arXiv:2303.04383v1 [math.AG] 8 Mar 2023

# 格极化 K3 曲面的 BCOV 尖点形式

SHINOBU HOSONO 和 Atsushi Kanazawa

摘要。我们为格极化 K3 曲面引入 BCOV 公式。对于许多秩 19 格极化 K3 曲面的族，我们发现该公式可导出由某些 η乘积表示的尖点形式。进一步地，对于 Clingher-Doran 族的 $U \oplus E_8(-1) \oplus E_7(-1)$-极化 K3 曲面，我们从该公式得到 Igusa 尖点形式 $\chi_{10}$ 和 $\chi_{12}$ 。受 Lian-Yau 研究的镜像映射的算术性质启发，我们还推导出所有类型为 $\Gamma_0(n)+$ 的零属群对应的 K3 微分算子。

## 1. 引言

1993 年，Bershadsky、Ceccoti、Ooguri 和 Vafa（BCOV）引入了所谓的 BCOV 势 $F_1$ ，它给出了 Calabi-Yau 三维簇亏格一 Gromov-Witten 不变量的生成函数，是对 Candelas 等人提出的亏格零镜像对称的推广 [13]。它涉及霍奇结构变分与 Calabi-Yau 流形模空间上的 Kähler 几何之间有趣的相互作用。事实上，它源自理论物理中二维 $N = 2$ 超对称量子场论模空间上的所谓 $tt^*$-几何 [12] 。

$tt^*$几何中的主要要素之一，是一种新的Witten 指标类型 $\mathrm{F}_1$, ，由 [11, 12], 为 $N = 2$ 超对称共形场论引入。与 Witten 指标不同，新的指标 $\mathrm{F}_1$ 并非拓扑不变量，而是以特定方式依赖于理论的模；作为模空间上的函数，$\mathrm{F}_1$ 几乎可以分解为全纯函数与反全纯函数之和，但这种分解并不完整。当 $N = 2$ 超对称理论被构造为 Calabi-Yau 流形 $X$上的 σ 模型时，它满足全纯反常方程

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial \overline{x}_j}\mathrm{F}_1 = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\,\mathcal{C}_i\overline{\mathcal{C}}_{\bar{j}} + \frac{\chi}{24}\,g_{i\bar{j}}, \tag{1.1}$$

其中，迹取遍量子算子空间；其环结构由 $\mathcal{C}_i$ =($\mathcal{C}_{ijk}$) 和 $\overline{\mathcal{C}}_{\bar{j}} = \left(\overline{\mathcal{C}}_{\bar{j}\bar{k}\bar{l}}\right)$决定。此外， $\chi$ 是$X$ 的欧拉数，而 $g_{i\bar{j}} = \frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial \overline{x}_j}\mathcal{K}$ 是模空间（镜像 Calabi-Yau 流形 ˇ$X$的模空间）上的 Weil-Petersson Kähler 度量。将量子算子的线性空间与模空间的切空间等同起来，并利用 Calabi-Yau 三维流形 $X$的所谓特殊 Kähler 几何关系 [46] ，BCOV 对方程 (1.1) 积分，得到

$$\mathrm{F}_1 = \frac{1}{2}\log\left\{e^{(3+h_X^{1,1}-\frac{\chi}{12})\mathcal{K}}\det(g_{i\bar{j}})^{-1}\,|f|^2\right\}, \tag{1.2}$$

其中 $h^{1,}{}_X{}^1$ = 维数 $H^{1,1}(X)$，而 $f$ 是一个全纯函数，其形式应由适当的边界条件确定。正如我们将在正文中详细描述的那样，存在一些特殊的边界点，称为大复结构极限（LCSLs）；在这些点处，我们引入特殊的全纯坐标 $t_i = t_i(x)$ ($1 \le i \le d$: $= h^{1,}{}_X{}^1$ )，称为镜像映射。用全纯坐标 $t_i$ 表示时，BCOV 取所谓的拓扑极限 $\bar{t}_i \to \infty$ ，此时 $\mathrm{F}_1$ 分解为全纯函数与反全纯函数之和。具体而言，在该极限下，我们有

$\mathcal{K} \to -\log\ (w_0(x)\overline{w_0(x)}),\det(g_{i\bar{j}})^{-1} \to |\frac{\partial(x_1,\cdots,x_d}{\partial\ t_1\ \cdots\ t_d}(,,)\ |^2$，利用这些关系式，我们得到

$$F_1^{top} = \frac{1}{2}\log\left\{\left(\frac{1}{w_0(x)}\right)^{3+h_X^{1,1}-\frac{\chi}{12}}\frac{\partial(x_1,\cdots,x_d)}{\partial(t_1,\cdots,t_d)}f(x)\right\} \tag{1.3}$$

对于极限的全纯部分。由此得到的全纯函数 $F_1^{top}$，在施加适当的边界条件来确定 $f(x)$ 后，恰好就是 BCOV 势 $F_1$。记 $F_1^{top} = \frac{1}{2}\log\ \tau_{\mathrm{BCOV}}$，我们称 $\tau_{\mathrm{BCOV}}$ 为 BCOV 公式。

对于上述 Calabi-Yau 三维簇，全纯函数 $F_1^{top}$ 尤其值得关注。然而，研究 K3 曲面的 $F_1^{top}$ 并未引起太多关注，因为 K3 曲面不存在源自全纯曲线的量子修正。本文将为 K3 曲面引入 BCOV 公式，并表明它仍然颇具意义，因为它能在周期域上产生有趣的自守形式。

设 $M$ 是一个符号为 $(1,r-1)$ 的格，且 $M \subset L$ 是到 K3 格 $L = U^{\oplus 3}\oplus E_8(-1)^{\oplus 2}$ 的本原嵌入。假设正交格 $M^{\perp} = U \oplus \check{}M$ 分解出一个秩为二的双曲格 $U$。在此假设下，一个 $M$-可极化的 ˇ K3 曲面 $X$ 与一族 $M$-可极化 K3 曲面镜像对称，后者由周期域 $\Omega_{\check{}M}$ 参数化。为了更深入地研究 ˇ 中的同构类，我们引入 $M$-可极化 K3 曲面，其同构类由周期域的某个商 $\Omega_{\check{}M}/O(\check{}M^{\perp})_+$ 参数化。引入镜像映射 $t_i = t_i(x)(1 \le i \le r)$ 后，我们在定义 3.1 中将 BCOV 公式定义为

$$\tau_{\mathrm{BCOV}}(t) = \left(\frac{1}{w_0(x)}\right)^{r+1}\frac{\partial(x_1,\cdots,x_r)}{\partial(t_1,\cdots,t_r)}\prod_i dis_i(x)^{r_i}\prod_{j=1}^{r}x_j^{-1+a_j},$$

其中，我们施加适当的边界条件（节点和轨形正则性条件）来确定参数 $r_i$、$a_j$。注意，令 $\chi = 24$ 和 $h^{1,\ }{}_X{}^1 = r$，并如上所述对 $f$ 作出假设，便可从（1.3）自然得到此定义。次数为 $2n$ 的 K3 曲面由格 $M_{2n} := \langle 2n\rangle$ 描述，从而得到 ˇ $M_{2n} = \langle -2n\rangle \oplus U \oplus E_8(-1)^{\oplus 2}$。我们计算了 $\mathbb{P}^1$ 上在 [39] 中研究的 ˇ $M_{2n}$-可极化 K3 曲面族的 BCOV 公式。结果表明，在**命题4.1、4.3** 中，$(\tau_{\mathrm{BCOV}})^{-1}$ 定义了上半平面 $\mathbb{H}_+$ 上的一个尖点形式，其模群为 $\Gamma_0(n)_+$，并具有如下特殊形式的 η乘积（定义4.4）：

$$\eta_{\mathrm{BCOV}}(t) = \left(\prod_{r|n}\eta_r(t)^{\pm 1}\right)^{w}.$$

ˇ 我们猜想，对于同构类由 $\Omega_{\check{}M_{2n}}/\Gamma_0(n)_+$ 与零亏格模群 $\Gamma_0(n)_+$ 参数化的 $M_{2n}$-可极化 K3 曲面族，这一结论普遍成立（**猜想 4.8**）。

有趣的是，若我们假设猜想 4.8 成立，并假设 Lian-Yau 所观察到的镜像映射的算术性质成立，那么对于每个零属群 $\Gamma_0(n)_+$，都会得到一个特定的三阶微分算子，我们称之为 *K3* 微分算子。我们在**命题 4.9**中概述了 K3 微分算子的性质。本文补遗中列出了 K3 微分算子 [25]。

作为另一个有趣的例子，我们计算了 Clingher 和 Doran [13], 深入研究的 $U \oplus E_8(-1)\oplus E_7(-1)$-极化 K3 曲面族的 BCOV 公式，其中粗模空间可用 Siegel 模

二元形式来描述。经过适当的坐标变换后，我们发现 Picard-Fuchs 微分方程由 90 年代提出的扩展 GKZ 系统 [26, 28]给出。在这种情况下，根据**命题 5.6**，我们有

$$(\tau_{\mathrm{BCOV}}(\tau))^{-1} = (\chi_{10}(\tau))^{\frac{1}{10}}, \left(3\chi_{12}(\tau) + \chi_{10}(\tau)\mathcal{E}_4(\tau)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{12}}$$

其中，$\chi_{10}$、$\chi_{12}$ 分别是权为十和十二的 Igusa 尖点形式，而$\mathcal{E}_4$ 是亏格二 Eisenstein 级数。这里，两种不同的边界条件（轨形正则性条件）带来了两种可能性；其中一种，我们将从格极化 $\check{M}$ 延拓到 $U \oplus E_8(-1)^{\oplus 2}$的角度来解释。

我们描述 Calabi-Yau 流形模空间上的 Weil-Petersson Kähler 几何。通过用 $\tau_{\mathrm{BCOV}}$表示所谓的 BCOV 扭率 $\mathcal{T}_{\mathrm{BCOV}}$，我们给出一些有用的公式，将 Kähler 几何与 $\Omega^{\check{M}}$ 上的（准）自守形式联系起来。

我们简要概述本文的结构。第 2 节总结格极化 K3 曲面的理论及其间的镜像对称。我们详细描述周期域及其上的自守形式，以确立记号。在第 3 节，我们介绍 BCOV 公式 $\tau_{\mathrm{BCOV}}$，并对 [39], 中已知的、定义在 $\mathbb{P}^1$ 上的 $\check{M}_{2n}$ 极化 K3 曲面进行计算，发现它们可写成特定形式 $\eta_{\mathrm{BCOV}}$ 的 η 乘积。基于这些结果的普遍性假设，我们得到 K3 微分算子。在第 4 节，我们计算 Clingher-Doran 族 K3 曲面的 $\tau_{\mathrm{BCOV}}$。在第 5 节，我们介绍 BCOV 扭率，并阐述其与格极化 K3 曲面模空间上的 Weil-Petersson Kähler 几何之间的关系。附录 A–D 中给出了详细计算和数据，供读者参考。

**致谢**。本文源于与 Martin Guest 关于 K3 曲面模空间上的 $tt^*$-几何的合作。我们感谢他在早期阶段的合作以及富有价值的讨论。本研究部分得到科学研究补助金（A 18H03668 M.G.、C 20K03593 S.H. 以及 C 22K03296 A.K.）的支持。

## 2. 周期域上的自守形式

我们首先描述格极化 K3 曲面族及其周期域。然后通过管状域实现引入该域上的自守形式。

**2.1. K3 曲面族与周期域**。令 $L$ 为所谓的 K3 格，它是符号为 (3, 19) 的（唯一的）偶幺模格，即 $L = U^{\oplus 3} \oplus E_8(-1)^{\oplus 2}$，其中 $U = \left\langle \mathbb{Z}^2, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle$ 表示双曲格，而 $E_8(-1)$ 是 $E_8$ 根格，其双线性形式乘以 $(-1)$。我们固定一个符号为 $(1, r-1)$ 的本原子格 $M \subset L$，并记 $C_M$ 为在 $M \otimes \mathbb{R}$中为 $M$ 定义的正锥的（两个）连通分支之一。

**2.1.1. 格极化 *K3* 曲面**。K3 曲面 $X$ 是满足 $K_X = 0$ 和 $H^1(X, \mathcal{O}_X) = 0$的紧致二维复流形。根据庞加莱对偶，借助杯积定义的双线性形式 $(\ ,\ ) : H^2(X, \mathbb{Z}) \times H^2(X, \mathbb{Z}) \to \mathbb{Z}$ 是非退化的，且 $(H^2(X, \mathbb{Z}), (\ ,\ ))$ 是一个与 K3 格$L$同构的格。格 $NS_X := H^{1,1}(X) \cap H^2(X, \mathbb{Z})$ 称为 Néron-Severi 格，而其

正交格 $T_X:=(NS_X)^\perp$ 在 $H^2(X,\mathbb{Z})$ 中称为超越格。我们称同构 $\phi\colon H^2(X,\mathbb{Z})\to L$ 为 $X$的一个标记，并称一对 $(X,\phi)$ 为带标记的 K3 曲面。下面我们依次概述格极化 K3 曲面的理论。

(2.1.1.a) 设格 $M$ 的符号为 $(1,r-1)$，并给定一个本原嵌入$i\colon M\hookrightarrow L$。我们在 $L$ 中写出正交分解 $i(M)\oplus(i(M))^\perp$，其中通过$M\oplus M^\perp\subset L$ 省略包含映射。若存在一个标记 $\phi$，使得 $\phi^{-1}(M)\subset NS_X$，则称 K3 曲面 $X$ 为类型$M$。若带标记的 K3 曲面 $(X,\phi)$ 满足 $X$ 是类型 $M$，且 $\phi^{-1}(C_M^{\mathrm{pol}})$ 中的所有除子均为丰沛，则称其为 $M$-极化，其中 $C_M^{\mathrm{pol}}$ 是 $C_M$ 中由根 $\Delta_M=\{d\in M\mid (d,d)=-2\}$ 所确定的正锥室（见 [16, 3]）。

(2.1.1.b) 对应于上述正交分解 $M\oplus M^\perp\subset L$，我们将周期域 $\Omega_M=\Omega(M^\perp)$ 定义为以下集合的两个连通分支之一

$$D_M=\left\{[w]\in\mathbb{P}(M^\perp\otimes\mathbb{C})\mid (w,w)=0,(w,\bar{w})>0\right\},$$

即，$\Omega_M=D_M^+$与 $D_M=D_M^+\sqcup D_M^-$。显然，对于 $M$-极化 K3 曲面 $(X,\phi)$ 的全纯二形式 $\omega_X$，我们有 $[\phi(\omega_X)]\in\Omega_M$。反过来，由于周期映射的满射性，对于点 $[\omega]\in\Omega_M$，我们将其视为$\mathbb{P}(M^\perp\otimes\mathbb{C})\subset\mathbb{P}(L\otimes\mathbb{C})$ 中的一个点，存在一个带标记的 K3 曲面 $(X,\phi)$，使得 $\phi(\mathbb{C}\omega_X)=[\omega]$。注意，我们有 $NS_X=(\mathbb{C}\omega_X)^\perp\cap H^2(X,\mathbb{Z})$，因此 $\phi(NS_X)=(\mathbb{C}\omega)^\perp\cap L.$。此外，利用分解 $M\oplus M^\perp\subset L$ 以及事实 $\phi(\omega_X)\in M^\perp\otimes\mathbb{C}$，可知 $M\subset\phi(NS_X)$，即 $\phi^{-1}(M)\subset NS_X$。将 $\phi$ 与 $M$ 中（以及 $M^\perp\cap(\mathbb{C}\omega_X)^\perp$ 中）的根所对应的适当反射复合，可使 $\phi^{-1}(C_M^{\mathrm{pol}})$ 中的所有除子都成为（伪）丰的。因此，对于任意点 $[\omega]\in\Omega_M$，我们都有一个（伪丰） $M$-极化 K3 曲面。

(2.1.1.c) 我们用 $O(M,L)$ 表示正交群 $O(L)$ 的子群，该子群固定 $L$ 中的每个元素。利用分解 $M\oplus M^\perp\subset L$，群 $O(M,L)$ 自然作用于 $D_M$。我们用 $O(M,L)_+$ 表示固定连通分支 $D_M^+$ 的子群。群 $O(M,L)_+$ 在 $\Omega_M=D_M^+$ 上适当地不连续作用。若存在同构 $f\colon X_1\to X_2$，使得 $\phi_1\circ f^*\circ\phi_2^{-1}\in O(M,L)_+$，则称两个 $M$-极化 K3 曲面 $(X_1,\phi_1)$ 和 $(X_2,\phi_2)$ 同构。若 $(X_1,\phi_1)$ 与 $(X_2,\phi_2)$ 同构，则对于 $X_i(i=1,2)$ 的全纯二形式 $\omega_{X_i}$，有 $f^*\colon H^2(X_2,\mathbb{Z})\xrightarrow{\sim}H^2(X_1,\mathbb{Z})$ 满足 $f^*(\mathbb{C}\omega_{X_2})=\mathbb{C}\omega_{X_1}$。相应地，元素 $\phi_1\circ f^*\circ\phi_2^{-1}\in O(M,L)_+$ 将周期点 $[\phi_2(\omega_{X_2})]\in\Omega_M$ 映到 $[\phi_1(\omega_{X_1})]\in\Omega_M$。因此，（伪丰） $M$-极化 K3 曲面的同构类由商空间 $\Omega_M/O(L,M)_+$ 参数化。通过从 $\Omega_M$ 中去掉超平面 $H_d=\{(x,d)=0\}$（其中 $d\in\Delta_{M^\perp}$），可得到 $M$-极化 K3 曲面的同构类模空间；在此过程中，只有通过对根作适当反射，才能使 $\phi^{-1}(C_M^{\mathrm{pol}})$ 中的除子成为伪丰除子（见下文 [16, 3] 和 (2.2)）。

(2.1.1.d) 令 $O(M^\perp)_+$ 为 $O(M^\perp)$ 中保持连通分支 $\Omega_M=\Omega(M^\perp)$ 不变的子群。由于 $M^\perp\oplus M$ 是 $L$ 的本原子格，而 $L$ 是偶幺模的，因此我们有 $O(M,L)_+\simeq O(M^\perp)_+\cap O(M^\perp)^*$，其中

$$O(M^\perp)^*=\mathrm{Ker}\left\{O(M^\perp)\to O(A_{M^\perp})\right\}$$

并且 $O(A_{M^\perp})$ 是关于判别式形式 $q_{A_{M^\perp}}$ 的判别式 $A_{M^\perp}=(M^\perp)$ 上的正交群（例如参见 [16, 命题 3.3]）。

(2.1.1.e) 当 $M$-极化 K3 曲面的正交格 $M^\perp$ of $M\subset L$ 分裂出一个双曲格时，用 $M$-极化 K3 曲面来描述 K3 曲面的镜像对称颇为简洁

$U$，即 $M^\perp = U \oplus \check{}M$带有一个符号为 $(1, 19-r)$ 的格 $\check{}M =: (1, \check{}r)$。事实上，$\check{}$ 在这种情况下，我们可以在关系 $M \oplus U \oplus M \subset L^\check{}$ 与 $r + \check{}r = 20$ 中观察到明显的对称性。通过精确描述与 $M$ 和 $M$ 相关的适当变形空间，文献 [16] 指出，一个 $\check{}M$-极化 K3 曲面族与一个 $M$-极化 K3 曲面族互为镜像对称。

2.1.2. 格极化 *K3* 曲面。 当将镜像对称扩展到所谓的同调镜像对称时，K3 曲面的导出范畴便与镜像对称联系起来（见 [37]）。 [30] 表明，通过引入一族 $M$-可极化K3 曲面，可以更好地描述 K3 曲面的同调镜像对称（见下文第 2.1.3 小节）。若存在一个标记$\phi$：$H^2(X,\mathbb{Z}) \to L$，使得 $(X,\phi)$ 是一个 $M$-极化 K3 曲面，则称 K3 曲面 $X$ 为 $M$-可极化。

若 $M$-可极化 K3 曲面 $X_1$和 $X_2$一般，即满足 $\phi_i^{-1}(M) = NS_{X_i}(i = 1, 2)$，则存在相应的 $M$-极化 K3 曲面 $(X_1, \phi_1)$ 和 $(X_2, \phi_2)$。若存在同构 $f: X_1 \xrightarrow{\sim} X_2$，则有相应的 Hodge等距映射 $f^*: (H^2(X_2,\mathbb{C})\ \mathbb{C}\omega_{X_2}) \xrightarrow{\sim} (H^2(X_1,\mathbb{C})\ \mathbb{C}\omega_{X_1})$，由此可得 $\phi_1 \circ f^* \circ \phi_2^{-1}: (L, \mathbb{C}\phi_2(\omega_{X_2})) \xrightarrow{\sim} (L, \mathbb{C}\phi_1(\omega_{X_1}))$。在一般性的假设下，我们有 $\phi_i(NS_{X_i}) \oplus \phi_i(T_{X_i}) = M \oplus M^\perp \subset L$，且限制映射 $\phi_1 \circ f^* \circ \phi_2^{-1}|_{M^\perp}$定义了 $O(M^\perp)_+$的一个元素。$\phi_1 \circ f^* \circ \phi_2^{-1}|_{M^\perp}$在周期域 $\Omega_M$ 上的诱导作用将周期点 $[\phi_2(\omega_{X_2})]$ 映到 $[\phi_1(\omega_{X_1})]$。然而，一般而言，限制映射 $\phi_1 \circ f^* \circ \phi_2^{-1}|_M$ 未必是恒等映射 $id_M$。

命题 *2.1.* 设 $g \cdot \omega$ 是 $g \in O(M^\perp)_+$ 在点 $[\omega] = \mathbb{C}\omega \in \Omega_M = \Omega(M^\perp) \subset \Omega(L)$ 上的自然作用。假设本原嵌入 $M^\perp \hookrightarrow L$ 在 $L$的等距意义下是唯一的，那么每个元素 $g \in O(M^\perp)_+$ 都可以延拓为 $\phi_g \in O(L)$，其定义了一个*"Hodge"*等距 $\phi_g: (L, \mathbb{C}\omega) \xrightarrow{\sim} (L, \mathbb{C}g \cdot \omega)$。

证明。 回忆一下，我们已为本原嵌入 $i: M \hookrightarrow L$固定了正交分解 $M \oplus M^\perp \subset L$。这给出了一个本原嵌入 $j: M^\perp \hookrightarrow L$。对于 $g \in O(M^\perp)_+$，我们有一个本原嵌入 $j \circ g: M^\perp \hookrightarrow L$。根据唯一性假设，存在一个等距 $\phi_g \in O(L)$，使得$j \circ g = \phi_g \circ j$。省略嵌入 $j: M^\perp \hookrightarrow L$的 $j$ 后，我们得到$\phi_g: (L, \mathbb{C}\omega) \xrightarrow{\sim} (L, \mathbb{C}g \cdot \omega)$，其中任意 $\mathbb{C}\omega \in \Omega(M^\perp) \subset \Omega(L)$。□

如上所述，由于周期映射的满射性，存在 $M$-极化的 K3 曲面 $(X_1, \phi_1)$ 和 $(X_2, \phi_2)$，满足 $[\phi_1(\omega_{X_1})] = [\omega]$ and $[\phi_2(\omega_{X_2})] = [g \cdot \omega]$ for$[\omega], [g \cdot \omega] \in \Omega_M$。于是，由 Torelli定理，上述命题中的"Hodge"等距映射 $\phi_g$给出一个 Hodge等距映射 $f_g^* = \phi_1^{-1} \circ \phi_g \circ \phi_2: (H^2(X_2,\mathbb{Z})\ \mathbb{C}\omega_{X_2}) \xrightarrow{\sim} (H^2(X_1,\mathbb{Z})\ \mathbb{C}\omega_{X_1})$，它来自 K3 曲面之间的同构 $f_g: X_1 \xrightarrow{\sim} X_2$。因此，在命题 2.1 的假设下， $M$-可极化 K3 曲面的同构类由以下商参数化

$$\Omega_M / O(M^\perp)_+.$$

这里需要指出的是，若上述假设成立，则自然会出现一个更大的群 $O(M^\perp)_+$，用于描述模空间。

2.1.3. 次数为 $2n$ 的 *K3* 曲面的镜像。次数为 $2n$ 的 K3 曲面是由格 $M_{2n} = \langle 2n \rangle$ 描述的最一般代数 K3 曲面。对于本原嵌入 $M_{2n} \subset L$，我们有相应的正交分解：$M_{2n} \oplus (M_{2n})^\perp = M_{2n} \oplus U \oplus \check{}M_{2n} \subset L$，其中 $\check{}\ M_{2n} = U^{\oplus 2} \oplus E_8(-1)^{\oplus 2} \oplus \langle -2n \rangle$。我们将其整理为两种不同的正交分解，

$$M_{2n} \oplus (M_{2n})^\perp = M_{2n} \oplus U \oplus \check{M}_{2n} = (\check{M}_{2n})^\perp \oplus \check{M}_{2n},$$

这表明，根据 [16] 的意义，一个 $M_{2n}$-极化 K3 曲面族与一个 $\check{}M_{2n}$-极化 K3 曲面族镜像对称。由于本原嵌入 $(\check{}M_{2n})^\perp = M_{2n}\oplus U \subset L$ 在等距意义下唯一（见 [41, 定理 1.14.4],[40,定理 2.8]），商 $\Omega_{\check{}M_{2n}}/O((\check{}M_{2n})^\perp)_+$ 在描述镜像对称时自然地作为 $\check{}M_{2n}$-可极化 K3 曲面的模空间出现。

注记 2.2。在 [30], 中发现，一个$M_{2n}$-极化 K3 曲面的傅里叶-穆凯伙伴数量可以从“单值化”群 $O((\check{}M_{2n})^\perp)_+$和 $O((\check{}M_{2n})^\perp)^*_+$ 中读出，它们分别给出 $\check{}M_{2n}$-可极化和 $\check{}M_{2n}$-极化 K3 曲面的模空间。对于 $n>1$，我们可以将这些群描述为

$$O((\check{M}_{2n})^\perp)_+ \simeq \Gamma_0(n)_+,\ \ O((\check{M}_{2n})^\perp)^*_+ \simeq \Gamma_0(n)_{+n} \tag{2.1}$$

其中 $\Gamma_0(n) := \left\{\left(\begin{smallmatrix} a & b\\ c & d\end{smallmatrix}\right) \in SL(2,\mathbb{Z}) \mid \left(\begin{smallmatrix} a & b\\ c & d\end{smallmatrix}\right) \equiv \left(\begin{smallmatrix} 1 & *\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right) \text{模 } n\right\}$，且 $\Gamma_0(n)_+$, $\Gamma_0(n)_{+n}$是 $\Gamma_0(n)$ 在 $SL(2,\mathbb{R})$ 中的正规化子，通过添入 Fricke 和 Atkin–Lehner 对合得到；具体而言，我们将 $\Gamma_0(n)_{+n} = \langle \Gamma_0(n)\ W_n\rangle$ 定义为添入 Fricke 对合 $W_n = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{n}} \\ -\frac{1}{\sqrt{n}} & 0\end{pmatrix}$，而 $\Gamma_0(n)_+$ 则通过添入所有针对 $e||n$ 的 Atkin–Lehner 对合 $W_e$ 定义（即 $e|n$ 和 $(e,n/e)=1$）（见 [15]）。在 [30, 定理 1.18], 中发现，指数 $[\Gamma_0(n)_+ : \Gamma_0(n)_{+n}]$ 与一般 $M_{2n}$-极化 K3 曲面的傅里叶-穆凯伙伴数量 [42], 相同，并从镜像 $M_{2n}$-可极化 K3 曲面的辛微分同胚角度对其作了解释。

在第 4 节的例子中，我们将看到，单值化群 (2.1) 源自 [39, 17, 49] 中研究的适当 K3 曲面族的 Picard-Fuchs 微分方程。

2.2. **自守形式**。对于每个 $[\omega] \in \Omega_{\check{}M}$，线性张成空间 $\mathbb{R}\,\mathrm{Re}\omega + \mathbb{R}\,\mathrm{Im}\omega$在 $M^\perp\otimes\mathbb{R}$ 中定义了一个正平面。作为参数化这些正二维平面的空间，周期域 $\Omega_{\check{}M} = \Omega(\check{}M^\perp)$ 同构于 $O(2,20-\check{}r)/SO(2)\times O(20-\check{}r)$，这是一个 IV 型对称域。我们将在下一节介绍的 BCOV 尖点形式，是关于 $O(\check{}M^\perp)_+$ 的自然作用定义在 $\Omega_{\check{M}}$ 上的特殊自守形式。

