arXiv:2303.04396v2 [math.NT] 9 Nov 2023

函数域的 Kummer 忠实性

TAKUYA ASAYAMA

Abstract. 若完美域 K 满足以下条件，则称其为库默尔忠实：对其任意有限扩张上的每个半阿贝尔簇，其莫德尔–韦伊群都没有非零可整除元素。库默尔忠实域这一类包含次-p-进域，并被认为适用于发展远阿贝尔几何。本文研究库默尔忠实域这一概念在函数域中的类比。我们利用 Drinfeld 模引入 Drinfeld-Kummer 忠实（DKF）域的概念。本文从分歧理论的角度给出了函数域的伽罗瓦扩张成为 DKF 域的一个充分条件。更确切地说，在有限域 $\mathbb{F}_q$ 上，若有理函数域 $\mathbb{F}_q(t)$ 的某个有限扩张存在一个伽罗瓦扩张，且该扩张在无穷素点 $(1/t)$ 之外的最大分歧断点有限，则此伽罗瓦扩张为 DKF。文中还给出了一些 DKF 域的例子。这些例子的构造受到大关和 Taguchi 所举高度库默尔忠实域例子的启发。

1. Introduction

望月新一 [Moc15], 引入的库默尔忠实域被认为适合作为远阿贝尔几何中的基域。它们的定义如下：半阿贝尔簇的莫德尔–韦伊群的可整除部分是平凡的。

定义 1.1. 设 K 是一个完美域。若对于 K 的每个有限扩张 L 以及定义在 L 上的每个半阿贝尔簇 X，都有 $\bigcap_{n>0} n \cdot X(L) = 0$，其中 n 遍历所有正有理整数，则称 K 是库默尔忠实的。

例如，每个子 p-进域，即每个同构于 p-进域 $\mathbb{Q}_p$ 的某个有限生成扩张的子域的域，都是库默尔忠实的。此外，还存在一个不是子 p-进域的库默尔忠实域 [Moc15，注 1.5.4]。

大关和 Taguchi [OT22] 引入了高度库默尔忠实域的概念，并从分歧理论的角度研究了其性质。高度库默尔忠实域的概念是库默尔忠实域概念的一种特化，具体而言，对于特征零的库默尔忠实域的伽罗瓦扩张，高度库默尔忠实性蕴含库默尔忠实性 [OT22, 命题 2.8]。他们还给出了一些高度库默尔忠实域的例子。其中一个例子是：在一个数域 K 上，添加所有维数有界、阶为有界素数幂的半阿贝尔簇 X 在 K 上的所有扭点所构造的域。其精确表述如下。

定理 1.2（[OT22, 定理 3.3]）。设 K 为一个数域， g 为一个正整数，且 $\boldsymbol{m} = (m_p)_p$ 为一个非负整数族，其中 p 遍历所有有理素数。设 $K_{g,\boldsymbol{m}}$ 为由 K 中所有元素的坐标生成的扩张，其中这些元素取自所有维数至多为 g 的、定义在 K 上的半阿贝尔簇 X，并且对所有有理素数 p均取此类元素。则 $K_{g,\boldsymbol{m}}$ 是高度库默尔忠实的。特别地，它是库默尔忠实的。

本文研究了库默尔忠实域概念在函数域中的类比。我们通过 Drinfeld 模的可整除部分平凡这一性质，引入 Drinfeld-库默尔忠实（DKF）域。本文依据分歧理论给出了函数域的伽罗瓦扩张为 DKF 的一个充分条件，并列举了一些 DKF 域的例子。其中一个例子以类似上述定理的方式，利用 Drinfeld 模的扭点构造而成，区别在于我们增加了一个参数来限制约化的不良程度。我们指出，即使 ϕ 的秩为 2，Drinfeld $\mathbb{F}_q[t]$-模 ϕ over $\mathbb{F}_q(t)$ 的 t-挠点在某个有限素点处的最大分歧断点也可能任意大（见 [AH23]）。

2020 *Mathematics Subject Classification.* 主要分类 12E30；次要分类 11G09、11R58、11S15。*Key words and phrases.* 库默尔忠实，Drinfeld 模，最大分歧断点，逐次极小基。

2. Drinfeld-Kummer-faithful fields

设 F 是有限域 $\mathbb{F}_q$ 上含有 q 个元素的全局函数域。固定 F 的一个素理想 ∞，并令 F 为由在 ∞ 之外正则的函数构成的 A 的子环。对于任意域 E，固定 E 的一个代数闭包 $\overline{E}$，并令 $\overline{E}$ 中 E 的可分闭包为 E^{sep}。用 G_E 表示 E 的绝对伽罗瓦群 $\mathrm{Gal}(E^{\mathrm{sep}}/E)$。

本节定义 Drinfeld-Kummer 忠实域的概念，并研究其性质。与库默尔忠实性不同，我们不假设该域是完美的。在本文中，我们只考虑一般特征的 Drinfeld 模。

