arXiv:2303.04368v2 [math.GT] 9 Apr 2024

通过带状球面链探讨怀特海德非球面猜想

Akio KAWAUCHI 大阪中央高等数学研究所，大阪公立大学，日本大阪市住吉区杉本，邮编558-8585

kawauchi@omu.ac.jp

摘要

怀特海德非球面猜想指出，每个无球面2-复形的每个连通子复形都是无球面的。通过对带状球面链环的论证，证实该猜想对每个可缩有限2-复形均成立。本文通过推广这一论证，证实该猜想对每个无球面2-复形均成立。

关键词：无限带状球面链环，无球面2-复形，可缩二维复形，怀特海德非球面猜想
2010年数学主题分类：57Q45，57M20

1. 引言

有限或无限2-复形是由一个连通的有限图或可数无限图，通过分别使用带有附着映射的有限或可数无限系统的2-胞腔构造而成的有限或可数无限CW 2-复形。2-复形同伦等价于这样一个单纯2-复形：它由一个单纯图通过使用附着映射的单纯逼近附加2-胞腔构造而成。根据这一同伦等价，2-复形的每个子复形也同伦等价于该单纯2-复形的一个单纯子复形（参见Spanier [6] 以获取一般˜参考资料）。如果道路连通空间 X 的万有覆盖 X 是可缩的（即同伦等价于一个点），则称其为无球面的 X。特别地，一个连通2-复形 P 是无球面的，当且仅当其第二同伦群 $\pi_2(P, v) = 0$。怀特海德渐近性猜想如下（见 [1, 7]）。

猜想 1. 任意无球面2-复形的每个连通子复形都是无球面的。

本文旨在证明猜想 1 的答案是肯定的。也就是说,

定理1.1. 怀特海德非球面猜想成立。

若每个 P 的 1-胞腔仅附着于有限多个 P 的 2-胞腔, 则称 2-复形 P 为局部有限。猜想 1 可归结为关于每个可缩局部有限 2-复形的下述猜想。

猜想 2. 每个可缩局部有限 2-复形的每个连通子复形都是无球面的。

在第2节中, 我们证明猜想 $2 \Rightarrow$猜想 1 的论断。在 [2], 中, 我们证实了关于每个可缩有限 2-复形的猜想 2。本文关于无限 2-复形的论证是主要论证。群表示的 2-复形

$$GP =< x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots \,|\, r_1, r_2, \ldots, r_m, \cdots >$$

是由一个图构造而成的连通 2-复形, 该图的基本群同构于由生成元 $x_i (i = 1, 2, \ldots, n, \ldots)$ 生成的自由群 $< x_1, x_2, \ldots, x_n, \cdots >$; 再通过附着映射为关系子 $r_j (j = 1, 2, \ldots, m, \ldots)$ 所给定的粘接映射附着 2- 胞腔。注意, 对于空关系子, 这个 2- 复形就是一个连通图。在胞腔同伦等价意义下, 每个连通 2-复形 P 及其连通子复形 P 都可以唯一地视为某个群表示 GP的 2-复形及其子复形, 其中 GP 的子复形是某个子表示的群表示的 2-复形

$$< x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_s}, \ldots \,|\, r_{j_1}, r_{j_2}, \ldots, r_{j_t}, \cdots > .$$

如果每个生成元 x_i 只出现在有限多个关系子 $r_j (j = 1, 2, \ldots, m, \ldots)$ 中, 则群表示 GP 称为局部有限。局部有限群表示 GP 的 2-复形可以取为一个连通的局部有限 2-复形。如果 GP 是单位群 $\{1\}$ 的一个表示, 并且对于自由群 $< x_1, x_2, \ldots x_n, \cdots >$的自由阿贝尔群的阿贝尔化 $< x_1, x_2, \ldots x_n, \cdots >^a$ 中的每个 j, 关系子字 r_j 都等于生成元x_j, 其中该自由阿贝尔群以GP的生成元 $x_i (i = 1, 2, \ldots, n, \ldots)$ 为基, 则群表示 GP 称为同调平凡的单位群表示。注意, 同调平凡的单位群表示的 2-复形总是可缩的。

在第3节中，猜想 2 化简为以下关于每个同调平凡的单位群表示的 2-复形的猜想。

猜想 3. 每个同调平凡的单位群表示的每个子复形都是无球面的。

猜想 $3 \Rightarrow$ 猜想 2 中的主张已在该处得到证明。为此，在考察了可能具有无限秩的自由群和自由阿贝尔群的基变换后，证明了：如果一个局部有限群表示GP的 2-复形是可缩的，那么自由群 $< x_1, x_2, \ldots, x_n, \cdots >$中存在一个基变换 $x_i'(i = 1, 2, \ldots, n, \ldots)$，其基为$GP$ 的生成元 $x_i(i = 1, 2, \ldots, n, \ldots)$，使得所得的群表示

$$GP' =< x_1', x_2', \ldots, x_n', \ldots \mid r_1', r_2', \ldots, r_m', \cdots >$$

是一个同调平凡的单位群表示（见引理 3.2）。这意味着，存在从每个可缩局部有限 2-复形 P到一个同调平凡的单位群表示 GP 的 2-复形 P' 的胞腔同伦等价 GP，并且该等价在 P的子复形与 P'的子复形之间诱导出胞腔同伦等价（见推论 3.3）。