设分解 $\check{}M^\perp = U\oplus M$ 满足 $r+\check{}r=20$，如前一小节所述。那么我们可以用管状域描述周期域 $\Omega_{\check{M}}$；

$$\Omega_{\check{M}} \simeq M\otimes\mathbb{R} + iC_M, \tag{2.2}$$

其中 $C_M := \{x\in M\otimes\mathbb{R} \mid (x,x)>0\}^+$（与前文一样，$\{\}^+$表示两个连通分支之一）。为明确描述同构 (2.2)，我们取 $\check{}M^\perp = U\oplus M$ 的一组基 $e,f;\ b_1,\cdots,b_r$，满足 $(e,f)=1$，$(e,e)=(f,f)=0$，以及 $(e,b_i)=(f,b_i)=0$，其中 $U=\mathbb{Z}e+\mathbb{Z}f$ 和 $M=\oplus_i\mathbb{Z}b_i$。根据分解 $\check{}M^\perp = U\oplus M$，我们将一个复向量$w\in(U\oplus M)\otimes\mathbb{C}$写作 $w=(w_0,w^{(2)},w_1^{(1)},\cdots,w_r^{(1)}) = (w_0,w^{(2)})\oplus w^{(1)}$。于是有

$$(w,w) = 2w_0w^{(2)} + (w^{(1)},w^{(1)})_M, \tag{2.3}$$

其中，$(\,,\,)_M$表示双线性形式 $(\,,\,)$ 在 $M\otimes\mathbb{C}$ 上的限制。引入非齐次坐标 $t_k = \frac{w_k^{(1)}}{w_0}$ 和 $F=-\frac{w^{(2)}}{w_0}$ 后，我们可以将同构 (2.2) 表示为

$$[w] = [1,-F,t_1,\cdots,t_r] \mapsto (t_1,\cdots,t_r).$$

这里注意到，$\Omega_{\check{}M}$的二次关系 $(w,w)=0$由 $F=\frac{1}{2}(t)^2_M$ 求解。坐标 $t_1,\cdots,t_r$（或 $q^{2\pi i t_1},\cdots,q^{2\pi i t_r}$）通常称为管状域坐标。

回忆算术群 $O(\check{M}^{\perp})_+$ 在 $\Omega_{\check{M}}$ 上的自然作用，我们将其表示为 $g \in O(\check{M}^{\perp})_+$ 在 $w \in \check{M}^{\perp} \otimes \mathbb{C}$ 上通过 $g \cdot w$ 给出的线性作用。若将对应的线性作用施加于"归一化"向量 $(1, -F, t_k^{(1)})$，写作 $g \cdot (1, -F, t_k^{(1)}) = (D(g,t)\ A(g,t)\ B(g,t))$，则这就定义了坐标 $t_1, \cdots, t_r$ 上的作用，具体为

$$[g \cdot (1, -F, t_k^{(1)})] = [1, \frac{A(g,t)}{D(g,t)}, \frac{B_k(g,t)}{D(g,t)}] =: [1, -\tilde{F}(t), \tilde{t}_k^{(1)}], \tag{2.4}$$

其中 $\tilde{t}_k^{(1)} := \frac{B_k}{D(g,t)D(g,t)} (k = 1, ..., r)$ 是 $t_1, \ldots, t_r$ 的有理函数。我们将此˜作用记作 $t = g \cdot t$。

**定义 2.3.** $\Omega_{\check{M}}$ 上的全纯函数 $\Psi(t) = \Psi(t_1, \ldots, t_r)$ 具有以下性质

$$\Psi(g \cdot t) = D(g,t)^m \Psi(t)\ \ (g \in O(\check{M}^{\perp})_+) \tag{2.5}$$

称为 $\Omega_{\check{M}}$ 上权为 $m$ 的自守形式。

2.2.1. 例*1* ($\check{M}^{\perp} = U \oplus U$) .考虑一个本原嵌入 $\check{M} = U \oplus E_8(-1)^{\oplus 2} \hookrightarrow L$，以及 $L$ 中的正交格 $\check{M}^{\perp}$。容易看出 $\check{M}^{\perp} = U \oplus U (= U \oplus M)$，并且 $\Omega_{\check{M}} \simeq M \otimes \mathbb{R} + iC_M = \mathbb{H}_+ \times \mathbb{H}_+$ 同构于上半平面 $\mathbb{H}_+$。由于根据 [41, Thm.1.14. 4],[40, Thm.2.8], ，本原嵌入 $\check{M}^{\perp} \subset L$ 在同构意义下唯一，因此 $\Omega_{\check{M}}$ 除以群$O(\check{M}^{\perp})_+$所得的商参数化了 $\check{M}$-可极化 K3 曲面的同构类。对于群 $O(\check{M}^{\perp})_+ = O(U \oplus U)_+$，我们注意到以下同构：

$$O(U \oplus U)_+ \simeq P(SL(2,\mathbb{Z}) \times SL(2,\mathbb{Z})) \rtimes \mathbb{Z}_2.$$

显式生成元 $O(U \oplus U)$可见于 [31, 命题2.5]；采用其中的记号，第一个因子 $P(SL(2,\mathbb{Z}) \times SL(2,\mathbb{Z}))$由 $S_1$、$S_2$、$T_1$、$T_2$生成，第二个因子 $\mathbb{Z}_2$ 由 $R_1R_2$生成。具体而言，由于这些生成元是针对 $O(2,2,\mathbb{Z})$给出的，我们需要将其转换为本文对 $O(U \oplus U)$的定义。经过必要的转换后，我们验证管状域坐标$(t_1, t_2) \in \mathbb{H}_+ \times \mathbb{H}_+$上的以下作用：

$$S_1 : (t_1, t_2) \mapsto (-\frac{1}{t_1}, t_2), \quad S_2 : (t_1, t_2) \mapsto (t_1, -\frac{1}{t_2})$$
$$T_1 : (t_1, t_2) \mapsto (t_1 + 1, t_2), T_2 : (t_1, t_2) \mapsto (t_1, \frac{t_2}{t_2 + 1})$$

以及 $R_1R_2$： $(t_1, t_2) \mapsto (-\frac{1}{t_2}, -\frac{1}{t_1})$。

2.2.2. 例*2* ($\check{M}^{\perp} = U^{\oplus 2} \oplus \langle -2 \rangle$). 本原嵌入$\check{M} = U \oplus E_8(-1) \oplus E_7(-1) \subset L$确定了 $L$中的一个正交格$\check{M}^{\perp} \simeq U^{\oplus 2} \oplus \langle -2 \rangle$。如例1所示，本原嵌入$\check{M}^{\perp} \subset L$ 在同构意义下唯一，因此商$\Omega_{\check{M}}/O(\check{M}^{\perp})_+$参数化了$\check{M}$-可极化 K3 曲面的同构类。已知周期域$\Omega_{\check{M}}$ 与二元Siegel上半空间 $\mathbb{H}_2$同构，并且 $O(\check{M}^{\perp})_+ = O(U^{\oplus 2} \oplus \langle -2 \rangle)$在 $\Omega_{\check{M}}$上的作用与 $Sp(4,\mathbb{Z})$在 $\mathbb{H}_2$上的标准模作用一致。更确切地说，存在一个群同构

$$\Psi : Sp(4,\mathbb{Z})/\{\pm I_4\} \xrightarrow{\sim} SO(U^{\oplus 2} \oplus \langle -2 \rangle)_+,$$

其中 $SO(U^{\oplus 2} \oplus \langle -2 \rangle)_+ = SO(U^{\oplus 2} \oplus \langle -2 \rangle) \cap O(U^{\oplus 2} \oplus \langle -2 \rangle)_+$。此外还有一个同构 $\phi$： $\mathbb{H}_2 \simeq \Omega_{\check{M}} (\simeq M \otimes \mathbb{R} + iC_M \text{ with } M = U \oplus \langle -2 \rangle)$，其定义为

$$\tau = \begin{pmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} \\ \tau_{21} & \tau_{22} \end{pmatrix} \mapsto \phi(\tau) = [1, -\det \tau, -\tau_{11}, -\tau_{22}, \tau_{12}],$$

其中需要注意，元素 $(-\tau_{11}, -\tau_{22}, \tau_{12}) \in M \otimes \mathbb{R} + iC_M$所满足的条件可表示为 Im$(\tau_{11})$Im$(\tau_{22})$ − Im$(\tau_{12})^2 > 0$ 以及 Im$(\tau_{11}) > 0$，即 $\tau \in \mathbb{H}_2$。下图表明，同构 $\phi$ 与群作用相容：

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{H}_2 & \xrightarrow{g} & \mathbb{H}_2 \\ \downarrow \phi & & \downarrow \phi \\ \Omega_{\check{M}} & \xrightarrow{\Psi(g)} & \Omega_{\check{M}} \end{array} \tag{2.6}$$

其中 $\Psi(g) \in SO(U^{\oplus 2} \oplus \langle -2 \rangle)_+$ 和 $g \in Sp(4, \mathbb{Z})/\{\pm I_4\}$。若将 $g = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in Sp(4, \mathbb{Z})$ 在 $\tau \in \mathbb{H}_2$ 上的标准作用写成

$$g{*}\tau = (A\tau + B)(C\tau + D)^{-1},$$

那么我们可以通过以下关系验证上述交换图：

$$\Psi(g)\phi(\tau) = [1, -\det(g{*}\tau), -(g{*}\tau)_{11}, -(g{*}\tau)_{22}, (g{*}\tau)_{12}] = \phi(g{*}\tau),$$

结合附录 A.2 中给出的 $\Psi(g)$ 的显式形式。注意到 $SO(U^{\oplus 2} \oplus \langle -2 \rangle)_+ \simeq O(U^{\oplus 2} \oplus \langle -2 \rangle)_+/\{\pm I_5\}$，且 $\{\pm I_5\}$ 在 $\Omega_{\check{M}}$ 上作用平凡，我们有$\mathbb{H}_2/Sp(4, \mathbb{Z}) \simeq \Omega_{\check{M}}/O(U^{\oplus 2} \oplus \langle -2 \rangle)_+$。因此，由 $\Omega_{\check{M}}$ 参数化的、来自 $M$-可极化 K3 曲面的自守形式环 $\check{}$ 与 $\mathbb{H}_2$ 上标准模形式的环重合。

## 3. BCOV 尖点形式

我们将介绍 BCOV 公式，以定义 BCOV 尖点形式。BCOV 尖点形式是格极化（或可极化）K3 曲面周期域上的特殊尖点形式。当我们有格极化 K3 曲面的显式族时，可以用这些族的周期积分来计算 BCOV 公式。

**3.1. 镜像对称与镜像映射。** 假设我们有一族定义在某个参数空间上的 $M$-极化 K3 曲面 $\pi : \mathfrak{X} \to \mathcal{M}\check{}$。在此处及下文中，我们允许该族的纤维在某个子集 $D \subset \mathcal{M}$ 上出现普通双点，并称其为该族的判别式。与局部系统 $R^2\pi_*\mathbb{C}_{\mathfrak{X}}$ 相关联的，我们有周期映射

$$\mathcal{P} : \mathcal{M} \to \Omega_{\check{M}}, \quad x \mapsto [\int_{\gamma_1} \omega_x, \cdots, \int_{\gamma_{22-\check{r}}} \omega_x],$$

其中 $\omega_x := \omega(\check{X}_x)$ 是纤维 $\check{} X_x$ 在 $x \in \mathcal{M}$ 上的全纯二形式，而$\{\gamma_1, \cdots, \gamma_{22-\check{r}}\}$ 是 $H_2(X_{x_0}, \mathbb{Z})$ 中超越圈的一组基，基点为 $x_0$。假设分解 $M \oplus (M)^{\perp} = M \oplus U \oplus \check{}M$，则我们有 (2.2) 中的同构 $\Omega_{\check{M}} \simeq M \otimes \mathbb{R} + iC_M$，以及关系 $r + \check{}r = 20$。如第 2.2 小节所述，坐标 $t_k \in M \otimes \mathbb{R} + iC_M$ 由周期积分之比给出，实际上定义了一个从参数空间 $\mathcal{M}$ 的万有覆盖到管状域的映射（该管状域称为 $M$-极化 K3 曲面的复化 Kähler 模空间）。这个多值映射 $\mathcal{M} \to M \otimes \mathbb{R} + iC_M$ 或其逆关系称为镜像映射（见 [39, 17, 49]）。

3.1.1. *Picard-Fuchs* 方程与局部解。周期积分可以刻画为一组特定微分方程的解，这组方程称为 Picard-Fuchs 方程。通过求出 Picard-Fuchs 方程在称为大复结构极限（LCSL）的特殊边界点附近的解，我们可以确定镜像映射。对于环面簇中的 Calabi-Yau 完全交，已知在对 $\mathcal{M}$ 进行适当的环面紧化 $\overline{\mathcal{M}}$ 时存在大复结构极限（见 [28, 29]及其中的参考文献）。对于一族 K3 曲面，在大复结构极限附近，我们可以找到周期积分 $w_0(x)$ $w_2(x)$; $w_k^{(1)}(x)$，它们满足

$$\begin{aligned} w_0(x) = 1 + O(x),\ \ w_2(x) = -\sum K_{kl}\big(\frac{1}{2\pi i}\big)^2(\log x_k)(\log x_l)w_0(x) + \cdots \\ w_k^{(1)}(x) = \frac{1}{2\pi i}(\log x_k)w_0(x) + O(x), \end{aligned} \tag{3.1}$$

并满足一个二次关系； $2w_0(x)w_2(x) + \sum K_{ij}w_i^{(1)}(x)w_j^{(1)}(x) = 0$ 其中 $(K_{ij})$ 表示格 $M$ 相对于 [24, 式（2.11）]中给出的自然基的格拉姆矩阵。镜像映射由对关系式 $t_k = \frac{1}{2\pi i}\frac{w_k^{(1)}(x)}{w_0(x)} = \frac{1}{2\pi i}\log x_k + O(x)$ 求逆确定，由此得到以下 $q$-级数展开：

$$x_k = x_k(q_1, ..., q_r) = q_k + O(q)\,, \quad (q_\ell = e^{2\pi i\, t_\ell}). \tag{3.2}$$

由于二次关系，我们可以将周期积分排列为 $[w] = [w_0(x), w_2(x)\ w_1^{(1)}, ..., w_r^{(1)}]$ 从而得到以下形式的周期映射 $\mathcal{P}\colon \mathcal{M} \to \Omega^{\check{}}_{\check{M}}$，如第 2.2 小节所示。按照这种形式，边界点 $q_1 = q_2 = \cdots = q_r = 0$ (即$x_1 = \cdots = x_r = 0$) 预期对应于一个尖点，我们将其附加到 Baily-Borel-Satake 紧化中的周期域 $\Omega_{\check{M}}$ 上。正如下一节将要看到的，当 $r = 1$时，确实如此。然而，正如近期一项工作中的例子 [32], 所示，对于 $r > 1$，这种对应关系更为复杂。

3.1.2. 单值群 $\mathcal{G}_m$。我们用 $\mathcal{G}_m$ 表示族 $\check{\mathfrak{X}} \to \mathcal{M}$ 的解 (3.1) 的全局单值群。根据该族的定义，它是 $O(\check{M}^\perp)_+$ 的一个子群。正如我们将在第 4 节中看到的，当 $r = 1$ 时，存在许多例子满足 $\mathcal{G}_m = O(\check{M}^\perp)_+$ 或 $O(\check{M}^\perp)^*_+$。然而，当 $r > 1$ 时，一般而言单值群 $\mathcal{G}_m$ 仅是 $O(\check{M}^\perp)_+$ 的一个子群。它作用于 $\Omega^{\check{}}_{\check{M}}$，并反映周期映射 $\mathcal{P}\colon \mathcal{M} \to \Omega^{\check{}}_{\check{M}}$ 的多值性质。因此，作为周期映射的逆映射，镜像映射 $x_k = x_k(q_1, ..., q_r)$ 在 $g \in \mathcal{G}_m \subset O(\check{M}^\perp)_+$ 对管状域坐标的作用 $t \mapsto g \cdot t$ 下不变。

3.1.3. 镜像对称与格里菲斯-汤川耦合。在研究 K3 曲面的镜像对称时，不存在来自格罗莫夫-威滕不变量的量子修正。因此，所谓的格里菲斯-汤川耦合 $C_{ij} = \int \omega_x \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}\omega_x$，经过适当归一化后，可由公式重现 $M$ 的格拉姆矩阵（$K_{ab}$），

$$\frac{1}{w_0(x(q))^2}\sum_{i,j} C_{ij}\frac{\partial x_i}{\partial t_a}\frac{\partial x_j}{\partial t_b} = K_{ab}. \tag{3.3}$$

3.2. **BCOV 公式与尖点形式**。这里我们为 $\check{M}$ 极化 K3 曲面的族定义 BCOV 公式。与上一小节一样，我们考虑一个具有性质 $\check{M}^\perp = U \oplus M$ 的本原嵌入 $\check{M} \subset L$。

$\check{}\,\check{}$ 设我们有一个如第 3.1 小节所述、定义在$\mathcal{M}$ 上、由 $M$极化的 K3 曲面族 $\mathfrak{X} \to \mathcal{M}$。为得到拓扑极限（1.3），还假设通过找到 $\mathcal{M}$的一个紧化$\overline{\mathcal{M}}$，我们在 $x_1 = x_2 = \cdots = x_r = 0$ 处有一个大复结构极限。假设由坐标 $x_1$、$\cdots$、$x_r$ 给出的仿射图在 $\overline{\mathcal{M}}$中稠密；例如，若 $\overline{\mathcal{M}}$ 由托里克簇给出，如

以下各节中的情形便是如此。一个典型例子是由次级多面体对应的托里克簇。在大复结构极限附近，周期积分具有（3.1）的形式。按照定义（3.2），我们确定镜像映射 $x_k = x_k(q)$，它具有形式为 $x_k = q_k + O(q)$的$q$级数展开。在参数空间 $\mathcal{M}$上，该族的纤维在判别式 $\cup_i D_i$处退化，其中 $D_i = \{dis_i(x) = 0\}$表示不可约分支。

**定义 3.1（BCOV 尖点形式）**。在上述假设下，在大复结构极限附近，我们定义 BCOV 公式 $\tau_{\mathrm{BCOV}}$，其仅确定到一个乘法常数:

$$\tau_{\mathrm{BCOV}}(t) = \left(\frac{1}{w_0(x)}\right)^{r+1} \frac{\partial(x_1,\cdots,x_r)}{\partial(t_1,\cdots,t_r)} \prod_i dis_i(x)^{r_i} \prod_{j=1}^{r} x_j^{-1+a_j}, \tag{3.4}$$

其中 $r_i$ 和 $a_j$ 是有理数，受适当的边界条件限制（我们将在第 3.3 小节中说明这些条件）。当 $(\tau_{\mathrm{BCOV}}(t))^{-1}$ 在 $\Omega_{\check{M}}$ 上定义一个尖点形式时，也就是说，它是一个全纯且在所有尖点处消失的自守形式，我们称之为 BCOV 尖点形式。

在第 4 节和第 5 节中，我们将在许多例子中发现，对于适当的 $r_i$ 和 $a_i$ 取值，$(\tau_{\mathrm{BCOV}}(t))^{-1}$ 在周期域 $\Omega_{\check{M}}$ 上定义一个尖点形式。这里我们首先证明它的模性质。

**命题 3.2**。*BCOV* 公式的逆幂 $(\tau_{\mathrm{BCOV}}(t))^{-1}$ 关于 $\mathcal{G}_m \subset O(\check{M}^{\perp})+$ 的作用具有权一。也就是说，它满足

$$\big(\tau_{\mathrm{BCOV}}(g\cdot t)\big)^{-1} = v(g)D(g,t)\big(\tau_{\mathrm{BCOV}}(t)\big)^{-1} \tag{3.5}$$

权因子 $D(g, t)$ 由 *(2.4)* 给出，而 $v(g)$ 是一个与 $t$ 无关且满足 $|v(g)| = 1$ 的乘子系统。

我们通过证明以下结论来说明这一性质。

**引理 3.3.** 设 $[w] = [1, -F, t_1, \cdots, t_r]$ 是 $\Omega_{\check{M}} \simeq M \otimes \mathbb{R} + iC_M$ 中的一点，并用管状域坐标表示，且将 $g \in \mathcal{G}_m$ 对它的作用记为$[g\cdot w] = [1, -\tilde{F}, \tilde{t}_1, \cdots, \tilde{t}_r]$，如 *(2.4)* 所示。则有

$$d\tilde{t}_1 \wedge d\tilde{t}_2 \wedge \cdots \wedge d\tilde{t}_r = (\det g)\, D(g,t)^{-r} dt_1 \wedge dt_2 \wedge \cdots \wedge dt_r.$$

证明。回忆一下，管状域坐标 $t_1, \cdots, t_r$是二次曲面 $\{(w,w) = 0\}$ 在 $\mathbb{P}(\check{M}^{\perp} \otimes \mathbb{C})$ 中的仿射坐标。根据分解 $\check{M}^{\perp} \otimes \mathbb{C} = (U \oplus M) \otimes \mathbb{C}$，将点 $[Z] \in \mathbb{P}(\check{M}^{\perp} \otimes \mathbb{C})$ 记作 $[Z_0, Z_1, \cdots, Z_{r+1}] = [u, v, z_1, \cdots, z_r]$。于是，二次曲面的关系可表示为 $(Z, Z) = 2uv + (z, z)_M = 0$。正交群 $O(\check{M}^{\perp})$ 自然作用在线性坐标 $Z = (Z_0, Z_1, \cdots, Z_{r+1})$ 上，并保持该二次曲面。它还将标准 $r+1$形式 $d\mu_Z := \sum(-1)^i Z_i \wedge dZ_0 \wedge \cdots \widehat{dZ_i} \cdots \wedge dZ_{r+1}$保持到相差一个符号的程度，因为我们可以用欧拉向量场 $E = Z_0\frac{\partial}{\partial Z_0} + \cdots + Z_{r+1}\frac{\partial}{\partial Z_{r+1}}$的内积运算 $i_E$ 来表示 $d\mu_Z = i_E dZ_0 \wedge dZ_1 \wedge \cdots \wedge dZ_{r+1}$。注意，在仿射图 $Z_0 \neq 0$中，可以对二次曲面方程求解得到 $v$，从而有 $[w] = [1, -\frac{1}{2}(t,t)_M, t_1, \cdots, t_r]$，其中 $t_i = \frac{z_i}{u}$ 对$i = 1, \cdots, r$成立。因此，我们可以用下述围绕二次曲面的留数来表示二次曲面上的全纯 $r$-形式:

$$Res_{(Z,Z)=0}\left(\frac{d\mu_Z}{2uv + (z,z)_M}\right) = \frac{u^r}{2} dt_1 \wedge dt_2 \wedge \cdots \wedge dt_r. \tag{3.6}$$

现在考虑 $g \in \mathcal{G}_m \subset O(\check{M}^{\perp})$ 在 $Z$上的线性作用 $\tilde{Z} := g\cdot(Z_0, Z_1, \cdots, Z_{r+1})$。若在 $Z = (\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{z_1}, \cdots, \tilde{z_r})$ 中解二次曲面 $(Z, Z) = 0$，求出 $\tilde{v}$，则有$[\tilde{w}] = [1, -\frac{1}{2}(\tilde{t}, \tilde{t})_M, \tilde{t}_1, \cdots, \tilde{t}_r]$，其中 $\tilde{t}_i = \frac{\tilde{z}_i}{\tilde{u}}$。由于 (3.6) 的左端在 $g \in \mathcal{G}_m$ 对 $Z$ 的线性作用下，除因子 $\det g$ 外保持不变，因此有

$$\frac{\tilde{u}^r}{2} d\tilde{t}_1 \wedge d\tilde{t}_2 \wedge \cdots \wedge d\tilde{t}_r = (\det g)\frac{u^r}{2} dt_1 \wedge dt_2 \wedge \cdots \wedge dt_r.$$

˜将 $\frac{u}{u}$ 与 (2.4) 中的因子 $D(g,t)$ 等同，我们便得到所述关系。 □

命题 *3.2* 的证明。 我们将第 3.1 小节中描述的周期映射 $\mathcal{P}: \mathcal{M} \to \Omega_{\check{M}}$ 写作

$$\mathcal{P}(x) = [w_0(x), w_2(x), w_1^{(1)}(x), \cdots, w_r^{(1)}(x)]$$

对于 $x \in \mathcal{M}$. 由于周期积分的单值化，该周期映射是多值的。利用以管状域坐标 $t = (t_1, \cdots, t_r)$表示的镜像映射 $x = x(t)$，我们可以将 $\mathcal{P}(x)$ 的单值化性质表示为

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(x(g\cdot t)) &= [w_0(x(g\cdot t)), w_2(x(g\cdot t)), w_k^{(1)}(x(g\cdot t))] \\ &= [g\cdot (\, w_0(x(t)), w_2(x(t)), w_k^{(1)}(x(t))\,)] \\ &= [D(g,t)w_0(x), A(g,t)w_0(x), B_k(g,t)w_0(x)]\end{aligned}$$

˜对于 $g \in \mathcal{G}_m$，其中 $x(g\cdot t)$ 应理解为覆盖空间 $\mathcal{M}$ 上的一点，该覆盖空间覆盖 $\mathcal{M}$，并投影到 $x(t) \in \mathcal{M}$。注意，最后两个等式在未进行射影化时也成立。因此，我们有

$$w_0(x(g\cdot t)) = D(g,t)\, w_0(x(t)) \tag{3.7}$$

其中自守因子为 $D(g,t)$。此外，根据上述引理，我们有

$$\frac{\partial(\tilde{t}_1, \tilde{t}_2, \cdots, \tilde{t}_r)}{\partial(t_1, t_2, \cdots, t_r)} = \det g\,(D(g,t))^{-r}.$$

利用这些关系，以及镜像映射 $x_k = x_k(q)$ 在单值群 $\mathcal{G}_m$ 下不变这一事实，我们得到所要求的关系式 (3.5)。如果某些 $a_j$ 不为整数，乘子系统 $v(g)$ 将取决于因子 $\prod x_j^{-1+a_j}$ 的分支。□

我们注意到，关系 (3.7) 源于这样一个事实： $w_0(x)$ 是霍奇线丛的一个截面；该线丛由层 $R^2\pi_*\mathbb{C}_{\tilde{\mathfrak{X}}}$ 在族 $\pi: \check{} \mathfrak{X} \to \mathcal{M}$上相对霍奇分解的 (2, 0) 部分给出，其中 $\mathcal{M}$ 。

3.3. **边界条件**。上述模性质对 BCOV 公式中参数 $r_i$ 和 $a_i$ 的任意取值都成立。我们可以通过对族 $\pi: \check{} \mathfrak{X} \to \mathcal{M}$ 施加自然的边界条件来限制这些参数（参见 [7]），具体如下:

(1) 第一个条件源于所谓的合点退化。按照 ˇ 中的定义，族 $\pi: \mathfrak{X} \to \mathcal{M}$ 的纤维 K3 曲面在判别式 $D$上退化，一般纤维会出现普通双点（ODP）。吹起这些 ODP 后，Néron-Severi 格会扩大。我们要求 $\log(\tau_{\mathrm{BCOV}}(t))^{-1}$ 正则，即 $(\tau_{\mathrm{BCOV}}(t))^{-1}$ 在判别式 $D \subset \mathcal{M}$上正则且不消失。我们称此条件为合流点正则性。

(2) 第二个条件来自包含在 $\overline{\mathcal{M}} \setminus \mathcal{M}$ 中的边界点。假设存在一个边界点，它是正规交叉除子的交点，且其周围的所有单值化作用 $T_i$ 都具有有限阶。我们称这样的边界点为 轨形点。由于纤维 K3 曲面自然延拓到轨形点，因此我们要求 $\log(\tau_{\mathrm{BCOV}}(t))^{-1}$ 在 $\Omega_{\check{}M}$ 中对应的点处正则。我们称边界点处的这一边界条件为 轨形正则性。如果存在多个轨形点，则通过任选一个来施加正则性条件。因此，根据所选轨形点的不同，我们可能得到不同的边界条件（见第 5.3 小节）。

这两个条件是针对 Calabi-Yau 三维簇情形所提出条件的自然推广 [7]。可以看出，参数 $r_i$ 和 $a_i$

在后续各节的大多数示例中，均由这些条件唯一确定。

3.3.1. 节点正则性。 我们可以利用镜像对称关系 (3.3) 来实现条件 (1)。计算 (3.3) 的行列式，得到

$$\det(C_{ij})\left(\frac{\partial(x_1,\cdots,x_r)}{\partial(t_1,\cdots,t_r)}\right)^2=\det(K_{ab})\omega_0(x)^{2r}.$$

