \leq s-1$，使得

$$\bar{A}^k\bar{B}^l m = m + k\widehat{A}m + \sum_{j=1}^{t-1} c_j l^j \widehat{B}^j(m + k\widehat{A}m) + \sum_{j=t}^{s-1} c_j l^j \widehat{B}^j m, \tag{26}$$

其中 $c_1 = 1$，且所有 c_j 都是可以显式计算的正常数。

证明。 **情形** $s = s(m) = 2$。这里有 $\widehat{A}^2 m = \widehat{B}^2 m = 0$ (因为 $s(m) = 2$)，且$\widehat{A}m \neq 0$, $\widehat{B}m \neq 0$ (因为 $m \in \mathcal{C}_3$)。因此，$\bar{A}^k m = m + k\widehat{A}m$ 且 $\bar{B}^l m = m + l\widehat{B}m$。由引理 13, $\widehat{B}^2 m = 0$ 可推出 $\widehat{A}\widehat{B}m = 0$，从而得到结论。

情形 $s = s(m) \geq 3$。这里有 $\widehat{B}^2 m \neq 0$，因此根据引理 12, $\widehat{A}m \neq 0$。由于 $\widehat{A}^2 m = \widehat{B}^s m = 0$，我们有 $\bar{A}^k m = m + k\widehat{A}m$ 以及 $\bar{B}^l m = m + \sum_{j=1}^{s-1} c_j l^j \widehat{B}^j m$。注意，根据引理 13, $\widehat{A}\widehat{B}^{s-1}m = 0$。将上面两个表达式复合，并利用交换性即可得证。□

回顾一下，对于 $m \in \mathcal{C}_3$，我们有以下两种可能：

- $s(m) = 2$，在此情形下 $\widehat{B}^2 m = 0$，并且对于所有 $(k,l) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{0\}$，我们有 $k\widehat{A}m + l\widehat{B}m \neq 0$；
- $s(m) \geq 3$，在此情形下 $\widehat{B}^2 m \neq 0$。

W对于上述两种情形，我们将采用不同的方法来控制双重求和。

3.3.3. 命题 C的证明，情形 $s(m) = 2$。在本节中，我们固定 $m \in \mathcal{C}_3$，$s(m) = 2$，并研究其增长性质

$$v_{k,l} := \bar{A}^k \bar{B}^l m = m + k\widehat{A}m + k\widehat{B}m. \tag{27}$$

下面两个引理证明了存在一个常数 $c = c(A) > 0$，使得如果 m 是其 A-轨道上的最低点，那么对于所有 $k \in \mathbb{Z}$，并且对于所有 $l \in \mathbb{N}$ 或所有$l \in (-\mathbb{N})$，我们都有：

$$|v_{k,l}| > c|m|.$$

Le **引理 15**。设 $m \in \mathcal{C}_3$，$s(m) = 2$。若 $|Am| > |m|$，则对于所有 k，$l \in \mathbb{Z}$ 我们有：

$$|v_{k,l}| > \|\widehat{A}\|^{-1}|m|.$$

证明。反设：$|v_{k,\ l}| \leq \|\widehat{A}\|^{-1}|m|$。将 $\widehat{A}$ 应用于等式（27）。由于 $\widehat{A}^2 m = \widehat{A}\widehat{B}m = 0$，我们得到：

$$|\widehat{A}m| = |\widehat{A}v_{k,l}| \leq \|\widehat{A}\|\,|v_{k,l}| \leq |m|,$$

这与引理的假设矛盾。 □

引理 16。设 $m \in \mathcal{C}_3$ 是其 A-轨道上的最低点，且 $s(m) = 2$。*If* $|\widehat{A}m| \leq |m|$，则对于所有 $k \in \mathbb{Z}$，且对于所有 $l \in \mathbb{N}$ 或对于所有 $l \in (-\mathbb{N})$，我们有：

$$|v_{k,l}| \geq |m|/2.$$

证明。由于 $m \in \mathcal{C}_3$，我们有 $\widehat{A}m \neq 0$。记 $\mathcal{V}_m =$ 张成空间 $\{\widehat{A}m\}$，并令 $m^\perp$ 和$(\widehat{B}m)^\perp$ 分别表示 m 和 $\widehat{B}m$在 $\mathcal{V}_m$的正交补上的投影。于是

$$|\bar{A}^k \bar{B}^l m| = |m + k\widehat{A}m + l\widehat{B}m| \geq |m^\perp + l(\widehat{B}m)^\perp|.$$

要证明该引理，只需证明 $|m^\perp| \geq |m|/2$。完成这一步后，若向量 $m^\perp$ 与 $\widehat{B}m^\perp$之间的夹角为锐角，我们就选择 l 的“良好符号”为正；否则选择负号。若选择良好符号的 l，则 $|\bar{A}^k \bar{B}^l m| \geq |m^\perp| \geq |m|/2$。

我们来估计 $|m^\perp|$。假设向量 m 与 $\widehat{Am}$ 满足 $0 < \theta \leq \pi/2$（否则，用 $(-Am)$ 代替 Am）。由于 m 是其 A 轨道上的最低点，我们有：$|m - Am| \geq |m|$。在这种情形下，我们看到，m 在 $\mathcal{V}_m$ 上的投影满足

$$\|\mathrm{proj}_{\mathcal{V}_m} m\| \leq \|\widehat{A}m\|/2.$$

因此，

$$|m^\perp| \geq |m| - |\mathrm{proj}_{\mathcal{V}_m} m| \geq |m| - |\widehat{A}m|/2 \geq |m| - |m|/2 = |m|/2.$$

□

引理17（双重求和估计，$s(m)=2$）。假设 $\langle a, b\rangle$ 是一个非锁定抛物仿射作用，并且 a 是二步的。设 $m\in\mathcal{C}_3$，$s(m)=2$，且 m 是其 $\bar{}$ 轨道上的最低点 A。

当 r 足够大时，存在一个常数 $c=c(r,A,B)>0$，使得以下条件至少有一个成立：

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}}\sum_{l\geq 0}|\bar{A}^k\bar{B}^l m|^{-r}\leq C|m|^{-r+8},\qquad \sum_{k\in\mathbb{Z}}\sum_{l<0}|\bar{A}^k\bar{B}^l m|^{-r}\leq C|m|^{-r+8}.$$

证明。不妨设 l 的良好符号为正。

记 $u:=\widehat{Am}$，$v:=\widehat{Bm}$ 并将整数向量 $\widehat{Am}$ 和 $\widehat{Bm}$ 是非平行的整数向量，且其大小满足：对于某个 $c_0>0$，

$$1\leq|u|,\ |v|\leq c_0|m|,$$

可以证明，u 与 v 之间的夹角 θ 满足 $\sin\theta\geq c_1|m|^{-2}$，因此 $\gamma:=|\cos\theta|\leq 1-c_2/|m|^{-4}$。注意，对所有 k、$l\in\mathbb{Z}$，我们都有以下两个不等式：

$$\begin{aligned}|C_{k,l}|^2=|ku+lv|^2=&k^2|u|^2+l^2|v|^2+2kl|u||v|\gamma,\\ (k|u|+l|v|)^2=&k^2|u|^2+l^2|v|^2+2kl|u||v|\geq 0.\end{aligned}$$

因此，

$$\begin{aligned}|C_{k,l}|^2\geq|C_{k,l}|^2-\gamma(k|u|+l|v|)^2&=(1-\gamma)(k^2|u|^2+l^2|v|^2)\\ &\geq c_2|m|^{-4}(k^2|u|^2+l^2|v|^2)\geq c_2|m|^{-4}(k^2+l^2).\end{aligned}$$

现在，若 $k^2+l^2\geq c_3|m|^8$，则对于 $|m|>1$，有 $|m|\leq|C_{k,l}|/2$，并且

$$|\bar{A}^k\bar{B}^l m|\geq|C_{k,l}|-|m|\geq|C_{k,l}|/2\geq|m|.$$

最后，我们将目标和拆分为：

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}}\sum_{l\geq 0}|\bar{A}^k\bar{B}^l m|^{-r}=\Sigma_1+\Sigma_2,$$

其中，Σ_1 包含与 $k^2+l^2\leq c_3|m|^8$ 相对应的项 $|\bar{A}^k\bar{B}^l m|^{-r}$，而 Σ_2 包含满足 $k^2+l^2>c_3|m|^8$ 的项。

求和 Σ_1 包含 $\leq 4c_3|m|^8$ 项。根据引理15 和16，对于某个 $c=c(r,A,B)$，对所有 m：

$$|v_{k,l}|^{-r}\leq c|m|^{-r},$$

so

$$\Sigma_1\leq c_4|m|^{-r+8}.$$

我们通过与一个积分比较来估计 Σ_2：

$$\begin{aligned}\Sigma_2=\sum_{k^2+l^2\geq|m|^8}|v_{k,l}|^{-r}&\leq c_5|m|^{2r}\sum_{k^2+l^2\geq|m|^8}(k^2+l^2)^{-r/2}\\ &\leq c_5|m|^{2r}\int_{x^2+y^2\geq|m|^8}(x^2+y^2)^{-r/2}\,dxdy\leq c_6|m|^{-2r+8}\leq c_6|m|^{-r+8}.\end{aligned}$$

结合 Σ_1 和 Σ_2 的估计即可得到所需结果。 □

以下小节包含命题 C 在情形 $s(m) \geq 3$的证明。我们假设 $m \in \mathcal{C}_3$, $s = s(m) \geq 3$, 并研究$|\bar{A}^k \bar{B}^l m|$的增长性质，其由公式 (26)给出:

$$v_{k,l} := \bar{A}^k \bar{B}^l m = m + k\widehat{A}m + \sum_{j=1}^{t} c_j l^j \widehat{B}^j (m + k\widehat{A}m) + \sum_{j=t+1}^{s-1} c_j l^j \widehat{B}^j m.$$

3.3.4. 情形 $s(m) \geq 3$: 对较小的 l 的估计。 回顾第 $\delta = \delta(m) = 0.99\frac{1}{s}$ 节中的记号 3.1。

引理 18. 假设 $\langle a, b\rangle$ 是非锁定抛物仿射作用，且 a 为二步。对任意 $\xi > 0$，存在 $c = c(A, B, \xi) > 0$，使得对任意满足 $m \in \mathcal{C}_3$ 的 $s(m) \geq 3$，若其是自身 $\bar{A}$-轨道上的最低点，则对任意 $k \in \mathbb{Z}$ 以及任意 $|l| < |\xi m|^\delta$:

$$|\bar{A}^k \bar{B}^l m| \geq c|m|^\delta. \tag{28}$$

证明。假设 $\xi = 1$; 对任意 $\xi > 0$, 证明相同。为简便起见，记 $v_{k,l} := \bar{A}^k \bar{B}^l m$ 。首先考虑“较大”的 m，使得对于适当的常数 C_0，有 $|m| > C_0$ 。对于这个 m，反设$|v_{k,l}| < |m|^\delta$ 对某个 $|l| \leq |m|^\delta$ 成立。 ¯ ^根据假设， m 是其 A-轨道上的最低点，因此对任意 $k \in \mathbb{Z}$，有 $|m + kAm| \geq |m|$。将 $\widehat{B}^{s-j}, j = 1, \dots s-1$ 依次应用于方程 (26)，可得某个常数$C = C(A, B)$:

$$|v_{k,l} - (m + k\widehat{A}m)| \leq C|m|^{s\delta} \leq C|m|^{0.99}.$$

若 m 满足 $|m| \geq (2C)^{100} := C_0$，则后者意味着

$$|v_{k,l} - (m + k\widehat{A}m)| \leq |m|/2.$$

^由于 $|m + kAm| \geq |m|$，我们得出$|v_{k,\,l}| \geq |m|/2$ 这与我们的假设$|v_{k,\,l}| \leq |m|^\delta$ 矛盾。因此，我们已经证明了对所有$|m| \geq (2C)^{100}$所需的估计。若 $|m| < (2C)^{100}$, , 则通过选取充分小的常数 $c(A, B)$即可得到该估计。□

3.3.5. 情形 $s(m) \geq 3$: 在 l中的线性漂移。 本节中，对于给定的 l，其 $m \in \mathbb{Z}^d$ “良好符号”起着关键作用。

引理 19 (l, $s(m) \geq 3$中的线性漂移)。 假设 $\langle a, b\rangle$ 是非锁定抛物仿射作用，并且 a 是二步的。存在一个常数 $c = c(A, B) > 0$ ，使得对任意$m \in \mathcal{C}_3$, $s(m) \geq 3$，以下结论成立：对所有 $k \in \mathbb{Z}$ ，并且对所有 $l \geq 0$ 或对所有$l < 0$ ，都有:

$$|\bar{A}^k \bar{B}^l m| \geq c|l|.$$

证明。 回忆 $s = s(m) \geq 3$，这意味着 $\widehat{B}^s m = 0$, $\widehat{B}^{s-1} m \neq 0$。特别地，$\widehat{B}^2 m \neq 0$。由引理13可知，未锁定这一假设意味着 $\widehat{A}\widehat{B}^{s-1} m = 0$。记

$$\mathcal{V}_m = \operatorname{span}\{\widehat{B}^l m,\ \widehat{A}\widehat{B}^{l'} m \mid l \in [2, s-1],\ l' \in [0, s-2]\},$$