在第4节中，讨论了四维空间 $\mathbf{R}^4$ 中的一个（可能是无限的）球面链环（即一个 S^2-链环） L。$\mathbf{R}^4$ 中 L 的闭补空间记作 $E(L)$。文中证明，对于每个同调平凡的单位群表示 GP，都可以构造一个带状 S^2-链环 L，使其位于 $\mathbf{R}^4$ 中，并且基本群 $\pi_1(E(L), v)$ 同构于由生成元 $x_i(i = 1, 2, \ldots, n, \ldots)$ 生成的自由群 $< x_1, x_2, \ldots, x_n, \cdots >$；该同构将 $\pi_1(E(L), v)$ 中 L 的子午线系映至 GP 的关系词系 $r_j(j = 1, 2, \ldots, m, \ldots)$（见引理 4.1 ）。文中还指出，$\mathbf{R}^4$ 中的带状 S^2- 链环 L 自然包含一个位于上半四维空间 $\mathbf{H}^4$ 中的带状圆盘链环 L^D，使得基本群 $\pi_1(E(L), v)$ 自然地与 $\mathbf{H}^4$ 中 L^D 的闭外部 $E(L^D)$ 的基本群 $\pi_1(E(L^D), v)$ 相识别（见引理 4.2 和推论 4.3）。

在第5节中，证明了 $E(L^D)$ 总是无球面的，并且同调平凡的单位群表示 GP 的 2-复形 P 的每个 1-满子复形 P' 都与 $\mathbf{H}^4$, 中带状圆盘链环 L^D 的闭外部 $E(L^D)$ 同伦等价，其中 P 的 1-满子复形 P' 是 P 的一个子复形，且包含 P 的 1-骨架 P^1。于是猜想 3 得到证实，定理1.1 的证明也就完成了。

作者在此提到，Pasku 有一篇预印本 [5] 声称得出了相同结果，其论证纯属群论，与本文的论证截然不同。

2. 约化　将猜想推广到可缩局部有限 2-复形的情形

本节说明，猜想 1（Whitehead 无球面猜想）可由下述猜想推出。

猜想 2. 每个可缩的局部有限2-复形的任意连通子复形都是无球面的。

为进行这一约化，将用到以下三个引理。

引理 2.1 若可缩的2-复形 P 的每个连通有限子复形都是无球面的，则 P 的每个连通子复形都是无球面的。

引理 2.2. 若每个可缩2-复形的每个连通子复形都是无球面的，则每个无球面2-复形 P 的每个连通子复形 Q 都是无球面的。

引理 2.3. 连通无限二维复形P的每个连通有限子复形，都是某个连通局部有限二维复形 P' 的子复形，且该复形与P同伦等价。

引理 2.1 的证明如下。.

引理 2.1 的证明。设 Q是可缩二维复形 P的任意给定连通子复形。设 f : $S^2 \to |Q|$ 是从二维球面 S^2 到多面体$|Q|$的映射。对于单纯2-复形 Q， $|Q|$的拓扑是与 Q的单形相协调的拓扑（见 $[6,$第111]页），因此像 $f(S^2)$包含在 Q的某个连通有限子复形 Q^f 的多面体 $|Q^f|$中。根据假设， Q^f 是无球面的，因此由原映射 f定义的映射 f: $S^2 \to |Q^f|$ 在 $|Q^f|$ 中是零伦的，因而在 $|Q|$中也是零伦的，所以 Q 是无球面的。 □

引理 2.2 的证明如下。

引理 2.2 的证明。设 P 是一个无球面2-复形， Q 是 P的任意连通˜子复形。由于 P 的万有覆盖 P 是一个可缩二维复形，˜ ˜子复形 Q 提升为可缩二维复形P的一个子复形 Q 。根据假设，子复形 Q的任意˜ ˜连通分支 Q_1 都是无球面的。由于第二同伦群根据提升性质与覆盖无关（参见 $[6]$），Q 是无球面的。 □

引理 2.3 的证明如下。

引理 2.3 的证明。设 P 是一个连通无限二维复形， P_0 是 P的任意给定连通有限子复形。令

$$P_0 \subset P_1 \subset P_2 \subset \cdots \subset P_n \subset \ldots$$

设 $P_i(i = 0, 1, 2, \ldots, n, \ldots)$ 是 P 的一列连通有限子复形，使得 $P = \cup_{i=0}^{+\infty} P_i$。设 $P_i = P_{i-1} \cup J_i$，其中 J_i 是 P_i 的子复形，且对所有 i， $\gamma_i = P_{i-1} \cap J_i$ 都是一个图。对 γ_i 的每个 1-单形 a，将矩形 $a \times [0, 1]$ 作三角剖分，方法是引入一条对角线，并将乘积 $\gamma_i \times [0, 1]$ 视为一个 2-复形。为了构造所需的 2-复形 P'，令连通有限子复形 $J_i(i =1, 2, 3, \ldots, n, \ldots)$ 彼此不相交。设 $P'_i = P_{i-1} \cup \gamma_i \times [0, 1]$ 是由子复形 P_{i-1} 和 $\gamma_i \times [0, 1]$ 按照典范方式，将 P_{i-1} 中的 γ_i 与 $\gamma_i \times 0$ 以及 J_i 中的 $\gamma_i \times 1$ 与 γ_i 识别后得到的 2-复形。该序列

$$P_0 = P'_0 \subset P'_1 \subset P'_2 \subset \cdots \subset P'_n \subset \ldots$$

由连通有限子复形 P'_i（$i = 0$、1、2、.....、n、.....）得到。根据构造， $P' = \cup_{i=0}^{\infty} P'_i$ 是一个连通的局部有限 2-复形，其中包含 P_0 作为子复形，并且与 P 同伦等价。 □