定义 2.1. 设 M 是一个 A-模。若元素 x 属于 M，且对每个非零的 $a \in A$，都存在 y 属于 M，使得 $x = ay$，则称其为可整除的。对于 A的理想 $\mathfrak{a}$，若对每个正整数 n，都存在 $a \in \mathfrak{a}^n$ 和 $y \in M$，使得 $x = ay$，则称 $x \in M$ 为 $\mathfrak{a}$-可整除的。用 M_{div} （分别用 $M_{\mathfrak{a}\text{-div}}$）表示 M中可整除（分别为 $\mathfrak{a}$-可整除）的元素集合，即

$$M_{\mathrm{div}} = \bigcap_{a \in A \setminus \{0\}} aM \quad \left(\text{resp. } M_{\mathfrak{a}\text{-div}} = \bigcap_{n>0} \mathfrak{a}^n M \right).$$

为简便起见，若 $\mathfrak{a} = (a)$ 是主理想，则将 a-可整除称为 (a)-可整除，并将 $M_{a\text{-div}}$ 记为 $M_{(a)\text{-div}}$。

定义 2.2. 若扩张 K over F 满足以下条件，则称其为 Drinfeld-Kummer 忠实（简称 DKF）：对于任意有限扩张 L of K 以及任意定义在 Lover 上的 Drinfeld A-模 ϕ，均有 $\phi(L)_{\mathrm{div}} = 0$。这里，我们用 $\phi(L)$ 表示集合 L，其 A-模结构由 ϕ 给出。

根据定义可立即得出，DKF 域 K/F 的任意中间域也是 DKF。令 K'是 K/F的有限扩张。那么，K' 是 DKF 当且仅当 K 是 DKF。

若 K 是 F上的有限生成域，则对于任意定义在 Kover 上的 Drinfeld A-模 ϕ， A-模 $\phi(K)$ 是有限挠模与秩为 $\aleph_0$ [Poo95, Wan01], 的自由模的直和，因此有 $\phi(K)_{\mathrm{div}} = 0$。故 K 是 DKF。另一方面， F 的代数闭包 $\overline{F}$ 和可分闭包 F^{sep} 显然不是 DKF。DKF 性表明该域在某种意义上很小，即 Drinfeld 模没有非零可整除点。

设 ϕ 是一个 Drinfeld A-模， $\mathfrak{p}$ 是一个非零素理想。 ϕ 的 $\mathfrak{p}$-进 Tate 模由 $T_{\mathfrak{p}}(\phi) = \varprojlim_n \phi[\mathfrak{p}^n]$ 定义。下面的命题是 [OT22，命题 2.4] 的一个类比。

命题 2.3. 设 $K \subseteq L$ 是 $\overline{F}$ 中 F 上的两个扩张。设 ϕ 是定义在 K 上的 Drinfeld A-模。

(1) 对于 A 中的任意非零素理想 $\mathfrak{p}$，以下条件等价：(i) $(\phi(L)[\mathfrak{p}^\infty])_{\mathfrak{p}\text{-div}} = 0$。(ii) $\phi(L)[\mathfrak{p}^\infty]$ 是有限的。(iii) $T_{\mathfrak{p}}(\phi)^{G_L} = 0$。(2) 考虑关于 ϕ 的以下条件：(a) $\phi(L)_{\mathrm{div}} = 0$。(b) $(\phi(L)_{\mathrm{tor}})_{\mathrm{div}} = 0$。(c) 对于 A 中的任意非零素理想 $\mathfrak{p}$， $\phi(L)[\mathfrak{p}^\infty]$ 是有限的。则有 (a) $\Rightarrow$ (b) $\Leftrightarrow$ (c)。如果 K 是 DKF 且 L/K 是伽罗瓦的，则有 (a) $\Leftrightarrow$ (b) $\Leftrightarrow$ (c)。

证明。(1) 根据 Tate 模的定义，(ii) 与 (iii) 等价。由于 A 的类数有限（见 [FJ08，引理 4.1.2]），存在 $a \in A$，使得主理想 (a) 是一个 $\mathfrak{p}$次幂。于是 $T_{\mathfrak{p}}(\phi) = \varprojlim_n \phi[\mathfrak{p}^n] \cong \varprojlim_m \phi[a^m]$，且此同构与 G_L的作用相容。自然同构 $(\varprojlim_m \phi[a^m])^{G_L} \cong \mathrm{Hom}_A(A[1/a]/A, \phi(L)[a^\infty])$ 和 $(\phi(L)[a^\infty])_{a\text{-div}} = (\phi(L)[\mathfrak{p}^\infty])_{\mathfrak{p}\text{-div}}$ 给出 (i) 与 (ii) 的等价性。

(2) 显然 (a) 蕴含 (b)。为证明 (b) 蕴含 (c)，对每个 $\mathfrak{p}$，我们取 $a_{\mathfrak{p}} \in A$，使得主理想 $(a_{\mathfrak{p}})$ 是一个 $\mathfrak{p}$次幂，如 (1) 所述。于是我们有自然同构

$$\begin{aligned}\prod_{\mathfrak{p}} T_{\mathfrak{p}}(\phi)^{G_L} &\cong \prod_{\mathfrak{p}} \mathrm{Hom}_A(A[1/a_{\mathfrak{p}}]/A, \phi(L)[a_{\mathfrak{p}}^{\infty}]) \\ &\cong \prod_{\mathfrak{p}} \mathrm{Hom}_A(A[1/a_{\mathfrak{p}}]/A, \phi(L)_{\mathrm{tor}}) \\ &\cong \mathrm{Hom}_A\left(\bigoplus_{\mathfrak{p}} A[1/a_{\mathfrak{p}}]/A, \phi(L)_{\mathrm{tor}}\right) \\ &\cong \mathrm{Hom}_A(F/A, \phi(L)_{\mathrm{tor}}),\end{aligned}$$