其中，项 $\widehat{A}\widehat{B}^{l'}m$ 从某个 $l'=t$, $t\geq 1$ 开始可能为零。令 $m^{\perp}$ 和 $(\widehat{B}m)^{\perp}$ 分别表示 m 和 $\widehat{B}m$ 在 $\mathcal{V}_m$ 的正交补上的正交投影。下面证明，存在某个常数 $c=c(A,B)>0$，使得

$$|(\widehat{B}m)^{\perp}|\geq c>0.$$

我们考虑两种子情形。
Case $\widehat{A}\widehat{B}^{s-2}m=0$。这里有：

$$0\neq\widehat{B}^{s-1}m=\widehat{B}^{s-2}(\widehat{B}m)^{\perp}.$$

由于 $\widehat{B}^{s-1}m\neq 0$ 是整数，因此有 $|\widehat{B}^{s-1}m|\geq 1$。由于 $\widehat{B}^{s-2}$ 的范数有正下界，因此有 $|(\widehat{B}m)^{\perp}|\geq c_0(A,B)>0$。
Case $\widehat{A}\widehat{B}^{s-2}m\neq 0$。在这种情形下，我们有

$$0\neq\widehat{A}\widehat{B}^{s-2}m=\widehat{A}\widehat{B}^{s-3}(\widehat{B}m)=\widehat{A}\widehat{B}^{s-3}(\widehat{B}m)^{\perp}.$$

由于 $\widehat{A}\widehat{B}^{s-2}m\neq 0$ 是整数，因此有 $|\widehat{A}\widehat{B}^{s-2}m|\geq 1$。由于 $\widehat{A}\widehat{B}^{s-3}$ 的范数有正下界，这意味着 $|(\widehat{B}m)^{\perp}|\geq c_1(A,B)>0$。

为完成证明，回想一下，由（26），

$$\begin{aligned}|v_{k,l}|=&|\bar{A}^k\bar{B}^l m|=|m+k\widehat{A}m+\sum_{j=1}^{t-1}c_j l^j\widehat{B}^j(m+k\widehat{A}m)+\sum_{j=t}^{s-1}c_j l^t\widehat{B}^j m|\\ \geq&|m^{\perp}+l(\widehat{B}m)^{\perp}|.\end{aligned}$$

若向量 $m^{\perp}$ 和 $l(\widehat{B}m)^{\perp}$ 形成锐角，则将 l的“良好符号”取为正；否则取为负。取 l 的这个符号即可得到所需结果。□

3.3.6. 情形 $s(m)\geq 3$：在 k中的漂移。回顾第 $s=s(m)$ 节中的记号 $\delta=\delta(m)$，这些记号来自第 3.1 节。

引理 *20*（k中的漂移）。设 $\langle a,b\rangle$ 是非锁定抛物仿射作用，且 a 为二步。存在正常数 $\xi=\xi(A,B)$ 和 $C=C(A,B)$，使得对任意$m\in\mathcal{C}_3$，以及任意满足 $|k|\geq\xi|m|$，$|l|\leq|k|^{\delta}$ 的 k,l，其中 $\delta=\delta(m)$ 如第 *3.1* 节所定义，有：

$$|\bar{A}^k\bar{B}^l m|\geq C|k|^{\delta}.$$

证明。令 $s=s(m)$ 为 m的步数，定义见第 3.1节。由于 $\delta=\delta(m)=0.99/s$，条件 $|l|\leq|k|^{\delta}$ 推出 $|k|\geq|l|^s$。令 $p\in[0,s-1]$ 为满足下式的最大整数$\curvearrowright\curvearrowright AB^p m\neq 0$，并注意到由（26）以及

$$\widehat{B}^p\bar{A}^k\bar{B}^l m=\widehat{B}^p m+k\widehat{A}\widehat{B}^p m+\mathcal{O}(l^{s-1}),\tag{29}$$

其中 $\mathcal{O}(l^{s-1})$ 表示不含 k 的项，其最高幂为 l。若假设 $|k|\geq\xi(A,B)|m|$ 且 $\xi(A,B)$ 充分大，则 k 中的线性项在（29）中占主导，因此 $|\widehat{B}^p\bar{A}^k\bar{B}^l m|\geq|k|/2$，从而 $|\bar{A}^k\bar{B}^l m|\geq C|k|$ 对某个正的常数 C成立。□

3.3.7. 命题 C的证明，情形 $s(m) \geq 3$。现在我们来讨论如何有效控制双重求和。

证明。不失一般性，假设 l 的良好符号为正。设 $\xi = \xi(A,B) > 0$ 为引理 20中的常数，并令 $\delta = \delta(m) = 0.99/s(m)$同前。我们将该和拆分为以下五个部分和，并分别进行估计：

$$\begin{aligned}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\sum_{l\geq 0}|\bar{A}^k\bar{B}^l m|^{-r} = &\left(\sum_{|k|\leq|\xi m|,\, l\leq|\xi m|^\delta}+\sum_{|k|\leq|\xi m|,\, l>|\xi m|^\delta}+\right.\\ &\left.\sum_{|k|>|\xi m|,\, l>|k|^\delta}+\sum_{|k|>|\xi m|,\, l<|\xi m|^\delta}+\sum_{|k|>|\xi m|,\, |\xi m|^\delta\leq l\leq|k|^\delta}\right)|\bar{A}^k\bar{B}^l m|^{-r}\\ &:= \Sigma_1+\Sigma_2+\Sigma_3+\Sigma_4+\Sigma_5.\end{aligned}$$

下文将多次用到以下初等估计：对于任意 $p, r > 0$，有：

$$\sum_{j\geq p} j^{-r} \leq c_0(r)p^{-r+1}.$$

对 Σ_1的估计。 由引理 18，存在 $c = c(A,B)$ 使得对所有 $l \leq |\xi m|^\delta$以及所有 $k \in \mathbb{Z}$，都有 $|\bar{A}^k\bar{B}^l m| \geq c|m|^\delta$。和 Σ_1 包含 $\leq 3|\xi m|^{\delta+1}$。因此，

$$\Sigma_1 \leq 3|\xi m|^{\delta+1}(c|m|^\delta)^{-r} < c_1|m|^{-r\delta+2}.$$

对 Σ_2 和 Σ_3的估计。 由引理 19，存在 $c = c(A,B)$ 使得对所有$k \in \mathbb{Z}$ 以及所有 $l \geq 0$，都有：$|\bar{A}^k\bar{B}^l m| \geq cl$在 Σ_2 的情形下，有 $|k| \leq \xi|m|$，因此

$$\Sigma_2 \leq 3\xi|m|\, c^{-r}\sum_{l>|\xi m|^\delta} l^{-r} \leq c_2|m|^{-r\delta+2}.$$

在 Σ_3 的情形下，我们有：

$$\Sigma_3 \leq 3c^{-r}\sum_{k>\xi|m|,\, l>k^\delta}\sum l^{-r} \leq \tilde{c}_3\sum_{k>\xi|m|}(k^\delta)^{-r+1} \leq c_3|m|^{-r\delta+2}.$$

对 Σ_4 和 Σ_5的估计。 根据引理 20，如果 $|k| > \xi|m|$ 且 $0 \leq l \leq |k|^\delta$，那么 $|\bar{A}^k\bar{B}^l m| \geq C|k|^\delta$。因此，

$$\Sigma_4 \leq C|\xi m|^\delta\sum_{k>\xi|m|} k^{-\delta r} \leq c_4|m|^{-\delta r+2},$$

and

$$\Sigma_5 \leq \sum_{l\geq|\xi m|^\delta,\, k\geq l^{1/\delta}}\sum k^{-r\delta} \leq c_5\sum_{l\geq|\xi m|^\delta}(l^{1/\delta})^{-r\delta+1} \leq c_5|m|^{-r\delta+2}.$$

回忆一下，对于任意 $m \in \mathbb{Z}^d$，我们有 $\delta(m) = 0.99/s(m) \geq \eta = 0.99/S$，其中 S 是 B 的步数。因此，$|m|^{-r\delta+2} \leq |m|^{-r\eta+2}$。将上述估计相加，便得到所需结果。□

4. 线性化问题的解。命题 A 的证明

对命题 A 的陈述可作如下理解。作用 $\langle a$ 的一个扰动$\langle F,\ G\rangle$ 定义了一个映射 p : $\mathbb{Z}^2 \to \mathrm{Vect}^\infty(\mathbb{T}^d)$，其满足 $p(k,\ l) := F^k G^l - a^k b^l$，$(k,\ l) \in \mathbb{Z}^2$。命题 A（实际上）断言，存在一个温和映射，将 p 投影到 $\langle a,\ b\rangle$ 上的（扭曲）余边界空间，使得该投影的余项关于 p 满足二次估计。交换性如何保证我们在投影时所产生的误差是二次小的？所有作用元素的交换关系告诉我们，定义在 p 上的某个线性算子 Lp（见第 4.2.2 节）大致由 p 的平方的大小所控制。因此，问题的核心是构造一个将 p 投影到 $\langle a,\ b\rangle$ 上的（扭曲）余边界空间的投影，使得该投影的余项（即我们所产生的误差）能够由 Lp 的大小控制。这在第 4.1.1 节和第 4.2 节中完成。最后的第 4.3 节包含命题 A 的证明。正是在这一证明中，我们使用了如下事实：交换性假设蕴含 Lp 相对于 p 是二次小的。

对命题 A 的表述作这样的理解，有助于我们理解其证明。也就是说，尽管命题 A 的表述中只包含 f 和 g（按照本节的记号，这意味着 $f = p(1, 0)$ 和 $g = p(0, 1)$），但为了得出这些估计，我们需要使用整个映射 p : $\mathbb{Z}^2 \to \mathrm{Vect}^\infty(\mathbb{T}^d)$，而不只是 f 和 g。我们将在命题 D 的表述之后、§4.1 中进一步解释这一点；命题 D 包含关于共轭和误差的主要估计。

命题 A 的证明计划如下。我们首先为函数值映射 $p : \mathbb{Z}^2 \to C^\infty(\mathbb{T}^d)$ 构造到余边界的投影。导出命题 A 的主要结果是命题 D，我们在 §4.1 中陈述并于 §4.1.1 中证明。命题 D 包含迭代过程收敛所需的关键估计。在 §4.2 中，我们利用命题 D 推导出相应的命题 E，适用于 $p : \mathbb{Z}^2 \to C^\infty(\mathbb{T}^d)$ 的截断；随后通过归纳应用该命题，得到截断向量场值映射 p : $\mathbb{Z}^2 \to \mathrm{Vect}^\infty(\mathbb{T}^d)$ 的命题 F。从函数值映射 p 过渡到向量场值映射 p 相当直接，这是由于我们的作用 $\langle a, b\rangle$ 具有抛物型线性部分。所有其他采用 KAM 方法研究抛物作用的工作中，也都使用了类似的归纳论证（[D], [DK2], [ZW], [DT]）。最后，关于向量场值映射 p 的主要结果（命题 F）将在 §4.3 中用于证明主要迭代步骤——命题 A。

4.1. 用余边界逼近 $p : \mathbb{Z}^2 \to C^\infty(\mathbb{T}^d)$。我们从一组函数开始，$p : \mathbb{Z}^2 \to C^\infty(\mathbb{T}^d)$。回顾 §3.1 中 $\partial_{k,l}(h)$ 和 $Lp((k, l), (s, t))$ 的定义。这里我们引入一些额外的记号。对于固定的自然数 N，我们定义$\mathcal{Q}_N$ 为由所有对应于范数小于 N 的共振向量的共振对组成的集合（关于共振对相对于共振向量的范数上界，参见引理 4；下文定义中出现的常数 C 亦参见该引理）。换言之，

$$\mathcal{Q}_N := \{(k, l) \in \mathcal{R}(A, B) :\ C(|k| + |l|) < N\} \cup \{(1, 0), (0, 1)\}. \tag{30}$$

为简化记号，对于任意 $r \geq 0$，我们引入以下范数 :

$$\begin{aligned} \|p\|_r &:= \max\{\|p(1, 0)\|_r, \|p(0, 1)\|_r\}, \\ \|Lp\|_{r,N} &:= \max\{\|Lp((1, 0), (k, l)\|_r, \|Lp((0, 1), (k, l)\|_r : (k, l) \in \mathcal{Q}_N\}. \end{aligned} \tag{31}$$