猜想 1 可由猜想 2 如下得到。

2.4：猜想 $2 \Rightarrow$ 的证明。猜想 1。假设猜想 2 成立，只需证明每个可缩 2-复形 P 的每个连通有限子复形 Q 都是无球面的。根据引理 2.1，这一结论意味着每个可缩 2-复形 P 的每个连通子复形都是无球面的；而根据引理 2.2，这也意味着每个无球面 2-复形的每个连通子复形都是无球面的，从而证实猜想 1。若 Q 是可缩 2-复形 P 的连通有限子复形，则根据引理 2.3， Q 是一个与 P 同伦等价的可缩局部有限 2-复形 P' 的子复形，因此根据猜想 2， Q 是无球面的。猜想 $2 \Rightarrow$ 的证明至此完成。猜想 1。 □

3. 化归为关于同调平凡的单位群表示的 2-复形的猜想

本节将说明，猜想 2 是由以下猜想推导而来的。

猜想 3. 每个同调平凡的单位群表示的每个子复形都是无球面的。

自由群 $< x_1, x_2, \dots x_n, \cdots >$ 的基 x_i（$i = 1, 2, \dots, n, \dots$）的基变换可由有限次以下操作得到，这些操作称为 Nielsen 变换（见 [4]）：

(1) 交换 x_i（$i = 1, 2, \dots, n, \dots$）中的两个元素；(2) 将一个 x_i 替换为 x_i^{-1}；(3) 将一个 x_i 替换为 $x_i x_j$（$i \neq j$）。

基于基 a_i（$i = 1, 2, \dots, n, \dots$）的自由阿贝尔群 A 的基变换可由有限次以下操作得到:

(1) 交换 a_i（$i = 1, 2, \dots, n, \dots$）中的两个元素；(2) 将一个 a_i 替换为 $-a_i$；(3) 将一个 a_i 替换为 $a_i + a_j$（$i \neq j$）。

以下引理对于有限秩自由阿贝尔群 A 而言是众所周知的 .

引理 3.1. 设 A 是一个具有可数基 $a_i (i = 1, 2, \dots, n, \dots)$ 的自由阿贝尔群。设 $b_i (i = 1, 2, \dots, n, \dots)$ 是 A 的一个可数基，并且基变换矩阵 C 的每个列向量和行向量

$$(b_1 b_2 \dots b_n \dots) = (a_1 a_2 \dots a_n \dots) C$$

都只有有限个非零项。那么 A 的基 $a_i (i = 1, 2, \dots, n, \dots)$ 可以经过基变换，使得 C 是矩阵 C' 的分块直和 (1) $\oplus C'$。

引理 3.1 的证明。对于每个 $j (j = 1, 2, \dots, n, \dots)$，令

$$b_j = c_{1j} a_1 + c_{2j} a_2 + \cdots + c_{nj} a_n + \dots$$

是一个线性组合，其 (i, j) 项为 c_{ij}，由 C 构成，除有限多个 i 外均为 0（$i = 1, 2, \dots, n, \dots$）。注意，对每个 j，非零整数系数系统 $c_{1j}, c_{2j}, \dots, c_{nj}, \dots$ 是一个互素整数系。通过基变换 (1)，可假设 c_{11} 是所有 i 对应的整数 $|c_{i1}|$ 中最小的正整数。对于 $i > 1$，记 $c_{i1} = \tilde{c}_{i1} c_{11} + d_{i1}$ 为 $0 \leq d_{i1} < c_{11}$。对 a_i（$i = 1, 2, \dots, n, \dots$）作基变换，可假设

$$b_1 = c_{11} a_1 + d_{21} a_2 + \cdots + d_{n1} a_n + \dots .$$

继续这一过程，可假设 $b_1 = a_1$。注意，存在一个正整数 $m \geq 2$，使得对所有满足 $j > m$ 的 j，都有 $c_{1j} = 0$。考虑线性组合

$$b_2 = c_{12}a_1 + c_{22}a_2 + \cdots + c_{n2}a_n + \ldots.$$

注意，$c_{22}, c_{32}, \ldots, c_{n2}, \ldots$ 构成的非零整数系数系统互素。否则，存在一个公素因子 $p > 1$，使得 b_1 和 b_2 在 $\mathbf{Z}_p$ 向量空间 $\mathbf{A}\otimes\mathbf{Z}_p$ 中线性相关，这与 $b_i (i = 1, 2, \ldots, n, \ldots)$ 构成 $\mathbf{A}\otimes\mathbf{Z}_p$ 的一组基矛盾，其中 $\mathbf{Z}_p = \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$。对 $a_i (i = 2, 3, \ldots, n, \ldots)$ 作基变换后，可假设 $b_2 = c_{12}a_1 + a_2$。通过归纳论证，可假设

$$b_j = c_{1j}a_1 + c_{2j}a_2 + \cdots + c_{j-1\,j}a_{j-1} + a_j \; (j = 3, 4, \ldots, m).$$

通过基变换，将 a_j 替换为 $a_j - c_{1j}a_1 - c_{2j}a_2 - \cdots - c_{j-1\,j}a_{j-1} (j = 2, 3, \ldots, m)$，可得到恒等式 $b_j = a_j (1 \leq j \leq m)$。于是，矩阵 C 的元素 c_{ij} 可写为

$$c_{11} = 1 \quad c_{1j} = c_{i1} = 0 \, (1 < i < +\infty, 1 < j < +\infty).$$

这就完成了引理 3.1 的证明。 □

下面引理的证明用到引理 3.1。

引理 3.2. 若局部有限群表示的 2-复形 P

$$GP = < x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots \,|\, r_1, r_2, \ldots, r_m, \cdots >$$