其中，$\mathfrak{p}$ 遍历 A的非零素理想。由 (b) 可知，对于所有 $\mathfrak{p}$，都有 $T_{\mathfrak{p}}(\phi)^{G_L} = 0$。因此，由 (1) 可得 (c) 成立。

为证明 (c) 蕴含 (b)，我们证明其逆否命题。假设存在一个非零的 $x \in (\phi(L)_{\mathrm{tor}})_{\mathrm{div}}$。令 $\mathfrak{a}$为 x的湮灭子，并令$\mathfrak{p}_n$为 $\mathfrak{a}$的素理想分解中出现的素理想。设$S = A \setminus (\bigcup \mathfrak{p}_i)$且 $B = S^{-1}A$。那么 B是主理想整环，因为它是一个只有有限多个素理想的戴德金整环（参见 [Neu99，第一章第三节练习 4]）。因此存在 $b \in B$，使得 $S^{-1}\mathfrak{a} = (b)$。此外，x 是 $S^{-1}\phi(L)_{\mathrm{tor}}$ 中的一个非零可除点，而 (b) 是 $S^{-1}\phi(L)_{\mathrm{tor}}$中 x 的湮灭子。令 $\mathfrak{P} =(\pi)$为 B 中整除 b的一个素理想。重新编排指标后，我们可以假设 $A \cap \mathfrak{P} = \mathfrak{p}_1$。于是可得，$\pi^{-1}bx$ 是 $(S^{-1}\phi(L))[\mathfrak{P}^{\infty}]_{\mathfrak{P}\text{-div}}$中的一个非零点。取满足 $s\pi^{-1}b \in A$ 的 $s \in S$，并令 $y = s\pi^{-1}bx$。那么 y 是 $\phi(L)[\mathfrak{p}_1^{\infty}]_{\mathfrak{p}_1}$-div中的一个非零点。由 (1) 可知，$\phi(L)[\mathfrak{p}_1^{\infty}]$ 是无限集，因此 (c) 不成立。

现在证明：若 K 是 DKF 且 L/K 是伽罗瓦的，则 (b) 蕴含 (a)。我们再次使用逆否证明法。假设存在一个非零的 $x \in \phi(L)_{\mathrm{div}}$。对于非零的 $a \in A$，令 $X_a = \{y \in \phi(L) \mid x = ay\}$。于是 $(X_a)_a$ 构成一个射影系统。根据假设，每个 X_a 都非空，因此射影极限 $\varprojlim_a X_a$ 也非空。取 $(y_a)_a \in \varprojlim_a X_a$，并取 L/K 的一个有限子扩张 K'，使得 $x \in \phi(K')$。由于 K 是 DKF，故 K' 也是 DKF。因此存在 $a_0 \in A$，使得 $y_{a_0} \notin \phi(K')$。取 $G_{K'}$ 中满足 $y_{a_0}^{\sigma_0} \neq y_{a_0}$ 的一个元素 σ_0，并对每个非零的 $a \in A$ 令$z_a = y_a^{\sigma_0} - y_a$。于是 $z_{a_0} \neq 0$，且对每个 a 都有 $az_{aa_0} = z_{a_0}$。由于 L/K 是伽罗瓦的，我们有$z_{a_0} \in \phi(L)[a_0]$。这说明 z_{a_0} 是 $(\phi(L)_{\mathrm{tor}})_{\mathrm{div}}$ 中的一个非零点，从而得到 (b) 的否定。□

为了从分歧理论的角度研究 DKF 性，我们按照 Ozeki–Taguchi [OT22，定义 2.14] 引入最大分歧断点有限性的概念。对于任意代数域扩张 E over F，令 $\mathfrak{M}_E^{\mathrm{f}}$ 为不位于 E 之上的素点集合，并称其中的元素为有限素点。令 $\mathfrak{M}_E^{\infty}$为位于 E 之上的素点集合，并称其中的元素为无穷素点。令 $\mathfrak{M}_A$ 为 A 的非零素理想集合，并将其与 $\mathfrak{M}_F^{\mathrm{f}}$等同。与数域情形不同，函数域情形下无穷素点处的分歧影响无法实质性地忽略，因此下述定义将此类情况纳入考虑。

~定义 2.4. (1) 设 K 是正特征局部域 E 的代数扩张。令 K 为 K/E的最大可分子扩张的伽罗瓦闭包。K/E 的最大分歧断点（简称最大分歧断点~ ~）定义为 $\inf\{u \in [-1, +\infty) \mid \mathrm{Gal}(K/E)^u = 1\}$。这里，对于 $u \geq -1$，我们用 $\mathrm{Gal}(K/E)^{u~}$表示 Serre [Ser79，第四章第 3] 节意义下 $\mathrm{Gal}(K/E)$ 的第 u 个上分歧群。若 K/E 的最大分歧断点有限，则称扩张 K/E 具有有限最大分歧断点。

(2) 设 K 是函数域 F 的伽罗瓦扩张。对于 $\mathfrak{p} \in \mathfrak{M}_A$，如果扩张 K/F 在 $\mathfrak{p}$ 处具有有限最大分歧断点，即扩张 $K_{\mathfrak{P}}/F_{\mathfrak{p}}$ 具有有限最大分歧断点，其中 $\mathfrak{P} \in \mathfrak{M}_K^{\mathrm{f}}$ 位于 $\mathfrak{p}$ 之上，则称其在 $\mathfrak{p}$ 处具有有限最大分歧断点。注意，这一定义与 $\mathfrak{P}$ 的选择无关。