利用这一关系，我们有

$$\tau_{\mathrm{BCOV}}(t)=\det(K_{ab})^{\frac{1}{2}}\frac{\prod x_j^{-1+a_j}}{w_0(x)}\left(\det(C_{ij})\right)^{-\frac{1}{2}}\prod_i dis_i(x)^{r_i}. \tag{3.8}$$

采用这种形式，节点正则性的实现很容易，因为对于给定的族 $\pi:\check{\mathcal{X}}\to\mathcal{M}$，计算 $\det(C_{ij})$ 非常直接。特别是，对于本文中的所有例子，我们将看到以下关系成立：

$$\det(C_{ij})\prod_i dis_i(x)\prod_{j=1}^{r}x_j^2=\text{const.}\ . \tag{3.9}$$

由此可知，当 $r_i=-\frac{1}{2}$ 对所有 $i$ 均成立时，节点正则性成立。也就是说，如果我们验证了 (3.9)，参数 $r_i$ 就完全由节点正则性确定。

3.3.2. 轨形正则性。 我们通过从 $\overline{\mathcal{M}}\setminus\mathcal{M}$ 中选取一个轨形点来实现轨形正则性。假设关系 (3.9) 成立。那么，根据节点正则性，我们得到如下形式的 BCOV 公式：

$$\tau_{\mathrm{BCOV}}(t)=\text{const.}\frac{\prod x_j^{a_j}}{w_0(x)}. \tag{3.10}$$

令 $\tilde{x}_i$ 为以轨形点为中心的仿射坐标。为简单起见，我们假设 $\tilde{x}_i$ 与以大复结构极限为中心的仿射坐标 $x_i$ 之间由 Laurent单项式 $x_i=\varphi_i(\tilde{x})$ 相关（参见以下各节中的例子）。回想一下，大复结构极限附近的周期积分经过排列，使得 $\mathcal{P}(x)=[w_0(x)\ w_2(x)\ w_1^{(1)}(x)\ \cdots,w_r^{(1)}(x)]$ 是 $\Omega\check{}_M$中的一点；因此，对于对应于光滑 K3 曲面的$\mathcal{P}(x)$，$w_0(x)\neq 0$成立。考虑将$w_0(x)$解析延拓至轨形点，并将其表示为

$$w_0(x)=c_0\tilde{w}_0(\tilde{x})+c_1\tilde{w}_1(\tilde{x})+\cdots+c_{r+2}\tilde{w}_{r+2}(\tilde{x}),$$

其中 $\tilde{w}_k(\tilde{x})$ 是轨形点附近 Picard-Fuchs 方程的（有序）局部解。若将这些解排列成使得 $\tilde{w}_k(\tilde{x})/\tilde{w}_0(\tilde{x})$ 正则，则有$w_0(x)=c_0\tilde{w}_0(\tilde{x})(1+O(\tilde{x}))$，其中 $c_0\neq 0$，因为 $\mathcal{P}(x)$ 是 $\Omega\check{}_M$在 $\tilde{x}=0$处的一点。现在，我们可以将 BCOV 公式 (3.10) 解析延拓写为

$$\tau_{\mathrm{BCOV}}(t)=\text{const.}\frac{\prod\tilde{x}_j^{\tilde{a}_j}}{c_0\tilde{w}_0(\tilde{x})(1+\cdots)}, \tag{3.11}$$

其中我们令 $\prod x_j^{a_j}=\prod\varphi_j(\tilde{x})^{a_j}=:\prod\tilde{x}_j^{a_j}$。在这种形式下，我们要求 $\log(\tau_{BCOV}(t))^{-1}$ 在 $\tilde{x}=0$附近是正则的。注意，参数 $\tilde{a}_j$ 由 $\tilde{w}_0(\tilde{x})=\tilde{x}^{\rho}(1+O(\tilde{x}))$ 中的指数 $\rho$ 唯一确定。

如上所述，轨形正则性是针对从 $\overline{\mathcal{M}}\setminus\mathcal{M}$ 中选取的一个轨形点来实现的。根据选取的不同，得到的 $\tau_{\mathrm{BCOV}}(t)$ 也可能不同。此外，如果不存在轨形点，则正则性条件为空。

## 4. $\tau_{\mathrm{BCOV}}$ 与 η乘积

˘ 本节给出一些 $M_{2n}$-可极化 K3 曲面所对应的 $\tau_{\mathrm{BCOV}}$ 的具体计算，这些曲面的同构类由 $\mathbb{H}_+/\Gamma_0(n)_+$ 参数化。下一节将讨论一个高维周期域的例子。

˘ **4.1. 零亏格群**。设我们考虑一族 $M_{2n}$-可极化 K3 曲面，作为一类 $M_{2n}$-极化 K3 曲面的镜像族。正如第 2.1 小节所概述的，商 $\Omega^{\circ}_{M_{2n}}/O(U\oplus\langle 2n\rangle)_+ \simeq \mathbb{H}_+/\Gamma_0(n)_+$ 通常给出该族的粗模空间。当我们拥有该族的显式 ˘实现 $\mathfrak{X}\to\mathcal{M}$，且其参数空间由$\overline{\mathcal{M}}\simeq\mathbb{P}^1$紧化时，我们将计算 BCOV 公式。这里，我们假设同构 $\overline{\mathcal{M}}\simeq\mathbb{P}^1$ 成立，以便通过求解 $\mathbb{P}^1$上的 Picard-Fuchs 微分方程来计算周期积分。如果我们有这样一个族，并且该族的单值群 $\mathcal{G}_m$ 与$\Gamma_0(n)_+$一致，那么我们应有 $\mathbb{H}_+/\Gamma_0(n)_+\simeq\mathbb{P}^1$ （见 [39, 49, 17]）。~~类似地，如~~果我们有一族显式的 ˘ $M_{2n}$-极化 K3 曲面 ˘ $\mathfrak{X}\to\mathcal{M}$，满足 $\overline{\mathcal{M}}\simeq\mathbb{P}^1$ 和 $\mathcal{G}_m\simeq\Gamma_0(n)_{+n}$，那么我们应有一个同构 $\mathbb{H}_+/\Gamma_0(n)_{+n}\simeq\mathbb{P}^1$。能够导出上述同构的模群 $\Gamma_0(n)_+$ 和 $\Gamma_0(n)_{+n}$ ~~称为零亏格群~~。

零属群 $\Gamma_0(n)_{+n}$ 的列表是经典结果，归功于 Fricke [18, 第367], 页，列表如下：

$$n=2,3,\cdots,21,23,24,25,26,27,29,31,32,35,36,39,41,47,49,50,59,71.$$

在 [15] 中，这一结果被推广到 $\Gamma_0(n)_+$，纳入了所有对合正规化子；我们在附录 B.1 中列出了这些正规化子及一些补充数据。在 [15], 中，$\mathbb{H}_+/\Gamma_0(n)_+\simeq\mathbb{P}^1$ 的函数域的某个生成元称为 Thompson 级数，并给出了它用椭圆模形式（特别是 η函数）表示的具体公式。对于零属群，如果我们有如上所述的显式实现 $\mathfrak{X}\to\mathcal{M}$，则 Thompson 级数恰好与该族的镜像映射相差一个加法常数（见 [39, 49, 17]）。

**4.2. 族 ˘ $M_{20}$-可极化 K3 曲面**。在 [39], 中，已经列出了许多 K3 曲面族在 $\mathbb{P}^1$ 上的 Picard-Fuchs 微分方程示例，并将镜像映射识别为 Thompson 级数。其中许多是 ˘ $M_{2n}$-可极化 K3 曲面，其模群为 $\Gamma_0(n)_+$·

作为一个例子，我们来考虑 $n=10$ 的情形。为描述这个族，我们从 K3 曲面 $X=(1,1)^4\subset\mathbb{P}^3\times\mathbb{P}^3$ 开始，它是 $\mathbb{P}^3\times\mathbb{P}^3$ 中四个一般的 (1, 1) 除子的完全交，其镜像族可以通过 Batyrev-Borisov 环面镜像构造 [5] 得到。事实上，$X$ 是 Reye 相关的 Cayley 模型，其镜像族由 $\mathbb{P}^2$ 参数化。当我们将参数空间限制到对角线 $\mathbb{P}^1\subset\mathbb{P}^2$ 时，就得到一族 ˘$M_{20}$-可极化 K3 曲面。Picard-Fuchs 微分方程可从 [39] 的表中读出，如下：

$$\left\{\theta_x^3-2x(2\theta_x+1)(3\theta_x^2+3\theta_x+1)-x^2(4\theta_x+3)(4\theta_x+4)(4\theta_x+5)\right\}w=0, \tag{4.1}$$

其中 $\theta_x:=x\frac{d}{dx}$。此方程在 $x=0,\infty$ 处以及在满足 $dis_0=1+4x$, $dis_1=1-16x$ 的 $dis_0\,dis_1=0$ 的零点处有奇点。我们将奇点的数据总结在黎曼的 $\mathcal{P}$ 方案中，如下：

$$\left\{\begin{array}{cccc} 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{16} & \infty \\ \hline 0 & 0 & 0 & \frac{3}{4} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{5}{4} \end{array}\right\}.$$

由此形式可见，原点 $x=0$ 是一个大复结构极限，对应于 $\mathbb{H}_+/\Gamma_0(10)_+$ 的一个尖点。围绕此点，对于式 (3.1) 中的正则解 $w_0(x)$，有

$$w_0(x)=\sum_{n,m\in\mathbb{Z}_{\geq 0}}\frac{((n+m)!)^4}{(n!)^4(m!)^4}x^{n+m}.$$

求出所有其他解后，很容易得到镜像映射 (3.2) 为

$$x(q)=q-4q^2-6q^3+56q^4-45q^5-360q^6+894q^7+\cdots.$$

在此，我们将 $1/x(q)$ 与群 $\Gamma_0(10)$ 的 Thompson 级数 $t_{10A}$ 识别起来，差一个加法常数；我们有

$$\frac{1}{x(q)}=t_{10C}(q)+\frac{25}{t_{10C}}+6,\quad t_{10C}(q)=\left(\frac{\eta_1(t)\eta_2(t)}{\eta_5(t)\eta_{10}(t)}\right)^2$$

其中 $\eta_k(t):=\eta(kt)$，并且 η函数 $\eta(t)=q^{\frac{1}{24}}\prod_{n\geq 1}(1-q^n)$ $(q=e^{2\pi it})$。根据附录 C.2 中所述的方法，我们确定格里菲斯-汤川耦合为

$$C_{xx}=\frac{20}{x^2(1+4x)(1-16x)}$$

并利用格拉姆矩阵 $K_{11}=20$ 验证 (3.3)。

**命题 4.1**。 节点和轨形正则性唯一确定了 $\tau_{\mathrm{BCOV}}$ 中的参数，即 $r_0=r_1=-\frac{1}{2}$ 和 $a=-\frac{3}{4}$。于是，我们有

$$\tau_{\mathrm{BCOV}}(t)=\left(\frac{1}{w_0(x)}\right)^2\frac{dx}{dt}dis_0^{r_0}dis_1^{r_1}x^{-1+a}=\frac{1}{\eta_1(t)\eta_2(t)\eta_5(t)\eta_{10}(t)},$$

并且 $(\tau_{\mathrm{BCOV}}(t))^{-1}$ 定义了 $\mathbb{H}_+$ 上关于 $\Gamma_0(10)_+$ 的权重二 *BCOV* 尖点形式。

证明。 我们首先注意到，关系 (3.9) 成立，即有 $C_{xx}(1+4x)(1-16x)x^2=20$。因此，根据第 3.3.1 小节中关于节点正则性的一般论证，我们得到 $r_0=r_1=-\frac{1}{2}$。此外，利用形式 $\tau_{\mathrm{BCOV}}=$ 常数。$\frac{x^a}{w_0\ x()}$ 及 (3.11)，我们可以实现轨形正则性。由黎曼方案可知，$x=\infty$ 是一个轨形点，并读出 $\infty$ 附近的有序解为 $\tilde{w}_0(\tilde{x})=\tilde{x}^{\frac{3}{4}}(1+O(\tilde{x}))$、$\tilde{w}_1(\tilde{x})=\tilde{x}(1+O(\tilde{x}))$ 和 $w_2(\tilde{x})=\tilde{x}^{\frac{5}{4}}(1+O(\tilde{x}))$，其中 $\tilde{x}=\frac{1}{x}$。随后，由方程 (3.11) 可知，轨形正则性仅对 $\tilde{a}=\frac{3}{4}$ 成立。由于 $\tilde{a}=-a$，我们得到 $a=-\frac{3}{4}$。

根据命题 3.2，我们知道 $(\tau_{\mathrm{BCOV}}(t))^{-1}$ 是相对于 $O(\check{}M_{20}^{\perp})_+$ 的权一模形式，这意味着它相对于 $\Gamma_0(10)_+$ 是权重二模形式（见附录 A.1）。由模性质，通过比较 $(\tau_{\mathrm{BCOV}}(t))^{-1}$ 的 $q$-展开与右侧 η乘积的展开，即可得出该等式。最后，显然该 η乘积是一个尖点形式（参见下文引理 4.2）。□

由 η函数构成的有限乘积 $\prod_{m\geq 1}\eta(mt)^{d_m}$，其中 $d_m\in\mathbb{Z}$，称为 η乘积。定义 $N:=\mathrm{lcm}\,\{m\mid d_m\neq 0\}$，我们可以将该 η 乘积写为

$$f(t)=\prod_{m|N}\eta(mt)^{d_m}=\prod_{m|N}\eta_m(t)^{d_m}.$$

这种形式的 η乘积称为 级别为 $N$，因为它们是$\Gamma_0(N)$的模形式（例如参见 [38] ）。由于 η函数 $\eta(t)$ 在 $\mathbb{H}_+$ 中没有零点，因此 η乘积在 $\mathbb{H}_+$ 上全纯。唯一的可能性是在 $\overline{\mathbb{H}}_+\setminus\mathbb{H}_+$ 的尖点处为零或有极点。若 η乘积 $f(t)$ 在所有尖点处都消失，则称其为尖点形式。以下引理摘自 [38, Cor. 2.3] ，对我们的计算很有用。

**引理 4.2.** *η*乘积 $f(t)$ 在 $\overline{\mathbb{H}}_+$ 上全纯，当且仅当不等式

$$\sum_{m|N} \frac{\left(\gcd(D,m)\right)^2}{m} d_m \geq 0$$

对所有正因数 $D$ *of* $N$均成立。如果对所有 $D$不等式都严格成立，那么$f$（$t$）定义了一个尖点形式。

对于 [39] 中模群为 $\Gamma_0(n)+$的ˇ $M_{2n}$-可极化 K3 曲面族的其他例子，直接计算 BCOV 公式是很容易的。特别地，如果一个族具有一个轨形点，我们可以验证以下性质：1）BCOV 公式中的参数 $r_i$ 和 $a$ 由节点正则性和轨形正则性唯一确定；2）所得的 $\tau_{\mathrm{BCOV}}$ 是一个η乘积；3）$(\tau_{\mathrm{BCOV}}(t))^{-1}$ 是关于 $\Gamma_0(n)+$的权重二尖点形式。

ˇˇ 4.3. **的族 $M_{24}$-可极化 K3 曲面**。让我们考虑 [39] 中一个 $M_{24}$-可极化 K3 曲面族，其模群为 $\Gamma_0(12)+$。该族的 Picard-Fuchs 方程为

$$\left\{\theta_x^3 - 2x(2\theta_x+1)(5\theta_x^2+5\theta_x+2) + 64x^2(\theta_x+1)^3\right\} w = 0,$$

其奇点可概括如下

$$\left\{\begin{array}{cccc} 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{16} & \infty \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right\}.$$

由此可知，$dis = (1-4x)(1-16x)$的零点对应锥形奇点，而 $x=0$ 和 $\infty$ 都是大复结构极限。由于此处没有轨形点，$\tau_{\mathrm{BCOV}}(t)$的形式仅由参数 $a$确定。

**命题 4.3.** 给定参数 $a$，$\tau_{\mathrm{BCOV}}$ 可表示为以下*η*乘积的形式：

$$\tau_{\mathrm{BCOV}}(t) = const.\frac{x^a}{\omega_0(x)} = const.\ x^{1+a}\left(\frac{\eta_2(t)\eta_6(t)}{\eta_1(t)\eta_3(t)\eta_4(t)\eta_{12}(t)}\right)^2.$$

我们将上述等式的验证留给读者，因为计算与前面的例子类似。参数 $a$ 仍像上文一样未确定。不过，我们注意到，镜像映射 $x(q)$（或相差一个加法常数的 Thompson 级数的逆）由以下η乘积给出，

$$x(q) = \left(\frac{\eta_1(t)\eta_3(t)\eta_4(t)\eta_{12}(t)}{\eta_2(t)^2\eta_6(t)^2}\right)^6.$$

也就是说，$\tau_{\mathrm{BCOV}}$ 仅在乘以 $x(q)$的η乘积的某个幂次这一点上确定。比如，若令 $a = -\frac{5}{6}$，我们可以验证$(\tau_{\mathrm{BCOV}}(t))^{-1}$是一个尖点形式。

4.4. $\tau_{\mathrm{BCOV}}$ **用 η乘积表示**。命题 4.1、4.3 中的结果促使我们对附录 B.1 中列出的所有零属群 $\Gamma_0(n)+$ 作出如下定义。

**定义4.4**。对于零属群 $\Gamma_0(n)+$ ($n \neq 8$、24、27、54 和 56)，我们将 BCOV η乘积定义为

$$\eta_{\mathrm{BCOV}}(t) = \left(\prod_{r|n} \eta_r(t)^{\pm 1}\right)^w, \tag{4.2}$$

当 $(r,n/r) \neq 1$ 时取 $+1$，而当 $(r,n/r) = 1$ 时取 $-1$。幂 $w$ 由以下条件确定：$\eta_{\mathrm{BCOV}}$ 的权为 2（见附录 A.1）。对于 $n$ =8、24、27、54 和 56，分别通过下式定义 $\eta_{\mathrm{BCOV}}(t)$

$$\frac{\eta_1(t)^3\eta_8(t)^3}{\eta_2(t)\eta_4(t)}, \frac{\eta_1(t)^2\eta_3(t)^2\eta_8(t)^2\eta_{24}(t)^2}{\eta_2(t)\eta_4(t)\eta_6(t)\eta_{12}(t)}, \frac{\eta_1(t)^3\eta_{27}(t)^3}{\eta_3(t)\eta_9(t)},$$
$$\frac{\eta_1(t)^2\eta_2(t)^2\eta_{27}(t)^2\eta_{54}(t)^2}{\eta_3(t)\eta_6(t)\eta_9(t)\eta_{18}(t)} \text{ and } \frac{\eta_1(t)^2\eta_7(t)^2\eta_8(t)^2\eta_{56}(t)^2}{\eta_2(t)\eta_4(t)\eta_{14}(t)\eta_{28}(t)}.$$

通过明确计算 $\tau_{\mathrm{BCOV}}$，我们验证如下结论：

**命题4.5**。对于 [39], 中列出的所有 $M_{2n}$-可极化 *K3* 曲面族，以下性质均成立：

(1) 施加合流点正则性条件后，我们得到

$$\tau_{\mathrm{BCOV}}(t) = const.\frac{x^a}{\omega_0(x)} = const.\ \frac{x(t)^{\gamma+a}}{\eta_{\mathrm{BCOV}}(t)} \tag{4.3}$$

其中，$\gamma$ 由条件 $x(t)^\gamma/\eta_{\mathrm{BCOV}}(t) = 1 + O(q)$确定。

(2) 若存在轨形正则性条件，则该条件唯一确定参数 $a$ 为 $a = -\gamma$。由此得到的 $\tau_{\mathrm{BCOV}}(t)$ 定义了一个 *BCOV* 尖点形式，即$(\tau_{\mathrm{BCOV}}(t))^{-1} = \eta_{\mathrm{BCOV}}(t)$ 是关于 $\Gamma_0(n)$+的权重二尖点形式。(3) 若轨形正则性条件为空，则参数 $a$ 不确定。然而，在这种情况下，镜像映射 $x(q)$ 可写为一个$\eta$乘积，并且存在一种 $a$ 的取值，使得$(\tau_{\mathrm{BCOV}}(t))^{-1} = x^{-a-\gamma}\eta_{\mathrm{BCOV}}(t)$ 是一个尖点形式。

注4.6：在 [39], 列表中，情形 (3) 对于 $n = 4$、12、20 和 28 出现。我们注意到，对于这些情形，$\mathbb{H}_+/\Gamma_0(n)$+ 的尖点数大于一个。记 $N_c(n)$为 $\mathbb{H}_+/\Gamma_0(n)$+的尖点数。我们可以从 [15,表 2,3] 中看到，$\Gamma_0(n)$+ 的 Thompson 级数加上某个加法常数 $T_n(t)$+$c_n$后，当 $N_c(n) \geq 2$ 时（除 $n = 25$、27、49、50、54 外，参见附录 B.1），可以写成某个 η乘积。当 $N_c(n) = k$ 且 $n$ 不属于这些例外情形时，我们可以从 [15, 表 2,3] 中读出，共有 $k-1$ 种不同形式的 η乘积。

对于所有零亏格群 $\Gamma_0(n)$+，除 $n = 25$、27、49、50、54 外，我们可以一般性地验证 BCOV η乘积具有以下性质。

**命题 4.7**。若 $N_c(n) = 1$，则 $\eta_{\mathrm{BCOV}}$ 是 $\Gamma_0(n)$+的权重二尖点形式。若 $N_c(n) \geq 2$，则 *Thompson* 级数 $T_n(t) + c_n$ 存在一种由 $\eta$乘积给出的表达式，使得$(T_n(t) + c_n)^b\eta_{BCOV}(t)$ 是某个 $b \in \mathbb{Q}$的尖点形式。

证明。当 $N_c(n) = 1$时，根据引理 4.2，可以直接验证所述性质。当 $N_c(n) \geq 2$ 时，我们可以从 [15, 表 3]中找到 Thompson 级数的所述形式。在附录 B.2 中，我们列出了乘积形式以及 $b$的取值，连同由此得到的尖点形式。□

基于此命题，我们猜想在节点和 orbifold 正则性条件下，BCOV 公式的形式如下：

猜想 *4.8.* 对于 $\mathbb{P}^1$ 上的 $M_{2n}$-可极化 *K3* 曲面族，若 $N_c(n) = 1$，则 $(\tau_{\mathrm{BCOV}}(t))^{-1} = const.\ \eta_{\mathrm{BCOV}}(t)$，且这定义了 $\mathbb{H}_+/\Gamma_0(n)$+ 上的 *BCOV* 尖点。若 $N_c(n) \geq 2$ *and* $n \neq 25, 27, 49, 50, 54$，则 $(\tau_{\mathrm{BCOV}}(t))^{-1} = const.\ x(t)^{-b}\eta_{\mathrm{BCOV}}(t)$，其中带有参数 $b$ *and*，且这定义了某个 $b \in \mathbb{Q}$ 的尖点形式。

ˇ 4.5. **K3 微分算子**。 我们需要知道 $M_{2n}$-可极化 K3 曲面的显式族，才能验证猜想 4.8。这里，我们不寻求这样的族，而是假定猜想成立，从而确定三阶微分方程。

假设对每个零属群 $\Gamma_0(n)+$，都存在一个级数 $w_0(x) = 1 + O(x)$，它是一个三阶微分方程的解。若假设猜想 4.8 成立，并且镜像映射 $x(t) = q + O(q)$ 由 Thompson 级数 $T_n(t) + c_n$ 加上某个加法常数给出，那么利用 (4.3) 可得

$$w_0(x) = x(t)^{-\gamma}\eta_{\mathrm{BCOV}}(t), \tag{4.4}$$

其中，我们通过要求右端的 $q$-级数展开具有 $1 + O(q)$ 的形式来确定参数 $\gamma$。利用关系 $q = q(x)$ 的逆关系，可以将 $q$-级数展开转换为 $x$-级数展开

$$x(t) = \frac{1}{T_n(t) + c_n}.$$

将所得的 $x$-级数 $q = q(x)$ 代入 (4.4) 的右端，我们得到 $w_0(x)$ 的 $x$-级数展开。现在我们可以寻找一个能消去幂级数 $w_0(x)$ 的微分算子，我们将其称为 *() 的 K3* 微分算子。

**命题 4.9.** 对于附录 *B.1* 的表 *1* 中列出的每个零属群 $\Gamma_0(n)+$，均存在一个 *K3* 微分算子，具有如下性质：

(1) 它在 $x = 0$ 处有一个大复结构极限点，且镜像映射再现了带有加法常数 $c_n$ 的 *Thompson* 级数 $T_n(t) + c_n$。(2) 大复结构极限点的数量与 $\mathbb{H}_+/\Gamma_0(n)+$ 的尖点数量一致。(3) $x = 0$ 处的正则幂级数解 $w_0(x)$ 满足恒等式 $w_0(x) = x(t)^{-\gamma}\eta_{\mathrm{BCOV}}(t)$，其中使用了镜像映射和 $\eta$乘积。

证明. 我们的证明基于对所有情形所作的显式计算。作为示例，我们概述确定群$\Gamma_0$(36)+ 的 K3 微分算子的计算。首先，根据我们对 $\eta_{\mathrm{BCOV}}(t)$ 的定义，容易得到如下 $q$- 级数

$$\eta_{\mathrm{BCOV}}(t) = \left(\frac{\eta_2(t)\eta_3(t)\eta_6(t)\eta_{12}(t)\eta_{18}(t)}{\eta_1(1)\eta_4(t)\eta_9(t)\eta_{36}(t)}\right)^4 = q^{-\frac{3}{2}}(1 + 4q + 10q^2 + 20q^3 + \cdots),$$

由此我们得到 $\gamma = -\frac{3}{2}$。通过代入 $x = 1/(T_{36A}(t) + c_{36A}) = q(1 - 2q + q^2 + \cdots)$ 的逆级数，将这个 $q$ 级数变为 $x$ 级数，其中 $T_{36A}(t)$ 是 [15, 表 4] 中给出的 Thompson 级数。我们选择 $c_{36A} = 2$ 加法常数，使其具有以下乘积形式：

$$T_{36A}(t) + c_{36A} = \frac{\eta_2(t)^2\eta_3(t)^4\eta_{12}(t)^4\eta_{18}(t)^2}{\eta_1(t)^2\eta_4(t)^2\eta_6(t)^4\eta_9(t)^2\eta_{36}(t)^2} = \frac{1}{q} + 2 + 3q + 2q^2 + \cdots,$$

可在 [15, 表 3] 中找到。对 $q$ 级数 $x = 1/(T_{36A}(t) + c_{36A})$ 求逆，我们得到以下 $x$ 级数

$$q = x + 2x^2 + 7x^3 + 28x^4 + 125x^5 + 598x^6 + \cdots.$$

将上述 $x$ 级数代入关系 $w_0(x) = x^{-\gamma}\eta_{\mathrm{BCOV}}(t)$ 的右端，我们得到

$$w_0(x) = 1 + x + 3x^2 + 15x^3 + 75x^4 + 387x^5 + 2037x^6 + \cdots.$$

将上述级数展开至 60 阶，并求出一个使该级数湮灭的微分算子，我们可以得到以下微分算子：

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_{36A} =&\theta_x^3 - x(3\theta_x+1)\left(3\theta_x^2+2\theta_x+1\right) - 6x^2\theta_x\left(12\theta_x^2-3\theta_x-1\right)\\ &+2x^3\theta_x\left(284\theta_x^2+405\theta_x+199\right)+6x^4\theta_x\left(1156\theta_x^2+75\theta_x+89\right)\\ &-6x^5\theta_x\left(11927\theta_x^2+10401\theta_x+4939\right)\\ &+18x^6\left(8968\theta_x^3+11586\theta_x^2+5960\theta_x+2553\right)\\ &+18x^7\left(11788\theta_x^3+14184\theta_x^2-5086\theta_x-19947\right)\\ &-27x^8\left(30109\theta_x^3+44628\theta_x^2+7040\theta_x-6990\right)\\ &-27x^9\left(19871\theta_x^3+39147\theta_x^2+9715\theta_x+29949\right)\\ &+486x^{10}\left(2664\theta_x^3+4503\theta_x^2+2623\theta_x+561\right)\\ &+486x^{11}\left(2892\theta_x^3+6453\theta_x^2+5465\theta_x+1657\right)+360126x^{12}(\theta_x+1)^3.\end{aligned}$$