是可缩的，则存在自由群 $< x_1, x_2, \ldots, x_n, \cdots >$ 的基 $x_i (i = 1, 2, \ldots)$ 的一次基变换 $x_i' (i = 1, 2, \ldots)$，使得所得群表示

$$GP' = < x_1', x_2', \ldots, x_n', \ldots \,|\, r_1', r_2', \ldots, r_m', \cdots >$$

是同调平凡的单位群表示。

引理 3.2 的证明. 由于 2-复形 P 是可缩的局部有限 2-复形，每个生成元 x_i 只出现在有限多个关系子 $r_1, r_2, \ldots, r_m, \ldots$ 中，并且包含同态

$$< r_1, r_2, \ldots, r_m, \cdots > \rightarrow < x_1, x_2, \ldots x_n, \cdots >$$

在自由群 $< r_1, r_2, \ldots, r_m, \cdots >$ 和 $< x_1, x_2, \ldots x_n, \cdots >$ 上诱导出阿贝尔化群 $< r_1, r_2, \ldots, r_m, \cdots >^a$ 与 $\mathbf{A} = < x_1, x_2, \ldots x_n, \cdots >^a$ 之间的同构；这两个群都是自由阿贝尔群，其基变换矩阵为引理 3.3 中给出的 C。

对引理 3.1 中自由阿贝尔群 A 的基变换所诱导的自由群 $< x_1, x_2, \ldots x_n, \cdots >$ 进行尼尔森变换。于是，字 r_1 在 A 中变为 x_1 。该基变换仅使用 $x_i (i = 1, 2, \ldots, n, \ldots)$ 中属于字 r_j 的有限多个字母完成，字母 $x_i (i = 1, 2, \ldots, n, \ldots)$ 的重新编号除外。因此，得到引理 3.2 的结论。 □

以下推论意味着，可将一个可缩局部有限 2-复形视为某个同调平凡的单位群表示的 2-复形。

推论 3.3. 对于每个可缩局部有限 2-复形 P，都存在一个胞腔同伦等价，将其映射到某个同调平凡的单位群表示 GP 的 2-复形 P'，并诱导出从 P 的连通子复形到 GP 的子复形的胞腔同伦等价。

推论 3.3 的证明。设 P 是由 1-骨架 P^1 通过附着 2-胞腔得到的可缩局部有限 2-复形，其附着映射由关系子 r_j（j =1, 2, . . . , m, . . . ）给出；1-骨架的生成元为 x_i（i =1, 2, . . . , n, . . . ），且 $\pi_1 (P^1, v) =< x_1, x_2, \ldots, x_n, \cdots >$。那么包含同态

$$< r_1, r_2, \ldots, r_m, \cdots > \to < x_1, x_2, \ldots x_n, \cdots >$$

诱导从阿贝尔化群 $< r_1, r_2, \ldots, r_m, \cdots >^a$ 到阿贝尔化群 $< x_1, x_2, \ldots, x_n, \cdots >^a$ 的一个同构。令

$$g :< x_1, x_2, \ldots, x_n, \cdots > \to < x'_1, x'_2, \ldots, x'_n, \cdots >$$

为一个基变换同构，它将字 r_j 映为字 r'_j，使得对所有 j，r'_j 在阿贝尔化群 $< x_1, x_2, \ldots x_n, \cdots >^a$ 中等于 x'_j。令 P' 为该同调平凡的单位群表示的 2-复形

$$GP' =< x'_1, x'_2, \ldots, x'_n, \ldots | r'_1, r'_2, \ldots, r'_m, \cdots > .$$

该同 构 g 诱导所需的胞腔同伦等价 $P \to P'$。 □

猜想 2 由猜想 3 如下得到。

3.4：猜想 3 $\Rightarrow$ 猜想 2 的证明。根据推论 3.3，每个可缩局部有限 2-复形的每个连通子复形，都与某个同调平凡的单位群表示的子复形同伦等价。由此完成猜想 3 $\Rightarrow$ 猜想 2 的证明。 □

4. 由同调平凡的单位群表示构造的带状球面链与带状圆盘链环

设 X 为一个开连通定向光滑四维流形。若从 X 中的每个 i 取一个点 $p_i \in X_i$ 构成的集合$\{p_i | i = 1, 2, \ldots, n, \ldots\}$ 是 X中的离散集，则 X 中由互不相交的紧集 X_i (i = 1、2、.....、 n、.....)组成的可数无限系统称为离散系统。 X 中的一个 S^2-链环是指 X 中光滑嵌入的二维球面组成的离散（有限或可数无限）系统的并集 L 。若一个 S^2-链环围成 X中光滑嵌入的互不相交的三维球组成的离散系统，则称其为平凡链环；若一个 S^2-链环可由平凡的 S^2-链环 O 沿嵌入于 X中的互不相交的一柄离散系统做手术得到，则称其为带状链环。若 X 中的一个 S^2-链环 L 的分支数目 L 有限，则称其为有限链环；否则， L 为无限链环。开四维把手体

$$Y^O = \mathbf{R}^4 \#_{i=1}^{+\infty} S^1 \times S_i^3$$

表示四维空间 $\mathbf{R}^4$ 与一个由 $S^1 \times S_i^3$(i =1, 2, . . . , n, . . .) 构成的离散系统的连通和。以下引理是我们工作的基础。

引理 4.1. 对于每一个同调平凡的单位群表示

$$GP = < x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots | r_1, r_2, \ldots, r_m, \cdots >,$$