(3) 设 K 是函数域 F 的伽罗瓦扩张。如果 K/F 在每个 $\mathfrak{p} \in \mathfrak{M}_A$ 处都具有有限最大分歧断点，则称扩张 K/F 在 ∞ 之外具有有限最大分歧断点。

在本节其余部分中，我们假设 $F = \mathbb{F}_q(t)$、$\infty = (1/t)$ 以及 $A = \mathbb{F}_q[t]$。

命题 2.5。设 K 是 F 的有限扩张，ϕ 是定义在 K 上的 Drinfeld A-模，且 $\mathfrak{p}$ 是 A 的非零素理想。对于在 ∞之外具有有限最大分歧断点的伽罗瓦扩张 L/K，有 $T_{\mathfrak{p}}(\phi)^{G_L} = 0$。

证明。假设 $T = T_{\mathfrak{p}}(\phi)^{G_L} \neq 0$。伽罗瓦群 $G = \mathrm{Gal}(L/K)$ 作用于 T，由此产生的表示在 K 的不位于 $\mathfrak{p}$ 之上的有限素点处非分歧，且在这些点上 ϕ 具有良约化 [Tak82，定理 1]。因此，存在一个有限子集 $S \subseteq \mathfrak{M}_K^{\mathrm{f}}$，使得 $T_{\mathfrak{p}}(\phi)$ 在 $S \cup \mathfrak{M}_K^{\infty}$ 之外非分歧。令 $\chi\colon G \to A_{\mathfrak{p}}^{\times}$ 为由 G 在 $\det T \cong A_{\mathfrak{p}}$ 上的作用所诱导的特征，并令 $K^{\dagger}$ 为与 L/K 对应的中间域

$\ker\chi$。则 $K^\dagger/K$ 是阿贝尔的。对于任意 $\mathfrak{l}\in S$，由 [FV02，第 IV 章，定理 6 的推论。2], 互反映射 $K_\mathfrak{l}\to \mathrm{Gal}(K_\mathfrak{l}^{\mathrm{ab}}/K_\mathfrak{l})$ 将 $K_\mathfrak{l}$ 的单位元的第 u 个高阶群 $U_{K_\mathfrak{l}}^{(u)}$ 同构地映至 $\mathrm{Gal}(K_\mathfrak{l}^{\mathrm{ab}}/K_\mathfrak{l})^u$，其中 $u\geq 0$ 为任意整数。与自然投影 $\mathrm{Gal}(K_\mathfrak{l}^{\mathrm{ab}}/K_\mathfrak{l})\to \mathrm{Gal}(K_\mathfrak{L}^\dagger/K_\mathfrak{l})$ 复合，其中 $\mathfrak{L}$ 表示 $K^\dagger$ 的一个位于 $\mathfrak{l}$ 之上的素理想，我们得到满射 $U_{K_\mathfrak{l}}^{(u)}\to \mathrm{Gal}(K_\mathfrak{L}^\dagger/K_\mathfrak{l})^u$。于是我们得到满射

$$U_{K_\mathfrak{l}}^{(0)}/U_{K_\mathfrak{l}}^{(u)}\to \mathrm{Gal}(K_\mathfrak{L}^\dagger/K_\mathfrak{l})^0/\mathrm{Gal}(K_\mathfrak{L}^\dagger/K_\mathfrak{l})^u$$

对于 $u\geq 0$。根据假设，对于充分大的 u，$\mathrm{Gal}(K_\mathfrak{L}^\dagger/K_\mathfrak{l})^u$ 是平凡的。由于 $U_{K_\mathfrak{l}}^{(0)}/U_{(u)K_\mathfrak{l}}$ 是有限的，我们知道 $\mathrm{Gal}(K_\mathfrak{L}^\dagger/K_\mathfrak{l})^0$ 是有限的。因此，存在一个有限扩张 $K(\mathfrak{l})$，它是 $K^\dagger$ 中 K 上的扩张，使得 χ 在 $\mathrm{Gal}(L/K(\mathfrak{l}))$ 上的限制，在 $K(\mathfrak{l})$ 中位于 $\mathfrak{l}$ 上方的所有素理想处均为非分歧。

对于任意 $\mathfrak{l}\in\mathfrak{M}_K^\infty$，令 Λ 为 $K_\mathfrak{l}^{\mathrm{sep}}$ 中与 ϕ 相关联的格。则存在一个 $K_\mathfrak{l}$ 的有限可分扩张 E，使得 $\Lambda\subseteq E$。G_K 在 $T_\mathfrak{p}(\phi)$ 上的作用诱导出 $G_{K_\mathfrak{l}}$ 在 $\Lambda\otimes_A A_\mathfrak{p}$ 上的作用；在该作用下，G_E 平凡作用。令 $K(\mathfrak{l})=E$。于是，χ 在 $\mathrm{Gal}(L/K(\mathfrak{l}))$ 上的限制，在 $K(\mathfrak{l})$ 中位于 $\mathfrak{l}$ 上方的所有素理想处均为非分歧。我们用所有 $\mathfrak{l}\in S\cup\mathfrak{M}_K^\infty$ 对应的 $K(\mathfrak{l})$ 的合成扩张替换 K，并可假设 χ 在 K 的每个素理想处均为非分歧。