显然，微分方程 $\mathcal{D}_{36A}w(x) = 0$ 具有所述性质 (1) 和 (3)。至于 (2)，我们用黎曼的 $\mathcal{P}$ 方案描述方程 $\mathcal{D}_{36A}w(x) = 0$ 的奇点，

$$\left\{\begin{array}{cccccc} -1 & 0 & \frac{1}{3} & -1-\frac{2\sqrt{3}}{3} & -1+\frac{2\sqrt{3}}{3} & \infty \\ \hline 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right\}$$

并且可以看到，$\mathcal{D}_{36A}$ 在 $x=-1$、0、$\frac{1}{3}$、$\infty$ 处有四个大复结构极限点，它们对应于附录 B.1 表中所示的四个尖点。通过对所有其他零属群 $\Gamma_0(n)$+进行类似计算，我们可以找到具有所述性质的 K3 微分算子。我们在本文 arXiv 版本的补遗中列出了 K3 微分算子的明确形式 [25] 。□

备注 4.10。这里我们说明关系 $\frac{1}{x} = T_n(t)+c_n$中的加法常数。改变加法常数 $c_n$ 只会导致 $x$上的线性分式变换，即相应 K3 微分方程的一个自同构。在我们的列表 [25], 中，我们选择了 $c_n$ ，使得 $w_0(x)$的幂级数展开（如有可能）在次数不超过 20 时系数均为整数。然而，当 $T_n(t) + c_n$ 表示为 η乘积时，我们保留了 $c_n$ 以保持这一性质。□

需要注意的是，[25] 中列出的 K3 微分算子是所谓 Calabi–Yau 微分算子的二维类比；后者是在 [1] 中针对 Calabi–Yau 三维簇所研究的。

### 5. Clingher-Doran 族与 Igusa 尖点形式 $\chi_{10}$，$\chi_{12}$

ˇ作为高维周期域的一个例子，我们考虑格 $M = U \oplus E_8(-1) \oplus E_7(-1)$，其满足 $\Omega_M \simeq \mathbb{H}_2$。我们固定一个（唯一的）本原格嵌入 ˇ $M \subset L$及其正交格 ˇ $M^\perp \simeq U^{\oplus 2} \oplus \langle -2\rangle$。

5.1. **˘极化 K3 曲面的**标准形。在 [13], Clingher 和 Doran 研究了特殊的四次曲面 $\{f=0\}\subset\mathbb{P}^3$，其

$$f = \mathtt{y}^2\mathtt{zw} - 4\mathtt{x}^3\mathtt{z} + 3\alpha\mathtt{xzw}^2 + \beta\mathtt{zw}^3 + \gamma\mathtt{xz}^2\mathtt{w} - \frac{1}{2}(\delta\mathtt{z}^2\mathtt{w}^2 + \mathtt{w}^4) \tag{5.1}$$

其中，[x、y、z、w] $\in\mathbb{P}^3$ 以及 $\alpha$、$\beta$、$\gamma$、$\delta\in\mathbb{C}$ 是参数。对于固定的 $\alpha$、$\beta$、$\gamma$、$\delta$，$\{f=0\}\subset\mathbb{P}^3$ 的极小解消记为 $X(\alpha,\beta,\gamma,\delta)$。四次曲面 $f$ 称为 $M$-极化 K3 曲面的标准形，因为它满足以下性质 [13, 定理 1.2]:

(1) 当 $\gamma\neq 0$ 或 $\delta\neq 0$时，$X(\alpha,\beta,\gamma,\delta)$ 是一个 $M$-极化 K3 曲面。(2) 对于给定的 $M$- 极化 K3 曲面 $X$，存在满足 $\gamma\neq 0$ 或 $\delta\neq 0$ 的 $(\alpha,\beta,\gamma,\delta)\in\mathbb{C}^4$，使得 $X(\alpha,\beta,\gamma,\delta)$ 与 $X$ 作为 $M$-极化 K3 曲面同构。

考虑到自然同构 $X(\alpha,\beta,\gamma,\delta)\simeq X(t^2\alpha,t^3\beta,t^5\gamma,t^6\delta)$ $(t\in\mathbb{C}^*)$，开簇

$$\mathcal{M}_{\mathrm{CD}} := \big\{[\alpha,\beta,\gamma,\delta]\in\mathbb{WP}^3(2,3,5,6)\mid \gamma\neq 0\,\mathrm{or}\,\delta\neq 0\big\}$$

˘ 已被识别为 $M$-极化 K3 曲面的粗模空间。由于我们有同构 $\Omega_{\breve{M}}\simeq\mathbb{H}_2$，如第 2.2.2 小节所示，因此有周期映射 $\mathcal{P}\colon\mathcal{M}_{\mathrm{CD}}\to\Omega_{\breve{M}}\simeq\mathbb{H}_2$，它是一个多值映射。注意，由于同构 $Sp(4,\mathbb{Z})/\{\pm I_4\}\simeq SO(U^{\oplus 2}\oplus\langle-2\rangle)_+\simeq O(U^{\oplus 2}\oplus\langle-2\rangle)^*_+$，我们有

$$\Omega_{\breve{M}}/O(U^{\oplus 2}\oplus\langle-2\rangle)_+\simeq\Omega_{\breve{M}}/O(U^{\oplus 2}\oplus\langle-2\rangle)^*_+\simeq\mathbb{H}_2/PSp(4,\mathbb{Z}),$$

这里我们利用了 $SO(U^{\oplus 2}\oplus\langle-2\rangle)_+\simeq O(U^{\oplus 2}\oplus\langle-2\rangle)_+/\{\pm I_5\}$ 以及 $I_5$˘ 在 $\Omega_{\breve{M}}$ 上作用平凡这一事实。也就是说，在这种情况下，$M$-极化与 ˘$M$-可极化 K3 曲面并无区别。

**定理 5.1** (Clingher 和 Doran [13, 定理 1。5])。逆周期映射 $\mathcal{P}^{-1}\colon\mathbb{H}_2\to\mathcal{M}_{\mathrm{CD}}$ 由下式给出

$$\mathcal{P}^{-1}(\tau)=\big[\mathcal{E}_4(\tau),\mathcal{E}_6(\tau),2^{12}3^5\chi_{10}(\tau),2^{12}3^6\chi_{12}(\tau)\big] \tag{5.2}$$

其中，$\mathcal{E}_4$ 和 $\mathcal{E}_6$ 是权分别为四和六的亏格二 *Eisenstein* 级数，而 $\chi_{10}$和 $\chi_{12}$ 分别是权为十和十二的 *Igusa* 尖点形式。

Clingher 和 Doran 基于一种纯粹几何性的论证得到了定理 5.1，该论证不涉及任何周期积分的计算。对于与 $[w]\in\Omega_{\breve{M}}$ 对应的一般 ˘$M$-极化 K3 曲面 $X$，他们构造了一个新的 K3 曲面 $Y$，它与 $X$ 同源，并且也具有典范 Kummer 结构。随后，通过辨认在 [14] 中得到的椭圆纤维化 $Y\to\mathbb{P}^1$ 与表示 $Y$ 的 Kummer 曲面上的椭圆纤维化，便可推出上述优美结果。我们将给出该族的周期积分的显式计算。结合结果 (5.2)，我们将计算 BCOV 公式。

5.2. **周期积分与 Picard-Fuchs 方程**。我们将标准形 (5.1) 改写为另一种形式，以便显式写出周期积分，尤其是用超几何级数表示。为此，我们引入一个稍作推广的四次多项式

$$\begin{aligned}F(a) =& a_0\,\mathtt{xyzw} + a_1\,\mathtt{y}^2\mathtt{zw} + a_2\,\mathtt{x}^3\mathtt{z} + a_3\,\mathtt{xz}^2\mathtt{w} + a_4\,\mathtt{z}^2\mathtt{w}^2 + a_5\,\mathtt{w}^4 + a_6\,\mathtt{zw}^3\\ &+ a_7\,\mathtt{yzw}^2 + a_8\,\mathtt{xzw}^2 + a_9\,\mathtt{x}^2\mathtt{zw}\end{aligned}$$

其中 $a_0,\ a_1,\cdots,a_9\in\mathbb{C}$。我们将 $F_{toric}(a)$ 称为 $F(a)$ 的一种特殊形式，其 $a_7,a_8,a_9$ 消失，即 $F_{toric}(a)=a_0\,\mathtt{xyzw}+\cdots+a_6\,\mathtt{zw}^3$。为了描述对称性

$F(a)$ 的对称性，我们引入一个（非约化）群

$$G=\left\{\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & 0 & c_1\\ c_3 & \lambda_2 & 0 & c_2\\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4\end{pmatrix}\Big|\lambda_1,...,\lambda_4\in\mathbb{C}^*,c_1,c_2,c_3\in\mathbb{C}\right\}. \tag{5.3}$$

**命题 5.2**。 $F(a)$ 具有以下性质：

(1) 四次多项式 $F(a)$ 在由 $G\subset GL(4,\mathbb{C})$给出的线性坐标变换下保持其形式。

(2) 标准形 $f=f(\alpha,\beta,\gamma,\delta)$ 经过坐标变换后变为形式 $F_{toric}(a)$ $G$

$$\begin{pmatrix}\mathtt{x}\\ \mathtt{y}\\ \mathtt{z}\\ \mathtt{w}\end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix}\mathtt{x}-\frac{\sqrt{\alpha}}{2}\mathtt{w}\\ \mathtt{y}-i\sqrt{6}\alpha^{\frac{1}{4}}\mathtt{x}\\ \mathtt{z}\\ \mathtt{w}\end{pmatrix},$$

其中， $a_i$ 在 $F_{toric}(a)$ 中的参数与 $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ 之间满足

$$(a_0,a_1,a_2,a_3,\cdots,a_6)=(-2i\sqrt{6}\alpha^{\frac{1}{4}},1,-4,\gamma,-\frac{1}{2}(\delta+\sqrt{\alpha}\gamma),-\frac{1}{2},(\beta-\alpha^{\frac{3}{2}})). \tag{5.4}$$

这里我们不予证明，而是简要说明如何得到上述性质。对于多项式 $F(a)=\sum a_i\mathtt{x}^{m_i}$，将其牛顿多面体的一个平移记为 $N_F=\mathrm{Conv}\{m_1-m_0,\cdots,m_9-m_0\}$，它位于 $\mathbb{R}^4$ 中。由于 $F$ 是齐次的， $N_F$ 的所有顶点都落在 $H_{\mathbb{Z}}:=\{m\in\mathbb{Z}^4\mid(1,1,1,1).m=0\}$上。将 $H_{\mathbb{Z}}$ 投影到前三个分量构成的 $\mathbb{Z}^3$，可得一个同构 $H_{\mathbb{Z}}\simeq\mathbb{Z}^3$.。容易验证， $m_i-m_0(i=1,...,6)$ 是多面体 $N_F$的角点；在同构 $H_{\mathbb{Z}}\simeq\mathbb{Z}^3$下，该多面体可识别为

$$\Delta=\mathrm{Conv.}\left\{\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\-1\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\-1\\0\end{pmatrix}\right\}\subset\mathbb{R}^3, \tag{5.5}$$

结果表明它是一个反射多面体 [4]。我们还发现，$F(a):=F(a)/\mathtt{xyzw}$ 中的 Laurent 单项式与整点一一对应$\Delta\cap\mathbb{Z}^3$；特别地，单项式 $a_01$ 对应于 $\Delta$中包含的原点 $^t(0,0,0)$，而系数为 $a_7$、 $a_8$、 $a_9$ 的单项式对应于 $\Delta$的余维一面的相对内部中的整点。令 $\mathbb{P}_\Delta$ 为与 $\Delta$相关联的射影环面簇，并考虑由 $a_0$、 $a_1$、 $\cdots$、 $a_9$参数化的超曲面 $Z_F:=\{F(a)=0\}\subset(\mathbb{C}^*)^3$。那么，由于 [4],，其在 $\mathbb{P}_\Delta$ 中的闭包 $\overline{Z}_F$在对 $\mathbb{P}_\Delta$作 MPCP（极大、射影、保正则且部分）解消后定义了一个光滑 K3 曲面。式（5.3）中的群 $G$ 表示托里克簇 $\mathbb{P}_\Delta$的自同构群，因此自然诱导出 K3 曲面 $\{F(a)=0\}\subset\mathbb{P}_\Delta$ 之间的同构，进而也诱导出四次曲面 $\{F(a)=0\}\subset\mathbb{P}^3$ 之间的同构。

事实上，形式 $F_{toric}(a)$ 是一种优选形式，适合用 [28, 第 2 节3],[26], 引入的扩展 GKZ 系统来分析周期积分。3],[26], 也就是说，它是 Gel' fand-Kapranov-Zelevinski (GKZ) 超几何系统， [19] 并附加了表示 (5.3) 中 $G$ 无穷小群作用的线性微分算子。事实上，对于 K3 曲面 $\{F(a)=0\}\subset\mathbb{P}^3$，约化形式 $F_{toric}(a)$ 给出了周期积分的典范形式，

$$w_0(a)=\int_{C_0}\frac{a_0}{\hat{F}_{toric}(a)}\frac{d\mathtt{x}}{\mathtt{x}}\frac{d\mathtt{y}}{\mathtt{y}}\frac{d\mathtt{z}}{\mathtt{z}}\frac{d\mathtt{w}}{\mathtt{w}} \tag{5.6}$$

其中 $\hat{}$ $F_{toric}(a)=F_{toric}(a)/\mathtt{xyzw}$ 和 $C_0=\{|\mathtt{x}|=|\mathtt{y}|=|\mathtt{z}|=|\mathtt{w}|=\varepsilon\}(\varepsilon>0)$ 是 $(\mathbb{C}^*)^3\subset\mathbb{P}_\Delta$ 中的标准环面循环。

**命题 5.3.** 对于周期积分 $w_0(a)$，以下性质成立：

(1) 周期积分 *(5.6)* 可计算为

$$w_0(a) = \sum_{n,m,l\in\mathbb{Z}_{\geq 0}} c(l,m,n)x^l y^m z^n, \tag{5.7}$$

其中 $x := \frac{a_4 a_5}{a_6^2}$，$y := \frac{a_3^2 a_6}{a_2 a_4^3}$，$z := \frac{a_1 a_2 a_4}{a_0^2 a_3}$，系数由下式给出

$$c(l,m,n) = \frac{(2n)!}{n!l!(n-m)!(3m-n)!(l-3m+n)!(m-2l)!}$$

对于负的 $k$，约定 $k! = \Gamma(k+1)$。

(2) 级数 $w_0(a)$ 是 *GKZ* 型超几何级数，是附录 *C* 中 *Picard-Fuchs* 微分方程 *(C.1)* 的唯一正则解。特别地，原点 $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ 是一个大复结构极限。

证明。 留数计算很直接，参见例如 [6] 。如上文简要所述，群 $G$ 表示 $\mathbb{P}_\Delta$ 的自同构群，并自然作用于周期积分 $w_0(a)$。这恰好导出 [26, 28] 中的扩展 GKZ 系统。我们将 Picard-Fuchs 系统 (C.1) 确定为一组最小的微分算子，其解可导出周期积分。实际上，我们可以通过寻找能够消去 $w_0(x)$ 的微分算子来确定它们。关于原点处性质的论断可直接通过构造其附近的局部解得出。□

扩展 GKZ 系统是一组微分算子，它自然地定义在与所谓的次级多面体[19, 2]相关联的托里克簇 $\mathbb{P}_{SecP}$ 上；仿射坐标 $x$、$y$、$z$对应于 $\mathbb{P}_{SecP}$的一个仿射图。值得注意的是，周期积分的上述良好性质表明，如果我们将标准形 (5.1) 改为 $F_{toric}(a)$，那么就有一个良好的族

$$\check{\mathfrak{X}} \to \mathcal{M} = (\mathbb{C}^*)^3 \tag{5.8}$$

，我们的框架可在 $\overline{\mathcal{M}} = \mathbb{P}_{SecP}$下应用于该族。这里，我们通过对万有族 $\{F_{toric}(a) = 0\} \subset \mathbb{P}_\Delta \times \mathbb{C}^7$ 取环面 $(\mathbb{C}^*)^3 \times \mathbb{C}^*$ 的自然作用下的商，定义族 $\check{\mathfrak{X}}$；其中 $(\mathbb{C}^*)^3 \subset \mathbb{P}_\Delta$，而 $\mathbb{C}^*$ 是对 $\mathbb{C}^7$ 的缩放作用（更多细节参见 [20] ）。

由于原点 $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ 是一个大复结构极限，我们可以按照第 3.1 小节，根据原点附近的局部解确定镜像映射。事实上，我们有以下结果：

**命题 5.4.** 关系式 *(5.4)* 和 *(5.2)* 确定的镜像映射为

$$x = \frac{2^{10}3^5(3\chi_{12} + \chi_{10}\mathcal{E}_4^{\frac{1}{2}})}{(\mathcal{E}_4^{\frac{3}{2}} - \mathcal{E}_6)^2},\ y = \frac{-2\chi_{10}^3(\mathcal{E}_4^{\frac{3}{2}} - \mathcal{E}_6)}{(3\chi_{12} + \chi_{10}\mathcal{E}_4^{\frac{1}{2}})^3},\ z = \frac{-(3\chi_{12} + \chi_{10}\mathcal{E}_4^{\frac{1}{2}})}{12\chi_{10}\mathcal{E}_4^{\frac{1}{2}}}.$$

将这些代入 $w_0(a)$，得到 $w_0(x, y, z) = \mathcal{E}_4(\tau)^{\frac{1}{4}}$。

证明。 利用关系式 (5.4)、(5.2) 以及定义 $x = \frac{a_4 a_5}{a_6^2}, y = \frac{a_3^2 a_6}{a_2 a_4^3}, z = \frac{a_1 a_2 a_4}{a_0^2 a_3}$，可以直接验证结论的前半部分。将这些镜像映射代入 (5.7) 中的超几何级数 $w_0(x, y, z)$，并验证其在 $q$-展开中达到足够高次数时等式成立，即可推导出后半部分。由于我们知道 $w_0(x, y, z)$ 的模性质（如第 3 节所述），因此该结论成立。□

根据 Picard-Fuchs 微分方程，我们可以确定 Griffiths-Yukawa 耦合 $C_{ij}(x, y, z)$。此外，我们发现，除除子 $\{xyz = 0\}$ 外，

Picard-Fuchs 方程的判别式仅由一个不可约分支组成，即 $dis = dis_0$。由于 $C_{ij}$ 和 $dis_0$ 是较长的多项式，我们只在附录 C.2 中列出其中一些。利用这些，我们可以验证关系 (3.9)

$$x^2y^2z^2 dis_0 \det(C_{ij}) = 2.$$

将这一关系与（3.8）中 $\tau_{\mathrm{BCOV}}$ 的形式结合起来，我们可以施加节点正则性条件，从而得到

$$\tau_{\mathrm{BCOV}} = \mathrm{const.}\ \frac{x^{a_1}y^{a_2}z^{a_3}}{w_0(x)}. \tag{5.9}$$

**5.3. 轨形点处的正则性条件。** $x$、$y$、$z$ 是托里克簇 $\mathbb{P}_{SecP}$ 的一个仿射图的坐标；该簇是为（5.5）中整多胞体 $\Delta$ 的正则三角剖分定义的次级多面体 $SecP$ 对应的托里克簇 $\mathbb{P}_{SecP}$ [20]。正如我们在附录 C.3 中简要总结的，$\Delta$ 有 16 个正则三角剖分 $T_i$（$i = 1, ..., 16$）。仿射坐标 $x$、$y$、$z$ 对应于三角剖分 $T_3$；原点是一个大复结构极限，在此处，（5.7）中的超几何级数 $w_0$（$x$）是 Picard-Fuchs 微分方程的唯一正则解，而其他所有解在原点附近都会出现对数奇点。

正如我们在第 3.3 小节中一般性地描述的，$\mathbb{P}_{SecP}$ 的环面边界点中有一些是轨形点，它们对应于某些三角剖分 $T_k$。这类边界点的特征是：Picard-Fuchs 方程的所有局部解绕边界除子都具有有限单值化。具体而言，由于 $\mathbb{P}_{SecP}$ 的环面边界点通常是奇异的，我们必须进行适当的环面解消，以便表示局部解。由于所有局部解具有有限单值化这一条件不依赖于解消，我们姑且称三角剖分 $T_k$ 表示一个轨形点，若存在一种解消使得所有局部解都具有有限单值化。

**命题 5.5.** $\mathbb{P}_{SecP}$ 中的轨形点由正则三角剖分 $T_9, T_{12}$ 和 $T_{16}$ 给出。$T_{12}$ 中的局部解与$T_{16}$中的局部解同构。

证明. 对于每个 $T_k$（$k = 1, ..., 16$），我们通过显式构造其仿射图的环面解消的所有局部解，验证了所述性质。对于三角剖分 $T_k$（$k = 9, 12, 16$），局部解的形式以及解消的仿射坐标见附录 C.3。□

**命题 5.6.** 来自$\mathbb{P}_{SecP}$ 中每个轨形点的轨形正则性条件，将 *BCOV* 公式*(5.9)*确定如下：

(1) 由 $T_{12}$（或 $T_{16}$）所代表的轨形点处的正则性，我们得到

$$\tau_{\mathrm{BCOV}} = const.\ \left(\frac{1}{\chi_{10}(\tau)}\right)^{\frac{1}{10}}.$$

(2) 由 $T_9$ 所代表的轨形点处的正则性，我们得到

$$\tau_{\mathrm{BCOV}} = const.\ \left(\frac{1}{3\chi_{12}(\tau) + \chi_{10}(\tau)\mathcal{E}_4(\tau)^{\frac{1}{2}}}\right)^{\frac{1}{12}}.$$

证明。我们从 (5.9) 中的 $\tau_{\mathrm{BCOV}}$ 开始，此处已满足合流点正则性。我们通过将 (5.9) 解析延拓至相应的边界点，来实现轨形点处的正则性。注意，(5.9) 中的仿射坐标 $x$、$y$、$z$ 只需变换为轨形点周围的仿射坐标 $\tilde{x}$、$\tilde{y}$、$\tilde{z}$，而局部解 $w_0$(*x*) 应替换为

$$w_0(x) = c_0\tilde{w}_0(\tilde{x}) + c_1\tilde{w}_1(\tilde{x}) + c_2\tilde{w}_2(\tilde{x}) + c_3\tilde{w}_3(\tilde{x}) + c_4\tilde{w}_4(\tilde{x}),$$

其中 $\tilde{w}_k(\tilde{x})$ 是轨形点周围的局部解。如附录 C.3 所示，我们固定解 $\tilde{w}_0(\tilde{x})$，使得 $\tilde{w}_k(\tilde{x})/\tilde{w}_0(\tilde{x})$ 正则。回顾一下，LCSL 周围的周期积分经过排列，使得 $\mathcal{P}(x) = [w_0(x)\ w_2(x)\ w_1^{(1)}(x),$

$\cdots, w_{(1)r}(x)]$ 是 $\Omega(M^\perp)$ 上的一点，因此，对于对应于光滑 K3 曲面的周期点 $\mathcal{P}(x)$，$w_0(x) \neq 0$ 成立；轨形点的情形正是如此。因此我们有 $c_0 \neq 0$ 并且

$$\tau_{\mathrm{BCOV}} = \mathrm{const.}\frac{\tilde{x}^{a_1}\tilde{y}^{a_2}\tilde{z}^{a_3}}{c_0\tilde{w}_0(\tilde{x})(1+O(\tilde{x}))},$$

其中 $x^{a_1}y^{a_2}x^{a_3} = \tilde{x}^{a_1}\tilde{y}^{a_2}\tilde{z}^{a_3}$。在这种形式下，轨形正则性条件等价于局部行为 $\tau_{\mathrm{BCOV}} = \mathrm{const.}(1+O(\tilde{x}))$。

对于轨形点 $T_{12}$，我们有

$$\tilde{x} = \frac{1}{yz^2},\ \tilde{y} = \frac{1}{xz},\ \tilde{z} = z$$

并且还有 $\tilde{w}_0(\tilde{x}) = \tilde{x}^{\frac{1}{5}}\tilde{y}^{\frac{1}{10}}(1+\cdots)$，其中 $\tilde{x}^{\frac{1}{5}}\tilde{y}^{\frac{1}{10}} = x^{-\frac{1}{10}}y^{-\frac{1}{5}}z^{-\frac{1}{2}}$。利用这些数据，(5.9) 中的参数 $a_1, a_2, a_3$ 唯一确定为 $(a_1, a_2, a_3) = (-\frac{1}{10}, -\frac{1}{5}, -\frac{1}{2})$。然后由 (5.9) 中的 $\tau_{\mathrm{BCOV}}$ 以及命题 5.4 中的公式即可得出结果。对于 $T_{16}$ 和 $T_9$，论证完全相同，所用数据见附录 C.3。(5.9) 中的参数分别确定为 $(a_1, a_2, a_3) = (-\frac{1}{10}, -\frac{1}{5}, -\frac{1}{2})$ 和 $(-\frac{1}{12}, -\frac{1}{6}, -\frac{1}{2})$，对应于 $T_{16}$ 和 $T_9$。□

注5.7。模形式 $\chi_{10}(\tau)$ 是模群 $Sp(2,\mathbb{Z})$ [33, 9] 上 $\mathbb{H}_2$ 的一个研究充分的尖点形式。这也曾出现在异质弦-II型弦对偶的研究中 [36]（另见 [23]），与我们此处的研究主题颇为接近。无论如何，当我们在 $T_{12}$ 或 $T_{16}$ 处施加轨形正则性时，BCOV 公式便在 $\Omega_{\check{M}} \simeq \mathbb{H}_2$ 上定义了一个 BCOV 尖点形式。由 (2) 得到的模形式 $3\chi_{12}(\tau) + \chi_{10}(\tau)\mathcal{E}_4(\tau)$ 是 $\mathbb{H}_2$ 上的一个尖点形式。然而，正如 $\mathcal{E}_4^2$ 的分数幂所示，它是较小子群 $\mathcal{G}_m \subset O(U^{\oplus 2} \oplus \langle -2\rangle)_+$ 的尖点形式，其中 $\mathcal{G}_m$ 是 (5.8) 中我们族 $\check{\mathfrak{X}} \to \mathbb{P}_{SecP}$ 的单值群。关于确定 $\mathcal{G}_m$ 的问题，我们留待今后研究。

5.4. **()族**格极化 K3 曲面。**-极化 K3 曲面**。在除子 $\{\gamma = 0\} \subset \mathbb{P}(2, 3, 5, 6)$ 上，Clingher-Doran 族的格极化从 $\check{M} = U \oplus E_8(-1) \oplus E_7(-1)$ 扩展为 $\check{M}^e := U \oplus E_8(-1)^{\oplus 2}$（见 [13, 第 3 节3]）。在周期映射 $\mathcal{P}: \mathcal{M}_{\mathrm{CD}} \to \mathbb{H}_2$ 下，该除子映射到由尖点形式 $\chi_{10}$ 的零点集所给出的洪伯特曲面。我们可以在同构 $\Omega_{\check{M}^e} = \Omega(U \oplus U) \simeq \mathbb{H}_+ \times \mathbb{H}_+$ 中观察到这一事实，其中我们使用了 $(\check{M}^e)^\perp = U \oplus U$（见第 2.2.1 小节中的例1）。由于随着格极化的扩展，变形空间的维数降低，我们称除子上的族为约化族。 [14] 对约化族的几何方面及其模性质进行了详细研究。此外，由于所有计算都与前面小节中介绍的 Clingher-Doran 族的计算平行，我们下面仅对该约化族作概述。

5.4.1. 周期积分与镜像映射。我们继续研究由 (5.8) 得到的族 $\check{\mathfrak{X}} \to \mathbb{P}_{SecP}$。由命题 5.2 可知，$a_3 = \gamma$，因此除子 $\{\gamma = 0\}$ 对应于 $\mathbb{P}_{SecP}$ 中的环面除子 $\{a_3 = 0\}$。为描述约化族，令 $\Delta^{red}$ 为 (5.5) 中的整多胞体 $\Delta$，并移除第三个顶点 $^t(0, -1, 1)$。结果表明，这个约化多胞体仍然是反身的，且前面各小节中的所有环面构造均适用

$$F^{red}_{toric}(a) := F_{toric}(a)|_{a_3=0}.$$

特别地，周期积分 (5.6) 通过$w_0^{red}(a) = w_0(a)|_{a_3=0}$定义相应的周期积分。此外，我们还可以将约化族 $\check{\mathfrak{X}}^{red} \to \mathbb{P}_{SecP_{red}}$描述为 $\{F^{red}_{toric}(a) = 0\} \subset \mathbb{P}_{\Delta^{red}} \times \mathbb{C}^6$ 关于作用 $(\mathbb{C}^*)^3 \times \mathbb{C}^*$ 的商，其次级多面体为 $SecP_{red}$，对应于 $\Delta^{red}$。实际上，这个约化族是已知的镜像族，它对应于加权射影空间$\mathbb{P}(6, 4, 1, 1)$中次数为十二的超曲面。

**命题 5.8**。对于约化族，我们有以下结果：

(1) 周期积分 $w_0^{red}(a)$ 由下式给出

$$w_0^{red}(a) = \sum_{m,n\geq 0} \frac{(6n)!}{(3n)!(2n)!(n-2m)!(n!)^2} u^n v^m$$

其中 $u := \frac{a_1^3 a_2^2 a_6}{a_0^6}$，$v := \frac{a_4 a_5}{a_6^6}$。

(2) 原点 $(u, v) = (0, 0)$ 是一个大复结构极限。

(3) 在 (2) 中的大复结构极限附近，我们有镜像映射

$$u = \frac{1}{864} \frac{(E_4\widetilde{E}_4)^{\frac{3}{2}} - E_6\widetilde{E}_6}{(E_4\widetilde{E}_4)^{\frac{3}{2}}},\ v = (864)^2 \frac{\eta^{24}\widetilde{\eta}^{24}}{(E_4\widetilde{E}_4)^{\frac{3}{2}} - E_6\widetilde{E}_6}, \tag{5.10}$$

其中我们定义 $E_k := E_k(\tau_{11})$，$E_k := E_k(\tau_{22})$，其中 $E_k$为椭圆艾森斯坦级数，并令 $\eta := \eta(\tau_{11})$ 和 $\widetilde{\eta} := \eta(\tau_{22})$。将镜像映射代入 $w_0^{red}(a)$，我们还得到 $w_0^{red}(a) = E_4^{\frac{1}{4}}\widetilde{E}_4^{\frac{1}{4}}$.