存在一个带状 S^2-链环 L，其在 $\mathbf{R}^4$ 中有分支 K_i(i = 1, 2, . . ., n, . . .)，使得存在一个同构

$$\pi_1(E(L), v) \to < x_1, x_2, \ldots x_n, \cdots >$$

将 K_i(i = 1, 2, . . . , n, . . .) 的子午线系映到关系子系 r_i(i =1, 2, . . ., n, . . .)。

引理 4.1 的证明。在开四维把手体 $Y^O = \mathbf{R}^4 \#_{i=1}^{+\infty} S^1 \times S_i^3$ 中，设 γ^O 是带足环路系，其环路系为 $k_i^O = S^1 \times \mathbf{1}_i$($i$ = 1, 2, . . . , n, . . .)，表示自由群 $\pi_1(Y^O, v)$ 的一个基 x_i(i = 1, 2, . . . , n, . . .)。设 k_j(j =1, 2, . . . , m, . . .) 是 Y^O 中的一个简单环路系 k_*，表示关系子系 r_j(j = 1, 2, . . . , m, . . .)。根据同调平凡单位群表示 GP 的假设，对于每个 j，环路 k_j 与 $1 \times S_i^3$ 在 Y^O 中横截相交；当 $j = i$ 时交数为 $+1$ ，当 $j \neq i$时交数为 0。此外，环路k_j 除有限个 i外，不与 $1 \times S_i^3$ 相交。设 X 是由 Y^O 沿环路 k_j(j = 1, 2, . . . , m, . . .) 做手术得到的光滑开四维流形：将 k_j 在 Y^O 中的法向 D^3-丛 $k_j \times D^3$ 替换为 S^2 的 D^2-丛 $D_j \times S^2$ ，其中圆盘 D_j 满足 $\partial D_j = k_j$。于是，带有 $K_j = 0_j \times S^2$ 的 S^2-链环 $L = \cup_{j=1}^{+\infty} K_j$ 在 X 中得到。

(4.1.1) 开4维流形 X 是可缩的。

(4.1.1) 的证明。由范坎彭定理可知， X 单连通，因为环路$k_j(j=1,2,\ldots,m,\ldots)$正规生成自由基本群 $\pi_1(Y^O,v)=<x_1,x_2,\ldots,n,\cdots>$。因此，若 $H_q(X;\mathbf{Z})=0$($q=2,3$)，则 X 是可缩的，因为 X 是开四维流形。根据切除同构

$$H_q(Y^O,k_*\times D^3;\mathbf{Z})\cong H_q(X,D_*\times S^2;\mathbf{Z}).$$

因此， $H_3(X,D_*\times S^2;\mathbf{Z})=0$，从而 $H_3(X;\mathbf{Z})=0$。由于环路系 k_*在 Y^O中与 $1\times S_i^3$横截相交于有限个点，且交数 $\mathrm{Int}(k_j,1\times S_i^3)=+1\,(j=i),0\,(j\neq i)$，因此，在沿集合 $k_*\cap 1\times S_i^3$切割 k_*后得到的一维流形系中，存在弧系 $I_s(s=1,2,\ldots u)$，使得对所有 s，I_s 以相反符号附着于 $1\times S_i^3$；并且由沿 $I_s(s=1,2,\ldots u)$对 $1\times S_i^3$ 进行管道化而得到的三维可定向流形 Z_i 与 k_i 恰好相交于一点，且不与 $k_j(i\neq j)$ 相交。根据 X 的构造，对每个 i，L 的分支 K_i 都界定了 X 中 Z_i 的一个一次打孔三维流形 V_i，且该流形不与 $L\setminus K_i$相交。这意味着，对于所有 i，包含同态 $H_2(D_i\times S^2;\mathbf{Z})\to H_2(X;\mathbf{Z})$ 是零映射。因此，

$$H_2(X;\mathbf{Z})\cong H_2(X,\cup_{i=1}^{+\infty}D_i\times S^2;\mathbf{Z})\cong H_2(Y^O,\cup_{i=1}^{+\infty}k_i\times D^3;\mathbf{Z})=0.$$

因此， X 是一个可缩的开4维流形。这就完成了（4.1.1）的证明。 □

自由带状引理在[2] 中的证明意味着， L 的二维球面分支 K_i同痕于 X 中的带状 S^2-纽结；该纽结由一个有限平凡 S^2-链环 O_i沿有限个互不相交的离散1-把手系 h_i 进行手术得到，其中 $\cup_{i=1}^{+\infty}O_i$是平凡链，且 $\mathrm{h}_i(i=1,2,\ldots,n,\ldots)$ 是互不相交离散系。因此， L这个S^2-链环是 X中的带状 S^2-链环。取靠近 Y^O的连通和项 R^4 末端的上半四维空间 H^4，令 $i_X:\mathrm{H}^4\to X$ 为光滑嵌入，并将 X 视为一个 R^3-连通和。对于 X中的四维空间 R^4， X 中的带状 S^2-链环 L可以移入 R^4,，因为 L 由一个离散平凡 S^2-链环经沿互不相交离散系 $\mathrm{h}_i(i=1,2,\ldots,n,\ldots)$进行手术得到，而该链环和这些离散系也都可以移入 R^4和 R^4。根据构造，存在一个同构 $\pi_1(X\setminus L,v)\cong\pi_1(\mathrm{R}^4\setminus L,v)$，它同构于自由基本群 $\pi_1(Y^O,v)=<x_1,x_2,\ldots,n,\cdots>$，并将 K_i $(i=1,2,\ldots,n,\ldots)$的子午线系映到 GP的关系子系 $r_i(i=1,2,\ldots,n,\ldots)$。引理 4.1 的证明至此完成。 □