从现在起，κ 表示一个仅依赖于作用 $\langle a$和正则性 r的常数，但在推导过程中，它也会吸收估计中出现的其他常数。

我们在此证明的主要结果是：

命题 D。设 $\langle a, b\rangle$ 是一个未锁定的 (γ, τ)-丢番图二步-S 抛物仿射作用，其中 a 是二步，且设 $r > 0$。存在常数 $\mu = \mu(S) > 0$, $\sigma = \sigma(\langle a, b\rangle)$ 和 $\kappa = \kappa(r, \langle a, b\rangle)$，使得对于任意映射 $p: \mathbb{Z}^2 \mapsto C^\infty(\mathbb{T}^d)$，都存在一个 C^∞函数 h，使得

$$\|h\|_r \leq \kappa \|p\|_{r+\sigma}, \tag{32}$$

并且由以下方式定义的映射 $\tilde{p}: \mathbb{Z}^2 \mapsto C^\infty(\mathbb{T}^d)$

$$\tilde{p}(s,t) := \partial_{s,t} h - p(s,t) + ave(p(s,t)), \quad (s,t) \in \mathbb{Z}^2, \tag{33}$$

满足以下估计：

$$\|\tilde{p}(s,t)\|_r \leq \|p(s,t)\|_r + \kappa(|s| + |t|)^{dr} \|p\|_{r+\sigma}. \tag{34}$$

此外，若 p 截断至 N，则对于任意$(s, t) \in \mathcal{Q}_N$，$\tilde{p}$ 甚至满足以下估计：

$$\|\tilde{p}(s,t)\|_r \leq \kappa(|s| + |t|)^{d(\mu r+\sigma)} \|Lp\|_{\mu r+\sigma, N}. \tag{35}$$

该命题的证明篇幅很长，占据下一节的全部内容。下面简要概述证明过程。

我们将通过其傅里叶系数 h来定义 h_m，具体方式取决于 m。在以下三种情形中，我们需要采用不同的论证：的轨道 m 在对偶线性作用 $\langle A$下 $B\rangle$ 为单点；在作用的某个元素下为有限集（但并非在所有元素下都如此）；或为无限集。若轨道为单点，则属于退化情形。第二种情形是 m 共振，否则m为非共振。如 §1.3中所述，对于每个共振 m，我们都可以对应一个唯一的共振对 (k, l)，使得 $\bar{A}^k \bar{B}^l m = m$。

当B-轨道特殊的单点（即 $\langle A, B\rangle$ 处于特殊的退化）情形 当 $Am = \bar{A}, \bar{B}m = m$时，其处理方式与 Moser 在[M] 中的原始证明相同（见 §4.1.2）。

接下来，考虑 $Am = m$ 和 $Bm \neq m$的情形。这是一个 (1, 0) 共振。在这种情形下，由于 $\langle A, B\rangle$ 未锁定，因此 $\hat{B}^2 m = 0$（所以 m 对B而言是二阶）。接着，我们使用生成元 b 来构造 h_m。为了证明在这种情形下 $\tilde{p}$ 满足所需的估计，我们需要关于平移向量$\alpha_{1,0}$的丢番图条件。

If $\bar{A}m = m$, 我们使用生成元 a 来构造 h_m。为了得到 $\tilde{p}$ 的估计，我们对共振和非共振的 m采用不同的策略。

当 m 共振时，我们将使用相应的共振对(k, l) 和作用元素 $a^k b^l$ 来估计误差。正是在这里，我们需要使用作用中的所有元素，也就是映射$\mathbf{p}: \mathbb{Z}^2 \to \mathrm{Vect}^\infty(\mathbb{T}^d)$，而不只是两个生成元$\mathbf{f}$ 和$\mathbf{g}$。此外，我们也正是在这里使用关于平移部分$\alpha_{k,l} = a^k b^l - A^k B^l$的丢番图假设。为了控制所用作用元素的数量，我们需要先截断给定数据。因此，命题 D中的关键误差估计仅针对截断映射给出。正如引理4中所解释的，在我们的论证中，共振对的范数将由共振的范数所界定。因此，对于

对 N截断映射的估计，我们只需考虑对应于范数不超过 N的共振的共振对。所有共振情形的处理见§4.1.3。

最后，如果 $\langle A,\ B\rangle$-轨道 m 是无限的，我们就使用双重和估计。这部分论证用到§3.3，内容见 §4.1.4。

4.1.1. 命题 D 的证明。 下面来定义并估计数值 h_m和 $(\tilde{p}(s,\ t))_m$。论证将很大程度上取决于 m。具体而言，我们总是令 $h_0=0$，而对于 m 属于以下三个子集之一的情形，$\mathcal{C}_1$，$\mathcal{C}_2$ 和 $\mathcal{C}_3$，这些子集定义于 §3.1，我们需要采用专门的方法。命题 D 的更精确表述如下。

命题 *21*。设 $\langle a,b\rangle$ 是一个未锁定的 (γ,τ)-丢番图抛物型步-S 仿射作用，其中 a 是二步，且 $r>0$。存在常数 $\eta>0$ $(\eta=0.99/S)$,$\sigma=\sigma(\langle a,b\rangle)$ 和 $\kappa=\kappa(r,\langle a,b\rangle)$，使得对于任意映射 $p\colon \mathbb{Z}^2\mapsto C^\infty(\mathbb{T}^d)$，存在一组数值 (h_m)，$m\in\mathbb{Z}^d\setminus\{0\}$，满足

$$|h_m|\le\kappa\max\{\|p(1,0)\|_r,\|p(0,1)\|_r\}|m|^{-r+1+\tau} \tag{36}$$

具有如下性质。定义一个新的映射 $\tilde{p}$，从 $\mathbb{Z}^2$ 映射到形式傅里叶级数空间：

$$(\tilde{p}(s,t))_m:=h_{\bar{A}^s\bar{B}^tm}e(\bar{A}^s\bar{B}^tm,\alpha_{s,t})-h_m-(p(s,t))_m,\ \ (s,t)\in\mathbb{Z}^2. \tag{37}$$

那么，对于任意 $r>8/\eta$，它满足：

$$|\tilde{p}(s,t)_m|\le$$
$$\begin{cases}\kappa(|s|+|t|)^{dr}\max\{\|Lp((s,t),(1,0))\|_r,\|Lp((s,t),(0,1))\|_r\}|m|^{-\eta r+9+\tau}, & m\in\mathcal{C}_1\cup\mathcal{C}_3\\ \kappa(|s|+|t|)^{dr}\max\{\|Lp((1,0),(k,l))\|_r,\|Lp((0,1),(k,l))\|_r,\\ \qquad\|Lp((1,0),(s,t))\|_r,\|Lp((0,1),(s,t))\|_r\}|m|^{-r+\tau+2}, & m\in\mathcal{C}_2(k,l).\end{cases} \tag{38}$$

此外，对于 $m\in\mathcal{C}_2(k,l)$，我们有 $|k|+|l|\le C(A,B)|m|$。

Pr命题 D 由命题 21 得证。 回顾一下，在 (31) 中我们定义了 ：

$$\|p\|_r:=\max\{\|p(1,0)\|_r,\|p(0,1)\|_r\}.$$

那么，估计式 (36) 直接推出 32) 中对 h 的估计，代价是损失 $\sigma:=\tau+d+2$阶导数。

映射 $\tilde{p}$，定义于（33），满足线性估计（34），这可由其定义以及对 h的估计（32）推出：

$$\|\tilde{p}(s,t)\|_r\le\|\partial_{s,t}h\|_r+\|p(s,t)\|_r\le\|p(s,t)\|_r+\kappa(|s|+|t|)^{rd}\|p\|_{r+\sigma}.$$

若 p 截断至 N，则在共振对（k，l）$\in\mathcal{Q}_N$（这是一个有限集合）上取（38）右端的最大值，可得对任意（s，t）$\in\mathcal{Q}_N$（见定义（31））：

$$\begin{aligned}|\tilde{p}(s,t)_m|&\le\kappa(|s|+|t|)^{dr}\max_{(k,l)\in\mathcal{Q}_N}\{\|Lp((1,0),(k,l))\|_r,\|Lp((0,1),(k,l))\|_r,\\ &\qquad\|Lp((1,0),(s,t))\|_r,\|Lp((0,1),(s,t))\|_r\}|m|^{-\eta r+\tau+9}\\ &\le\kappa(|s|+|t|)^{dr}\|Lp\|_{r,N}|m|^{-\eta r+\tau+9}.\end{aligned}$$

这意味着

$$\sup|\tilde{p}(s,t)_m||m|^{\eta r-\tau-9}\le\kappa(|s|+|t|)^{dr}\|Lp\|_{r,N},$$

通过代换 $r := \eta r - \tau - 9$，可得：

$$\sup_m\{|\tilde{p}(s,t)_m||m|^r\} \le \kappa(|s|+|t|)^{d(\eta^{-1}r+\eta^{-1}(\tau+9))}\|Lp\|_{\eta^{-1}r+\eta^{-1}(\tau+9),N}.$$

根据众所周知的范数比较：$\|\tilde{p}(s,t)\|_r \le C\sup_m\{|\tilde{p}(s,t)_m||m|^{r+d+2}\}$，我们有：

$$\|\tilde{p}(s,t)\|_r \le \kappa(|s|+|t|)^{d(\eta^{-1}(r+d+2)+\eta^{-1}(\tau+9))}\|Lp\|_{\eta^{-1}(r+d+2)+\eta^{-1}(\tau+9),N}.$$

现在令 $\mu := \eta^{-1}$（回想一下 $\eta < 1$），定义新的 $\sigma := \eta^{-1}(\tau+9+d+2)$，从而得到最终估计 $\|\tilde{p}(s,t)\|_r \le \kappa(|s|+|t|)^{d(\mu r+\sigma)}\|Lp\|_{\mu r+\sigma,\ N}$.

□

本节余下部分我们将证明命题 21。我们将根据 $m \in \mathcal{C}_1$、$m \in \mathcal{C}_2$ 或 $m \in \mathcal{C}_3$，将证明分为三个小节。

4.1.2. 在 $m \in \mathcal{C}_1$ 情形下命题 21 的证明。令 $m \in \mathcal{C}_1$，即我们有 $Am = Bm = m$。由于假设该作用是 (γ,τ)–丢番图的，因此要么 $|e(m,\alpha)-1| \ge \gamma\|m\|^{-\tau}$，要么 $|e(m,\beta)-1| \ge \gamma\|m\|^{-\tau}$。令 $f = p(1,0)$ 和 $g = p(0,1)$。

定义 h_m 如下：

$$h_m := \begin{cases} (e(\alpha,m)-1)^{-1}f_m, & \text{if } |1-e(\alpha,m)| \ge \gamma\|m\|^{-\tau}, \\ (e(\beta,m)-1)^{-1}g_m, & \text{if } |1-e(\alpha,m)| < \gamma\|m\|^{-\tau}. \end{cases} \tag{39}$$

于是有如下

命题 22. 设 $\langle a,b\rangle$ 是一个 (γ,τ)-丢番图抛物仿射作用，并设映射 $p : \mathbb{Z}^2 \mapsto C^\infty(\mathbb{T}^d)$ 已给定。对于 $m \in \mathcal{C}_1$，令 h_m 按 (39) 中的定义给出。那么

$$|h_m| \le \gamma \max\{\|f\|_r, \|g\|_r\}\,|m|^{-r+\tau},$$

且对任意 $(s,t) \in \mathbb{Z}^2$，由公式 $(\tilde{p}(s,t))_m$ 定义的数 (37)，在此情形下其形式为：

$$(\tilde{p}(s,t))_m = h_m(e(m,\alpha_{s,t})-1) - (p(s,t))_m,$$

满足

$$|(\tilde{p}(s,t))_m| \le c\max\{\|Lp((s,t),(1,0))\|_r, \|Lp((s,t),(0,1))\|_r\}|m|^{-r+\tau}.$$

证明。 首先假设 m 满足 $|1-e(\alpha,m)| \ge \gamma\|m\|^{-\tau}$，此时 $h_m = (e(\alpha,m)-1)^{-1}f_m$。那么

$$\begin{aligned}(Lp((s,t),(1,0)))_m &= (\partial_{s,t}f)_m - (\partial_{1,0}p(s,t))_m \\ &= (e(\alpha_{s,t},m)-1)\,f_m - (e(\alpha,m)-1)\,(p(s,t))_m = \\ &= (e(\alpha_{s,t},m)-1)\,h_m(e(\alpha,m)-1) - (e(\alpha,m)-1)\,(p(s,t))_m = \\ &= (e(\alpha,m)-1)\,\left(e(\alpha_{s,t},m)-1)h_m - (p(s,t))_m\right) \\ &= (e(\alpha,m)-1)(\tilde{p}(s,t))_m.\end{aligned}$$

估计 $|1-e(\alpha,m)| \ge \gamma\|m\|^{-\tau}$ 即可推出结论。当 $h_m = (e(\beta,m)-1)^{-1}g_m$ 时的情形也用同样的方法处理。

直接根据 h_m 的定义以及 α 和 β 的 SDC 条件，我们得到 $|h_m|$ 的界：

$$\begin{aligned}|h_m| &\le \max\{|e(\beta,m)-1|^{-1}, |e(\alpha,m)-1|^{-1}\}\max\{|f_m|,|g_m|\} \\ &\le \gamma|m|^\tau|m|^{-r}\max\{\|f\|_r,\|g\|_r\}.\end{aligned}$$