证明。由 (5.7) 可直接得到 (1)。(2) 的性质可通过求解约化族的 Picard-Fuchs 方程得到，这里留给读者验证。镜像映射以及关系式 $w_0^{red}(a) = E_4^{\frac{1}{4}}\widetilde{E}_4^{\frac{1}{4}}$可由命题 5.4 得到。在推导中，我们使用关系式

$$\chi_{10}(\tau) \to 0,\ \ \chi_{12}(\tau) \to \eta^{24}\widetilde{\eta}^{24},\ \ \mathcal{E}_4(\tau) \to E_4\widetilde{E}_4,\ \ \mathcal{E}_6(\tau) \to E_6\widetilde{E}_6$$

在极限 $\tau_{12} \to 0$ 下，其中 $\tau = \left(\begin{smallmatrix}\tau_{11} & \tau_{12}\\ \tau_{21} & \tau_{22}\end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{H}_2$。 □

5.4.2. *BCOV 尖点形式。* 我们概述约化族的 BCOV 尖点形式的计算。由于我们可以验证格里菲斯-汤川耦合满足关系式 (3.9)，因此从以下表达式开始

$$\tau^{red}_{\mathrm{BCOV}}(t) = \mathrm{const.}\frac{u^a v^b}{w_0^{red}(u, v)}.$$

次级多面体 $SecP_{red}$ 有四个顶点，分别对应于 $\Delta^{red}$的正则三角剖分。通过构造局部解，我们可以将四个三角剖分中的一个与一个轨形点对应起来，记为 $T_4^{red}$。在 $\mathbb{P}_{SecP_{red}}$中，对 $T_4^{red}$处的 $\tau^{red}{}_{\mathrm{BCOV}}(t)$ 施加轨形正则性条件，我们得到 $(a, b) = (-\frac{1}{6}, -\frac{1}{12})$。然后，利用 (5.10) 以及关系式 $w_0^{red}(u, v) = E_4^{\frac{1}{4}}\widetilde{E}_4^{\frac{1}{4}}$，可得

$$\tau^{red}_{\mathrm{BCOV}} = \mathrm{const.}\left(\frac{1}{\eta^{24}(\tau_{11})\eta^{24}(\tau_{22})}\right)^{\frac{1}{12}} = \mathrm{const.}\frac{1}{\eta^2\widetilde{\eta}^2}.$$

逆幂 $(\tau^{red}{}_{\mathrm{BCOV}})^{-1}$ 显然定义了 $\mathbb{H}_+ \times \mathbb{H}_+$ 上的一个尖点形式，因此我们由 BCOV 公式得到一个 BCOV 尖点形式。

注记 5.9. 正如我们所见，BCOV 尖点形式 $(\tau^{red}{}_{\mathrm{BCOV}})^{-1}$ 直接作为 $(\tau_{\mathrm{BCOV}})^{-1}$ 的极限得出；后者对应命题 5.6 中的情形 (2)，其中我们在对应于 $\mathbb{P}_{SecP}$ 中三角剖分 $T_9$ 的轨形点处施加轨形正则性。注意，$SecP$ 的一个面可以与 $SecP_{red}$ 等同，因为 $\mathbb{P}_{SecP_{red}}$ 是 $\mathbb{P}_{SecP}$ 上的环面除子。在这种关系下，三角剖分 $T_4^{red}$ 对应于 $T_9$ $SecP_{red} \prec SecP$。这说明 $(\tau^{red}{}_{\mathrm{BCOV}})^{-1}$ 由 $(\tau_{\mathrm{BCOV}})^{-1}$ 得出，对应的情形是

(2) 命题 5.6。另一方面，情形 (1) 中来自 $(\tau_{\mathrm{BCOV}})^{-1}=\mathrm{const.}(\chi_{10})^{\frac{1}{10}}$ 的尖点并不能化约为非平凡的 BCOV 尖点形式。这可以用以下事实解释：对应于 $T_{10}$ 和 $T_{16}$ 的轨形点并不能化约为 $\mathbb{P}_{SecP}$ 上除子 $\mathbb{P}_{SecP_{red}}$ 的任何一点。反过来说，$(\tau_{\mathrm{BCOV}})^{-1}=\mathrm{const.}(\chi_{10})^{\frac{1}{10}}$ 是一个真正的 BCOV 尖点形式，它来源于 $M$-极化的 K3 曲面。

## 6. Weil–Petersson 几何与 BCOV 扭率

这里汇集了一些将 BCOV 公式与 K3 曲面模空间上的 Weil–Petersson Kähler 几何联系起来的公式。相关几何将在 [21] 中作更详细的研究。

**6.1. Weil–Petersson 度量。** 设 $\check{\mathfrak{X}}\to\mathcal{M}$ 是一族 $\check{M}$-极化（或可极化）K3 曲面。如第 3 节所述，我们通过周期积分描述周期映射 $\mathcal{P}:\mathcal{M}\to\Omega^{\check{}}_{M}$，即 $\mathcal{P}(x)=[w(x)]\in\Omega^{\check{}}_{M}$

$$w(x)=\big(w_0(x),w^{(2)}(x),w_1^{(1)}(x),\cdots,w_r^{(1)}(x)\big)$$

它们满足二次关系 $(w,w)=2w_0w^{(2)}+(w^{(1)},w^{(1)})_M=0$。根据 $\Omega^{\check{}}_{M}=\Omega(\check{M}^{\perp})$ 的定义以及 $\check{M}^{\perp}=U\oplus M$ 的假设，这里使用格 $U\oplus M$ 的双线性形式 $(\,,\,)$，并将其在 $M$ 上的限制记为 $(\,,\,)_M$。

由于 [47], ，我们通过以下 Kähler 势在 $\mathcal{M}$ 上引入 Weil–Petersson 度量

$$\mathcal{K}(x,\bar{x})=-\log\big(w(x),\overline{w(x)}\big),$$

并将 Kähler 度量记为 $g_{i\bar{j}}:=\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial\overline{x_j}}\mathcal{K}(x,\bar{x})$。为了写出管状域 $M\otimes\mathbb{R}+iC_M$ 上对应的度量，我们令 $(t)_M^2:=(t,t)_M$ 表示管状域坐标 $t=(t_a):=(t_1,\cdots,t_r)$。下文中，我们用指标 $a,b,c,\ldots$ 表示坐标 $t=(t_a)$，而用 $i,j,k,\ldots$ 表示坐标 $x=(x_1,\ldots,x_r)$。

**引理 6.1.** 利用定义 $t_a=\frac{w_a^{(1)}(x)}{w_0(x)}$，我们有

$$\big(w(x),\overline{w(x)}\big)=-\frac{1}{2}w_0(x)\overline{w_0(x)}(t-\bar{t})_M^2. \tag{6.1}$$

证明. 由二次关系 $(w,w)=0$，可得 $w(x)=w_0(x)(1,-\frac{1}{2}(t)_M^2,t_1,\cdots,t_r)$。等式由此立即得出。□

利用上述等式，我们可以将管状域上的 Kähler 度量写作 $g_{a\bar{b}}=-\frac{\partial}{\partial t_a}\frac{\partial}{\partial\bar{t}_b}\log\big(-(t-\bar{t})_M^2\big)$。这里需要注意的是 $(t-\bar{t})_M^2<0$。Kähler 度量 $g_{i\bar{j}}$（或 $g_{a\bar{b}}$）定义了模空间上的所谓特殊 Kähler 几何，这与 $tt^*$-几何之间存在深刻的联系，而这将是 [21] 的主题。

**6.2. BCOV 扭率。** 注意到，方程 (6.1) 在单值化作用下不变，因此它在 $\mathcal{M}$上全局定义。此外，周期积分 $w_0(x)$ 被视为 $\mathcal{M}$ 上 Hodge丛的一个截面，并如我们在第 3 节中所见，按权为一的自守形式变换。根据命题 3.2，我们知道 BCOV 公式 $(\tau_{\mathrm{BCOV}}(t))^{-1}$ 的权为一，并带有某个乘子系统 $v(g)$。基于这些性质，我们自然得到以下定义：

**定义 6.2 (BCOV 扭率)**。 作为 $\Omega^{\cdot}_M \simeq M \otimes \mathbb{R} + iC_M$ 上的一个 $C^\infty$ 函数，或作为其关于单值群 $\mathcal{G}_m$ 的商 $\Omega^{\cdot}_M/\mathcal{G}_m$ 上的函数，我们将 BCOV 扭率定义为 $\log \mathcal{T}_{\mathrm{BCOV}}$，其中

$$\mathcal{T}_{\mathrm{BCOV}}(t,\bar{t}) := -(t-\bar{t})^2_M(\tau_{\mathrm{BCOV}}(t))^{-1}\overline{(\tau_{\mathrm{BCOV}}(t))^{-1}}. \tag{6.2}$$

在 BCOV 的原始工作中 [7], , 他们猜想对于一般的 Calabi–Yau 流形, BCOV 扭率与所谓的 Ray-Singer 解析扭率 [45] 相同。关于 K3 和 Enriques 曲面的解析挠率的一些结果，请参见 [34, 48] 。在这里，了解椭圆曲线情形下这些扭率之间的关系可能会有所帮助：对于椭圆曲线的一个族，Ray-Singer 解析扭率定义为拉普拉斯算子 [45][2, eq.(5.17)]的（修正）行列式：

$$\mathcal{T}^E_{\mathrm{RS}} = \det{}'\partial_\tau\overline{\partial_\tau} = \log\left\{(-i)(\tau-\overline{\tau})\eta(\tau)^2\overline{\eta(\tau)}^2\right\}, \tag{6.3}$$

其中 $\det'$ 表示略去零特征值。在这种形式下，Ray-Singer 解析扭率表示行列式线丛 [43]的 Quillen 范数。作为椭圆曲线的一个族，我们取该族的 Weierstrass 标准形。对于这个族，可以进行与第 5 节类似的计算。通过计算镜像映射，我们得到类似于 (3.4) 的 BCOV 公式 $\tau_{\mathrm{BCOV}}$，并得到 $(\tau_{\mathrm{BCOV}}(\tau))^{-1} = \eta(\tau)^2$ 。此外， $\mathbb{H}_+$ 上的庞加莱度量的 Kähler 势为 $\mathcal{K}(\tau,\bar{\tau}) = -\log\left(w_0(x)\overline{w_0(x)}(-i)(\tau-\bar{\tau})\right)$，其中 $\tau = {}^{I_1}(x)\ {}_{I_0}(x)$且 $\overline{I_0(x)} = w_0(x)$（详情见附~~录 D~~）。然后，将 (6.2) 中的“范数”因子 $-(t-\bar{t})^2_M$替换为 $(-i)(\tau-\bar{\tau})$，即可验证关系 $\mathcal{T}^E\mathrm{RS} = \log\mathcal{T}^E\mathrm{BCOV}$。

**6.3. 拟自守形式**。函数 $\mathcal{T}^E_{\mathrm{BCOV}}$ 是基本域 $\mathbb{H}_+/\mathrm{PSL}(2,\mathbb{Z})$ 上的一个 $C^\infty$ 函数。对 $\log\mathcal{T}^E\mathrm{BCOV}$ 求导，得到

$$\frac{1}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial\tau}\log\mathcal{T}^E_{\mathrm{BCOV}} = \frac{1}{\tau-\bar{\tau}} + \frac{1}{12}E_2(t) =: \frac{1}{12}E_2^*(\tau,\bar{\tau}), \tag{6.4}$$

显然其模权为二，因为对于模变换 $\tau' = \frac{a\tau+b}{c\tau+d}$，有 $\frac{\partial}{\partial\tau'} = (c\tau+d)^2\frac{\partial}{\partial\tau}$，但它不是全纯的。形式上， $E_2^*(\tau,\bar{\tau})$ 的 $\bar{\tau}\to\infty$ 极限给出了标准椭圆艾森斯坦级数 $E_2(\tau)$。由于 $E_2(\tau)$ 本身不具有模性质，因此称其为拟模形式（见 [35]）。对于对应于 (6.4) 的 K3 曲面，我们引入传播子函数

$$S^a = \sum_b K^{ab}\frac{\partial}{\partial t_b}\log\mathcal{T}_{\mathrm{BCOV}}(t,\bar{t})$$

其中 $K^{ab}$ 是格 $M$ 的格拉姆矩阵 $(K_{ab})$ 的 $(K_{ab})^{-1}$ 的矩阵分量（见 (3.1)）。

**~命题 6.3.** 传播子函数在单值群 $g\in\mathcal{G}_m\subset O(U\oplus M)+$ 的作用 $t\mapsto t:=g\cdot t$ 下变换为

$$S^a(\tilde{t},\bar{\tilde{t}}) = D(g,t)^2\sum_b\frac{\partial\tilde{t}_a}{\partial t_b}S^b(t,\bar{t})$$

其中 $D(g,t)$ 是式 *(2.4)* 中引入的自守因子。

证明。 由于 $\mathcal{T}_{\mathrm{BCOV}}(t,\bar{t})$ 在单值化下不变，因此只需证明

$$\sum_b K^{ab}\frac{\partial}{\partial\tilde{t}_b} = D(g,t)^2\sum_{b,c}\frac{\partial\tilde{t}_a}{\partial t_b}K^{bc}\frac{\partial}{\partial t_c}, \tag{6.5}$$

这推广了 (6.4) 的关系 $\frac{\partial}{\partial\tau'}=(c\tau+d)^2\frac{\partial}{\partial\tau}$。回顾镜像对称关系 (3.3)

$$\frac{1}{w_0(x(t))^2}\sum_{i,j}C_{ij}(x(t))\frac{\partial x_i(t)}{\partial t_a}\frac{\partial x_j(t)}{\partial t_b}=K_{ab} \tag{6.6}$$

与镜像映射 $x(t)=x(q)$。在单值群 $g\in\mathcal{G}_m$ 的作用 $t\mapsto g\cdot t$ 下，周期积分 $w_0(x(t))$ 作为 Hodge丛的截面变换，即 $w_0(x(g\cdot t))=D(g,t)w_0(x(t))$；而对于格里菲斯-汤川耦合，我们有 $C_{ij}(x(g\cdot t))=C_{ij}(x(t))$，因为它们是 $x=x(t)$ 的有理函数，而 $x=x(t)$ 在单值化下保持不变，即 $x(g\cdot t)=x(t)$。由于关系 (6.6) 是 $\Omega^{\cdot}{}_M$ 上的恒等式，而 $\Omega^{\cdot}{}_M$ 在单值群 $\mathcal{G}_m$ 的作用下保持不变，因此我们有

$$\begin{aligned}K_{ab}=&\frac{1}{w_0(x(g\cdot t))^2}\sum_{i,j}C_{ij}(x(g\cdot t))\frac{\partial x_i(g\cdot t)}{\partial(g\cdot t)_a}\frac{\partial x_j(g\cdot t)}{\partial(g\cdot t)_b}\\=&\frac{1}{D(g,t)^2}\frac{1}{w_0(x(t))^2}\sum_{i,j,c,d}C_{ij}(x(t))\frac{\partial x_i(t)}{\partial t_c}\frac{\partial x_j(t)}{\partial t_d}\frac{\partial t_c}{\partial(g\cdot t)_a}\frac{\partial t_d}{\partial(g\cdot t)_b}\\=&\frac{1}{D(g,t)^2}\sum_{c,d}K_{cd}\frac{\partial t_c}{\partial\tilde{t}_a}\frac{\partial t_d}{\partial\tilde{t}_b},\end{aligned}$$

这里我们使用关系 $\tilde{t}_a=(g\cdot t)_a$。计算逆矩阵 $(K_{ab})^{-1}$，得到

$$K^{ab}=D(g,t)^2\sum_{c,d}K^{cd}\frac{\partial\tilde{t}_a}{\partial t_c}\frac{\partial\tilde{t}_b}{\partial t_d}.$$

关系 (6.5) 由此立即得出。 □

我们可以将传播子函数显式地写为

$$S^a(t,\bar{t})=\frac{t_a-\bar{t}_a}{(t-\bar{t})_M^2}-\sum_b K^{ab}\frac{\partial}{\partial t_b}\log\tau_{\mathrm{BCOV}}(t).$$

由 $t\to\infty$ 极限可清楚看出，我们得到一个权重二的（向量值）拟自守形式。关于传播子函数的更多几何方面将在 [21] 中讨论。

## 附录A. **模群的同构**

**A.1. 同态** $\Gamma_0(n)_+\to O(U\oplus\langle 2n\rangle)$。为方便读者，我们给出群同态 $\Gamma_0(n)_+\to O(U\oplus\langle 2n\rangle)$ 的显式形式，它给出了 $n>1$ 的同构 (2.1)。其推导可见于 [17, 定理7]，例如。将 [17] 中的约定转换为我们的约定，可得群同态$\psi$：$\Gamma_0(n)_+\to O(U\oplus\langle 2n\rangle)$，其定义为

$$\psi\left(\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}d^2&-\frac{c^2}{n}&2cd\\-nb^2&a^2&-2nab\\bd&-\frac{ac}{n}&ad+bc\end{pmatrix}.$$

验证 ${}^t\psi(A)\Sigma_{2n}\psi(A) = \Sigma_{2n}$ with $\Sigma_{2n} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2n \end{pmatrix}$ 且 $\psi(AB) = \psi(A)\psi(B)$ 对于 $A, B \in \Gamma_0(n)_+$ 成立，是一项简单的练习。按照第 2.2 小节中的约定，我们定义 $\phi\colon \mathbb{H}_+ \to \Omega^{-}_{M_{2n}} = \Omega(U \oplus \langle 2n\rangle)$，其定义为 $t \mapsto \phi(t) := [1, -nt^2, t]$。接着，将 $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ 在 $t \in \mathbb{H}_+$ 上的标准作用记为 $A * t = \frac{at+b}{ct+d}$，我们可以验证

$$\psi(A) \cdot \phi(t) = [(ct+d)^2, -n(at+b)^2, (ct+d)(at+b)] = \phi(A * t),$$

其中 $\psi(A)\cdot\phi(t)$ 表示 $\psi(A)$ 在 $\phi(t)$ 上的自然线性作用。这表明，对于 (2.5) 中的自守因子 $D(A,t)$，我们应将 $D(A,t) = (ct+d)^2$ 读作。这意味着，将群 $O(U\oplus\langle 2n\rangle)$ 的自守形式视为 $\Gamma_0(n)_+$ 的模形式时，其权应加倍。

A.2. **同构** $\Psi\colon Sp(4,\mathbb{Z})/\{\pm I_4\} \simeq SO(U^{\oplus 2} \oplus \langle -2\rangle)_+$。设 $V_{\mathbb{Z}}$ 是由 $e_1, e_2, e_3, e_4$ 生成的一个 $\mathbb{Z}$-模。我们考虑 $SL(4,\mathbb{Z})$ 在$V_{\mathbb{Z}}$上的自然作用。设 $\wedge^2 V_{\mathbb{Z}}$ 为外幂，并取其一组基 $e_i \wedge e_j\ (1 \le i < j \le 4)$。我们在 $\wedge^2 V_{\mathbb{Z}}$ 上定义一个非退化对称双线性形式 $(\ ,\ )$，如下:

$$X \wedge Y =: (X,Y)\, e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \wedge e_4$$

对 $X = \sum x_{ij} e_i \wedge e_j$和 $Y = \sum y_{ij} e_i \wedge e_j$。我们将 $SL(4,\mathbb{Z})$ 在 $\wedge^2 V$上的自然作用记为 $\rho_\wedge(g)(X) := gX\,{}^t g$。于是容易验证，对于 $g \in SL(4,\mathbb{Z})$，有 $(\rho_\wedge(g)(X)\ \rho_\wedge(g)(Y)) = (\det g)\,(X,Y) = (X,Y)$。

考虑一个元素 $W := e_1 \wedge e_3 - e_2 \wedge e_4$，并定义一个群

$$\tilde{\Gamma} = \{g \in SL(4,\mathbb{Z}) \mid \rho_\wedge(g)(W) = W\}.$$

由于不变性 $(\rho_\wedge(g)(X)\ \rho_\wedge(g)(Y)) = (X,Y)$，$\Gamma$ 作用于由以下元素生成的子模 $W^\perp \subset \wedge^2 V_{\mathbb{Z}}$

$$E_1, F_1, E_2, F_2, A := e_1 \wedge e_2,\ e_3 \wedge e_4,\ e_2 \wedge e_3,\ e_1 \wedge e_4,\ e_1 \wedge e_3 + e_2 \wedge e_4.$$

容易验证，这些生成元之间非零的配对为 $(E_1, F_1) = (E_2, F_2) = 1$，$(A, A) = -2$。因此 $W^\perp \simeq U^{\oplus 2} \oplus \langle -2\rangle$，且 $\tilde{\Gamma}$ 作用于 $W^\perp$ 并保持双线性形式不变，即 $\rho_\wedge(\tilde{\Gamma}) \subset O(W^\perp)$。现在，通过研究同态 $\rho_\wedge\colon \tilde{\Gamma} \to O(W^\perp)$，可得同构 $\rho_\wedge\colon \tilde{\Gamma}/\{\pm I_4\} \xrightarrow{\sim} SO(U^{\oplus 2} \oplus \langle -2\rangle)_+$（更多详情参见 [22] ）。

我们可以将 $g \in \Gamma$ 的条件明确写为

$$g \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} {}^t g = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

将其与定义 $Sp(4,\mathbb{Z}) := \left\{x \mid {}^t x \left(\begin{smallmatrix} 0 & E_2 \\ -E_2 & 0 \end{smallmatrix}\right) x = \left(\begin{smallmatrix} 0 & E_2 \\ -E_2 & 0 \end{smallmatrix}\right)\right\}$ 比较，我们将（反）同构 $Sp(4,\mathbb{Z}) \simeq \tilde{\Gamma}$ 描述为 $x \mapsto I\,{}^t x I$，其中 $I = \mathrm{diag}(1,1,1,-1)$。于是我们可以将同构 $\Psi\colon Sp(4,\mathbb{Z})/\{\pm I_4\} \simeq SO(U^{\oplus 2} \oplus \langle -2\rangle)_+$ 明确写为

$$\Psi(g) = \rho_\wedge(IgI), \quad (g \in Sp(4,\mathbb{Z})/\{\pm I_4\}).$$

利用这一点，我们验证交换图 (2.6)。

## Appendix B. Table of $\Gamma_0(n)_+$

B.1. **表** $\Gamma_0(n)_+$。在下表1中，我们列出所有零属群 $\Gamma_0(n)_+$，这些群是我们从 [15] 中较长的列表里摘录出来的。第二列中的“类型”指该列表中使用的名称。第三列列出了 $\mathbb{H}_+/\Gamma_0(n)_+$ 的尖点数 $N_c(n)$。按照约定，令 $\Gamma_0(1)_+ \equiv PSL(2,\mathbb{Z})$，即可包含情形 $n = 1$。从 [15, 表 3]可见，若尖点数 $N_c(n)$ 大于 1，则除 $n = 25$、27、49、50 和 54 外（在表中用 * 标出），$\Gamma_0(n)_+$ 的 Thompson 级数 $T_n(t)$ 均可表示为一个 η乘积。

| $n$ | 类型 | $c$ | $n$ | type | $c$ | $n$ | type | $c$ | $n$ | type | $c$ | $n$ | type | $c$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1A | 1 | 14 | 14A | 1 | 27 | 27A | 3* | 42 | 42A | 1 | 62 | 62AB | 1 |
| 2 | 2A | 1 | 15 | 15A | 1 | 28 | 28B | 2 | 44 44阿尔伯塔省 | | 2 | 66 | 66A | 1 |
| 3 | 3A | 1 | 16 | 16C | 3 | 29 | 29A | 1 | 45 | 45A | 2 | 69 | 69AB | 1 |
| 4 | 4A | 2 | 17 | 17A | 1 | 30 | 30B | 1 | 46 46CD | | 1 | 70 | 70A | 1 |
| 5 | 5A | 1 | 18 | 18B | 2 | 31 31阿尔伯塔省 | | 1 | 47 47阿尔伯塔省 | | 1 | 71 | 71AB | 1 |
| 6 | 6A | 1 | 19 | 19A | 1 | 32 | 32A | 4 | 49 | 49Z | 4* | 78 | 78A | 1 |
| 7 | 7A | 1 | 20 | 20A | 2 | 33 | 33B | 1 | 50 | 50A | 3* | 87 | 87AB | 1 |
| 8 | 8A | 2 | 21 | 21A | 1 | 34 | 34A | 1 | 51 | 51A | 1 | 92 | 92AB | 2 |
| 9 | 9A | 2 | 22 | 22A | 1 | 35 | 35A | 1 | 54 | 54A | 3* | 94 | 94AB | 1 |
| 10 | 10A | 1 | 23 23阿尔伯塔省 | | 1 | 36 | 36A | 4 | 55 | 55A | 1 | 95 | 95AB | 1 |
| 11 | 11A | 1 | 24 | 24B | 2 | 38 | 38A | 1 | 56 | 56A | 2 | 105 | 105A | 1 |
| 12 | 12A | 2 | 25 | 25A | 3* | 39 | 39A | 1 | 59 59阿尔伯塔省 | | 1 | 110 | 110A | 1 |
| 13 | 13A | 1 | 26 | 26A | 1 | 41 | 41A | 1 | 60 | 60B | 2 | 119 119阿尔伯塔省 | | 1 |

**表1**。

B.2. **Thompson 级数 $T_n(t) + c_n$ 由 η乘积给出**。 当 $N_c(n) \geq 2$ 和 $n \neq$25、27、49、50、54 时，带有某个加法常数 $c_n$ 的 Thompson 级数可表示为 η乘积。表2 中，我们按照[15], 中的记法列出乘积形式，即 $a_1^{e_1} a_2^{e_2} \cdots := \eta_{a_1}^{e_1} \eta_{a_2}^{e_2} \cdots$。对于每个 $n$, 我们还列出一个值 $b \in \mathbb{Q}$，使得 $(T_n(t) + c_n)^b \eta_{\mathrm{BCOV}}(t)$ 定义一个尖点形式（参见引理 4.2），并给出该尖点形式的表达式。在表中，空白表示我们未能找到具有所需性质的值$b \in \mathbb{Q}$。

| $n$ | $T_n + c_n$ | 尖点形式 | $b$ |
|---|---|---|---|
| 4 | $2^{48}/1^{24}4^{24}$ | $2^4$ | $1/6$ |
| 8 | $2^8 4^8/1^8 8^8$ | 1 2 4 8 | $1/4$ |
| 9 | $3^{12}/1^6 9^6$ | $1\,3^2 9$ | $1/2$ |
| 12 | $2^{12}6^{12}/1^6 3^6 4^6 12^6$ | 1 3 4 12 | $1/6$ |
| 16 | $2^6 8^6/1^4 4^4 16^4$ | $4^8/2^2 8^2$ | $-1$ |
| | $4^{10}/1^2 2^3 8^3 16^2$ | $2^6 8^6/1^{\frac{8}{3}} 4^{\frac{8}{3}} 16^{\frac{8}{3}}$ | $-2/3$ |
| 18 | $3^4 6^4/1^2 2^2 9^2 18^2$ | $3^2 6^2$ | $1$ |
| 20 | $2^8 10^8/1^4 4^4 5^4 20^4$ | $2^2 10^2$ | $1/2$ |
| 24 | $2^2 4^4 6^2 12^2/1^2 3^3 8^2 24^2$ | 2 4 6 12 | $1$ |
| 28 | $2^6 14^6/1^3 4^3 7^3 28^3$ | 1 4 7 28 | $1/3$ |
| 32 | $2^3 16^3/1^2 4\,8\,32^2$ | $4^3 8^3/2\,16$ | $-1$ |
| 36 | $1\,4\,6^{16} 9\,36/2^4 3^6 12^6 18^4$ | $-$ | $-$ |
| | $2^6 3^2 12^2 18^6/1^3 4^3 6^4 9^3 36^3$ | $-$ | $-$ |
| | $2^2 3^4 12^4 18^2/1^2 4^2 6^4 9^2 36^2$ | $6^{12}/3^4 12^4$ | $-2$ |
| 44 | $2^4 22^4/1^2 4^2 11^2 44^2$ | $2^2 22^2$ | $1$ |
| 45 | $3^2 15^2/1\,5\,9\,45$ | 1 5 9 45 | $1$ |
| 56 | $2\,4\,14\,28/1\,7\,8\,56$ | 1 7 8 56 | $1$ |
| 60 | $2^2 6^2 10^2 30^2/1\,3\,4\,5\,12\,15\,20\,60$ | 2 6 10 30 | $1$ |
| 92 | $2^2 46^2/1\,4\,23\,92$ | 1 4 23 92 | $1$ |