取不位于 S 上方的 $\mathfrak{l}\in\mathfrak{M}_K^{\mathrm{f}}$。弗罗贝尼乌斯元素在 $T_\mathfrak{p}(\phi)$ 上作用的特征值 $\alpha_\mathfrak{l}$ 满足$|\alpha_\mathfrak{l}|_\infty=q_\mathfrak{l}^{1/r_\phi}$，其中 $q_\mathfrak{l}$ 是 $\mathfrak{l}$ 处剩余域的基数，r_ϕ 是 ϕ [的秩（Tak82，命题 3]）。特别地，$|\alpha_\mathfrak{l}|_\infty>1$。因此，$G$ 在上述 χ 下的像 $\chi(G)$ 是无限的。令 M 为满足 $\chi(G)=\mathrm{Gal}(M/K)$ 的 K 的扩张。那么，M 是 K 上的无限阿贝尔扩张，且在每个素理想处均非分歧。由于 $K(T_\mathfrak{p}(\phi))/K$ 中的常数扩张有限（Gek19，注 4.2], ），所以 M 中存在有限常数扩张K'/K，使得 M/K' 是几何且无限的阿贝尔扩张，并在每个素理想处均非分歧。然而，这是不可能的，因为在每个素理想处均非分歧的最大几何扩张必定是有限的（见 [AT09，第 VIII 章，第 3] 节）。□

定理 2.6. 设伽罗瓦扩张 L/K 在 ∞ 之外具有有限最大分歧断点，则它是 DKF。

证明. 设 L' 是 L 的有限伽罗瓦扩张，ϕ 是 L' 上的一个 Drinfeld A-模。存在 L'/K 的有限子扩张 K'，使得 L'/K' 是伽罗瓦扩张，且 ϕ 定义在 K' 上。根据假设，L'/K' 在 ∞ 之外具有有限最大分歧断点。由命题 2.5，对于 A 中任意非零素理想 $\mathfrak{p}$，有 $T_\mathfrak{p}(\phi)^{G_{L'}}=0$。因此，由命题 2.3 (1)，$\phi(L')[\mathfrak{p}^\infty]$ 是有限的。现在，K' 是 DKF，因为 K 也是如此。于是，由同一命题的 (2)，$\phi(L')_{\mathrm{div}}=0$。因此，$L$ 是 DKF。□

推论 2.7. 设 L 如定理 2.6 中所述，则 $L\overline{\mathbb{F}_q}$ 是 DKF。

证明。我们看到，$L\overline{\mathbb{F}_q}/K$ 在 ∞ 之外具有有限最大分歧断点，并应用定理 2.6。□

3. Construction of Drinfeld-Kummer-faithful fields from Drinfeld modules

回忆一下，对于 F上的任意有限域扩张 E，$\mathfrak{M}_E^{\mathrm{f}}$ 表示 E 中不在 ∞ 上方的素数集合。对于$\mathfrak{l}\in\mathfrak{M}_E^{\mathrm{f}}$，记 $v_\mathfrak{l}$ 为对应于 $\mathfrak{l}$ 的赋值，并将其归一化，使得 $v_\mathfrak{l}(E^\times)=\mathbb{Z}$。我们将 $v_\mathfrak{l}$唯一地延拓到 $E_\mathfrak{l}^{\mathrm{sep}}$。对于 $E_\mathfrak{l}$ 的有限扩张 L，我们用 v_L 表示相应的赋值，并将其归一化，使得$v_L(L^\times)=\mathbb{Z}$。记 $\mathcal{O}_\mathfrak{l}$ 为对应于 $E_\mathfrak{l}$的赋值环。为简化记号，对于 A的主理想$\mathfrak{a}$，若生成元的选取没有问题，我们仍将其生成元记作 $\mathfrak{a}$。

本节旨在举出一些在 F上无限生成的 DKF 域的例子。我们将参考 Rosen 论文 [Ros03]第 5 节中的策略，证明通过添加具有“没有太差”约化的有限秩 Drinfeld 模的有界阶扭点所得到的域具有这一性质。由于我们只关注最大分歧断点的有限性，本节给出的估计看起来远非最优。要获得更精确的估计，请参阅 [Tag92] 或 [CL13]。

命题 3.1. 设 K 是 F 的有限扩张。设 $\mathfrak{p}\in\mathfrak{M}_A$ 和$\mathfrak{l}\in\mathfrak{M}_K^{\mathrm{f}}$。设 m、r 和 N 为非负整数。假设 $\mathfrak{p}^m$ 是一个主理想。令 $a(\mathfrak{p}^m)$ 为 Drinfeld A-模 ϕ 在 $K_\mathfrak{l}$ 上的 $\phi_{\mathfrak{p}^m}(X)$ 的首项系数。那么存在一个常数 C，它取决于 $\mathfrak{p}$、$\mathfrak{l}$、m、r 和 N，使得对于任意秩至多为 r、满足 $v_\mathfrak{l}(a(\mathfrak{p}^m))\leq N$ 的 Drinfeld A-模 ϕ（定义在 $\mathcal{O}_\mathfrak{l}$ 上），$K_\mathfrak{l}(\phi[\mathfrak{p}^m])/K_\mathfrak{l}$ 的最大分歧断点至多为 C。