□

显然，命题 22 蕴含命题 21 在情形 $m \in \mathcal{C}_1$。

4.1.3. $m \in \mathcal{C}_2$情形下命题 21 的证明。设 $\langle a, b\rangle$ 是一个未锁定的抛物型仿射作用，其中 a 是二步的。令 $m \in \mathcal{C}_2(k,l)$，即 Am 和 Bm 中至少有一个不同于 m，并且存在 $(k,l) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{0\}$，使得 $\bar{A}^k\bar{B}^l m = m$（因此 $kAm + lBm = 0$）。由引理 12，$\mathcal{C}_2(k,l)$ 可分为两个子情形：

$\mathcal{C}_2'(k,l)$: $\bar{A}m \neq m$;
$\mathcal{C}_2''(k,l)$: $\bar{A}m = m$，而 $Bm \neq m$。注意，在这种情形下，由引理12，我们有$\bar{B}^2 m = m$。

集合 $\mathcal{C}_2'(k,l)$ 和 $\mathcal{C}_2''(k,l)$ 在 $\langle A, B\rangle$ 的作用下保持不变，这是因为该作用具有交换性。考虑映射 $p : \mathbb{Z}^2 \mapsto C^\infty(\mathbb{T}^d)$。记 $f = p(1,0)$ 和 $g = p(0,1)$。

对于 $m \in \mathcal{C}_2'(k,l)$，我们定义：

$$h_m = \begin{cases} \Sigma_m^{+,A}(f), & m \in \mathcal{M}(A), \\ \Sigma_m^{-,A}(f), & m \in \mathcal{N}(A). \end{cases} \tag{40}$$

对于 $m \in \mathcal{C}_2''(k,l)$，我们定义：

$$h_m = \begin{cases} \Sigma_m^{+,B}(g), & m \in \mathcal{M}(B), \\ \Sigma_m^{-,B}(g), & m \in \mathcal{N}(B). \end{cases} \tag{41}$$

为了理解我们对 h_m 的选择，可以考虑满足 $h \circ a - h = f$ 的 C^∞-函数 h 和 f。那么，它们的傅里叶系数之间满足关系

$$(h \circ a - h)_m = h_{\bar{A}m}\lambda_m^{(1)} - h_m = f_m.$$

通过 A 沿正向或负向迭代此等式，并乘以适当的常数，可得到一个望远镜和，其值等于 h_m 如公式（40）所示。以下命题是本节的主要结论。显然，它蕴含命题 21 在 $m \in \mathcal{C}_2$ 的情形下。

命题 23. 假设 $\langle a, b\rangle$ 是一个未锁定的 (γ,τ)-丢番图抛物型仿射作用，其中 a 是二步。考虑映射 $p : \mathbb{Z}^2 \mapsto C^\infty(\mathbb{T}^d)$，记 $f = p(1,0)$ 和 $g = p(0,1)$。给定某个 $(k,l) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{0\}$ 的 $m \in \mathcal{C}_2(k,l)$，按上述方式定义 h_m。

则存在 $\kappa = \kappa(\gamma, \tau, A, B) > 0$，使得

$$|h_m| \leq \kappa \max\{\|f\|_r, \|g\|_r\} |m|^{-r+1},$$

并且对于任意 $(s,t) \in \mathbb{Z}^2$，由公式 $(\tilde{p}(s,t))_m$ 定义的数 (37)，即

$$\tilde{p}(s,t)_m = h_{\bar{A}^s\bar{B}^t m} e(\bar{A}^s\bar{B}^t m, \alpha_{s,t}) - h_m - (p(s,t))_m,$$

满足：

$$|(\tilde{p}(s,t))_m| \leq \kappa(|s| + |t|)^{dr} \max\{\|Lp((1,0),(k,l))\|_r, \|Lp((0,1),(k,l))\|_r, \\ \|Lp((1,0),(s,t))\|_r, \|Lp((0,1),(s,t))\|_r\} |m|^{-r+\tau+2}. \tag{42}$$

此外，$|k| + |l| \leq c|m|$ 对于某个 $c = c(A, B) > 0$.

证明。 下面给出命题 23 的证明，暂且假设若干引理成立，这些引理将在下文证明。首先考虑 $m \in \mathcal{C}_2'(k,\ l)$；关于 $m \in \mathcal{C}_2''(k,\ l)$ 的论证类似。

(i) 定义 h_m 为（40）。关于 $|h_m|$ 的估计可由命题 B 第 *(3)*部分得出。

(ii) 我们首先证明 （42）中对 $(s,t) = (1,0)$的估计。这由引理 24完成。具体来说，我们在该引理中注意到，误差项 $\tilde{f}_m = \tilde{p}(1,0)_m = h_{\bar{A}m}\lambda_m^{(1)} - h_m - f_m$对所有 m 都为零，只有那些在其 m 轨道上范数最小的 A 例外。对于后一种情形，我们将由交换关系公式（43）推出，现将该公式重述如下

$$(e(m,\alpha_{k,l}) - 1)\,\tilde{f}_m = \Sigma_m^A\left(Lp((1,0),(k,l))\right).$$

此后，右端的上界为 $Lp((1,0),(k,l)$ 的范数（因为 m 在其轨道上范数最小），而项 $|e(m,\alpha_{k,l}) - 1|$ 则由共振的丢番图条件从下方估计。共振上的丢番图条件正是在此处发挥关键作用：该条件结合公式（43）可推出：

$$|\tilde{f}_m| \le c\|Lp((1,0),(k,l))\|_r |m|^{-r+1+\tau}.$$

(iii) 使用上面的步数 **(ii)** 证明估计 **(42)** 对所有 (s,t) 都成立。引理 25 根据 $f_m = (\tilde{p}(1,0))_m$（或 $\tilde{g}_m = (\tilde{p}(0,1))_m$，这将与 $m \in \mathcal{C}_2''(k,l)$ 有关）上的估计，推出任意 (s,t) 对应的 $\tilde{p}(s,t)_m$ 上的估计。我们对 $\mathcal{K} = c\|Lp((1,0),(k,l))\|_r$ 使用引理 25，并结合 $\rho = -r+1+\tau$，从而得到所有 (s,t) 对应的 **(42)**。

关于 $m \in \mathcal{C}_2''(k,l)$ 的论证类似：由 **(41)** 定义 h_m，并借助命题 B 的第 **(3)** 部分估计 $|h_m|$；借助引理 24，通过 $\|Lp((0,1),(k,l))\|_r$ 估计 $|\tilde{g}_m| := |(\tilde{p}(0,1)_m)|$，并用它代替 $|f_m|$，从而得到对所有 (s,t) 都成立的公式 **(42)**。□

下面的引理给出了上述 **(ii)** 项的证明。下文用 $m = \bar{m}$ 表示 m 是其 A 轨道上（范数）最低的点，否则用 $m \neq \bar{m}$ 表示。

引理 *24.* 假设 $\langle a,b\rangle$ 是一个未锁定的 (γ,τ)*-*丢番图抛物仿射作用，其中 a 是二步。令 $m \in \mathcal{C}_2(k,l)$。记 $f = p(1,0)$，$f_m = (\tilde{p}(1,0))_m$、$g = p(0,1)$、$\tilde{g}_m = (\tilde{p}(0,1))_m$，并令 h_m 如 *(40)*、*(41)* 所述。则存在一个常数 $c = c(r,A,B) > 0$，使得对于 $m = \bar{m}$，有：

$$\begin{cases} |\tilde{f}_m| \le c\|Lp((1,0),(k,l))\|_r |m|^{-r+1+\tau} & \text{if } m \in \mathcal{C}_2'(k,l), \\ |\tilde{g}_m| \le c\|Lp((0,1),(k,l))\|_r |m|^{-r+1+\tau} & \text{if } m \in \mathcal{C}_2''(k,l). \end{cases}$$

对于 $m \neq \bar{m}$，有 $f_m = \tilde{g}_m = 0$。

证明。 假设 $m \in \mathcal{C}_2'(k,l)$，情形 $m \in \mathcal{C}_2''(k,l)$ 类似。根据 h_m 的定义，我们有：$\tilde{f}_m = h_{\bar{A}m}\lambda_m^{(1)} - h_m - f_m$，并且可以形式化地表示为：

$$\tilde{f}_m = \begin{cases} \Sigma_m^A(f), & m = \bar{m}, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

假设 $m = \bar{m}$。根据 h_m 的定义，我们得到：

$$\begin{aligned} (Lp((1,0),(k,l)))_m &= (\partial_{1,0}p(k,l))_m - (\partial_{k,l}f)_m \\ &= (\partial_{1,0}p(k,l))_m - (e(m,\alpha_{k,l}) - 1)f_m. \end{aligned}$$

注意，由于 $a^k b^l$ 和 a的交换性，我们得到关系：$A\alpha_{k,l} = \alpha_{k,l}$.因此，当 m 沿着 A-轨道移动时，项 $(e(m,\alpha_{k,l}) - 1)$ 不变。

对两边取加权和 Σ_m^A，并回想对于 $m=\bar{m}$，我们有 $\Sigma_m^A(f) = \tilde{f}_m$:

$$\Sigma_m^A\left(Lp((1,0),(k,l))\right) = \left(e(m,\alpha_{k,l})-1\right)\Sigma_m^A(f) = \left(e(m,\alpha_{k,l})-1\right)\tilde{f}_m. \tag{43}$$

由于 $Lp((1,0),(s,t)) \in C^r$，我们可以使用命题 B，由此得到:

$$|\Sigma_m^A(Lp((1,0),(k,l)))| \le \|Lp((1,0),(k,l))\|_r |m|^{-r+1}.$$

利用关于共振的丢番图假设，我们得出:

$$|\tilde{f}_m| \le \|Lp((1,0),(k,l))\|_r |m|^{-r+1}|e(m,\alpha)-1|^{-1} \le \|Lp((1,0),(k,l))\|_r |m|^{-r+1+\tau}.$$

□

下面的引理根据关于$\tilde{f}_m = (\tilde{p}(1,0))_m$ 或 $\tilde{g}_m = (\tilde{p}(0,1))_m$的估计，推出任意 (s,t) 对应的 $(\tilde{p}(s,t))_m$ 的估计，并给出条目 (iii) 的详细证明。

引理 25。 假设 $\langle a,b\rangle$ 是一个非锁定抛物仿射作用，且 a 是步数为 2。取映射 $p: \mathbb{Z}^2 \mapsto C^\infty(\mathbb{T}^d)$，并设 $\{h_m\}_{m\in\mathcal{U}}$ 给定，其中 $\mathcal{U}$ 是某个$\langle \bar{A},\bar{B}\rangle$-不变集。对每个 $(s,t)\in\mathbb{Z}^2$, $\{(\tilde{p}(s,t))_m\}_{m\in\mathbb{Z}}$ 通过以下方式定义

$$(\tilde{p}(s,t))_m = h_{\bar{A}^s\bar{B}^t m} e(\bar{A}^s\bar{B}^t m,\alpha_{s,t}) - h_m - (p(s,t))_m.$$

假设存在 $\mathcal{K}>0$ 和 $0<\rho\le r$，使得

或者对所有 $m\in\mathcal{U}$，都有 $|(\tilde{p}(1,0))_m| \le \mathcal{K}|m|^{-\rho}$；或者对所有 $m\in\mathcal{U}$，都有 $|(\tilde{p}(0,1))_m| \le \mathcal{K}|m|^{-\rho}$。那么存在一个常数 $c=c(A,B)>0$，使得对任意 $(s,t)\in\mathbb{Z}^2$，都有:

$$|(\tilde{p}(s,t))_m| \le c(|s|+|t|)^{dr}\left(\max\{\|Lp((s,t),(1,0))\|_r, \|Lp((s,t),(0,1))\|_r\}+\mathcal{K}\right)|m|^{-\rho+1}. \tag{44}$$

证明。 首先，假设对于 m 在一个 A-不变集 $\mathcal{U}$中的所有元素，都有 $|(\tilde{p}(1,0))_m| \le \mathcal{K}|m|^{-\rho}$。为简便起见，记 $f_m := (p(1,0))_m$ 以及 $\tilde{f}_m := (\tilde{p}(1,0))_m$。

对于序列 $\{h_m\}$，形式上有:

$$\partial_{s,t}(\partial_{k,l}h)_m = \partial_{k,l}(\partial_{s,t}h)_m.$$

注意到，对于任意光滑函数 H，仅利用交换关系 $ab=ba$ 即可验证 $\partial_{s,t}\partial_{k,l}H = \partial_{k,l}\partial_{s,t}H$。因此，在交换条件下，光滑函数 H 的傅里叶系数对每个 m 都满足：$\partial_{s,t}(\partial_{k,l}H)_m = \partial_{k,l}(\partial_{s,t}H)_m$。这便推出数列 $\{h_m\}$ 满足所需关系（也可以直接验证该关系）。