**表2**。

## 附录C. **Clingher-Doran 族**

**C.1.Picard-Fuchs 方程。** 周期积分 (5.6) 是 Picard-Fuchs 方程 $\mathcal{D}_i w_0(x) = 0\,(i = 1, 2, ..., 5)$ 的一个解，其中

$$
\begin{aligned}
\mathcal{D}_1 &= \theta_x(\theta_x - 3\theta_y + \theta_z) - x(2\theta_x - \theta_y + 1)(2\theta_x - \theta_y),\\
\mathcal{D}_2 &= (\theta_y - \theta_z)(\theta_x - 3\theta_y + \theta_z) + 2z(2\theta_z + 1)(3\theta_y - \theta_z),\\
\mathcal{D}_3 &= (2\theta_x - \theta_y)(3\theta_y - \theta_z) + 2yz(\theta_x - 2\theta_y - 1)(\theta_x - 3\theta_y + \theta_z)\\
&\qquad + 2yz^2(2\theta_z + 1)(3\theta_x - 6\theta_y + 2\theta_z),\\
\mathcal{D}_4 &= (2\theta_x - \theta_y)(\theta_y - \theta_z) - 4yz^2(2\theta_y + 3)(\theta_x - 3\theta_y + \theta_z)\\
&\qquad - 8yz^3(2\theta_z + 1)(6\theta_y + 4\theta_z + 15),\\
\mathcal{D}_5 &= \theta_x(3\theta_y - \theta_z) + 2xyz(2\theta_x - \theta_y)(\theta_x - 3\theta_y + \theta_z)\\
&\qquad + 12xyz^2(2\theta_x - \theta_y)(2\theta_z + 1).
\end{aligned}
\tag{C.1}
$$

这些微分算子应当像文献[26, 28]中那样由扩展 GKZ 系统导出。这里，我们将其确定为一组微分算子，它们会湮灭 (5.7) 中的超几何级数 $w_0(x)$。通过计算 $x = y = z = 0$ 处的指标理想，可以验证这些算子足以确定所有其他周期积分（见 [28]）。

**C.2. 格里菲斯-汤川耦合。** 设 $\mathfrak{X} \to \mathcal{M}$ 为 Clingher-Doran 族，且 $\Omega := \Omega(x)$ 是纤维 K3 曲面 $X_x$ 在 $x \in \mathcal{M}$ 上的一个全纯二形式。采用记号 $(A, B) := \int_{X_x} A \wedge B$ 表示 $A, B \in H^2(X_x, \mathbb{C})$，我们将格里菲斯-汤川耦合定义为 $C_{ij} := (\Omega\ \partial_i\partial_j\Omega)$，其中令 $(\partial_1, \partial_2, \partial_3) := (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z})$。由格里菲斯横截性可得 $(\Omega, \Omega) = (\Omega\ \partial_i\Omega) = 0$。利用这些关系，我们得到

$$
(\Omega, \partial_i\partial_j\partial_k\Omega) = \frac{1}{2}\partial_i(\Omega, \partial_j\partial_k\Omega) + \frac{1}{2}\partial_j(\Omega, \partial_i\partial_k\Omega) + \frac{1}{2}\partial_k(\Omega, \partial_i\partial_j\Omega).
$$

然后，通过计算 $i = 1$、2、3、$a = 1$、.....、5 对应的 $(\Omega\ \partial_i\mathcal{D}_a\Omega)$，我们得到关于 $C_{ij}$ 的一组一阶微分方程。通过积分这些方程，我们可以确定 $C_{ij}$（相差一个乘法常数）（见 [10, 26]）。例如，我们得到 $C_{11} = \tilde{C}_{11}/dis_0$，其中

$$
\begin{aligned}
\tilde{C}_{11} = 2y^2z^2\big(&115200xy^3z^6 - 82944xy^2z^6 + 9600xy^3z^5 - 27648xy^2z^5 - 976xy^2z^4\\
&+ 88xy^2z^3 - 9xy^2z^2 - 103680y^3z^6 + 103680y^2z^6 + 25920y^2z^5 - 3456y^2z^4\\
&- 48y^2z^3 + 3456yz^4 + 912yz^3 + 12yz^2 + 4yz - 4z - 1\big)
\end{aligned}
$$

and

$$
\begin{aligned}
dis_0 = 1 &- 4x + 4z - 16xz - 4yz + 18xyz + 8xyz^2 - 27x^2y^2z^2 - 864yz^3 + 3456xyz^3\\
&- 48xy^2z^3 + 180x^2y^2z^3 - 3456yz^4 + 13824xyz^4 + 3456y^2z^4 - 15264xy^2z^4\\
&- 1280x^2y^2z^4 - 127872xy^2z^5 + 483840x^2y^2z^5 + 24000x^2y^3z^5\\
&+ 186624y^2z^6 - 1990656xy^2z^6 + 4976640x^2y^2z^6 + 518400xy^3z^6\\
&- 2304000x^2y^3z^6 + 746496y^2z^7 - 5971968xy^2z^7 + 11943936x^2y^2z^7\\
&- 746496y^3z^7 + 6220800xy^3z^7 - 13824000x^2y^3z^7 + 3200000x^3y^4z^7
\end{aligned}
$$

通过调整 $C_{ij}$ 中的乘法常数，我们可以验证镜像对称关系 (3.3)，其中格拉姆矩阵 $(K_{ab})$ 为

$$
(K_{ab}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 6 \\ 3 & 6 & 16 \end{pmatrix} = {}^tP \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} P, \quad P := \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.
$$

**C.3. 轨形点附近的局部解。** 扩展的 GKZ 系统 (C.1) 是由点构型 $\mathcal{A}_3 = \{v_1, v_2, ..., v_6\}$ 确定的 GKZ 系统中的一个不可约系统。我们通过写出 (5.5) $\Delta = \text{Conv.}\{v_1, \cdots, v_6\}$ 来定义该点构型。具体而言，添加原点 $v_0$，并通过 $\bar{v}_i := {}^t(1, v_i)$ 将这些点置于一个仿射平面上，所得点构型为

$$\mathcal{A} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\},$$

而 GKZ 系统是指数为 $\beta = {}^t(-1, 0, 0, 0)$ 的 $\mathcal{A}$-超几何系统

作为 GKZ 系统的一个不可约系统，扩展 GKZ 系统 (C.1) 与 GKZ 系统共享参数空间的紧化，该紧化由 $\mathbb{P}_{SecP}$ 和次级多面体 $SecP$ 给出。次级多面体定义为顶点 $v_T$ 的凸包，这些顶点由 $\mathcal{A}$ 的正则三角剖分 $T$ 参数化。在本例中，我们可以计算所有正则三角剖分（例如使用 TOPCOM[44]）。结果共有 16 个正则三角剖分 $T_k$（$k = 1, ..., 16$）。我们不逐一列出，但在此列出与轨形点对应的那些三角剖分；

$$T_9 = \{\{1,2,3,4\},\{1,2,4,5\}\},$$
$$T_{12} = \{\{1,3,4,5\},\{1,2,3,5\}\}, \quad T_{16} = \quad \{\{1,3,5,6\},\{1,3,4,6\},\{1,2,3,5\}\},$$

其中数字 $i$ 表示 $\mathcal{A}$ 的点 $\bar{v}_i$，而 $\{1,2,3,4\}$ 例如表示 Conv.($\mathcal{A}$) 的三角剖分中的一个单形。虽然需要进行一些计算，但得到以下结果是直接的，因此我们仅列出上述三个三角剖分对应的 (C.1) 的局部解。

• $T_9$. 按照 [20], ，我们可以确定与三角剖分 $T_9$ 对应的仿射图 $A_{T_9}$，如下所示:

$$A_{T_9} = \text{Spec}\mathbb{C}[\sigma_{T_9}^\vee \cap \mathbb{Z}^3]$$

其中，我们定义锥 $\sigma_{T_9}^\vee = \mathbb{R}_{\geq 0}\,{}^t(1,2,0) + \mathbb{R}_{\geq 0}\,{}^t(-1,-2,-6) + \mathbb{R}_{\geq 0}\,{}^t(-1,0,0)$，并作如下等同： $x^{m_1}y^{m_2}z^{m_3}$ 与 ${}^t(m_1, m_2, m_3) \in \mathbb{Z}^3$。该图在原点处是奇异的，因此我们必须解消这个奇点。不过，正如正文中所述，轨形正则性条件与解消无关，因此我们可以在解消后的任意仿射图上施加正则性条件。进行解消后，我们考虑以下（光滑的）仿射坐标，它们与大复结构极限对应的仿射坐标 $x, y, z$ 相关:

$$(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) = (\frac{1}{xy^2z^2}, yz, xy).$$

利用这些坐标，局部解 $\tilde{w}_k(\tilde{x})$ 表示为

$$\tilde{w}_0 = \tilde{x}^{\frac{5}{12}}\tilde{y}^{\frac{1}{3}}\tilde{z}^{\frac{1}{3}}(1+\cdots), \quad \tilde{w}_1 = \tilde{x}^{\frac{1}{2}}\tilde{y}^{\frac{1}{2}}\tilde{z}^{\frac{1}{2}}(1+\cdots), \quad \tilde{w}_2 = \tilde{x}^{\frac{7}{12}}\tilde{y}^{\frac{2}{3}}\tilde{z}^{\frac{2}{3}}(1+\cdots)$$
$$\tilde{w}_3 = \tilde{x}^{\frac{11}{12}}\tilde{y}^{\frac{4}{3}}\tilde{z}^{\frac{1}{3}}(1+\cdots), \quad \tilde{w}_4 = \tilde{x}^{\frac{13}{12}}\tilde{y}^{\frac{5}{3}}\tilde{z}^{\frac{2}{3}}(1+\cdots),$$

其中， $\tilde{w}_0$ 是满足 $\tilde{w}_k/\tilde{w}_0$ 为正则的唯一解。在上述方程中， $\cdots$ 表示关于 $\tilde{x}$、 $\tilde{y}$、 $\tilde{z}$的高阶项 $O(\tilde{x})$。

• $T_{12}$。与上述类似，我们有

$$A_{T_{12}} = \text{Spec}\mathbb{C}[\sigma_{T_{12}}^\vee \cap \mathbb{Z}^3]$$

其中 $\sigma_{T_{12}}^\vee = \mathbb{R}_{\geq 0}\,{}^t(-1,-2,0) + \mathbb{R}_{\geq 0}\,{}^t(-1,-2,-5) + \mathbb{R}_{\geq 0}\,{}^t(-1,0,0)$。为解析 $A_{T_{12}}$ 在原点处的奇点，我们采用以下（光滑）仿射坐标:

$$(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) = (\frac{1}{yz^2}, \frac{1}{xz}, z).$$

利用这些坐标，局部解 $\tilde{w}_k(\tilde{x})$ 为

$$\tilde{w}_0 = \tilde{x}^{\frac{1}{5}}\tilde{y}^{\frac{1}{10}}(1+\cdots),\quad \tilde{w}_1 = \tilde{x}^{\frac{2}{5}}\tilde{y}^{\frac{7}{10}}(x+c_1 z+\cdots),$$
$$\tilde{w}_2 = \tilde{x}^{\frac{3}{5}}\tilde{y}^{\frac{3}{10}}(1+\cdots),\quad \tilde{w}_3 = \tilde{x}^{\frac{4}{5}}\tilde{y}^{\frac{9}{10}}(x+c_2 z+\cdots),\quad \tilde{w}_4 = \tilde{x}\tilde{y}(1+\cdots),$$

其中，$c_1 = -\frac{38400}{11}$、$c_2 = -\frac{153600}{119}$和 $\tilde{w}_0$ 是满足 $\tilde{w}_k/\tilde{w}_0$ 为正则的性质的唯一解。如上所述，$\cdots$表示高阶项。

• $T_{16}$。为此，我们可以计算

$$A_{T_{16}} = \mathrm{Spec}\mathbb{C}[\sigma_{T_{16}}^{\vee} \cap \mathbb{Z}^3]$$

其中 $\sigma_{T_{16}}^{\vee} = \mathbb{R}_{\geq 0}\,{}^t(1,0,0) + \mathbb{R}_{\geq 0}\,{}^t(-1,-2,-5) + \mathbb{R}_{\geq 0}\,{}^t(-3,-2,0)$。作为 $A_{T_{16}}$解消的仿射坐标，我们取

$$(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z}) = (\frac{1}{x^3 y}, x, \frac{x}{z}).$$

利用这些坐标，局部解 $\tilde{w}_k(\tilde{x})$ 可表示为

$$\tilde{w}_0 = \tilde{x}^{\frac{1}{5}}\tilde{z}^{\frac{1}{2}}(1+\cdots),\quad \tilde{w}_1 = \tilde{x}^{\frac{2}{5}}\tilde{z}^{\frac{1}{2}}(1+\cdots),\quad \tilde{w}_2 = \tilde{x}^{\frac{3}{5}}\tilde{z}^{\frac{1}{2}}(1+\cdots)$$
$$\tilde{w}_3 = \tilde{x}^{\frac{4}{5}}\tilde{z}^{\frac{1}{2}}(1+\cdots),\quad \tilde{w}_4 = \tilde{x}\tilde{z}^{\frac{1}{2}}(1+\cdots),$$

其中 $\tilde{w}_0$ 是满足 $\tilde{w}_k/\tilde{w}_0$ 为正则的性质的唯一解。如上所述，$\cdots$表示高阶项。

注 C.1。虽然我们不详述细节，但上述所有正则解都可表示为 GKZ 的超几何级数，其形式为

$$\Phi_\gamma(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z}) = \sum_{\ell\in L}\frac{a_0}{\prod_i \Gamma(1+\ell_i+\gamma_i)}\prod_{i=0}^{6} a_i^{\ell_i+\gamma_i},$$

其中 $L = \mathrm{Ker}\left\{A:\mathbb{Z}^4\to\mathbb{Z}^4\right\}$ with $A$ 是由 $\mathcal{A}$自然定义的整数 $4\times 7$ 矩阵。指数 $\gamma$ 是 $A\gamma=\beta$的一个解，而仿射坐标 $\tilde{x}$、$\tilde{y}$、$\tilde{z}$ 由与相应三角剖分$T$相容的 $\mathbb{Z}$-基 $L$ 定义。更多细节请参见 [GKZ] 。

## 附录D. $\tau_{\mathrm{BCOV}}$ 椭圆曲线的τBCOV

**D.1. 周期积分与 Picard-Fuchs 方程。** Clingher-Doran 族 (5.1) 是椭圆曲线族 Weierstrass 标准形的一种推广；$\mathrm{y}^2 = 4\mathrm{x}^3 - g_2\mathrm{x} - g_3$ 其中 $g_2 = 12E_4(\tau)$ $g_3 = 216E_6(\tau)$，而 $E_4$ 和 $E_6$是标准艾森斯坦级数。经典事实是，由点 $[g_2,g_3]$ 组成的加权射影空间 $\mathbb{P}^1(2,3)$ 给出椭圆曲线的粗模空间。该椭圆曲线族的周期积分可用与第 5.2 小节相当平行的方式描述，基于此我们可以找到一个族 $\mathfrak{X}\to\mathbb{P}_\Sigma\simeq\mathbb{P}^1$，即一个参数空间 $\mathbb{P}_\Sigma$，其上存在一个万有族。这里我们简要概述相关计算。

我们将 Weierstrass 标准形嵌入更一般的三次曲线中

$$F = a_0\mathrm{xyz} + a_1\mathrm{y}^2\mathrm{z} + a_2\mathrm{x}^3 + a_3\mathrm{z}^3 + a_4\mathrm{xz}^2 + a_5\mathrm{x}^2\mathrm{z} + a_6\mathrm{yz}^2$$

在 $\mathbb{P}^2$ 中，取 $(a_0,a_1,\ldots,a_6) = (0,1,-4,g_3,g_2,0,0)$。我们将 $F$的牛顿多面体关联到一个反身多面体 $\Delta_F = \mathrm{Conv.}\left\{\binom{1}{-1},\binom{-1}{2},\binom{-1}{-1}\right\}$，其中 xyz 对应原点，而 $\mathrm{xz}^2$,$\mathrm{x}^2\mathrm{z}$、$\mathrm{yz}^2$ 位于余维一的直线上。这三个单项式表明，一个（约化）群 $G$ 正作为其自同构作用于 $F$。不难发现，$G$ 由以下元素生成

$$(\mathrm{x},\mathrm{y},\mathrm{z})\mapsto(\mathrm{x},\mathrm{y}+c_1\mathrm{x},\mathrm{z});\ (\mathrm{x},\mathrm{y},\mathrm{z})\mapsto(\mathrm{x},\mathrm{y}+c_2\mathrm{z},\mathrm{z});\ (\mathrm{x},\mathrm{y},\mathrm{z})\mapsto(\mathrm{x}+c_3\mathrm{z},\mathrm{y},\mathrm{z}).$$

如正文所述，周期积分的一个优选形式 $F_{toric}(a)$（参见 (5.6)）由 $a_4 = a_5 = a_6 = 0$给出，因为采用这种形式很容易找到 Picard-Fuchs 方程

$$\left\{\theta_x^2 - 12x(6\theta_x + 5)(6\theta_x + 1)\right\} w(x) = 0 \tag{D.1}$$

借助 $x = \frac{a_1^3 a_2^2 a_3}{a_0^6}$。也就是说，族 $\{F_{toric}(a)\}_{a\in(\mathbb{C}^*)^4}$ 通过坐标 $x$定义了所需的族 $\mathfrak{X} \to \mathbb{P}^1$。我们用黎曼的 $\mathcal{P}$-方案来表示该方程的奇点，

$$\left\{ \begin{array}{ccc} 0 & \frac{1}{432} & \infty \\ \hline 0 & 0 & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & \frac{5}{6} \end{array} \right\} \tag{D.2}$$

利用 $G$ 的作用，我们可以发现魏尔斯特拉斯标准形式与 $F_{toric}(a)$ 之间存在如下关系：

$$(a_0, a_1, a_2, a_3) = (-2i\sqrt{2}(3\,g_2)^{\frac{1}{4}}, 1, -4, -\frac{g_2^{\frac{3}{2}}}{3\sqrt{3}} + g_3).$$

由此可得关系式

$$x = \frac{\sqrt{3}g_2^{\frac{3}{2}} - 9g_3}{864\sqrt{3}g_2^{\frac{3}{2}}},\quad \frac{1}{x(1-432x)} = \frac{1728g_2^3}{g_2^3 - 27g_3^2} = \frac{1}{j(\tau)}. \tag{D.3}$$

作为幂级数解，我们有 $w_0(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{(6n)!}{(3n)!(2n)!n!}x^n$，并得到关系式$w_0(x(\tau)) = E_4(\tau)^{\frac{1}{4}}$。

D.2. $\tau_{\mathrm{BCOV}}$ **对于族** $\mathfrak{X} \to \mathbb{P}^1$。如 (D.2) 所示，该族在 $x = 0$ 和 $432x - 1 = 0$ 处同构退化。事实上，容易验证，Picard-Fuchs 方程 (D.1) 在变量替换 $x = \frac{1}{432} - u$ 下保持不变。考虑这一对称性，并要求在轨形点 $x = \infty$ 处正则，我们由下式确定该族的 $\tau_{\mathrm{BCOV}}$：

$$\tau_{\mathrm{BCOV}} = \left(\frac{1}{w_0(x)}\right)^3 \frac{dx}{d\tau}(1-432x)^{-1-\frac{1}{12}}x^{-1-\frac{1}{12}} = \frac{1}{\eta(\tau)^2}. \tag{D.4}$$

这里，$\left(w_0^{\frac{1}{3}}(x)\right)$ 的幂由 BCOV 公式 (1.3) 通过令$h^{1,1}(X) = 0$ 和 $\chi = 0$来确定。

D.3. **单值群** $\mathcal{G}_E$。从 $\{F_{toric}(a)\}_{a\in(\mathbb{C}^*)^4}$ 出发，我们得到 $\mathbb{P}_\Delta = \mathbb{P}^1$上的一个普适族 $\mathfrak{X}$；而从 Weierstrass 标准形出发，我们只能得到一个粗模空间 $\mathbb{P}^1(2,3) \simeq \mathbb{P}^1$，它同构于 $\mathbb{H}_+/PSL(2,\mathbb{Z})$。我们可以从族 $\mathfrak{X} \to \mathbb{P}^1$的单值群 $\mathcal{G}_E$ 中看出这种差异。这里我们简要总结 $\mathcal{G}_E$的计算。

作为 Picard-Fuchs 方程的整基，我们取

$$I_1(x) = \frac{1}{2\pi i}w_0(x)\,\log x + w_1(x),\ I_0(x) = w_0(x),$$

其中，$w_0(x)$ 是上文围绕 $x = 0$ 的幂级数解，而 $w_1(x)$ 是形如 $w_1(x) = cx + O(x^2)$ 的幂级数。将这些解排列成列向量 $^t(I_1(x)\ I_0(x))$，即可直接得到分别围绕 $x = 0$、$1$、$\frac{1}{432}$ 和 $\infty$ 的单值矩阵：

$$M_0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},\ M_\infty = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

由此得到 $P\mathcal{G}_E = \langle TS, T\rangle$，其中 $PSL(2,\mathbb{Z}) = \langle S, T\rangle$，且 $S = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right), T = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$，并且我们看到 $P\mathcal{G}_E = \langle S, PSL(2,\mathbb{Z})\rangle$。从最后一个关系可知，$P\mathcal{G}_E$ 的基本域为

$$\mathcal{F}_E = \mathcal{F} \cup (S \cdot \mathcal{F}),$$

其中，$\mathcal{F}$表示 $PSL(2,\mathbb{Z})$的标准基本域。

D.4. **连接矩阵** $C_{[0,1]}$。 **</style}显然，在上作对合变换，交换两个尖点。周期映射: 由 () (**$x$) $I_0(x)$ 定义，是多值的。我们可以固定此映射的一个分支，使其成为~~一个~~同构 $\mathbb{P}^1 \simeq \mathcal{F}_E$，其逆映射给出镜像映射 $x = x(\tau)$。 $\tau \in \mathcal{F}_E$的 $S$变换 $S{*}\tau$ 包含于 $\mathcal{F}_E$ 中。相应地，在该同构下有 $x(S{*}\tau) = \frac{1}{432} - x(\tau)$。我们可以如下推导出最后一个关系：由于 $x = 0$ 和 $x = \frac{1}{432}$ 附近的局部解在其收敛域中有重叠，因此很容易得到以下关系式:

$$I_0(x) = -i\, I_1(\frac{1}{432} - x), \quad I_1(x) = i\, I_0(\frac{1}{432} - x).$$

若我们将 $u$ 附近的整基= $\frac{1}{432} - x = 0$ 设为 $^t(I_1(u)\ I_0(u))$，则连接矩阵为 $C_{[0,1]} = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{smallmatrix}\right) = i\,S$。注意，该结果给出

$$w_0(x(S{*}\tau)) = -i\,\frac{I_1(x(\tau))}{I_0(x(\tau))} w_0(x(\tau)) = -i\tau\, w_0(x(\tau)),$$

这告诉我们关系 $w_0(\tau) = (E_4(\tau))_{1\,4}$ 所属的分支，即 $(E_4(S{*}\tau))^{\frac{1}{4}} = (\tau^4 E_4(\tau))^{\frac{1}{4}} = -i\tau (E_4(\tau))^{\frac{1}{4}}$。这也确定了 $(g_2(S{*}\tau))^{\frac{3}{2}} = -\tau^6 (g_2(\tau))_{3\,2}$，根据 (D.3)，由此得到-关系 $x(S{*}\tau) = \frac{1}{432} - x(\tau)$。

## 参考文献


[1] G. Almkvist, C. van Enckevort, D. van Straten 和 W. Zudlin，*Calabi-Yau* 方程表，arXiv:math0507430v2。[2] M. Atiyah，*Dedekind* $\eta$函数的对数，Math. Ann. 278 (1987) 335–380。[3] W. P. Barth 、 K. Hulek 、 C. A.M. Peters 和 A. van de Van，紧复曲面，第 2 版，Springer 出版社，柏林，2004年。[4] V. Batyrev，环面簇中 *Calabi-Yau* 超曲面的对偶多面体与镜像对称，J. Alg. Geom. 3 (1994) 493–535。[5] V. V. Batyrev 和 L. A. Borisov，关于环面簇中的 *Calabi-Yau* 完全交，《高维复簇》（特伦托，1994），de Gruyter，柏林，1996年，第39–65页。[6] V. Batyrev 和 D. A. Cox，关于环面簇中射影超曲面的霍奇结构，Duke Math. J.