证明。考察 $\phi_{\mathfrak{p}^m}(X)$ 在 $\mathfrak{l}$ 处的牛顿多边形，对于非零的 $x\in\phi[\mathfrak{p}^m]$，我们有 e

$$v_\mathfrak{l}(x)\leq -\frac{0-v_\mathfrak{l}(\mathfrak{p}^m)}{q-1}=\frac{v_\mathfrak{l}(\mathfrak{p}^m)}{q-1}$$

and

$$v_{\mathfrak{l}}(x) \geq -\frac{v_{\mathfrak{l}}(a(\mathfrak{p}^m)) - 0}{q^{r_\phi \deg(\mathfrak{p}^m)} - q^{r_\phi \deg(\mathfrak{p}^m)-1}} = \frac{-v_{\mathfrak{l}}(a(\mathfrak{p}^m))}{q^{r_\phi \deg(\mathfrak{p}^m)-1}(q-1)}.$$

这里 r_ϕ 表示 ϕ 的秩。设 $G^u_{K_{\mathfrak{l}}} \neq 1$。对于 $G^u_{K_{\mathfrak{l}}}$ 中的 $\sigma \neq 1$，存在 $\phi[\mathfrak{p}^m]$ 中的 x，使得 $x^\sigma \neq x$。取满足 $-v_{\mathfrak{l}}(x) \leq v_{\mathfrak{l}}(b) < -v_{\mathfrak{l}}(x) + 1$ 的 $b \in K_{\mathfrak{l}}$。于是 $v_{\mathfrak{l}}(bx) \geq 0$，并且

$$\begin{aligned} v_L((bx)^\sigma - bx) &= e_{L/K_{\mathfrak{l}}} v_{\mathfrak{l}}((bx)^\sigma - bx) \\ &= e_{L/K_{\mathfrak{l}}}(v_{\mathfrak{l}}(x^\sigma - x) + v_{\mathfrak{l}}(b)) \\ &\leq e_{L/K_{\mathfrak{l}}}\left(\frac{v_{\mathfrak{l}}(\mathfrak{p}^m)}{q-1} + \left(-\frac{-v_{\mathfrak{l}}(a(\mathfrak{p}^m))}{q^{r_\phi \deg(\mathfrak{p}^m)-1}(q-1)}\right) + 1\right). \end{aligned}$$

这里，$L = K_{\mathfrak{l}}(\phi[\mathfrak{p}^m])$，且 $e_{L/K_{\mathfrak{l}}}$ 表示 $L/K_{\mathfrak{l}}$的分歧指数。因此

$$u \leq e_{L/K_{\mathfrak{l}}}\left(\frac{v_{\mathfrak{l}}(\mathfrak{p}^m)}{q-1} + \frac{v_{\mathfrak{l}}(a(\mathfrak{p}^m))}{q^{r_\phi \deg(\mathfrak{p}^m)-1}(q-1)} + 1\right) - 1.$$

由于 $e_{L/K_{\mathfrak{l}}}$ 可由 $\mathfrak{p}$、m和 r 界定（一个显然的上界是 $(q^{r\deg(\mathfrak{p}^m)})!$，因为 $L/K_{\mathfrak{l}}$ 是多项式 $\phi_{\mathfrak{p}^m}(X)$的分裂域，其次数至多为 $q^{r\deg(\mathfrak{p}^m)}$），我们得到所需的 u上界。□

从现在起，我们假设 $F = \mathbb{F}_q(t)$、$\infty = (1/t)$以及 $A = \mathbb{F}_q[t]$。设 Drinfeld A-模 ϕ 定义在具有稳定约化的 K 上，并令 (ψ, Γ) 为 ϕ 在 $\mathfrak{l} \in \mathfrak{M}_K^{\mathrm{f}}$处的 Tate 均匀化。这里，$\psi$ 是定义在 $\mathcal{O}_{\mathfrak{l}}$ 上的 Drinfeld A-模，具有良约化；Γ 是一个 ψ-格，也就是说，它是 $\psi(K_{\mathfrak{l}}^{\mathrm{sep}})$的一个有限生成离散投射 A-子模，并且在 $G_{K_{\mathfrak{l}}}$的作用下保持不变。这样的数对称为 Tate 数据。幂级数

$$e_\Gamma(X) = X \prod_{\gamma \in \Gamma \setminus \{0\}} \left(1 - \frac{X}{\gamma}\right)$$

在 $\psi(K_{\mathfrak{l}}^{\mathrm{sep}})$ 上定义一个 $\mathbb{F}_q$-线性整函数，并且对所有 $a \in A$ 满足 $e_\Gamma \psi_a = \phi_a e_\Gamma$（我们可以将 e_Γ 视为 $\mathcal{O}_{\mathfrak{l}}\{\{\tau\}\}$ 中的一个元素；$\mathcal{O}_{\mathfrak{l}}\{\{\tau\}\}$ 是以 τ 为变量、系数在 $\mathcal{O}_{\mathfrak{l}}$ 中的形式幂级数所构成的非交换环，其乘法由对 $x \in \mathcal{O}_{\mathfrak{l}}$ 的 $\tau x = x^q \tau$ 决定）。对于正整数 r_ψ 和 r_Γ，存在一个自然的一一对应（见 [Dri74，第 7] 节）