根据数集 (h_m) 的定义，

$$\begin{aligned}(Lp((1,0),(s,t)))_m &= (\partial_{1,0}p(s,t))_m - (\partial_{s,t}f)_m\\ &= (\partial_{1,0}p(s,t))_m - (\partial_{s,t}\partial_{1,0}h - \partial_{s,t}\tilde{f})_m\\ &= (\partial_{1,0}\left(p(s,t)-\partial_{s,t}h\right))_m + (\partial_{s,t}\tilde{f})_m\\ &= (\partial_{1,0}\,\tilde{p}(s,t))_m + (\partial_{s,t}\tilde{f})_m.\end{aligned}$$

因此，

$$(\partial_{1,0}\,\tilde{p}(s,t))_m = (Lp((1,0),(s,t)))_m - (\partial_{s,t}\tilde{f})_m.$$

由于 $Lp((1,0),(s,t)) \in C^r$ 和 $\rho\le r$，我们有

$$|(Lp((1,0),(s,t)))_m| \le \|Lp((1,0),(s,t))\|_r |m|^{-\rho}.$$

~ ~ ~ ~我们来估计 $(\partial_{s,t}f)_m = f_{\bar{A}^s\bar{B}^t m} - f_m$。为了对 $|f_{\bar{A}^s\bar{B}^t m}|$ 进行界定，注意到由于作用的线性部分 $\langle a, b\rangle$ 是抛物型的，因此对于某个常数 $c_0 = c_0(A, B)$，我们有：

$$\|\bar{A}^{-s}\bar{B}^{-t}\| \le c_0(|s| + |t|)^d.$$

因此，对于任意 (s, t)，我们有：

$$|m| \le \|\bar{A}^{-s}\bar{B}^{-t}\|\,|\bar{A}^s\bar{B}^t m| \le c_0(|s| + |t|)^d|\bar{A}^s\bar{B}^t m|,$$

从而 $|\bar{A}^s\bar{B}^t m|^{-\rho} \le c_1(|s| + |t|)^{dr}|m|^{-\rho}$，因此

$$\begin{aligned}|(\partial_{s,t}\tilde{f})_m| \le& |\tilde{f}_{\bar{A}^s\bar{B}^t m}| + |\tilde{f}_m| \le \mathcal{K}(|\bar{A}^s\bar{B}^t m|^{-\rho} + |m|^{-\rho})\\ &\le c_2\mathcal{K}(|s| + |t|)^{dr}|m|^{-\rho}\end{aligned}$$

其中 $c_1, c_2 > 0$ 仅依赖于 (A, B)。最后，我们得到：

$$\begin{aligned}|(\partial_{1,0}\,\tilde{p}(s,t))_m| \le& |(Lp((1,0),(s,t)))_m + (\partial_{s,t}\tilde{f})_m|\\ &\le \left(\|Lp((1,0),(s,t))\|_r + c_2\mathcal{K}(|s| + |t|)^{dr}\right)\,|m|^{-\rho}.\end{aligned}$$

由命题 B(2)，可知

$$\begin{aligned}|(\tilde{p}(s,t))_m| \le& c_3\left(\|Lp((1,0),(s,t))\|_r + c_1\mathcal{K}(|s| + |t|)^{dr}\right)\,|m|^{-\rho+1}\\ \le& c(|s| + |t|)^{dr}\left(\|Lp((1,0),(s,t))\|_r + \mathcal{K}\right)\,|m|^{-\rho+1}\end{aligned}$$

其中某个 $c = c(A, B) > 0$。情形 $|(\tilde{p}(0,1))_m| \le \mathcal{K}|m|^{-\rho}$ 类似，只需使用 $\tilde{\partial}_{0,\,1}$，$g_m := (p(0,1))_m$ 和 $\tilde{g}_m := (\tilde{p}(0,1))_m$，分别代替 $\partial_{1,\,0}$，f_m 和 f_m。□

4.1.4. 命题 *21* 的证明，情形 $m \in \mathcal{C}_3$。令 $m \in \mathcal{C}_3$；记 $f = p(0,\,1)$。定义 h_m 为

$$h_m = \begin{cases}\Sigma_m^{+,A}(f), & m \in \mathcal{M}(A),\\ \Sigma_m^{-,A}(f), & m \in \mathcal{N}(A).\end{cases} \tag{45}$$

命题 26. 设 $\langle a, b\rangle$ 是未锁定的步数为S 的抛物型仿射作用，其中 a是二步。给定一个映射 $p : \mathbb{Z}^2 \mapsto C^\infty(\mathbb{T}^d)$。对于 $m \in \mathcal{C}_3$，定义 h_m 如下：(45).

存在一个常数 $\kappa = \kappa(\gamma, r, A, B)$ 使得

$$|h_m| \le \kappa\|f\|_r|m|^{-r+1}, \tag{46}$$

并且，对每个 (s, t) 定义数值 $(\tilde{p}(s,t))_m$ 如公式 (37)所示，即

$$(\tilde{p}(s,t))_m = h_{\bar{A}^s\bar{B}^t m}e(\bar{A}^s\bar{B}^t m, \alpha_{s,t}) - h_m - (p(s,t))_m,$$

对于 $\eta = 0.99/S$，任意给定 $r > 8/\eta$，我们有如下估计：

$$|\tilde{p}(s,t)_m| \le \kappa(|s| + |t|)^{dr}\max\{\|Lp((1,0),(0,1))\|_r, \|Lp((s,t),(1,0))\|_r\}\,|m|^{-\eta r+9}. \tag{47}$$

证明。本命题的证明分为三个步骤，类似于命题 23 的证明。证明中的步骤 (i) 和 (iii) 依赖于相同的引理（应用时常数略有不同）。重要区别在于步骤 (ii) 的证明，该步骤依赖于命题 C 关于沿最低点的对偶轨道控制双重和¯在一个 A-轨道上。步骤如下：

(i) 估计（46）由命题*(3)* 的第B部分得出。(ii) 基于命题C，
我们将证明如下结论：

引理*27.* 假设 $\langle a, b\rangle$ 是未锁定的步数为 S 的抛物仿射作用，其中 a 是二步，并设 $m \in \mathcal{C}_3$。与前面一样，记 $f = p$*(1,0)*、 $f_m = (\tilde{p}$*(1,0)*$)_m$，并令 h_m 如（*45*）中所定义。则存在常数 $c = c(r, A, B) > 0$，使得对于 $\eta = 0.99/S$，若 $\_m = \bar{m}$ （即 m 是其 A 轨道上的最低点），则有：

$$|\tilde{f}_m| \le c\|Lp((1,0),(0,1))\|_r \, |m|^{-\eta r+8}; \tag{48}$$

˜若 $m \neq \bar{m}$，则 $f_m = 0$。

(iii) 引理 27，接着是引理 25 ，取 $\mathcal{K} = c\|Lp$*((1,0),(0,1))*$\|_r$ 和 $\rho = -\eta r + 8$，可推出任意 47) 对于 (s, t)成立。 □

因此，现在只需证明引理 27。

引理 *27*的证明。 根据 h_m 的定义，我们有：

$$\tilde{f}_m = h_{\bar{A}m} e(\bar{A}m, \alpha) - h_m - f_m = \begin{cases} -\Sigma^A_m(f), & m = \bar{m}, \\ 0, & m \neq \bar{m}. \end{cases} \tag{49}$$

假设 $m = \bar{m}$。为简便起见，记 $\phi := Lp$**((1,0),(0,1))**。注意，对于任意 $m \in \mathcal{C}_3$， ϕ 的定义直接推出，以下形式幂级数关系成立：

$$\Sigma^A_m(f) = \sum_{l\ge 0}\sum_{k\in\mathbb{Z}} \phi_{\bar{A}^k\bar{B}^l m}\lambda^{(k)}_m\mu^{(l)}_m = -\sum_{l\le -1}\sum_{k\in\mathbb{Z}} \phi_{\bar{A}^k\bar{B}^l m}\lambda^{(k)}_m\mu^{(l)}_m. \tag{50}$$

由于 $\phi \in C^r$，对于每个 m，其第 m 个傅里叶系数满足 $|\phi_m| \le \|\phi\|_r |m|^{-r}$。因此，

$$|\Sigma^A_m(f)| \le \|\phi\|_r \sum_{l\ge 0}\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\bar{A}^k\bar{B}^l m|^{-r} = \|\phi\|_r \sum_{l\le -1}\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\bar{A}^k\bar{B}^l m|^{-r}.$$

此情形下所需的估计（48）直接由上述双重求和的估计得出，即命题 C证明了：对于 r 充分大时，存在常数 $c = c(r,\ A,\ B) > 0$，使得以下至少一种情况成立：

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}}\sum_{l\ge 0} |\bar{A}^k\bar{B}^l m|^{-r} \le c|m|^{-\eta r+8}, \qquad \sum_{k\in\mathbb{Z}}\sum_{l<0} |\bar{A}^k\bar{B}^l m|^{-r} \le c|m|^{-\eta r+8}.$$

□

4.2. **命题D 在截断函数和向量场中的应用。**将命题 D 应用于截断函数是直接的。由于未扰动作用的线性部分是抛物型的，将其应用于截断向量场则需要一个迭代过程。类似的迭代过程此前已用于 [D], [DK2]。

4.2.1. 截断函数。 对于定义在 v 上的 $\mathbb{T}^d$ 任意光滑函数（或向量场），对于 $N \in \mathbb{N}$，截断函数 $T_N v$ 通过截去 v 的傅里叶级数中指标为 $\|n\| \ge N$的项得到。余项算子定义为 R_N: $= Id - T_N$。

对于映射 p: $\mathbb{Z}^2 \to C^\infty(\mathbb{T}^d)$，以及 $N \in \mathbb{N}$，定义截断 $T_N p$ by $(T_N p)(s, t)$ $= T_N p(s, t)$，以及 $R_N p := p - T_N p$。

那么，算子 T_N和余项算子 $R_N := Id - T_N$满足以下估计，对所有 $N \in \mathbb{N}$ 和所有 $0 < r \le r'$ 均成立：

$$\begin{aligned} \|T_N v\|_{r'} &\le C_{r,r'} N^{r'-r+d} \|v\|_r, \\ \|R_N v\|_r &\le C_{r,r'} N^{r-r'+d} \|v\|_{r'}. \end{aligned} \tag{51}$$

注意， $ave(T_N v) = ave(v)$。

下面的结论是将我们的主要技术结果命题 D直接应用于截断所得。

命题 *E.* 设 $\langle a, b\rangle$ 是一个未锁定的 (γ, τ)-丢番图抛物型二步-S 仿射作用，其中 a 是二步的，并设 $r > 0$。存在常数 $\mu = \mu(S) > 0$, $\sigma = \sigma(\langle a, b\rangle)$ 和 $\kappa = \kappa(r, \langle a, b\rangle)$，使得对任意 $p : \mathbb{Z}^2 \mapsto C^\infty(\mathbb{T}^d)$，存在 $V : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{R}$，从而对每个固定的 $N \in \mathbb{N}$ 及截断 $q = T_N p$，都存在 $h \in C^\infty(\mathbb{T}^d)$ 和 $\tilde{q} : \mathbb{Z}^2 \to C^\infty(\mathbb{T}^d)$，满足

$$q(s,t) = \partial_{s,t} h + \tilde{q}(s,t) + V(s,t), \ (s,t) \in \mathbb{Z}^2,$$

并且以下估计成立：

$$\begin{aligned} &\|h\|_r \le \kappa \|q\|_{r+\sigma}, \\ &\|\tilde{q}(s,t)\|_r \le \|q(s,t)\|_r + \kappa(|s| + |t|)^{rd} \|q\|_{r+\sigma}, \\ &\|\tilde{q}(s,t)\|_r \le \kappa(|s| + |t|)^{d\bar{r}} \|Lq\|_{\mu r + \sigma, N}, \\ &V(s,t) = ave(p(s,t)) = ave(q(s,t)), \end{aligned} \tag{52}$$

其中 $\bar{r} := \mu r + \sigma$。

注意，在上述命题中， h 和 $\tilde{q}$ 依赖于 N。

4.2.2. 截断向量场。对于映射 $\mathbf{p} : \mathbb{Z}^2 \to \mathrm{Vect}^\infty(\mathbb{T}^d)$ 和 $N \in \mathbb{N}$，定义截断 $T_N \mathbf{p}$：$(T_N \mathbf{p})(s,t) = T_N \mathbf{p}(s,t)$，且 $R_N \mathbf{p} := \mathbf{p} - T_N \mathbf{p}$。向量场上的算子 T_N 和 R_N 满足与 (51) 中相同的估计。

对于 $\mathbf{h} \in \mathrm{Vect}^\infty(M)$，我们定义

$$D_{s,t} : \mathbf{h} \mapsto \mathbf{h} \circ \rho(s,t) - \rho_0(s,t)\mathbf{h},$$

其中 $(s,t) \in \mathbb{Z}^2$。于是算子 $\mathbf{L}$ 定义为

$$(\mathbf{L}\mathbf{p})((k,l),(s,t)) = D_{s,t}\mathbf{p}(k,l) - D_{k,l}\mathbf{p}(s,t) \tag{53}$$