Let

$$\mathbf{H}^4=\{(x,y,z,t)|\ -\infty<x,y,z<+\infty,0\leq t<\infty\}$$

是 R^4 的上半四维空间，其边界为 $\partial H^4 = \{(x, y, z, 0) | -\infty < x, y, z < +\infty\}$，并将三维空间 $R^3 = \{(x, y, z) | -\infty < x, y, z < +\infty\}$识别起来。令 α 为 R^4 中的反射，它将 (x, y, z, t) 映为 $(x, y, z, -t)$。上半四维空间 H^4 在 α 下的像 $\alpha(H^4)$ 是下半四维空间 $\{(x, y, z, t) | 0 < x, y, z < +\infty, -\infty < t \leq 0\}$。$H^4$ 中的圆盘链环 L^D 是一个离散的（有限或可数无限）圆盘系，这些圆盘在 H^4中光滑且真嵌入，并且彼此互不相交。H^4 中的（可能无限的）圆盘链环 L^D 若由 R^3 中的互不相交圆盘离散系，将圆盘内部推入 H^4的内部而得到，则称其为平凡的。若 H^4 中的圆盘链环 L^D由 H^4 中的互不相交离散嵌入圆盘系 $D \cup b$ 得到，其中该圆盘系是平凡圆盘链环 $D = \{D_i | i = 1, 2, \ldots, n, \ldots\}$ 在 H^4中的并集与 R^3 中互不相交的跨接带系 $b = \{b_j | j = 1, 2, \ldots, m, \ldots\}$ 的并集，再将圆盘系 $D \cup b$ 的内部推入 H^4的内部，则称该圆盘链环为带状。于是，

$$L^D = \tilde{D} \cup \tilde{b}$$

$\tilde{}$ $\tilde{}$对于圆盘系 $D = \{D_i | i = 1, 2, \ldots, n, \ldots\}$ 的一个向上推移，以及带系 $b = \{b_j | j = 1, 2, \ldots, m, \ldots\}$ 的一个向上推移。H^4中带状圆盘链环 L^D的闭外部是4维流形 $E(L^D) = cl(H^4 \setminus N(L^D))$，其中所取的是 H^4中的 L^D 的正则邻域。R^4 中的每个带状 S^2-链环 L 都可经同痕变形为关于 R^4, 中的反射 α 的 α-不变位置，使得 L 由 H^4 的加倍以及 H^4 中的一个带状圆盘链环 L^D得到（见 [3, II]）。下述引理可用与 [2, 引理 3.1]相同的方法证明。

引理 4.2. 对于 (可能无限的) R^4, 中的带状 S^2-链环L 内 H^4 中的一个带状圆盘链环 L^D，包含映射 $(H^4, L^D) \to (R^4, L)$ 诱导出一个同构

$$\pi_1(E(L^D), v) \to \pi_1(E(L), v).$$

以下推论由引理 4.1 和 4.2 得出。

推论 4.3。对于每个同调平凡的单位群表示

$$GP = < x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots | r_1, r_2, \ldots, r_m, \cdots >,$$

存在一个带状圆盘链环 L^D，其分支为 $K_i^D (i = 1, 2, \ldots, n, \ldots)$，位于 H^4 中，并且存在一个同构

$$\pi_1(E(L^D), v) \to < x_1, x_2, \ldots x_n, \cdots >$$

将 $K_i^D (i = 1, 2, \ldots, n, \ldots)$ 的子午线系映射到关系子系 $r_i (i = 1, 2, \ldots, n, \ldots)$。

5. 与同调平凡单位群表示的 1-满子复形相对应的带状圆盘链环

一个带状圆盘链环以下引理包含是自由的 1-且仅当基本群的[2,引理 3.2]的无限版本。

引理 5.1. 每个（可能无限的）带状圆盘链环 L^D 在 $\mathbf{H}^4$ 中的闭外部 $E(L^D)$ 都是无球面的。特别地，对于每个（可能无限的）自由带状圆盘链环 L^D 在 $\mathbf{H}^4$ 中，若 $\pi_1(E(L^D), v) \cong < x_1, x_2, \ldots, x_n, \cdots >$，则存在强变形收缩 $r: E(L^D) \to \omega x$，其中 ωx 是局部有限图，且满足 $\pi_1(\omega x, v) \cong < x_1, x_2, \ldots, x_n, \cdots >$。