75 1994 2, 293 338, ( )，第 – 期。M. Bershadsky、S. Cecotti、[7]

H. Ooguri 和 C. Vafa，拓扑场论中的全纯反常，Nuclear Phys. B 405 (1993)，第2-3期，279–304。[8] M. Bershadsky、S. Cecotti、H. Ooguri 和 C. Vafa，引力的 *Kodaira-Spencer* 理论与量子弦振幅的精确结果，Commun. Math. Phys. 165 (1994)，第2期，311–427。[9] R. Borcherds，关于 $O_{s+2,2}(\mathbb{R})$ 上的自守形式与无限乘积，Invent. Math. 120, (1995)161–213。[10] P. Candelas、X.C. de la Ossa、P.S. Green 和 L.Parkes，一对 *Calabi-Yau* 流形作为恰好可解的超共形理论，Nucl.Phys. B356(1991), 21-74。[11] S. Cecotti、P. Fendley、K. Intriligator 和 C. Vafa，一种新的超对称指标，Nuclear Phys. B 386 (1992) 405–452。[12] S. Cecotti 和 C. Vafa，伊辛模型与 $N = 2$ 超共形理论，Commun. in Math. Phys. 157 1993 139 178 ( ) - A. Clingher 和 C.F. Doran，格极化 [13]

*K3* 曲面与 *Siegel* 模形式，Adv. in Math. 231 (2012) 172–212。[14] A. Clingher 和 C.F. Doran，关于 *K3* 曲面的一种几何同源的注记，Int. Math. Res. Not. 16 (2011) 3657–3687。

[15] J. H. Conway 和 S. P. Norton，怪兽月光，《伦敦数学会通报》11，308 339，1979年 –。[16] I. V. Dolgachev，格极化 K3 曲面的镜像对称，J. Math. Sci. 81 (1996)，第3期，2599–2630。[17] C. Doran，Picard-Fuchs 一致化：镜像映射的模性与镜像月光，载于《代数循环的算术与几何》（Banff，阿尔伯塔省，1998年），257–281，CRM会议论文讲义，24，美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，2000年。[18] R. Fricke，《椭圆函数及其应用》，第2部分（Teubner，莱比锡，1992年）。[19] I.M. Gel'fand、A. V. Zelevinski 和 M.M. Kapranov，超几何函数与环面簇，泛函分析及其应用 23(1989)，12–26；英文译本：Functional Anal. Appl. 23(1989)，94-106。[20] I.M. Gel'fand、A. V. Zelevinski 和 M.M. Kapranov，《判别式、结式与多维行列式》，Birkhäuser Boston，1994年。[21] M. Guest、S. Hosono 和 A. Kanazawa，研究进行中。[22] V. Gritsenko 和 K. Hulek，极小 Siegel模三维簇，Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 123 (1998)，第3期，461–485。[23] V.A. Gritsenko 和 V.V. Nikulin，自守形式与洛伦兹Kac-Moody代数。I，Internat. J. Math. 9 (1998)，第2期，153–199。[24] S. Hosono，局部镜像对称与 Calabi-Yau 流形的 IIA 型幺正性，Adv. Theor. Math. Phys. 4 (2000)，335–376。[25] S. Hosono 和 A. Kanazawa，《"格极化 K3 曲面的 BCOV 尖点形式"的补遗》，见 arXiv:2023: mathAG。[26] S. Hosono、A. Klemm、S. Theisen 和 S.-T. Yau，镜像对称、镜像映射及其在 Calabi-Yau 超曲面中的应用，Commun. Math. Phys. 167 (1995)，第2期，301–350。[27] S. Hosono、A. Klemm、S. Theisen 和 S.-T. Yau，镜像对称、镜像映射及其在完全交 Calabi-Yau 空间中的应用，Nucl. Phys. B433(1995)501–554。[28] S. Hosono、B.H. Lian 和 S.-T. Yau，镜像对称中 Calabi-Yau 超曲面的 GKZ广义超几何系统，Commun. Math. Phys. 182 (1996) 535–577。[29] S. Hosono、B.H. Lian 和 S.-T. Yau，GKZ 系统的最大退化点，J. Amer. Math. Soc. 10 (1997)，第2期，427–443。[30] S. Hosono、B.H. Lian、K. Oguiso 和 S.-T. Yau，K3 曲面的自同构等价与单值变换，J. Algebraic Geom. 13(2004), 513–545。[31] S. Hosono、B.H. Lian、K. Oguiso 和 S.-T. Yau，c$=2$通过高斯乘积构造有理环面共形场论，Commun. Math. Phys. 241 (2003) 245–286。[32] S. Hosono、B.H. Lian、H. Takagi 和 S.-T. Yau，由 $\mathbb{P}^2$ 中的六条直线构型得到的 K3 曲面与镜像对称 I。Commun. Number Theory Phys. 14 (2020)，第4期，739–783。[33] J. Igusa，关于二元 Siegel 模形式，美国数学杂志第84卷 (1962年) 175–200。[34] J. Jorgenson 和 A. Todorov，Enriques 曲面、解析判别式与 Borcherds 的 $\Phi$ 函数，Commun. Math. Phys. 191 (1998) 249–264。[35] M. Kaneko 和 D. Zagier，广义Jacobi theta函数与拟模形式，载于《曲线模空间》，165--172，数学进展，129，Birkhäuser Boston，MA (1995)。[36] T. Kawai，K3 曲面、Igusa 尖点形式与弦理论，载于《拓扑场论、原始形式及相关主题》（京都，1996年），273–303，数学进展，160，Birkhäuser Boston，Boston，MA，1998年。[37] M. Kontsevich，镜像对称的同调代数，《国际数学家大会论文集》（苏黎世，1994年），Birkh"auser (1995)，第120–139页。[38] G. Koehler，《η 乘积与Theta级数恒等式》，Springer数学专著，Springer出版社，柏林 (2010)。[39] B.H. Lian 和 S.-T. Yau，镜像映射与量子耦合的算术性质，Commun. Math. Phys. 176 (1996)，第1期，163–191。[40] D.R. Morrison，关于具有大Picard数的 K3 1, 105 75 1984 121 曲面，Invent. Math. ( )，第 – 期。[41] V.V. Nikulin，整数对称双线性形式及其若干几何应用，苏联科学院数学消息 43 (1979)，第1期，111–177，238。[42] K. Oguiso，通过几乎素数构造 K3 曲面，Math. Res. Lett. 9 (2002) 47–63。[43] D. Quillen，Riemann曲面上 Cauchy-Riemann 算子的行列式，泛函分析及其应用 19 (1985) 31–34。[44] J. Rambau，TOPCOM：点构型与定向拟阵的三角剖分，《数学软件：ICMS 2002》（Cohen, Arjeh M.、Gao, Xiao-Shan 和 Takayama, Nobuki 编），World Scientific (2002)，第330-340页。[45] D.B. Ray 和 I.M. Singer，复流形的解析挠率，数学年刊 98 (1973) 154–177。

[46] A. Strominger，《特殊几何》，《数学物理通讯》133（1990）163-180。[47] G. Tian，《紧Calabi-Yau流形通用变形空间的光滑性及其Petersson-Weil度量》，载于《弦理论的数学方面》（S.-T. Yau 编），World Scientific，新加坡（1987）629-646。[48] K.Yoshikawa，《带对合的K3曲面、等变解析挠率与模空间上的自守形式》，数学发明 156（2004）53–117。[49] H. Verrill 和 N. Yui，《K3曲面铅笔的Thompson 级数与镜像映射》，载于《代数循环的算术与几何》（Banff，阿尔伯塔省，1998年），399–432，CRM会议论文讲义，24，美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，2000年。

Shinobu Hosono 数学系，学习院大学，目白，东京丰岛区 171-8588，日本 电子邮件：hosono@math.gakushuin.ac.jp

Atsushi Kanazawa 政策管理学院，庆应义塾大学，神奈川县藤泽市远藤5322，252-0882，日本 电子邮件：atsushik@sfc.keio.ac.jp

# $\Gamma_0$零亏格群的 K3 微分算子（$n$）+

## —《格极化 K3 曲面的 BCOV 尖点形式》补遗—

S. Hosono 和 A. Kanazawa

在论文 [1], 中，我们为所有类型为 $\Gamma_0(n)+$ 的零亏格群引入了 *K3* 微分算子（命题 4.9）。有关这些零亏格群的所有细节，包括历史背景，均可参见文献 [2]。特别是，Thompson 级数的 $q$ 级数展开（至加法常数）见 [2] 的表 4。为便于查阅 [2], 中的表 4，我们通过相应的类型来指定 $\Gamma_0(n)+$ 的零亏格群；该类型根据 ATLAS 表 [3] 表示怪物群的一个共轭类。若要快速查看对应关系，请参阅 [1]附录 B 中的表格。

对于每种类型 $m$，我们都有如下定义的 Thompson 级数：

$$T_m(q) = \frac{1}{q} + 0 + H_1(m)q + H_2(m)q^2 + \cdots$$

它与怪物群的所谓头表示 $H_r$ 有关。对于 $m$，相应的零亏格群为 $\Gamma_0(n)+$，K3 微分算子为 $\mathcal{D}_m$，其镜像映射由 Thompson 级数给出，如下：

$$\frac{1}{x(q)} = T_m(q) + c_0 \tag{1}$$

其中 $c_0$ 为某个常数。对于若干类型 $m$，这一关系最早是在 [4] 中发现的；并且人们猜想它一般地对所有零亏格群都成立。 [1] 中的命题 4.9 给出了零亏格群 $\Gamma_0(n)+$ 的 K3 微分算子的完整列表，这部分验证了 Lian 和 Yau 在 [4] 中提出的猜想。然而，尚不清楚每个 K3 微分算子（如下所列）是否都来自一个 K3 曲面族。

在下表中，第一列给出类型 $m$，相应的 K3 微分算子 $\mathcal{D}_m$ 列于第二列。第三列以如下形式给出了 $\mathcal{D}_m$ 的大复结构极限点数 $N_L$ 以及式 (1) 中的常数项 $c_0$；$\begin{matrix} N_L \\ c_0 \end{matrix}$。我们可以验证， $N_L$ 等于相应群 $\Gamma_0(n)+$ 的尖点数 $N_c$。常数 $c_0$ 并非唯一确定。若 $N_L \geq 2$，则确定 $c_0$，使得除 $n$ =25、27、49、50、54 外，$T_n + c_n$ 具有一个 η乘积。若 $N_L = 1$，我们尝试确定 $c_0$，使得唯一的幂级数 $w_0(x) = 1 + \sum_n a_n x^n$ 至少在较低的 $n \leq 20$ 中具有整数系数 $a_n$（参见 [1] 的注 4.9）。在几乎所有情形中，我们都能找到这样的 $c_0$，但对于某些情形，我们未能找到这样的 $c_0$ 取值，这些情形在 $c_0^\dagger$ 中以 † 标示。

### 参考文献

[1] S. Hosono 和 A. Kanazawa，格极化 *K3* 曲面的 *BCOV* 尖点形式，arXiv，2023年。[2] J. H. Conway 和 S. P. Norton，怪兽月光，《伦敦数学会通报》11，308–339，1979年–。[3] J. H. Conway 等，《有限群图谱》：极大子群与单群的普通特征，牛津大学出版社（1986年）。[4] B.H. Lian 和 S.-T. Yau，镜像映射与量子耦合的算术性质，《数学物理通讯》176（1996年），第1期，163–191。

| $m$ | K3 微分算子 $\mathcal{D}_m$ | $N_L$<br>$c_0$ |
|---|---|---|
| $1A$ | $\theta^3 - 24x(2\theta+1)(6\theta+1)(6\theta+5)$ | 1<br>744 |
| $2A$ | $\theta^3 - 8x(2\theta+1)(4\theta+1)(4\theta+3)$ | 1<br>104 |
| $3A$ | $\theta^3 - 6x(2\theta+1)(3\theta+1)(3\theta+2)$ | 1<br>42 |
| $4A$ | $\theta^3 - 8x(2\theta+1)^3$ | 2<br>24 |
| $5A$ | $\theta^3 - 2x\left(23\theta^3+33\theta^2+17\theta+3\right) + 4x^2\theta\left(19\theta^2+21\theta+6\right)$<br>$-24x^3\theta(2\theta+1)(3\theta+2) - 16x^4(\theta+1)(2\theta+1)(2\theta+3)$ | 1<br>16 |
| $6A$ | $\theta^3 - 2x\left(11\theta^3+30\theta^2+16\theta+3\right) - 36x^2\theta(2\theta+1)(8\theta+5)$<br>$+648x^3(\theta+1)(2\theta+1)(2\theta+3)$ | 1<br>14 |
| $7A$ | $\theta^3 + x\left(-32\theta^3-39\theta^2-21\theta-4\right) + 3x^2\theta\left(43\theta^2+51\theta+16\right)$<br>$+18x^3(\theta+1)(3\theta+2)(3\theta+4)$ | 1<br>9 |
| $8A$ | $\theta^3 - 4x(\theta+1)\left(5\theta^2+4\theta+1\right) - 16x^2\theta\left(5\theta^2+6\theta+2\right)$<br>$+64x^3(\theta+1)^3$ | 2<br>8 |
| $9A$ | $\theta^3 - 3x(3\theta+1)\left(3\theta^2+2\theta+1\right) + 27x^2\theta\left(5\theta^2+6\theta+2\right)$<br>$+243x^3(\theta+1)^3$ | 2<br>6 |
| $10A$ | $\theta^3 - 2x\left(21\theta^3+9\theta^2+5\theta+1\right) + 4x^2\theta\left(299\theta^2+87\theta+28\right)$<br>$-120x^3\theta\left(299\theta^2+87\theta+28\right) + 3600x^4\theta\left(74\theta^2+87\theta+28\right)$<br>$+108000x^5(\theta+1)(4\theta+3)(4\theta+5)$ | 1<br>4 |
| $11A$ | $\theta^3 - 2x\left(2\theta^3+15\theta^2+9\theta+2\right) - x^2\theta\left(41\theta^2+312\theta+112\right)$<br>$-4x^3\theta\left(902\theta^2+1050\theta+371\right)$<br>$+8x^4(\theta+1)\left(1473\theta^2+2814\theta+1520\right)$<br>$-4906x^5(\theta+1)(\theta+2)(2\theta+3)$ | 1<br>6 |
| $12A$ | $\theta^3 - 2x\left(2\theta^3+15\theta^2+9\theta+2\right)$<br>$-32x^2\theta\left(8\theta^2+9\theta+3\right) + 1024x^3(\theta+1)^3$ | 2<br>6 |
| $13A$ | $18\theta^3 + 12x\left(55\theta^3-108\theta^2-72\theta-18\right)$<br>$+x^2\theta\left(40337\theta^2-65556\theta-25416\right)$<br>$-6x^3\theta\left(712163\theta^2+645294\theta+240298\right)$<br>$+x^4\left(1027251918\theta^3+250140666\theta^2+23500714 8\theta+79888024\right)$<br>$-6x^5(6\theta+7)\left(30044871\theta^2+79818815\theta+58759441\right)$<br>$+36x^6(6\theta+7)(6\theta+13)(4122537\theta+7564391)$<br>$-46966608x^7(6\theta+7)(6\theta+13)(6\theta+19)$ | 1<br>12 |
| $14A$ | $5\theta^3 + x\left(31\theta^3-165\theta^2-105\theta-25\right)$<br>$-x^2\theta\left(2497\theta^2+2838\theta+1046\right)$<br>$+x^3(\theta+1)\left(16081\theta^2+30692\theta+16941\right)$<br>$-13818x^4(\theta+1)(\theta+2)(2\theta+3)$ | 1<br>6 |
| $15A$ | $\theta^3 + x\left(14\theta^3-39\theta^2-25\theta-6\right)$<br>$-3x^2\theta\left(277\theta^2+311\theta+114\right)$<br>$+40x^3(\theta+1)\left(191\theta^2+355\theta+186\right)$<br>$-900x^4(\theta+1)(\theta+2)(31\theta+45) + 36000x^5(\theta+1)(\theta+2)(\theta+3)$ | 1<br>7 |

| | | |
|---|---|---|
| $16C$ | $\theta^3 - 2x(3\theta+1)\left(3\theta^2+2\theta+1\right)$<br>$+8x^2\theta\left(11\theta^2+15\theta+7\right) - 16x^3(\theta+1)\left(11\theta^2+7\theta+3\right)$<br>$+16x^4(3\theta+2)\left(3\theta^2+4\theta+2\right) - 32x^5(\theta+1)^3$ | 3<br>4 |
| $17A$ | $\theta^3 + x\left(-41\theta^3 - 9\theta^2 - 5\theta - 1\right) + x^2\theta\left(183\theta^2+234\theta+86\right)$<br>$+x^3\left(917\theta^3+2709\theta^2+2921\theta+1123\right)$<br>$+2x^4(2\theta+3)\left(241\theta^2+717\theta+575\right)$<br>$+140x^5(\theta+2)(2\theta+3)(2\theta+5)$ | 1<br>2 |
| $18B$ | $16\theta^3 - 8x\left(47\theta^3+21\theta^2+13\theta+3\right) + 36x^2\theta\left(42\theta^2+49\theta+18\right)$<br>$+18x^3\left(332\theta^3+1032\theta^2+1141\theta+444\right) - 891x^4(2\theta+3)^3$ | 2<br>$2^\dagger$ |
| $19A$ | $882\theta^3 - 294x\left(5\theta^3+54\theta^2+36\theta+9\right)$<br>$+98x^2\theta\left(151\theta^2-1080\theta-441\right) - 294x^3\theta\left(3570\theta^2+4260\theta+1771\right)$<br>$+98x^4\left(24019\theta^3+72444\theta^2+82866\theta+34597\right)$<br>$+98x^5\left(6041\theta^3+23418\theta^2+34287\theta+18954\right)$<br>$-314286x^6(\theta+2)(3\theta+5)(3\theta+7)$ | 1<br>3 |
| $20A$ | $\theta^3 + 4x\left(\theta^3-6\theta^2-4\theta-1\right) - 16x^2\theta\left(16\theta^2+18\theta+7\right)$<br>$+8x^3\left(152\theta^3+444\theta^2+466\theta+173\right) - 160x^4(2\theta+3)^3$ | 2<br>4 |
| $21A$ | $11\theta^3 + x\left(347\theta^3-660\theta^2-462\theta-121\right)$<br>$-x^2\theta\left(27527\theta^2+27684\theta+11373\right)$<br>$+x^3\left(5161697\theta^3+1352262\theta^2+1356837\theta+493276\right)$<br>$-6x^4(3\theta+4)\left(237216\theta^2+656335\theta+500699\right)$<br>$+360x^5(3\theta+4)(3\theta+7)(5067\theta+9551)$<br>$-885600x^6(3\theta+4)(3\theta+7)(3\theta+10)$ | 1<br>9 |
| $22A$ | $\theta^3 - 2x\left(5\theta^3+6\theta^2+4\theta+1\right) + 2x^2\theta\left(41\theta^2+6\theta+2\right)$<br>$-2x^3\theta\left(258\theta^2+327\theta+143\right) - 4x^4\left(96\theta^3+339\theta^2+429\theta+196\right)$<br>$+4x^5(2\theta+3)\left(323\theta^2+981\theta+810\right) - 560x^6(\theta+2)(2\theta+3)(2\theta+5)$ | 1<br>2 |
| $23AB$ | $\theta^3 + x\left(8\theta^3-21\theta^2-15\theta-4\right) - x^2\theta\left(251\theta^2+291\theta+128\right)$<br>$+x^3\left(1148\theta^3+3285\theta^2+3671\theta+1492\right)$<br>$-2x^4\left(1121\theta^3+4977\theta^2+7951\theta+4500\right)$<br>$+4x^5(\theta+2)\left(491\theta^2+1958\theta+2082\right)$<br>$-x^6(\theta+2)(\theta+3)(371\theta+956) - 418x^7(\theta+2)(\theta+3)(\theta+4)$ | 1<br>3 |
| $24B$ | $\theta^3 - 2x\left(\theta^3+6\theta^2+4\theta+1\right) - 4x^2\theta\left(10\theta^2+12\theta+5\right)$<br>$+8x^3\left(2\theta^3-7\theta-6\right) - 16x^4\left(11\theta^3+48\theta^2+72\theta+37\right)$<br>$+96x^5(\theta+2)^3$ | 2<br>2 |
| $25A$ | $\theta^3 - 8x\left(5\theta^3+45\theta^2+33\theta+9\right) - 8x^2\theta\left(202\theta^2+231\theta+104\right)$<br>$+4x^3\left(986\theta^3+3237\theta^2+4449\theta+2393\right)$<br>$+4x^4\left(1142\theta^3+4527\theta^2+7967\theta+5337\right)$<br>$-4x^5\left(3568\theta^3+21660\theta^2+48460\theta+39175\right)$<br>$-2x^6\left(19000\theta^3+129000\theta^2+382499\theta+44097\right)$<br>$+2x^7\left(7764\theta^3+70272\theta^2+220703\theta+239610\right)$<br>$+2x^8(2\theta+7)\left(932\theta^2+6272\theta+12851\right)$<br>$-x^9(2\theta+7)(2\theta+9)(1466\theta+5963)$<br>$-275x^{10}(2\theta+7)(2\theta+9)(2\theta+11)$ | 3<br>$2^\dagger$ |
| $26A$ | $13\theta^3 + x\left(503\theta^3-819\theta^2-611\theta-169\right)$<br>$-x^2\theta\left(39505\theta^2+38904\theta+17544\right)$<br>$+x^3\left(8356570\theta^3+21372270\theta^2+2234459\theta+859173\right)$<br>$-4x^4\left(2141159\theta^3+8582394\theta^2+12553492\theta+6539391\right)$<br>$+24x^5(4\theta+7)\left(489557\theta^2+1799756\theta+1778906\right)$<br>$-8x^6(4\theta+7)(4\theta+11)(1036418\theta+2421687)$<br>$+2360544x^7(4\theta+7)(4\theta+11)(4\theta+15)$ | 1<br>8 |

| | | |
|---|---|---|
| $27A$ | $8\theta^3+8x\left(5\theta^3-15\theta^2-11\theta-3\right)-40x^2\theta\left(25\theta^2+30\theta+14\right)$<br>$+8x^3\left(341\theta^3+972\theta^2+1152\theta+495\right)$<br>$-8x^4\left(494\theta^3+2199\theta^2+3877\theta+2520\right)$<br>$+8x^5\left(254\theta^3+1545\theta^2+3541\theta+2940\right)$<br>$+8x^6\left(175\theta^3+1260\theta^2+3099\theta+2592\right)$<br>$-8x^7(\theta+3)\left(499\theta^2+2955\theta+4676\right)$<br>$+8x^8(\theta+3)(\theta+4)(379\theta+1310)-1320x^9(\theta+3)(\theta+4)(\theta+5)$ | $3$<br>$2$ |
| $28B$ | $\theta^3+x\left(8\theta^3-21\theta^2-15\theta-4\right)-x^2\theta\left(247\theta^2+279\theta+120\right)$<br>$+2x^3\left(615\theta^3+1761\theta^2+1914\theta+752\right)$<br>$-16x^4\left(150\theta^3+669\theta^2+1041\theta+562\right)+1408x^5(\theta+2)^3$ | $2$<br>$3$ |
| $29A$ | $9\theta^3+3x\left(7\theta^3-45\theta^2-33\theta-9\right)-3x^2\theta\left(301\theta^2+348\theta+158\right)$<br>$+3x^3\left(821\theta^3+2418\theta^2+2858\theta+1252\right)$<br>$-3x^4\left(415\theta^3+1935\theta^2+3191\theta+1851\right)$<br>$-3x^5\left(495\theta^3+2880\theta^2+5810\theta+4042\right)$<br>$+6x^6(2\theta+5)\left(173\theta^2+847\theta+1095\right)$<br>$-444x^7(\theta+3)(2\theta+5)(2\theta+7)$ | $1$<br>$2$ |
| $30A$ | $\theta^3+x\left(4\theta^3-21\theta^2-15\theta-4\right)-x^2\theta\left(199\theta^2+219\theta+92\right)$<br>$+2x^3(\theta+1)\left(463\theta^2+905\theta+606\right)$<br>$-12x^4(\theta+2)(2\theta+3)(25\theta+31)-432x^5(\theta+2)(2\theta+3)(2\theta+5)$ | $1$<br>$3$ |
| $31AB$ | $11\theta^3+x\left(742\theta^3-1023\theta^2-825\theta-242\right)$<br>$-x^2\theta\left(79298\theta^2+78345\theta+39414\right)$<br>$+2x^3\left(1308021\theta^3+3326079\theta^2+3698316\theta+1516375\right)$<br>$+x^4\left(-45916439\theta^3-183209175\theta^2-284070204\theta-161450532\right)$<br>$+x^5\left(488163212\theta^3+2638139415\theta^2+5180998833\theta+3620750162\right)$<br>$+x^6\left(-325866772 3\theta^3-2217826497 9\theta^2-525488303 40\theta-430605033 64\right)$<br>$+6x^7(3\theta+8)\left(744793176\theta^2+412373749 7\theta+594008742 5\right)$<br>$-9x^8(3\theta+8)(3\theta+11)(384663357\theta+1256839126)$<br>$+1161721710x^9(3\theta+8)(3\theta+11)(3\theta+14)$ | $1$<br>$9$ |
| $32A$ | $48\theta^3-8x\left(53\theta^3+63\theta^2+39\theta+9\right)+4x^2\theta\left(68\theta^2+393\theta+218\right)$<br>$+2x^3\left(3336\theta^3+1428\theta^2+21\theta-368\right)$<br>$+x^4\left(-36288\theta^3-42576\theta^2-21860\theta+655\right)$<br>$+2x^5\left(51200\theta^3+85440\theta^2+63818\theta+19745\right)$<br>$-32x^6\left(5988\theta^3+12753\theta^2+11366\theta+3837\right)$<br>$+8x^7\left(31360\theta^3+80544\theta^2+80689\theta+28394\right)$<br>$-4x^8\left(57984\theta^3+172560\theta^2+187412\theta+75565\right)$<br>$+8x^9\left(18000\theta^3+60432\theta^2+72006\theta+31009\right)$<br>$-16x^{10}\left(3376\theta^3+12588\theta^2+16588\theta+7581\right)$<br>$+992x^{11}(2\theta+3)^3$ | $4$<br>$2^\dagger$ |
| $33AB$ | $\theta^3+x\left(-13\theta^3-6\theta^2-4\theta-1\right)+3x^2\theta\left(10\theta^2+12\theta+5\right)$<br>$+x^3\left(42\theta^3+108\theta^2+103\theta+33\right)+x^4\left(109\theta^3+492\theta^2+789\theta+446\right)$<br>$+x^5(\theta+2)\left(19\theta^2+118\theta+147\right)-2x^6(\theta+2)(\theta+3)(130\theta+331)$<br>$+72x^7(\theta+2)(\theta+3)(\theta+4)$ | $1$<br>$1$ |

| | | |
|---|---|---|
| $34A$ | $112\theta^3+8x\left(43\theta^3-231\theta^2-175\theta-49\right)-4x^2\theta\left(3466\theta^2+3897\theta+1810\right)$<br>$+2x^3\left(24372\theta^3+73032\theta^2+87623\theta+39124\right)$<br>$+x^4\left(-10984\theta^3-63540\theta^2-117998\theta-74239\right)$<br>$-56x^5\left(2236\theta^3+13224\theta^2+26961\theta+18902\right)$<br>$+3152x^6(2\theta+5)(4\theta+9)(4\theta+11)$ | $1$<br>$2^\dagger$ |
| $35A$ | $\theta^3+x\left(3\theta^3-6\theta^2-4\theta-1\right)-x^2\theta\left(26\theta^2+36\theta+17\right)$<br>$+x^3\left(-18\theta^3-102\theta^2-167\theta-101\right)$<br>$+x^4\left(-251\theta^3-1170\theta^2-2053\theta-1308\right)$<br>$-x^5(\theta+2)\left(253\theta^2+1108\theta+1383\right)$<br>$-4x^6(\theta+2)(\theta+3)(131\theta+356)-532x^7(\theta+2)(\theta+3)(\theta+4)$ | $1$<br>$1$ |
| $36A$ | $\theta^3-x(3\theta+1)\left(3\theta^2+2\theta+1\right)-6x^2\theta\left(12\theta^2-3\theta-1\right)$<br>$+2x^3\theta\left(284\theta^2+405\theta+199\right)+6x^4\theta\left(1156\theta^2+75\theta+89\right)$<br>$-6x^5\theta\left(11927\theta^2+10401\theta+4939\right)$<br>$+18x^6\left(8968\theta^3+11586\theta^2+5960\theta+2553\right)$<br>$+18x^7\left(11788\theta^3+14184\theta^2-5086\theta-19947\right)$<br>$-27x^8\left(30109\theta^3+44628\theta^2+7040\theta-6990\right)$<br>$-27x^9\left(19871\theta^3+39147\theta^2+9715\theta+29949\right)$<br>$+486x^{10}\left(2664\theta^3+4503\theta^2+2623\theta+561\right)$<br>$+486x^{11}\left(2892\theta^3+6453\theta^2+5465\theta+1657\right)+360126x^{12}(\theta+1)^3$ | $4$<br>$2$ |
| $38A$ | $81\theta^3+9x\left(239\theta^3-351\theta^2-279\theta-81\right)$<br>$+4x^2\theta\left(17725\theta^2-24678\theta-12195\right)$<br>$-x^3\theta\left(3086561\theta^2+3244998\theta+1524970\right)$<br>$+x^4\left(37779277\theta^3+104515257\theta^2+11814673\theta+48647753\right)$<br>$-4x^5\left(57515231\theta^3+25109771\theta^2+4068944\theta+237268425\right)$<br>$+2x^6\left(394121816\theta^3+2334406791\theta^2+48539288\theta+3517728050\right)$<br>$-2x^7(2\theta+5)\left(382331563\theta^2+18963498\theta+2463921642\right)$<br>$+152x^8(2\theta+5)(2\theta+7)(2520778\theta+7524021)$<br>$-72570120x^9(2\theta+5)(2\theta+7)(2\theta+9)$ | $1$<br>$4$ |
| $39A$ | $27\theta^3+9x\left(38\theta^3-81\theta^2-63\theta-18\right)$<br>$+3x^2\theta\left(2641\theta^2-4347\theta-2070\right)$<br>$+x^3\theta\left(171998\theta^2-284013\theta-131229\right)$<br>$-69x^4\theta\left(85495\theta^2+89508\theta+41008\right)$<br>$+8x^5\left(5597701\theta^3+15741750\theta^2+17627454\theta+7229767\right)$<br>$-138x^6\left(938927\theta^3+416899\theta^2+66232\theta+3718384\right)$<br>$+4x^7\left(28364771\theta^3+17098736\theta^2+3439567\theta+230941456\right)$<br>$+2640216x^8(2\theta+5)(3\theta+7)(3\theta+8)$ | $1$<br>$3$ |
| $41A$ | $\theta^3+4x\left(9\theta^3-12\theta^2-10\theta-3\right)-8x^2\theta\left(217\theta^2+243\theta+128\right)$<br>$+x^3\left(26494\theta^3+74343\theta^2+88577\theta+38487\right)$<br>$-4x^4\left(54068\theta^3+23704\theta^2+4000\theta+246361\right)$<br>$+4x^5\left(270602\theta^3+160376\theta^2+34595\theta+2660558\right)$<br>$+x^6\left(-3489323\theta^3-26006067\theta^2-680681\theta-62098537\right)$<br>$+4x^7\left(1821615\theta^3+163414\theta^2+50218\theta+52756576\right)$<br>$-16x^8(2\theta+7)\left(29774\theta^2+2079\theta+372485\right)$<br>$+8x^9(2\theta+7)(2\theta+9)(22131\theta+88368)$<br>$-284512x^{10}(2\theta+7)(2\theta+9)(2\theta+11)$ | $1$<br>$4$ |
| $42A$ | $48\theta^3-8x\left(53\theta^3+45\theta^2+33\theta+9\right)+4x^2\theta\left(194\theta^2+237\theta+112\right)$<br>$+2x^3\left(588\theta^3+2232\theta^2+3379\theta+1870\right)$<br>$+x^4\left(-2104\theta^3-9036\theta^2-13898\theta-7449\right)$<br>$+4x^5(\theta+2)\left(60\theta^2+744\theta+1163\right)$<br>$-16x^6(\theta+2)(\theta+3)(442\theta+1285)+7360x^7(\theta+2)(\theta+3)(\theta+4)$ | $1$<br>$1^\dagger$ |