对于任意 $(k,l),(s,t) \in \mathbb{Z}^2$。

回顾一下，集合 $\mathcal{Q}_N$ 在 (30) 中定义。对于 $\mathbf{p}$： $\mathbb{Z}^2 \to \mathrm{Vect}^\infty(\mathbb{T}^d)$ 和 $r \ge 0$ 小于等于 t

$$\begin{aligned} \|\mathbf{p}\|_r &:= \max\{\|\mathbf{p}(1,0)\|_r, \mathbf{p}(0,1)\|_r\}, \\ \|\mathbf{L}\mathbf{p}\|_{r,N} &:= \max\{\|\mathbf{L}\mathbf{p}((1,0),(k,l))\|_r, \|\mathbf{L}\mathbf{p}((0,1),(k,l))\|_r : (k,l) \in \mathcal{Q}_N\}. \end{aligned}$$

命题 *F.* 设 $\langle a, b\rangle$ 是一个未锁定的步数-S 抛物型 (γ, τ)-丢番图仿射作用，其中 a 是二步，且 $r > 0$。存在常数 $\mu = \mu(S) > 0$, $\sigma = \sigma(\langle a, b\rangle)$ 和 $\kappa = \kappa(r, \langle a, b\rangle)$，使得对于任意 $p : \mathbb{Z}^2 \mapsto Vect^\infty(\mathbb{T}^d)$，都存在 $V : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{R}^d$，使得对于每个固定的 $N \in \mathbb{N}$ 和截断 $q = T_N p$，都存在 $h \in Vect^\infty(\mathbb{T}^d)$ 及 $\tilde{q} : \mathbb{Z}^2 \to Vect^\infty(\mathbb{T}^d)$，满足

$$\mathbf{q}(s,t) = D_{s,t}\mathbf{h} + \tilde{\mathbf{q}}(s,t) + \mathbf{V}(s,t), \ (s,t) \in \mathbb{Z}^2,$$

并且以下估计成立

$$\begin{aligned}
&\|\mathbf{h}\|_r \le \kappa\|\mathbf{q}\|_{r+\sigma},\\
&\|\tilde{\mathbf{q}}(s,t)\|_r \le \|\mathbf{q}(s,t)\|_r + \kappa(|s|+|t|)^{rd}\|\mathbf{q}\|_{r+\sigma},\\
&\tilde{\mathbf{q}}(s,t)\|_r \le \kappa(|s|+|t|)^{d\bar{r}}\|\mathbf{L}\mathbf{q}\|_{\mu r+\sigma,N},\\
&\|\mathbf{V}(1,0)\| \le \|\mathbf{p}(1,0)\|_0;\ \|\mathbf{V}(0,1)\| \le \|\mathbf{p}(0,1)\|_0,
\end{aligned} \tag{54}$$

其中 $\bar{r} := \mu r + \sigma$。

注意，在上述命题中，h 和 ˜q 依赖于 N。

证明。由于 A 和 B 是可交换幺幂矩阵，因此存在一个基，使得在 $\mathbb{R}^d$ 中它们都呈上三角形式。我们选取这个基，以坐标形式表示 f、g 和 h。此外，我们用这个基来定义任意 h 的范数：若在所选坐标中 $\mathbf{h} = (h_1, \dots, h_d)$，则定义 $\|\mathbf{h}\|_r = \max\{\|h_i\|_r : i = 1, \dots, d\}$。对于元素 $(s,t) \in \mathbb{Z}^2$，令 $\mathcal{A}^{(s,t)}$ 表示在所选基下的矩阵 $A^s B^t$。注意，矩阵 $\mathcal{A}^{(s,t)}$ 是上三角矩阵。此外，相对于 (s,t)，其系数呈多项式增长，因此我们可以假设矩阵 $\mathcal{A}^{(s,t)}$ 中的任意元素的大小至多为 $C(|s|+|t|)^S$，其中 C 是依赖于 A 和B的常数，而 S 是作用的步数。

Re回想一下，在本节开头，对于 $(s,t) \in \mathbb{Z}^2$，我们定义了算子 r

$$D_{s,t}\mathbf{h} := \mathbf{h} \circ (a^s b^t) - A^s B^t \mathbf{h}.$$

在选定的基下，这个算子具有如下形式

$$D_{s,t}\mathbf{h} = \bar{\partial}_{s,t}\mathbf{h} + \mathcal{A}^{(s,t)}\mathbf{h}, \tag{55}$$

¯其中 $\partial_{s,\ t}$ 表示作用于 h 的“对角”算子，它逐坐标地由算子$\partial_{s,\ t}$作用：

$$D_{s,t} = \begin{pmatrix} \partial_{s,t} & a_{12}^{s,t} & a_{13}^{s,t} & \cdots & a_{1d}^{s,t} \\ 0 & \partial_{s,t} & a_{23}^{s,t} & \cdots & a_{2d}^{s,t} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \partial_{s,t} \end{pmatrix}.$$

这种上三角形式使我们能够从 h 的最后一个坐标开始，逐步向上构造 h，直至第一个坐标。在归纳过程的每一步中，我们都会用到 h 中此前已构造好的所有坐标。

为了在归纳过程中跟踪估计，方便起见，我们也将算子 L 写成上三角形式。因此，对于任意 q，我们令 $\mathbf{q}(s,t) = (q_1(s,t) \dots, q_d(s,t))$ 表示向量场 $\mathbf{q}(s,t)$ 在选定基下的坐标，并引入如下算子：

$$\mathbf{Lq}((k,l),(s,t)) = \begin{pmatrix} \partial_{k,l} & a_{12}^{k,l} & \cdots & a_{1d}^{k,l} \\ 0 & \partial_{k,l} & \cdots & a_{2d}^{k,l} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \partial_{k,l} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1(s,t) \\ q_2(s,t) \\ \cdots \\ q_d(s,t) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \partial_{s,t} & a_{12}^{s,t} & \cdots & a_{1d}^{s,t} \\ 0 & \partial_{s,t} & \cdots & a_{2d}^{s,t} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \partial_{s,t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1(k,l) \\ q_2(k,l) \\ \cdots \\ q_d(k,l) \end{pmatrix}. \tag{56}$$

给定 $\mathbf{q}(s,t)$，我们首先取出其中所有的平均值，并将这些平均值组成的向量记为

$$\mathbf{V}(s,t) = (ave(q_1(s,t)), \dots, ave(q_d(s,t))).$$

现在我们可以处理 $\mathbf{q}(s,\ t)$，假设其平均值均为 0。那么命题 F 的最后一个估计直接由 $\mathbf{V}(1,0)$ 和 $\mathbf{V}(0,\ 1)$的定义得出。

我们继续对 $\mathbf{h}$进行归纳构造。我们从最后一个坐标开始q_d。将命题 E 应用于 q_d，可得 h_d 和 $\tilde{q}_d$，使得:

$$\begin{aligned}
&q_d(s,t) = \partial_{s,t} h_d + \tilde{q}_d(s,t),\\
&\|h_d\|_r \le \kappa \|q\|_{r+\sigma} \le \|\mathbf{q}\|_{r+\sigma},\\
&\|\tilde{q}_d(s,t)\|_r \le \kappa(|s|+|t|)^{d\bar{r}} \|Lq_d\|_{\mu r+\sigma,N} \le \kappa(|s|+|t|)^{d\bar{r}} \|\mathbf{Lq}\|_{\mu r+\sigma,N}.
\end{aligned} \tag{57}$$

现在我们转而构造 h_{d-1}。首先，定义 $h'_d(s,t) := a^{s,\ t}_{d-1,\ d} h_d$ 对任意 $(s,t) \in \mathbb{Z}^2$，并注意到

$$\|h'_d(s,t)\|_r \le |a^{s,t}_{d-1,d}| \|h_d\|_r \le \kappa(|s|+|t|)^d \|q_d\|_{r+\sigma}. \tag{58}$$

由于我们已将 (55) 化为上三角形式，因此需要证明以下结论。

引理 28。 存在 h_{d-1} 和 $\tilde{q}_{d-1}$，使得

$$\begin{aligned}
&(q_{d-1} - h'_d)(s,t) = \partial_{s,t} h_{d-1} + \tilde{q}_{d-1}(s,t),\\
&\|h_{d-1}\|_r \le \kappa \|\mathbf{q}\|_{r+2\sigma},\\
&\|\tilde{q}_{d-1}(s,t)\|_r \le \kappa(|s|+|t|)^{d\bar{r}} N^{d_2} \|\mathbf{Lq}\|_{\mu' r+\sigma',N},
\end{aligned}$$

其中 $d_2 :=$ 最大值$\{d, d\bar{r}\}$, $\mu' := \mu^2$ 且 $\sigma' := \mu\sigma + \sigma$。

证明。 将 (q_d的近似代入 (57) 中算子 $d-1$的第 56) 行，可得

$$\begin{aligned}
&\mathbf{Lq}((k,l),(s,t))_{d-1} =\\
&= Lq_{d-1}((k,l),(s,t))) + a^{s,t}_{d-1,d}(\partial_{k,l} h_d + \tilde{q}_d(k,l)) - a^{k,l}_{d-1,d}(\partial_{s,t} h_d + \tilde{q}_d(s,t))\\
&= L(q_{d-1} - h'_d)((k,l),(s,t))) + a^{s,t}_{d-1,d}\tilde{q}_d(k,l) - a^{k,l}_{d-1,d}\tilde{q}_d(s,t).
\end{aligned}$$

由此等式以及 $\tilde{q}_d$ 在（57）中的估计，我们得到对所有 （k，l）、（s，t）$\in \mathcal{Q}_N$的如下估计:

$$\begin{aligned}
&\|L(q_{d-1} - h'_d)((k,l),(s,t)))\|_r \le\\
&\le \|\mathbf{Lq}((k,l),(s,t)))_{d-1}\|_r + |a^{s,t}_{d-1,d}| \|\tilde{q}_d(k,l)\|_r + |a^{k,l}_{d-1,d}| \|\tilde{q}_d(s,t)\|_r\\
&\le \|\mathbf{Lq}((k,l),(s,t)))_{d-1}\|_r + \kappa(|k|+|l|)^{d_2}(|s|+|t|)^{d_2} \|Lq_d\|_{\mu r+\sigma,N},
\end{aligned} \tag{59}$$

其中 $d_2 = \max\{d, d\bar{r}\}$。对 $(q_{d-1} - h'_d)((k,l),(s,t)))\|_r$ 在 $(k,l) \in \mathcal{Q}_N$和 $(s,t) \in \{(1,0),(0,1)\}$ 取最大值，由不等式 (59) 得:

$$\|L(q_{d-1} - h'_d)\|_{r,N} \le \|\mathbf{Lq}_{d-1}\|_{r,N} + \kappa N^{d_2} \|Lq_d\|_{\mu r+\sigma,N}. \tag{60}$$

现在我们应用命题 E 于 $q_{d-1} - h'_d$，并找出 h_{d-1} 使得

$$\begin{aligned}
&\|h_{d-1}\|_r \le\\
&\le \kappa \|q_{d-1} - h'_d\|_{r+\sigma} = \kappa \max\{\|q_{d-1}(1,0) - h'_d(1,0)\|_{r+\sigma}, \|q_{d-1}(0,1) - h'_d(0,1)\|_{r+\sigma}\}\\
&\le \kappa(\|q_{d-1}\|_{r+\sigma} + \|h'_d\|_{r+\sigma}) \le \kappa(\|q_{d-1}\|_{r+\sigma} + \|q_d\|_{r+2\sigma})\\
&\le \kappa \|\mathbf{q}\|_{r+2\sigma},
\end{aligned}$$

其中我们使用了 $\|h'_d\|_{r+\sigma}$ 由（58）得到的估计。

对于坐标 $d-1$ 中的新误差，我们使用命题E以及（60）中得到的估计，从而得到

$$\begin{aligned}\|\tilde{q}_{d-1}(s,t)\|_r &\le \kappa(|s|+|t|)^{dr}\|L(q_{d-1}-h'_d)\|_{\mu r+\sigma,N}\\ &\le \kappa(|s|+|t|)^{d\bar{r}}(\|\mathbf{Lq}_{d-1}\|_{\mu r+\sigma,N}+\kappa N^{d_2}\|Lq_d\|_{\mu(\mu r+\sigma)+\sigma,N})\\ &\le \kappa(|s|+|t|)^{d\bar{r}}N^{d_2}\|\mathbf{Lq}\|_{\mu' r+\sigma',N},\end{aligned}$$

其中 $\mu':=\mu^2$ 且 $\sigma':=\mu\sigma+\sigma$。 □

归纳构造的其余部分也按同样的思路进行。具体来说，假设 h_d, $\tilde{q}_d$, h_{d-1}, $\tilde{q}_{d-1}$, $\dots h_i$, $\tilde{q}_i$ 均已构造，并且对于每个 $j=i,\dots,d$ 以及 $(s,t)\in\mathbb{Z}^2$，它们都满足以下估计：

$$\begin{aligned}\|h_j\|_r &\le \kappa\|\mathbf{q}\|_{r+(d-j+2)\sigma},\\ \|\tilde{q}_j(s,t)\|_r &\le \kappa(|s|+|t|)^{d\bar{r}}N^{(j+1)d_2}\|\mathbf{Lq}\|_{\eta_{j+1}r+\sigma_{j+1},N},\end{aligned}$$

其中 $\eta'_{j+1}:=\eta\cdot\eta_j$, $\sigma_{j+1}:=\eta\sigma_j+\sigma$ 且 $d^{(j+1)}:=\max\{d,d^{(j)}\}$。

在 $(i-1)$-次方程（56）中，我们将所有 q_j 坐标替换为 $q_j(s,\ t)=\partial_{s,\ t}h_j+\tilde{q}_j(s,\ t)$。然后，$(i-1)$-次方程（56）变为：

$$\begin{aligned}\mathbf{Lq}((k,l),(s,t)))_{i-1} &= Lq_{i-1}((k,l),(s,t)))+\sum_{j=i}^{d}a^{s,t}_{1,j}q_j(k,l)-\sum_{j=i}^{d}a^{k,l}_{j,d}q_j(s,t)\\ &= Lq_{i-1}((k,l),(s,t)))+\sum_{j=i}^{d}a^{s,t}_{1,j}(\partial_{k,l}h_j+\tilde{q}_j(k,l))-\sum_{j=i}^{d}a^{k,l}_{j,d}(\partial_{s,t}h_j+\tilde{q}_j(s,t))\\ &= L(q_{i-1}-h'_i)((k,l),(s,t)))+\sum_{j=i}^{d}a^{s,t}_{1,j}\tilde{q}_j(k,l)-\sum_{j=i}^{d}a^{k,l}_{j,d}\tilde{q}_j(s,t),\end{aligned}$$

其中我们定义了 $h'_i(s,t):=\sum_{j=i}^{d}a^{s,\ t}_{\ ,j\ \ ,d}h_j$.