引理 5.1 的证明。首先证明，对于上半四维空间 $\mathbf{H}^4$中的无限带状圆盘链环 L^D， $E(L^D)$ 总是无球面的。令 $L^D = \tilde{\mathbf{D}} \cup \tilde{\mathbf{b}}$。沿上半三维空间 $\mathbf{H}^3_0 = \{(x, y, 0, t) \mid -\infty < x, y < +\infty, 0 \leq t < \infty\}$ 将上半四维空间 $\mathbf{H}^4$ 分为两部分：$\mathbf{H}^4_+ = \{(x, y, 0, t) \mid -\infty < x, y < +\infty, 0 \leq z, t < \infty\}$和 $\mathbf{H}^4_- = \{(x, y, 0, t) \mid -\infty < x, y < +\infty, -\infty < x \leq 0, 0 \leq t < \infty\}$。假设平凡圆盘链环 $\mathbf{D} = \{D_i \mid i = 1, 2, \ldots, n, \ldots\}$ 与 $\mathbf{H}^3_0$ 不相交，并分解为两个圆盘系 $\mathbf{D}_\pm$，使得 $\mathbf{D}_+$ 是 $\mathbf{H}^4_+$ 中的有限平凡圆盘链环，而 $\mathbf{D}_-$ 是 $\mathbf{H}^4_-$中的无限平凡圆盘链环。令 $\tilde{\mathbf{D}}_\pm$ 为 $\mathbf{D}$ 中 $\mathbf{D}_\pm$的向上推移圆盘系。跨接带系 $\mathbf{b}$ 与 $\mathbf{H}^3_0$ 相交于一个互不相交的简单弧系，其中包含一条与连接到圆盘系 $\mathbf{D}$ 的弧平行的弧。带系 $\mathbf{b}_\pm = \mathbf{b} \cap \mathbf{H}^4_\pm$ 由带系 $\mathbf{b}^1_\pm$ 和带系 $\mathbf{b}^2_\pm$ 组成：前者包含在 $\mathbf{H}^3_0$ 中没有端点或有一个端点$\tilde{\quad}$ $\tilde{\quad}$ $\tilde{\quad}$的带，后者包含在 $\mathbf{H}^3_0$中两端均有端点的带。令 $\mathbf{b}_\pm = \mathbf{b}^1_\pm \cup \mathbf{b}^2_\pm$为 $\mathbf{b}_\pm$的向上推移带系。注意，带系 $\mathbf{b}_+ = \mathbf{b}^1_+ \cup \mathbf{b}^2_+$是有限带系。令 $f: S^q \to \mathrm{Int}E(L^D)$ 为从 q球面 S^q 到$q \geq 2$的映射。通过滑动上半三维空间 $\mathbf{H}^3_0$，，可假设像 $f(S^q)$ 位于 $\mathbf{H}^4_+$的内部，且不与 $L^D_+ = \tilde{\mathbf{D}}_+ \cup \tilde{\mathbf{b}}^1_+$ 以及从带系 $\mathbf{b}^2_+$到带系 $\tilde{\mathbf{b}}^2_+$的向上推移过程相交。对于 $\mathbf{H}^4_+ \setminus N(L^D_+)$ 和 $\mathbf{H}^4_+ \setminus N(L^D_+ \cup \tilde{\mathbf{b}}^2_+)$ 中 L^D_+和 $L^D_+ \cup \tilde{\mathbf{b}}^2_+$的正则邻域 $N(L^D_+)$ 和 $N(L^D_+ \cup \tilde{\mathbf{b}}^2_+)$，分别令 $E(L^D_+) = \mathrm{cl}(\mathbf{H}^4_+ \setminus N(L^D_+))$，且 $E(L^D_+ \cup \tilde{\mathbf{b}}^2_+) = \mathrm{cl}(\mathbf{H}^4_+ \setminus N(L^D_+ \cup \tilde{\mathbf{b}}^2_+))$。令 $\bar{L}^D_+$为 $\mathbf{H}^4$中的有限带状圆盘链环，由 $\mathbf{H}^4_+$ 中的 L^D_+沿 $\mathbf{H}^3_0$双倍化得到。由于 $E(\bar{L}^D_+)$ 根据 [2,引理 3.2] 是无球面的，且存在收缩 $r: E(\bar{L}^D_+) \to E(L^D_+)$，包含映射$E(L^D_+) \to E(\bar{L}^D_+)$ 诱导出单同态 $\pi_q(E(L^D_+), v) \to \pi_q(E(\bar{L}^D_+), v)$。因此，由 $f: S^q \to \mathrm{Int}E(L^D)$ 定义的映射 $f: S^q \to \mathrm{Int}E(L^D_+)$ 可延拓为一个映射

$$f^+ : D^{q+1} \to \mathrm{Int}E(L^D_+)$$

从（$q+1$）-圆盘 D^{q+1}。通过保持 L^D_+ 和 f（S^q）不变的形变，将并集 $L^D_+ \cup \mathbf{b}^2_+$ 推入 $L^D_+ \cup \tilde{\mathbf{b}}^2_+$。由于 f^+（D^{q+1}）$\cap \mathbf{b}^2_+ = \emptyset$，该形变

只对 $f^+(D^{q+1})$ 的部分 $f^+(D^{q+1}) \setminus f(S^q)$ 进行同痕变形。根据构造，$E(L_+^D \cup \tilde{\mathrm{b}}_+^2) \subset E(L^D)$，像 $f^+(D^{q+1})$ 位于 $E(L^D)$ 中。这意味着 $E(L^D)$ 是无球面的。此外，如果 $\pi_1(E(L^D)\ v)$ 与 $<x_1、x_2、\ldots\ldots、x_n、\cdots>$ 同构，那么 $E(L^D)$ 与 ωx 同伦等价，并且存在一个强变形收缩 r： $E(L^D) \to \omega x$。引理 5.1 得证。 □

对于自由带状圆盘链环 L^D in H^4, let

$$Q(L^D) = E(L^D) \cup N(L^D)$$

将 H^4 分解为闭补空间 $E(L^D)$ 和法圆盘丛 $N(L^D) = L^D \times D^2$。令 $p_*(L^D) = \{p_i | i = 1, 2, \ldots, n, \ldots\}$ 为从 L^D的每个分支中各取一个点所构成的离散集。引理 5.1 中的强变形收缩 r： $E(L^D) \to \omega x$ 以及将 L^D 收缩至 $p_*(L^D)$ 的强变形收缩 $N(L^D) \to p_*(L^D) \times D^2$，定义了一个映射 ρ： $Q(L^D) \to P(L^D)$，其定义域为一个连通的局部有限二维复形

$$P(L^D) = \omega \cup p_*(L^D) \times D^2$$

其附着映射 $p_*(L^D) \times \partial D^2 \to \omega x$ 由 r定义。映射 ρ 称为 2-复形 $P(L^D)$ 的带状圆盘链环表示。对于 L^D的子链环 K^D，令$N(K^D) = K^D \times D^2$为圆盘丛 $N(L^D)$ 的子丛。并集