$$\begin{aligned} &\left\{ \begin{array}{l} \text{Drinfeld } A\text{-modules } \phi \text{ of rank } r_\psi + r_\Gamma \text{ over} \\ K_{\mathfrak{l}} \text{ with stable reduction of rank } r_\psi \end{array} \right\} \Big/ (K_{\mathfrak{l}}\text{-isom.}) \\ \xleftrightarrow{1:1} &\left\{ \begin{array}{l} \text{Tate data } (\psi, \Gamma), \text{ where } \psi \text{ is a Drinfeld} \\ A\text{-module over } \mathcal{O}_{\mathfrak{l}} \text{ with good reduction of} \\ \text{rank } r_\psi \text{ and } \Gamma \text{ is a } \psi\text{-lattice of rank } r_\Gamma \end{array} \right\} \Big/ (K_{\mathfrak{l}}\text{-isom.}). \end{aligned}$$

注意，两个 Tate 数据 $(\psi \quad \Gamma)$ 和 (ψ', Γ') 是 $K_{\mathfrak{l}}$-同构的，如果存在一个从 ψ 到 ψ' 的同构，且其在 $K_{\mathfrak{l}}$ 上定义，并诱导一个从 Γ 到 Γ' 的同构。

我们引入 Tate 数据 (ψ, Γ) 的大小这一概念。注意到，由于我们已假设 $A = \mathbb{F}_q[t]$，任何 ψ-格 Γ 都是 $\psi(K_{\mathfrak{l}}^{\mathrm{sep}})$ 中一个有限生成自由 A- 子模。由于 Γ 是离散的且 ψ 具有良约化，对于 $\gamma \in \Gamma \setminus \{0\}$ 和 $a \in A \setminus \{0\}$，我们有 $v_{\mathfrak{l}}(\gamma) < 0$ 以及 $v_{\mathfrak{l}}(\psi_a(\gamma)) = q^{r_\psi \deg(a)} v_{\mathfrak{l}}(\gamma)$。根据 Gardeyn [Gar02，第 1], 节，我们定义

$$\|\gamma\|_{\mathfrak{l}} = (-v_{\mathfrak{l}_0}(\gamma))^{1/r_\psi}$$

对于 $\gamma \in \Gamma \setminus \{0\}$ 和 $\|0\|_{\mathfrak{l}} = 0$。这里 $\mathfrak{l}_0 \in \mathfrak{M}_A$ 位于 $\mathfrak{l}$之下。于是，$\|-\|_{\mathfrak{l}}$是在 ∞ 处相对于绝对值 $|-|_\infty = q^{\deg(-)}$ 的一个 $G_{K_{\mathfrak{l}}}$-不变范数，并且在对 K作有限扩张后保持不变。我们回顾 Taguchi 的论文 [Tag93 第 4] 节中在一般情形下定义的 A-格的逐次极小值概念。注意，A-格是指相对于某个范数 $\|-\|$的有限生成离散自由 A-模。

定义 3.2. 设 Λ 是一个相对于范数 $\|-\|$的 A-格。对于实数 c，定义

$$B(c) = \{\lambda \in \Lambda \mid \|\lambda\| \leq c\}.$$

设 r 为 Λ的秩。对于 $1 \leq i \leq r$，第 i个逐次极小值 c_i 是满足以下条件的最小实数 c：$B(c)$至少包含 Λ 中 i 个在 A上线性无关的元素。若 A-基 $(\lambda_i)_{1 \leq i \leq r}$ 满足对所有 i均有 $\|\lambda_i\| = c_i$，则称其为 Λ 的逐次极小基。

注意，对任意实数 c，集合 $B(c)$ 都是有限的。我们很容易验证，逐次极小值和逐次极小基总是存在的。逐次极小值的一个有用性质见下引理。

引理 3.3（[Tag93, 引理 4.2]）。设 Λ 是关于范数 $\|-\|$ 的秩为 r 的 A-格，且 $(\lambda_i)_{1\le i\le r}$ 是 Λ 的一个 A-基，使得 $\|\lambda_1\| \le \cdots \le \|\lambda_r\|$。则以下条件等价：
(a) $(\lambda_i)_{1\le i\le r}$ 是一个逐次极小基。(b) 对所有$(a_i)_{1\le i\le r} \in A^r$，$\|\sum a_i\lambda_i\| = \max\{\|a_i\lambda_i\|\}$。

对于一个具有逐次极小值 $c_1, \ldots, c_r$的 A-格 Λ，我们将 Λ 的余体积 $D(\Lambda)$定义为它们的乘积，即

$$D(\Lambda) = \prod_{i=1}^{r} c_i.$$

下一个引理很容易证明。

引理 3.4. 设 Λ 是一个秩为 r 的 A-格，且$(c_i)_{1\le i\le r}$ 是其逐次极小值。若 ε 是满足 $\varepsilon \le c_1$的正实数，则有 $c_r \le \varepsilon^{-(r-1)} D(\Lambda)$。

证明。由于 $D(\Lambda) \ge c_1^{r-1} c_r$，我们有 $c_r \le c_1^{-(r-1)} D(\Lambda) \le \varepsilon^{-(r-1)} D(\Lambda)$。 □