| | | |
|---|---|---|
| $44AB$ | $\theta^3+2x\left(6\theta^3-9\theta^2-7\theta-2\right)-8x^2\theta\left(29\theta^2+33\theta+16\right)$<br>$+2x^3\left(598\theta^3+1683\theta^2+1935\theta+810\right)$<br>$-16x^4\left(208\theta^3+915\theta^2+1505\theta+894\right)$<br>$+32x^5\left(162\theta^3+963\theta^2+2021\theta+1484\right)$<br>$-64x^6\left(71\theta^3+531\theta^2+1353\theta+1173\right)+1536x^7(\theta+3)^3$ | $2$<br>$2$ |
| $45A$ | $16\theta^3-8x\left(23\theta^3+15\theta^2+11\theta+3\right)+12x^2\theta\left(38\theta^2+49\theta+24\right)$<br>$+2x^3\left(424\theta^3+1596\theta^2+2633\theta+1614\right)$<br>$-3x^4\left(1000\theta^3+4596\theta^2+8270\theta+5493\right)$<br>$+6x^5\left(88\theta^3+348\theta^2+503\theta+282\right)$<br>$+36x^6\left(142\theta^3+1083\theta^2+2807\theta+2469\right)-2808x^7(\theta+3)^3$ | $2$<br>$1^\dagger$ |
| $46CD$ | $\theta^3-x(2\theta+1)\left(3\theta^2+3\theta+2\right)+x^2\theta(\theta+1)(\theta+2)$<br>$+x^3(2\theta+3)\left(15\theta^2+45\theta+52\right)-2x^4(\theta+2)\left(17\theta^2+68\theta+84\right)$<br>$-10x^5(2\theta+5)\left(\theta^2+5\theta+8\right)+5x^6(\theta+3)\left(9\theta^2+54\theta+88\right)$<br>$-2x^7(\theta+3)(\theta+4)(2\theta+7)-20x^8(\theta+3)(\theta+4)(\theta+5)$ | $1$<br>$1$ |
| $47AB$ | $\theta^3+x\left(6\theta^3-9\theta^2-7\theta-2\right)-x^2\theta\left(61\theta^2+75\theta+38\right)$<br>$+12x^3\left(9\theta^3+24\theta^2+29\theta+12\right)$<br>$+x^4\left(-269\theta^3-1182\theta^2-2184\theta-1504\right)$<br>$+2x^5\left(106\theta^3+624\theta^2+1418\theta+1179\right)$<br>$+x^6\left(-205\theta^3-1557\theta^2-4358\theta-4380\right)$<br>$+x^7\left(-126\theta^3-1089\theta^2-3341\theta-3598\right)$<br>$+2x^8\left(161\theta^3+1662\theta^2+5958\theta+7388\right)$<br>$-2x^9(\theta+4)\left(214\theta^2+1691\theta+3477\right)$<br>$+x^{10}(\theta+4)(\theta+5)(325\theta+1446)$<br>$-132x^{11}(\theta+4)(\theta+5)(\theta+6)$ | $1$<br>$1$ |
| $49Z$ | $432\theta^3-72x\left(39\theta^3+75\theta^2+63\theta+19\right)-36x^2\theta\left(30\theta^2-81\theta-76\right)$<br>$+2x^3\left(147968\theta^3+720360\theta^2+148941\theta+116234\right)$<br>$+x^4\left(-138248\theta^3-1509840\theta^2-4510620\theta-462041\right)$<br>$-2x^5\left(648000\theta^3+5047920\theta^2+15167340\theta+1680341\right)$<br>$+3x^6\left(274320\theta^3+3461400\theta^2+14186340\theta+1990651\right)$<br>$+18x^7\left(169920\theta^3+1817520\theta^2+7045750\theta+974633\right)$<br>$+x^8\left(-1840320\theta^3-28626480\theta^2-147560220\theta-25753097\right)$<br>$-6x^9\left(688680\theta^3+9364680\theta^2+44291790\theta+7248311\right)$<br>$+6x^{10}\left(333000\theta^3+6247260\theta^2+38794200\theta+8061365\right)$<br>$+2x^{11}\left(1524960\theta^3+25108920\theta^2+140037840\theta+26380243\right)$<br>$-9x^{12}\left(121680\theta^3+2657640\theta^2+19188300\theta+4601999\right)$<br>$-6x^{13}\left(171720\theta^3+3279600\theta^2+20910750\theta+4440746\right)$<br>$+x^{14}(6\theta+43)\left(56520\theta^2+93792\theta+384547\right)$<br>$+4x^{15}(6\theta+43)(6\theta+49)(84\theta+473)$<br>$-19x^{16}(6\theta+43)(6\theta+49)(6\theta+55)$ | $4$<br>$1^\dagger$ |
| $50A$ | $1216\theta^3+64x\left(1071\theta^3-1311\theta^2-1159\theta-361\right)$<br>$-640x^2\theta\left(6938\theta^2+7977\theta+4540\right)$<br>$+80x^3\left(12359160\theta^3+3540549\theta^2+4439647\theta+2016171\right)$<br>$-80x^4\left(155270840\theta^3+696502230\theta^2+1237090310\theta+80706657\right)$<br>$+32x^5\left(3166070840\theta^3+19246726050\theta^2+43773581250\theta+3597085400\right)$<br>$-4x^6\left(142650570720\theta^3+1093127272080\theta^2+3023539656270\theta+296792076433\right)$<br>$+20x^7\left(1141656660800\theta^3+10553888272800\theta^2+34361396178900\theta+3908172015000\right)$<br>$-40x^8\left(1637137123200\theta^3+17723971984800\theta^2+66386551858400\theta+8571519347770\right)$<br>$+15x^9\left(8905657644800\theta^3+110516471377600\theta^2+468129111965200\theta+67590997227890\right)$<br>$-x^{10}\left(18882778855040\theta^3+264265199493600\theta^2+1249067916115000\theta+1993318475234250\right)$<br>$+22x^{11}(4\theta+21)\left(1990927268800\theta^2+20569451196000\theta+53865706910300\right)$<br>$-4840x^{12}(4\theta+21)(4\theta+25)(123279560\theta+69871153)$<br>$+3588908400x^{13}(4\theta+21)(4\theta+25)(4\theta+29)$ | $3$<br>$4^\dagger$ |

| | | |
|---|---|---|
| $51A$ | $\theta^3+x\left(2\theta^3-9\theta^2-7\theta-2\right)-x^2\theta\left(39\theta^2+45\theta+22\right)$<br>$+x^3\left(58\theta^3+153\theta^2+163\theta+59\right)$<br>$-2x^4\left(46\theta^3+192\theta^2+305\theta+174\right)$<br>$+x^5(\theta+2)\left(158\theta^2+629\theta+801\right)$<br>$-x^6(\theta+3)\left(35\theta^2+186\theta+259\right)$<br>$-x^7(\theta+3)\left(134\theta^2+777\theta+1180\right)$<br>$+3x^8(\theta+3)(\theta+4)(43\theta+143)-120x^9(\theta+3)(\theta+4)(\theta+5)$ | $1$<br>$1$ |
| $54A$ | $24\theta^3+8x\left(85\theta^3-99\theta^2-87\theta-27\right)-8x^2\theta\left(2665\theta^2+3012\theta+1706\right)$<br>$+12x^3\left(19412\theta^3+54285\theta^2+68019\theta+30869\right)$<br>$-12x^4\left(1218986\theta^3+532521\theta^2+943777\theta+618045\right)$<br>$+12x^5\left(506870\theta^3+2995185\theta^2+6773107\theta+5586387\right)$<br>$-18x^6\left(987400\theta^3+7341870\theta^2+20105135\theta+19755909\right)$<br>$+18x^7\left(2072236\theta^3+18555768\theta^2+59548649\theta+67524810\right)$<br>$-18x^8\left(3102556\theta^3+32481420\theta^2+119405669\theta+152980491\right)$<br>$+81x^9\left(703184\theta^3+8425716\theta^2+34889540\theta+49743479\right)$<br>$-27x^{10}\left(1255512\theta^3+16946388\theta^2+78041746\theta+122430879\right)$<br>$+81x^{11}\left(36920\theta^3+558444\theta^2+2849282\theta+4901357\right)$<br>$+81x^{12}(2\theta+11)\left(76764\theta^2+842676\theta+2345251\right)$<br>$-1944x^{13}(2\theta+11)(2\theta+13)(1202\theta+7203)$<br>$+293544x^{14}(2\theta+11)(2\theta+13)(2\theta+15)$ | $3$<br>$2^\dagger$ |
| $55A$ | $\theta^3-x(5\theta+2)\left(2\theta^2+\theta+1\right)+3x^2\theta\left(47\theta^2+11\theta+6\right)$<br>$-x^3\theta\left(666\theta^2+879\theta+479\right)$<br>$+x^4\left(-269\theta^3-1032\theta^2-2372\theta-1704\right)$<br>$+4x^5\left(1099\theta^3+4881\theta^2+8610\theta+5592\right)$<br>$+6x^6\left(71\theta^3+496\theta^2+1676\theta+1960\right)$<br>$-2x^7\left(4878\theta^3+36435\theta^2+94555\theta+84860\right)$<br>$-8x^8(\theta+3)\left(435\theta^2+2643\theta+4084\right)$<br>$+2596x^9(\theta+3)(\theta+4)(2\theta+7)$ | $1$<br>$1$ |
| $56A$ | $\theta^3+x\left(2\theta^3-9\theta^2-7\theta-2\right)-x^2\theta\left(39\theta^2+45\theta+22\right)$<br>$+8x^3\left(7\theta^3+18\theta^2+17\theta+4\right)$<br>$-4x^4\left(22\theta^3+84\theta^2+133\theta+74\right)$<br>$+16x^5\left(18\theta^3+105\theta^2+237\theta+196\right)$<br>$-4x^6\left(55\theta^3+399\theta^2+1062\theta+1016\right)$<br>$+8x^7\left(30\theta^3+261\theta^2+777\theta+790\right)$<br>$-16x^8\left(23\theta^3+240\theta^2+844\theta+1000\right)+128x^9(\theta+4)^3$ | $2$<br>$1$ |
| $59AB$ | $3\theta^3+x\left(19\theta^3-36\theta^2-30\theta-9\right)-x^2\theta\left(278\theta^2+318\theta+169\right)$<br>$+x^3\left(862\theta^3+2460\theta^2+3081\theta+1426\right)$<br>$+x^4\left(-1195\theta^3-5364\theta^2-9433\theta-6153\right)$<br>$+3x^5\left(83\theta^3+558\theta^2+995\theta+485\right)$<br>$+x^6\left(1534\theta^3+11226\theta^2+31787\theta+33036\right)$<br>$+x^7\left(-2546\theta^3-22734\theta^2-73553\theta-84696\right)$<br>$+x^8\left(1711\theta^3+17952\theta^2+65258\theta+81885\right)$<br>$-3x^9\left(67\theta^3+840\theta^2+3240\theta+3842\right)$<br>$-2x^{10}\left(486\theta^3+6516\theta^2+30400\theta+49119\right)$<br>$+2x^{11}(\theta+5)\left(424\theta^2+4231\theta+10982\right)$<br>$-2x^{12}(\theta+5)(\theta+6)(98\theta+557)-344x^{13}(\theta+5)(\theta+6)(\theta+7)$ | $1$<br>$1$ |
| $60B$ | $\theta^3+x\left(10\theta^3-9\theta^2-7\theta-2\right)-x^2\theta\left(79\theta^2+93\theta+46\right)$<br>$+8x^3\left(28\theta^3+75\theta^2+85\theta+34\right)$<br>$-4x^4\left(175\theta^3+762\theta^2+1285\theta+794\right)$<br>$+16x^5\left(62\theta^3+363\theta^2+761\theta+564\right)$<br>$-64x^6\left(23\theta^3+171\theta^2+433\theta+373\right)+1024x^7(\theta+3)^3$ | $2$<br>$1$ |

| | | |
|---|---|---|
| $62AB$ | $3\theta^3+x\left(19\theta^3-36\theta^2-30\theta-9\right)-x^2\theta\left(278\theta^2+318\theta+169\right)$<br>$+x^3\left(856\theta^3+2433\theta^2+3000\theta+1345\right)$<br>$+x^4\left(-1245\theta^3-5535\theta^2-9958\theta-6618\right)$<br>$+x^5\left(747\theta^3+4635\theta^2+11534\theta+10576\right)$<br>$+x^6\left(1195\theta^3+8562\theta^2+21563\theta+18864\right)$<br>$+x^7\left(-3473\theta^3-30726\theta^2-94787\theta-101358\right)$<br>$+x^8\left(4753\theta^3+49425\theta^2+176490\theta+215912\right)$<br>$-x^9(\theta+4)\left(4433\theta^2+35212\theta+72459\right)$<br>$+4x^{10}(\theta+4)(\theta+5)(584\theta+2601)-1032x^{11}(\theta+4)(\theta+5)(\theta+6)$ | $1$<br>$1$ |
| $66A$ | $1024\theta^3+256x\left(13\theta^3-66\theta^2-54\theta-16\right)-128x^2\theta\left(970\theta^2+1029\theta+515\right)$<br>$+128x^3\left(4033\theta^3+12078\theta^2+14875\theta+7017\right)$<br>$-32x^4\left(5918\theta^3+34311\theta^2+52631\theta+26021\right)$<br>$-48x^5\left(45932\theta^3+271530\theta^2+601769\theta+484188\right)$<br>$+8x^6\left(262162\theta^3+2012157\theta^2+5256965\theta+4681203\right)$<br>$+24x^7(\theta+3)\left(139021\theta^2+824433\theta+1358168\right)$<br>$-18x^8(\theta+3)(\theta+4)(131788\theta+474773)-2311065x^9(\theta+3)(\theta+4)(\theta+5)$ | $1$<br>$\frac{3}{2}\dagger$ |
| $69AB$ | $3\theta^3+x\left(11\theta^3-36\theta^2-30\theta-9\right)-5x^2\theta\left(44\theta^2+48\theta+25\right)$<br>$+x^3\left(652\theta^3+1884\theta^2+2295\theta+1054\right)$<br>$+x^4\left(-566\theta^3-2556\theta^2-3997\theta-2193\right)$<br>$+x^5\left(-52\theta^3-285\theta^2-1346\theta-1950\right)$<br>$+3x^6\left(38\theta^3+237\theta^2+515\theta+368\right)$<br>$-4x^7\left(238\theta^3+2079\theta^2+6463\theta+7077\right)$<br>$+x^8\left(1987\theta^3+20904\theta^2+75449\theta+93240\right)$<br>$+x^9(\theta+4)\left(201\theta^2+1437\theta+3560\right)$<br>$-x^{10}(\theta+4)(\theta+5)(1363\theta+6183)-385x^{11}(\theta+4)(\theta+5)(\theta+6)$ | $1$<br>$1$ |
| $70A$ | $400\theta^3+40x\left(27\theta^3-105\theta^2-85\theta-25\right)+4x^2\theta\left(5084\theta^2-5985\theta-3020\right)$<br>$-6x^3\theta\left(39692\theta^2+45558\theta+23781\right)$<br>$+x^4\left(572304\theta^3+1662552\theta^2+1994356\theta+874283\right)$<br>$+x^5\left(-105208\theta^3-720336\theta^2-1296832\theta-828769\right)$<br>$-5x^6\left(412240\theta^3+2398596\theta^2+5290012\theta+4255295\right)$<br>$+x^7\left(2585736\theta^3+19390140\theta^2+50625486\theta+45792265\right)$<br>$+64x^8(\theta+3)\left(5624\theta^2+26469\theta+36840\right)$<br>$-1675840x^9(\theta+3)(\theta+4)(2\theta+7)$ | $1$<br>$1^\dagger$ |
| $71AB$ | $\theta^3+x\left(8\theta^3-15\theta^2-13\theta-4\right)-x^2\theta\left(143\theta^2+159\theta+88\right)$<br>$+3x^3\left(200\theta^3+567\theta^2+701\theta+318\right)$<br>$-2x^4\left(561\theta^3+2475\theta^2+4271\theta+2698\right)$<br>$+12x^5\left(95\theta^3+564\theta^2+1274\theta+1045\right)$<br>$-3x^6\left(283\theta^3+2115\theta^2+6174\theta+6624\right)$<br>$+2x^7\left(155\theta^3+1425\theta^2+5154\theta+6847\right)$<br>$+2x^8\left(327\theta^3+3384\theta^2+12380\theta+15854\right)$<br>$-3x^9\left(374\theta^3+4455\theta^2+18525\theta+26724\right)$<br>$+2x^{10}\left(565\theta^3+7584\theta^2+35425\theta+57286\right)$<br>$-4x^{11}\left(251\theta^3+3750\theta^2+19231\theta+33768\right)$<br>$+3x^{12}\left(231\theta^3+3798\theta^2+21316\theta+40776\right)$<br>$-3x^{13}(\theta+6)\left(160\theta^2+1917\theta+5885\right)$<br>$+x^{14}(\theta+6)(\theta+7)(101\theta+646)-126x^{15}(\theta+6)(\theta+7)(\theta+8)$ | $1$<br>$1$ |

| | | |
|---|---|---|
| $78A$ | $9\theta^3+3x\left(11\theta^3-36\theta^2-30\theta-9\right)+x^2\theta\left(313\theta^2-720\theta-375\right)$<br>$-x^3\theta\left(5846\theta^2+6105\theta+3088\right)$<br>$+x^4\left(17642\theta^3+50307\theta^2+59625\theta+26153\right)$<br>$+x^5\left(-16566\theta^3-72963\theta^2-118994\theta-68817\right)$<br>$+x^6\left(8513\theta^3+51375\theta^2+123130\theta+109230\right)$<br>$+x^7\left(5985\theta^3+37107\theta^2+87299\theta+77042\right)$<br>$+x^8\left(-51959\theta^3-460107\theta^2-1402813\theta-1468803\right)$<br>$+14x^9(2\theta+7)\left(1766\theta^2+12092\theta+21363\right)$<br>$-11676x^{10}(\theta+4)(2\theta+7)(2\theta+9)$ | $1$<br>$1$ |
| $87AB$ | $4\theta^3+4x\left(16\theta^3-15\theta^2-13\theta-4\right)+x^2\theta\left(915\theta^2-972\theta-544\right)$<br>$-x^3\theta\left(13150\theta^2+14049\theta+7331\right)$<br>$+3x^4\left(23581\theta^3+63823\theta^2+78458\theta+34528\right)$<br>$+x^5\left(-249716\theta^3-1070154\theta^2-1889116\theta-1233207\right)$<br>$+2x^6\left(316163\theta^3+1844226\theta^2+4150643\theta+3415212\right)$<br>$+x^7\left(-1229502\theta^3-9062481\theta^2-24684291\theta-24165398\right)$<br>$+x^8\left(1833562\theta^3+16319166\theta^2+51995469\theta+58496871\right)$<br>$+x^9\left(-2095894\theta^3-21855723\theta^2-79694435\theta-100976538\right)$<br>$+x^{10}\left(1721047\theta^3+20572332\theta^2+84371249\theta+118444956\right)$<br>$-12x^{11}\left(75554\theta^3+1018933\theta^2+4645483\theta+7156124\right)$<br>$+2x^{12}(\theta+5)\left(69349\theta^2+699736\theta+1749345\right)$<br>$+18x^{13}(\theta+5)(\theta+6)(7914\theta+43085)$<br>$-89709x^{14}(\theta+5)(\theta+6)(\theta+7)$ | $1$<br>$1$ |
| $92AB$ | $\theta^3+x\left(16\theta^3-15\theta^2-13\theta-4\right)-x^2\theta\left(211\theta^2+243\theta+136\right)$<br>$+x^3\left(1108\theta^3+3075\theta^2+3857\theta+1732\right)$<br>$-2x^4\left(1949\theta^3+8457\theta^2+15199\theta+10108\right)$<br>$+4x^5\left(2511\theta^3+14757\theta^2+33833\theta+28464\right)$<br>$+x^6\left(-20123\theta^3-148971\theta^2-412614\theta-413176\right)$<br>$+2x^7\left(16089\theta^3+143565\theta^2+464766\theta+535568\right)$<br>$-8x^8\left(5147\theta^3+53730\theta^2+198658\theta+257548\right)$<br>$+8x^9\left(5268\theta^3+62967\theta^2+261601\theta+375926\right)$<br>$-16x^{10}\left(2109\theta^3+28398\theta^2+130937\theta+206306\right)$<br>$+32x^{11}\left(627\theta^3+9390\theta^2+47577\theta+81506\right)$<br>$-64x^{12}\left(129\theta^3+2127\theta^2+11761\theta+21806\right)$<br>$+1664x^{13}(\theta+6)^3$ | $2$<br>$1$ |
| $94AB$ | $5\theta^3+x\left(51\theta^3-90\theta^2-80\theta-25\right)-x^2\theta\left(1052\theta^2+1158\theta+661\right)$<br>$+x^3\left(5636\theta^3+16038\theta^2+20283\theta+9531\right)$<br>$+x^4\left(-12726\theta^3-57042\theta^2-98449\theta-62768\right)$<br>$+x^5\left(5020\theta^3+32655\theta^2+54742\theta+22049\right)$<br>$+x^6\left(34568\theta^3+254835\theta^2+742308\theta+799590\right)$<br>$+x^7\left(-65090\theta^3-585210\theta^2-1900367\theta-2193581\right)$<br>$+x^8\left(12505\theta^3+136740\theta^2+424739\theta+354504\right)$<br>$+x^9\left(77745\theta^3+928845\theta^2+3976036\theta+6015924\right)$<br>$+x^{10}\left(-62251\theta^3-842856\theta^2-3902055\theta-6167414\right)$<br>$+x^{11}\left(-34429\theta^3-513300\theta^2-2687519\theta-4907160\right)$<br>$+3x^{12}\left(15621\theta^3+257979\theta^2+1439906\theta+2714784\right)$<br>$+x^{13}(\theta+6)\left(9683\theta^2+115236\theta+369481\right)$<br>$-8x^{14}(\theta+6)(\theta+7)(1801\theta+11744)$<br>$-4440x^{15}(\theta+6)(\theta+7)(\theta+8)$ | $1$<br>$1$ |

| | | |
|---|---|---|
| $95AB$ | $\theta^3+x\left(6\theta^3-15\theta^2-13\theta-4\right)-x^2\theta\left(125\theta^2+135\theta+74\right)$<br>$+2x^3\left(262\theta^3+759\theta^2+953\theta+455\right)$<br>$+x^4\left(-655\theta^3-3066\theta^2-5056\theta-3056\right)$<br>$-2x^5\left(514\theta^3+2907\theta^2+7457\theta+7226\right)$<br>$+x^6\left(3663\theta^3+27303\theta^2+77642\theta+80596\right)$<br>$+x^7\left(-2082\theta^3-19149\theta^2-62397\theta-71486\right)$<br>$+x^8\left(-4031\theta^3-41796\theta^2-155776\theta-205600\right)$<br>$+2x^9\left(2816\theta^3+33780\theta^2+141378\theta+205211\right)$<br>$-4x^{10}\left(107\theta^3+1509\theta^2+7819\theta+14385\right)$<br>$-6x^{11}(\theta+5)\left(442\theta^2+4395\theta+10938\right)$<br>$+120x^{12}(\theta+5)(\theta+6)(13\theta+71)-640x^{13}(\theta+5)(\theta+6)(\theta+7)$ | $1$<br>$1$ |
| $105A$ | $112\theta^3+8x\left(51\theta^3-189\theta^2-161\theta-49\right)-4x^2\theta\left(2458\theta^2+2595\theta+1376\right)$<br>$+2x^3\left(17008\theta^3+48924\theta^2+58107\theta+25722\right)$<br>$+x^4\left(-33384\theta^3-147204\theta^2-224558\theta-115513\right)$<br>$+6x^5\left(3184\theta^3+17508\theta^2+39283\theta+32662\right)$<br>$-4x^6\left(19814\theta^3+148059\theta^2+415393\theta+423138\right)$<br>$+8x^7\left(2861\theta^3+26589\theta^2+77179\theta+69798\right)$<br>$+4x^8\left(15728\theta^3+167496\theta^2+608482\theta+752619\right)$<br>$+96x^9(\theta+4)\left(868\theta^2+7007\theta+14397\right)$<br>$+48x^{10}(\theta+4)(\theta+5)(1006\theta+4443)$<br>$-33984x^{11}(\theta+4)(\theta+5)(\theta+6)$ | $1$<br>$1^\dagger$ |
| $110A$ | $13\theta^3+x\left(523\theta^3-624\theta^2-546\theta-169\right)$<br>$-3x^2\theta\left(7988\theta^2+8940\theta+5021\right)$<br>$+x^3\left(385606\theta^3+1076049\theta^2+1325658\theta+592731\right)$<br>$+x^4\left(-3568186\theta^3-15575109\theta^2-27075910\theta-17328220\right)$<br>$+x^5\left(21839700\theta^3+129002166\theta^2+286042517\theta+229554485\right)$<br>$-3x^6\left(31296937\theta^3+232650999\theta^2+624852043\theta+595871452\right)$<br>$+x^7\left(290710695\theta^3+260260289\theta^2+819499075\theta+900378649\right)$<br>$-4x^8\left(162439196\theta^3+1700194029\theta^2+6135245796\theta+7608504938\right)$<br>$+2x^9\left(514091078\theta^3+6157604979\theta^2+25040250991\theta+34538728740\right)$<br>$-2x^{10}(2\theta+9)\left(274135057\theta^2+2463526113\theta+5639381396\right)$<br>$+1320x^{11}(2\theta+9)(2\theta+11)(134044\theta+669401)$<br>$-26029080x^{12}(2\theta+9)(2\theta+11)(2\theta+13)$ | $1$<br>$3$ |
| $119AB$ | $11\theta^3+x\left(383\theta^3-429\theta^2-385\theta-121\right)-x^2\theta\left(13907\theta^2+15630\theta+9082\right)$<br>$+x^3\left(185695\theta^3+517518\theta^2+653456\theta+298236\right)$<br>$+x^4\left(-1466322\theta^3-6391539\theta^2-11366471\theta-7474399\right)$<br>$+3x^5\left(2621124\theta^3+15463800\theta^2+35023680\theta+28962833\right)$<br>$+x^6\left(-30481337\theta^3-226356705\theta^2-620372371\theta-610718664\right)$<br>$+x^7\left(88108207\theta^3+788093196\theta^2+2531016954\theta+2875397306\right)$<br>$+x^8\left(-192542015\theta^3-2013670887\theta^2-7410595865\theta-9519098329\right)$<br>$+3x^9\left(106194863\theta^3+1271037894\theta^2+5271993246\theta+7545734338\right)$<br>$+x^{10}\left(-395463473\theta^3-5329767801\theta^2-24598308230\theta-38796473612\right)$<br>$+3x^{11}\left(120203819\theta^3+1801129755\theta^2+9155073262\theta+15771861160\right)$<br>$+x^{12}\left(-232808411\theta^3-3838864788\theta^2-21309215317\theta-39808006260\right)$<br>$+3x^{13}(\theta+6)\left(33297643\theta^2+399363585\theta+1210021238\right)$<br>$-119x^{14}(\theta+6)(\theta+7)(212357\theta+1379743)+2786385x^{15}(\theta+6)(\theta+7)(\theta+8)$ | $1$<br>$2$ |