现在我们仿照引理 28：将命题 E 应用于 $q_{i-1}-h'_i$，得到h_{i-1} 和 $\tilde{q}_{i-1}$，使得

$$q_{i-1}-h'_i=\partial_{s,t}h_{i-1}+\tilde{q}_{i-1}.$$

仿照引理 28 同样的步骤可得：

$$\begin{aligned}\|h_j\|_r &\le \kappa\|\mathbf{q}\|_{r+(d-i+2)\sigma},\\ \|\tilde{q}_{i-1}(s,t)\|_r &\le \kappa(|s|+|t|)^{d\bar{r}}\,N^{(i+1)d_2}\|\mathbf{Lq}\|_{\mu_{i+1}r+\sigma_{i+1},N},\end{aligned}$$

其中 $\eta'_{i+1}:=\mu\cdot\mu_i$, $\sigma_{i+1}:=\mu\sigma_i+\sigma$.

经过所有 d 步数后，我们重新定义常数 σ 和 μ_i。也就是说，对于新构造的 $\tilde{\mathbf{q}}$ 关于 $\mathbf{Lq}$ 的导数个数，会有乘法损失 $\mu:=\mu^d$，以及加法损失 $\sigma:=\max\{\mu^d\sigma+d\cdot\sigma,(d+2)\sigma\}$。换言之，对于每个 $j=1,\ \dots,\ d$，利用新构造的 σ 和 μ，我们有以下估计：

$$\begin{aligned}\|h_j\|_r &\le \kappa\|\mathbf{q}\|_{r+\sigma},\\ \|\tilde{q}_j(s,t)\|_r &\le \kappa\,(|s|+|t|)^{d\bar{r}}N^{D_1}\|\mathbf{Lq}\|_{\mu r+\sigma,N},\end{aligned}$$

其中 $D_1 = D_1(d,\ r)$。通过定义 $\mathbf{h} = (h_1,\ \dots h_d)$ 以及 $\tilde{}\mathbf{q} = (\tilde{q}_1,\ \dots,\ \tilde{q}_d)$ 我们得到命题 F 中所声称的关于 $\mathbf{h}$ 和 $\tilde{}\mathbf{q}(s,\ t)$ 的估计。

关于 $\|\tilde{}\mathbf{q}(s,t)\|_r$ 的"线性"估计，直接由以下事实得出：根据构造，$\mathbf{q}(s,t) = D_{s,\ t}\mathbf{h} + \tilde{}\mathbf{q}(s,t)$，因此 $\mathbf{h}$ 的估计蕴含：

$$\begin{aligned}\|\tilde{\mathbf{q}}(s,t)\|_r &\le \|D_{s,t}\mathbf{h}\|_r + \|\mathbf{q}(s,t)\|_r \le (|s|+|t|)^{dr}\|\mathbf{h}\|_r + \|\mathbf{q}(s,t)\|_r \\ &\le \kappa(|s|+|t|)^{dr}\|\mathbf{q}\|_{r+\sigma} + \|\mathbf{q}(s,t)\|_r.\end{aligned}$$

记 $D = d(d+1)$，即可得到命题 F 中所述的估计。 □

4.3. 命题 A 的证明。回顾一下，在对作用 $\langle a,b\rangle$进行扰动 $\langle F,G\rangle$ 的设定中，我们定义映射 $\mathsf{p}:\ \mathbb{Z}^2 \to \mathsf{Vect}^\infty(\mathbb{T}^{\mathrm{d}})$，其中 $\mathsf{p}(k,l) := F^k G^l - a^k b^l$, $(k,l) \in \mathbb{Z}^2$。记 $\mathsf{p}(1,0) = \mathsf{f}$ 和 $\mathsf{p}(0,1) = \mathsf{g}$，则作用 $\tilde{\rho}$ 由映射 $a+\mathsf{f}$ 和 $b+\mathsf{g}$ 生成。

固定 N，并令 $\mathsf{q}_N = T_N\mathsf{p}$ 为 p 的截断。首先定义 $\mathsf{V}(k,l) = -ave(\mathsf{p}(k,l))$。（稍微滥用一下记号）记 $\mathsf{V} = \mathsf{V}(1,0) := -ave(\mathsf{f})$，$\mathsf{W} = \mathsf{V}(0,1) = -ave(\mathsf{g})$。于是显然，(9) 中最后一个估计成立。

现在我们将命题 F 应用于 p 及其截断 $\mathsf{q}_N = T_N\mathsf{p}$，以得到 $\mathbf{h}_N$。然后，与命题 F 中一样，我们定义 $\tilde{}\mathbf{q}_N(k,l) := \mathbf{q}_N(k,l) - D_{k,\ l}\mathbf{h}_N + \mathbf{V}(k,l)$，因此

$$\tilde{\mathbf{p}}_N(k,l) := \mathbf{p}(k,l) - D_{k,l}\mathbf{h}_N + \mathbf{V}(k,l) = \tilde{\mathbf{q}}_N + R_N\mathbf{p}. \tag{61}$$

最后，我们令

$$\tilde{\mathbf{f}}_N = \tilde{\mathbf{p}}_N(1,0), \quad \tilde{\mathbf{g}}_N = \tilde{\mathbf{p}}_N(0,1).$$

我们先估计 $\mathsf{p}(k,l) = (a+\mathsf{f})^k \circ (b+\mathsf{g})^l - a^k b^l$。

引理 29。 对于 $(k,\ l) \in \mathbb{Z}^2$,

$$\|\mathbf{p}(k,l)\|_r \le C_r(|k|+|l|)^{3d}\max\{\|\mathbf{f}\|_r, \|\mathbf{g}\|_r\}. \tag{62}$$

证明。将 $\mathsf{p}(k,l)$ 的表达式展开为 $\mathsf{p}(k,l) = (a+\mathsf{f})^k \circ (b+\mathsf{g})^l - a^k b^l = a(a+\mathsf{f})^{k-1} \circ (b+\mathsf{g})^l + \mathsf{f} \circ (a+\mathsf{f})^{k-1} \circ (b+\mathsf{g})^l - a^k b^l$，并继续归纳下去，可得

$$\begin{aligned}\mathbf{p}(k,l) &= \sum_{j=0}^{k-1} s_j\, \mathbf{f} \circ (a+\mathbf{f})^j + \sum_{j=0}^{l-1} t_j\, \mathbf{g} \circ (a+\mathbf{f})^k \circ (b+\mathbf{g})^j \\ &= \sum_{j=0}^{k-1} s_j\, f \circ (a^j + \xi_j) + \sum_{j=0}^{l-1} t_j\, g \circ (a^k b^j + \eta_j).\end{aligned}$$

这里，s_j, t_j 是适当的 A^iB^j 型复合，涉及 $i \le k$, $j \le l$。这些和包含 $|k|+|l|$ 项，每个系数都可以用 $\|A^kB^l\| \le C(|k|+|l|)^S$ 估计。每一项的 r-范数都可以估计为 $c\|A^kB^l\|^r \max\{\|\mathbf{f}\|_r, \|\mathbf{g}\|_r\} \le cr(|k|+|l|)^S \max\{\|\mathbf{f}\|_r, \|\mathbf{g}\|_r\}$。因此，$\|\mathbf{p}(k,l)\|_r \le C_r(|k|+|l|)(|k|+|l|)^{2S}\max\{\|\mathbf{f}\|_r, \|\mathbf{g}\|_r\} \le C_r(|k|+|l|)^{3S}\max\{\|\mathbf{f}\|_r, \|\mathbf{g}\|_r\}$。由于 $S \le d$，我们于是可以将其上界估计为 $C_r(|k|+|l|)^{3d}\max\{\|\mathbf{f}\|_r, \|\mathbf{g}\|_r\}$。□

现在来证明，命题 A 中的主要估计（9）对 $\tilde{}\mathbf{h}_N$、$\mathbf{f}_N$和 $\tilde{}\mathbf{g}_N$均成立。我们先处理 $\mathbf{h}_N$。直接由命题F中的第一个估计（54）以及截断估计（51）可得：

$$\|\mathbf{h}_N\|_r \le \kappa\|\mathbf{q}_N\|_{r+\sigma} \le \kappa N^\sigma \|\mathbf{p}\|_r.$$

˜对$\mathbf{f}_N$ 和 ˜$\mathbf{g}_N$ 的“线性”估计（命题A中的第三个估计）可直接由$\mathbf{h}_N$的估计得出：

$$\|\tilde{\mathbf{f}}_N\|_r = \|\tilde{\mathbf{p}}_N(1,0)\|_r \le \|\mathbf{p}_N(1,0) - D_{1,0}\mathbf{h}_N + \mathbf{V}\|_r \le C_r N^{D'}\Delta_r.$$

˜$\mathbf{g}_N$ = ˜$\mathbf{p}_N$(0, 1) 的估计完全可以用同样的方法得到。

现在我们将利用 $a^k b^l$ +$\mathbf{p}(k,l)$ 是交换作用这一事实，来得到误差 ˜$\mathbf{q}$ 的二次估计。这分两步进行：第一步是利用 $a^k b^l + \mathbf{p}(k,l)$ 是交换作用这一事实，证明 $\|\mathbf{Lp}\|_{r,\ N}$ 是二次的。第二步是比较 $\|\mathbf{Lq}\|_{r,\ N}$ 与 $\|\mathbf{Lp}\|_{r,\ N}$。

回顾一下，算子 L 通过以下公式作用于 $\mathbf{p}$：$\mathbf{Lp}((k,l),(s,t)) = D_{s,\ t}\mathbf{p}(k,l)\ - D_{k,\ l}\mathbf{p}(s,t)$，对任意 (k,l),$(s,t)\ \in \mathbb{Z}^2$ 均成立。

引理 30。 对于任意 $N \in \mathbb{N}$ 和 $r \ge 0$，以下结论成立：

$$\|\mathbf{Lp}\|_{r,N} \le C_r N^{4d}\Delta_{r+1}\Delta_0.$$

证明。首先，我们注意到作用 $a^k b^l + \mathbf{p}(k,l)$ 的交换性意味着

$$(a^k b^l + \mathbf{p}(k,l)) \circ (a^s b^t + \mathbf{p}(s,t)) = (a^s b^t + \mathbf{p}(s,t))) \circ (a^k b^l + \mathbf{p}(k,l)).$$

因此，算子 L 除了线性形式外，还有一个非线性表达式（见下方右侧），特别是：

$$\begin{aligned} &D_{(s,t)}\mathbf{p}(k,l) - D_{k,l}\mathbf{p}(s,t) = \mathbf{Lp}((k,l),(s,t)) \\ &= \mathbf{p}(k,l)(a^s b^t + \mathbf{p}(s,t)) - \mathbf{p}(k,l)(s,t) + \mathbf{p}(s,t)(a^k b^l + \mathbf{p}(k,l)) - \mathbf{p}(s,t)(a^k b^l). \end{aligned} \tag{63}$$