$$Q(K^D; L^D) = E(L^D) \cup N(K^D)$$

是子链环 $L^D \setminus K^D$of L^D 在 H^4, 中的闭补空间 $E(L^D \setminus K^D)$ 的一种分解，其中该子链环是 H^4 中的带状 S^2-链环。带状圆盘链环表示ρ: $Q(L^D) \to P(L^D)$ 对于 $P(L^D)$，将 $Q(K^D; L^D)$ 映射到 1-满 2-子复形

$$P(K^D; L^D) = \omega \cup p_*(K^D) \times D^2$$

of $P(L^D)$。此外， $P(L^D)$ 的每个 1-满 2-子复形都可以通过这种方式由 L^D 的子链环 K^D 得到。下述定理包含了 Theorem 1.3] 的带状圆盘链环 L^D of [2, 的一个无限版本。

定理 5.2。对于每个自由带状圆盘链环 L^D in H^4, ，带状圆盘链环表示 ρ: $Q(L^D) \to P(L^D)$ 对每个子链环 K^D of L^D （包括 $K^D = \emptyset$ 和 $K^D = L^D$）都诱导出同伦等价 $Q(K^D; L^D) \to P(K^D; L^D)$。特别地，2-复形 $P(L^D)$ 是可缩的。每个同调平凡的单位群表示 GP 的 2-复形 P 都可取为自由带状圆盘链环 L^D in H^4 的 $P = P(L^D)$，使得对于 P 的每个 1-满子复形 P'，恰有一个子链环 K^D of L^D 满足 $P' = P(K^D; L^D)$。

定理 5.2 的证明。带状圆盘链环表示 ρ : $Q(L^D) \to P(L^D)$ 的同伦等价证明与定理 1.3] 的证明类似。

设 $GP =< x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots \mid r_1, r_2, \ldots, r_m, \cdots >$ 是一个同调平凡的单位群表示。由推论 4.3，存在 H^4 中的自由带状圆盘链环 L^D，以及一个同构 $\pi_1(E(L^D)$ $v) \cong < x_1, x_2, \ldots x_n, \cdots >$，它将 L^D 的子午线系映至关系子系 $r_i (i = 1, 2, \ldots, n, \ldots)$。$GP$ 的 2- 复形 P 和 $P(L^D)$ 的 2- 复形都是由图 ωx （其 $\pi_1(\omega x, v) =< x_1, x_2, \ldots x_n, \cdots >$）附着 2-胞腔得到的，附着映射由关系词 $r_j (j = 1, 2, \ldots, m, \ldots)$ 给出。因此， P 的 1-满子复形与 $P(L^D)$ 的 1-满子复形相同。 □

下面的推论证实猜想 3 成立。

推论 5.3. 每个同调平凡的单位群表示的每个子复形都是无球面的。

推论 5.3 的证明。设 P 是每个同调平凡的单位群表示对应的 2-复形， P' 是 P 的一个连通子复形。根据定理 5.2， P 可写为 H^4 中一个自由带状圆盘链环 L^D 的 $P(L^D)$。若 P' 是 P 的一个 1-满子复形 P'，则 P' 可写为 H^4 中一个子链环 K^D 的 $P(K^D; L^D)$。带状圆盘链环表示 ρ : $Q(K^D; L^D)$ 与 $\to P(K^D; L^D)$ 同伦等价，而 $Q(K^D; L^D)$ 是 $E(L^D \setminus K^D)$ 的闭外部，由引理 5.1 可知它是无球面的。因此， P' 是无球面的。若 P 的 P' 不是 1-满的，则可通过向 P' 添加 $P^1 = \omega x$ 这个 1-骨架中的一些环路，从 P' 构造出 P 的一个 1-满子复形 P''；并且 P'' 是无球面的，当且仅当 P' 是无球面的。因此，在这种情况下， P' 是无球面的。推论 5.3 的证明完毕。 □

定理1.1的证明现已完成如下。

定理1.1的证明。定理1.1的证明由推论 5.3（对猜想 3 的确认）以及猜想 $3 \Rightarrow$ 猜想 2 和猜想 $2 \Rightarrow$ 猜想 1 的证明完成。至此，定理1.1的证明完成。 □

致谢。本研究部分得到了 JSPS KAKENHI 资助项目编号 JP19H01788、JP21H00978 以及 MEXT 特色联合研究中心促进项目 JPMXP0723833165 的支持。

参考文献

[1] J. Howie, 《关于 J. H. C. Whitehead 一个问题的几点评论》, Topology 22（1983）, 475-485。[2] A. Kawauchi, 《同伦四维球面中 Kervaire 球面链环的带状性及其对 2-复形的推论》。https://sites.google.com/view/kawauchiwriting[3] A. Kawauchi、T. Shibuya 和 S. Suzuki, 《四维空间中的曲面描述 I：标准形》, Mathematics Seminar Notes, 神户大学, 10（1982）, 75-125。II：奇点与横截链环, Mathematics Seminar Notes, 神户大学, 11（1983）, 31-69。[4] W. Magunus、A. Karrass 和 D. Solitar, 《组合群论：用生成元和关系表示群》, Interscience Publisheres（1966）。[5] E. Pasku, 《对 Whitehead 非球面性问题的回答》, arXiv:2107.12293。[6] E. H. Spanier, 《代数拓扑》, 麦格劳-希尔（1966）。[7] J. H. C. Whitehead, 《向同伦群添加关系》, Ann. Math. 42（1941）, 409-428。