由 $\mathbf{Lp}((k,l),(s,t))$ 的非线性表达式以及复合的经典估计（[Hör] 定理 A.8）可得“二次”估计：

$$\begin{aligned} \|\mathbf{Lp}((k,l),(s,t))\|_r &= \|\mathbf{p}(k,l)(a^s b^t + \mathbf{p}(s,t)) - \mathbf{p}(k,l)(a^s b^t)\|_r \\ &\quad + \|\mathbf{p}(s,t)(a^k b^l + \mathbf{p}(k,l)) - \mathbf{p}(s,t)(a^k b^l)\|_r \\ &\le C_r N^d(\|\mathbf{p}(k,l)\|_{r+1}\|\mathbf{p}(s,t)\|_0 + \|\mathbf{p}(k,l)\|_0\|\mathbf{p}(s,t)\|_{r+1}) \\ &\le C_r N^d(|k|+|l|)^{3d}(|s|+|t|)^{3d}\Delta_{r+1}\Delta_0. \end{aligned}$$

回想一下，$\|\mathbf{Lp}\|_{r,N}$:=max{$\|\mathbf{Lp}((1,0),(k,l))\|_r, \|\mathbf{Lp}((0,1),(k,l)\|_r : (k,l)\ \in \mathcal{Q}_N\}$，并且对于 (k,l) $\in \mathcal{Q}_N$，有 $C(|k|+|l|) \le N$。由上述不等式，对 $(k,l) \in \mathcal{Q}_N$ 取最大值，便可得到所需的 $\|\mathbf{Lp}\|_{r,\ N}$ 估计。□

接下来我们将使用算子 $D_{k,l}$ 的以下基本范数估计：

引理 31. 对于 $(k,l)\ \in \mathcal{Q}_N$ 以及 $r \ge 0$

$$\|D_{k,l}\mathbf{p}(s,t)\|_r \le C_r N^{dr}\|\mathbf{p}(s,t)\|_r.$$

证明。要证明这个界，我们只需注意到，对于任意仿射映射 $a: x \to Ax+\alpha$和任意函数 ϕ，范数 $\|\phi \circ a\|_r$ 有上界 $\|A\|^r\|\phi\|_r$。由于在算子 $D_{k,l}$ 中，我们与 $a^k b^l$复合，而它的线性部分为 $A^k B^l$，且矩阵 $A^k B^l$ 的范数（相差一个正常数因子）有上界 $(|k|+|l|)$ ^{d}，因此 $(k,l)\ \in \mathcal{Q}_N$直接推出所需的估计，因为对于 $(k,l)\ \in \mathcal{Q}_N$, $C(|k|+|l|)\ \le N$由引理 4 得出。□

引理 32. 对任意 $N \in \mathbb{N}$ 和 $r' \geq r \geq 0$，有如下结论：

$$\|\mathbf{Lq}\|_{r,N} \leq C_r N^{r+5d} \Delta_1 \Delta_0 + C_{r,r'} N^{r-r'+2d_2} \Delta_{r'},$$

其中 $d_2 = d_2(r) := max\{d, dr\}$。

证明。 由于 $\mathbf{L}$ 是一个线性算子，我们有如下结果：

$$\mathbf{Lp}((k,l),(s,t)) = \mathbf{L}(T_N\mathbf{p})((k,l),(s,t)) + \mathbf{L}(R_N\mathbf{p})((k,l),(s,t)). \tag{64}$$

对于 $(k,l) \in \mathcal{Q}_N$ 和 $(s,t) \in \{(1,0),(0,1)\}$，项 $\mathbf{L}(R_N\mathbf{p})((k,l),(s,t))$ 的估计利用了截断算子的估计、(51)、$\mathbf{L}$ 的线性形式 (64) 以及引理 31 和引理 29（再次回顾，对于 $(k,l) \in \mathcal{Q}_N$，我们有 $C(|k|+|l|) \leq N$）：

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{L}(R_N\mathbf{p})((k,l),(s,t))\|_r &\leq \|D_{s,t}R_N\mathbf{p}(k,l) - D_{k,l}R_N\mathbf{p}(s,t)\|_r \\
&\leq C_r(|s|+|t|)^{dr}\|R_N\mathbf{p}(k,l)\|_r + C_r(|k|+|l|)^{dr}\|R_N\mathbf{p}(s,t)\|_r \\
&\leq C_{r,r'}(N^{r-r'}\|\mathbf{p}(k,l)\|_{r'} + N^{dr}N^{r-r'}\|\mathbf{p}(s,t)\|_r) \\
&\leq C_{r,r'}(N^{r-r'+3d}\|\mathbf{p}\|_{r'} + N^{r-r'+dr}\|\mathbf{p}\|_{r'}) \\
&\leq C_{r,r'}N^{r-r'+d_3}\|\mathbf{p}\|_{r'},
\end{aligned}$$

其中 $d_3 = d_3(r) := \max\{3d, dr\}$。

利用这一点以及 (64)，还有 (51) 和引理 30，对于 $0 \leq r'' \leq r \leq r'$ 我们有：

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{Lq}((k,l),(s,t))\|_r &\leq \|\mathbf{Lp}((k,l),(s,t))\|_r + \|\mathbf{L}(R_N\mathbf{p})((k,l),(s,t))\|_r \\
&\leq \|T_N\mathbf{Lp}((k,l),(s,t))\|_r + \|R_N\mathbf{Lp}((k,l),(s,t))\|_r \\
&\quad + \|\mathbf{L}(R_N\mathbf{p})((k,l),(s,t))\|_r \\
&\leq C_{r,r''}N^{r-r''+d}\|\mathbf{Lp}((k,l),(s,t))\|_{r''} + C_{r,r'}N^{r-r'+d}\|\mathbf{Lp}((k,l),(s,t))\|_{r'} \\
&\quad + C_{r,r'}N^{r-r'+d_3}\Delta_{r'} \\
&\leq C_{r,r''}N^{r-r''+5d}\Delta_{r''+1}\Delta_0 + C_{r,r'}N^{r-r'+d_3}\Delta_{r'},
\end{aligned}$$

其中我们应用了估计 $C(|k|+|l|) \leq N$，它对所有 $(k,l) \in \mathcal{Q}_N$ 都成立。现在令 $r''=0$，并对 $(k,l) \in \mathcal{Q}_N$ 和 $(s,t)\{(1,0),(0,1)\}$ 取最大值，即可得到 $\|\mathbf{Lq}\|_{r,N}$ 所需的估计。□

根据命题 F 和引理 32中的第三个估计，对于某个固定常数$D > 0$，对于任意 $r' > 0$ 以及固定的 $d_2 = d_2(\sigma)$，我们有：

$$\begin{aligned}
\|\tilde{\mathbf{q}}_N(1,0)\|_0 &\leq \kappa N^D \|\mathbf{Lq}_N\|_{\sigma,N} \\
&\leq \kappa N^{D+5d+\sigma}\Delta_1\Delta_0 + C_{r'}N^{D-r'+\sigma+d_3}\Delta_{r'} \\
&\leq \kappa N^{D'}\Delta_1\Delta_0 + C_{r'}N^{-r'+D'}\Delta_{r'},
\end{aligned}$$

其中我们定义 $D' = D + 5d + d_3 + \sigma$。注意 $d_3 = d_3(\sigma)$，因此 D' 仅取决于作用 $\langle a, b\rangle$ 和 d。回顾一下，在（61）中，我们对每个 $\tilde{\mathbf{p}}_N = \tilde{\mathbf{q}}_N + R_N\mathbf{p}$都定义了 N。结合上述估计以及算子 R_N 的截断估计（51），我们得到类似的界，其中常数 κ 和 $C_{r'}$ 可能需要重新选取：

$$\|\tilde{\mathbf{f}}_N\|_0 = \|\tilde{\mathbf{p}}_N(1,0)\|_0 \leq \kappa N^{D'}\Delta_1\Delta_0 + C_{r'}N^{-r'+D'}\Delta_{r'}.$$

最后，我们将新的 D 定义为 D'。关于 $\tilde{\mathbf{g}}_N = \tilde{\mathbf{p}}_N(0, 1)$ 的估计可用完全相同的方法证明。至此，命题A中所述的所有估计均已证明。□

致谢。 作者感谢 Livio Flaminio 和 Giovanni Forni 就相关主题展开的富有启发性的讨论。第一作者获得瑞典研究理事会项目 VR 2019-04641 的资助。第二作者获得美国国家科学基金会项目 DMS-2101464 的资助。

参考文献

[A] V. I. Arnol'd. 关于 A. N. Kolmogorov 小扰动下拟周期运动不变性定理的证明。《俄罗斯数学评论》, 18(5):9–36, 1963. [CG] J-P Conze, Y. Guivarc'h，群作用的遍历性与谱隙：在随机游走和马尔可夫移位中的应用，《离散与连续动力系统》, 2013, 第33卷，第9期：4239-4269.[CF] S. Cosentino, L. Flaminio, 海森堡幂零流形上高秩阿贝尔作用的等分布，《现代动力学杂志》2015, 第9卷：305–353.[D] D. Damjanović，具有全局拟椭圆叶向拉普拉斯算子的阿贝尔作用与刚性，《数学分析杂志》第129卷，第1期，139–163 (2016). [DF] D. Damjanović, B. Fayad，关于部分双曲仿射作用的局部刚性，《纯粹与应用数学杂志》，751 2019 1 26 ( ), – DFS D. Damjanović, B. Fayad, M. Saprykina，关于抛物变换上同调方程不存在温和解。准备中。[DK] D. Damjanović, A. Katok， $\mathbb{Z}^k$ 和 $\mathbb{R}^k$的部分双曲作用的局部刚性， $k \geq 2$。I. KAM 方法与环面上的作用，《数学年刊》，第172卷，第3期, 1805–1858 (2010). [DK2] D. Damjanović, A. Katok，抛物齐性作用的局部刚性：I. 一个模型情形，《现代动力学杂志》，第5卷，第2期，203–235 (2011). [DK3] D. Damjanović, A. Katok，部分双曲作用的局部刚性。II：几何方法与韦伊室流在 $SL(n, \mathbb{R})/\Gamma$上的限制，《国际数学研究通报》，第2011卷，第19期, 2011，页4405–4430,[DT] D. Damjanović, J. Tanis，海森堡幂零流形上离散阿贝尔作用的横截局部刚性，《遍历理论与动力系统》，(2021) 1–41. [FF] L. Flaminio, G. Forni，关于幂零流的上同调方程，2007, 第1卷，第1期：37-60.[GK] M. Guysinsky and A. Katok，具有不变收缩叶状结构的动力系统的正规形与不变几何结构，《数学研究快报》, 5, (1998), 149-163. [H] M. R. Herman，关于圆微分同胚与旋转的可微共轭，高等科学研究所数学出版物，49 (1979), 5–233. [Hör] L. Hörmander，物理大地测量学的边值问题，《理性力学与分析档案》62 (1976), no. 1, 1–52. [KR] A Katok, E. A. Robinson Jr，遍历理论中的余循环、上同调与组合构造 - 2001[KS] A. Katok, R. Spatzier，《斯捷克洛夫数学研究所学报》，1997, 第216卷，页292–319.[L] V. F. Lazutkin，KAM 理论与特征函数的半经典近似，Ergeb. Math. Grenzgeb. 24, Springer-Verlag, New York, 1993.[M] J. Moser，关于可交换圆映射与同时丢番图逼近，《数学杂志》，205:1 (1990), 105–121. [NT] V. Nitica, A. Török，某些乘积型部分双曲作用的局部刚性，《遍历理论与动力系统》21 (2001), 1213–1237. [P] B. Petkovic，任意维环面上丢番图作用的扰动分类，《规则与混沌动力学》，2021, 第26卷，第6期，页700–716

[P2] B. Petkovic，博士论文，KTH 2022. [VW] K.Vinhage Z. Wang，高秩齐次阿贝尔作用的局部刚性：通过几何方法得到完整解，Geometriae Dedicata 第200卷，页385–439 (2019). [W1] Zhenqi Jenny Wang，部分双曲作用的局部刚性。《现代动力学杂志》, 4 327, 2010 2 271( ): – .[W2] Zhenqi Jenny Wang，部分双曲作用可微刚性的新情形：辛群与共振方向。《现代动力学杂志》, 4(4):585–608, 2010. [ZW] Zhenqi Wang，抛物代数作用的局部刚性，arXiv:1908.09181.[W3] Zhenqi Wang，高秩部分双曲代数作用的局部刚性，arXiv:1103.3077[WX] A. Wilkinson and J. Xue，某些阿贝尔群扩张循环群的可解群作用的刚性，见 $\mathbb{T}^N$。《Commun. Math. Phys.》376 (2020), 1223–1259.

(Danijela Damjanović)数学系，皇家理工学院，Lind- stedtsvägen 25，SE-100 44 斯德哥尔摩，瑞典电子邮箱：ddam@kth.se

(BASSAM FAYAD)数学系，马里兰大学，2307 Kirwan Hall，大学公园市，美国电子邮箱：bassam@umd.edu

(MARIA SAPRYKINA) 数学系，皇家理工学院，Lindst- edtsvägen 25，SE-100 44 斯德哥尔摩，瑞典电子邮箱：masha@kth.se