现在我们转向 Drinfeld A-模 ϕ 在 K上的秩至多为 r 的情形。根据 [Dri74, 命题 7.1]，存在一个 K 的温和分歧扩张 K'，其分歧指数整除 $d = \mathrm{lcm}\{q^i - 1 \mid 1 \le i \le r\}$，使得$\phi$ 在位于 $\mathfrak{l}$上方的$\mathfrak{l}' \in \mathfrak{M}_{K'}^{\mathrm{f}}$ 处具有稳定约化。令 (ψ, Γ) 为 $\mathfrak{l}'$处的 Tate 均匀化。回顾一下，在 A 通过 ψ 和范数 $\|-\| = \|-\|_{\mathfrak{l}'}$的作用下，$\Gamma$ 是一个A-格。置 $D(\phi, \mathfrak{l}) = D(\Gamma)$。注意，它与扩张 K'、素理想 $\mathfrak{l}'$及 Tate 数据 (ψ, Γ) 的选择无关。我们还指出，对于伽罗瓦扩张L/K，LK'/K' 的最大分歧断点至多为 L/K的最大分歧断点的 d 倍。记 r_ϕ 为 ϕ的秩，r_ψ 为 ψ的秩，r_Γ 为 Γ的秩。

命题 3.5. 设 K 是 F 的有限扩张。设 $\mathfrak{p} \in \mathfrak{M}_A$ 和 $\mathfrak{l} \in \mathfrak{M}_K^{\mathrm{f}}$。设 m、r 和 N 是非负整数。那么存在常数 C，它依赖于 $\mathfrak{p}$、$\mathfrak{l}$、m、r 和 N，使得对于任意定义在 $\mathcal{O}_\mathfrak{l}$ 上、秩至多为 r 且满足 $D(\phi, \mathfrak{l}) \le N$ 的 Drinfeld A-模 ϕ，$K_\mathfrak{l}(\phi[\mathfrak{p}^m])/K_\mathfrak{l}$ 的最大分歧断点至多为 C。

证明。由命题 3.1，只需用 $\mathfrak{p}$、$\mathfrak{l}$、m、r 和 N 给出 $v_\mathfrak{l}(a(\mathfrak{p}^m))$ 的上界。上述备注允许我们将 K 替换为其分歧指数整除 d 的温和分歧扩张，并假设 ϕ 在 K 上的 $\mathfrak{l}$ 处具有稳定约化。设 (ψ, Γ) 是 ϕ 在 $\mathfrak{l}$处的 Tate 均匀化。若 $r_\psi = r_\phi$，则 ϕ 在 $\mathfrak{l}$ 处具有良约化，且 $v_\mathfrak{l}(a(\mathfrak{p}^m)) = 0$。在证明余下部分中，我们假设 $r_\psi < r_\phi$。令 $(\gamma_i)_{1\le i\le r_\Gamma}$ 为 Γ 的逐次极小基。我们有一个自然同构

$$\psi_{\mathfrak{p}^m}^{-1}(\Gamma)/\Gamma \xrightarrow{\sim} \phi[\mathfrak{p}^m]; \quad z + \Gamma \mapsto e_\Gamma(z).$$

Then

$$\phi_{\mathfrak{p}^m}(X) = \mathfrak{p}^m X \prod_{\xi \in \phi[\mathfrak{p}^m]\setminus\{0\}} \left(1 - \frac{X}{\xi}\right) = \mathfrak{p}^m X \prod_{z \in (\psi_{\mathfrak{p}^m}^{-1}(\Gamma)/\Gamma)\setminus\{0\}} \left(1 - \frac{X}{e_\Gamma(z)}\right).$$

比较等式两边的首项系数，我们得到

$$a(\mathfrak{p}^m) = \mathfrak{p}^m \Big/ \prod e_\Gamma(z),$$

其中 z 遍历 $(\psi_{\mathfrak{p}^m}^{-1}(\Gamma)/\Gamma) \setminus \{0\}$。

设 ξ_i 是方程 $\psi_{\mathfrak{p}^m}(X) = \gamma_i$的一个解。我们断言集合

$$Z = \left\{ \sum_{i=1}^{r_\Gamma} \psi_{a_i}(\gamma_i) + \eta \;\middle|\; a_i \in A \text{ with } \deg(a_i) < \deg(\mathfrak{p}^m), \text{ and } \eta \in \psi[\mathfrak{p}^m] \right\}$$

是 $\psi_{\mathfrak{p}^m}^{-1}(\Gamma)/\Gamma$ 的代表系，且满足 $0 \in Z$。事实上，我们很容易验证，Z 包含于 $\psi_{\mathfrak{p}^m}^{-1}(\Gamma)$ 中，其基数等于 $q^{r_\phi \deg(\mathfrak{p}^m)} = \#\phi[\mathfrak{p}^m]$，并且 Z 中任意两个元素模 Γ 不同余。

为了得到 $v_{\mathfrak{l}}(a(\mathfrak{p}^m))$ 的上界，我们应当为非零的 $z \in Z$ 找到 $v_{\mathfrak{l}}(e_\Gamma(z))$ 的下界。我们有

$$\begin{aligned} v_{\mathfrak{l}}(e_\Gamma(z)) &= v_{\mathfrak{l}}\left(z \prod_{\gamma \in \Gamma \setminus \{0\}} \left(1 - \frac{z}{\gamma}\right)\right) \\ &\geq v_{\mathfrak{l}}(z) + \sum_{\gamma \in \Gamma \setminus \{0\};\, v_{\mathfrak{l}}(\gamma) > v_{\mathfrak{l}}(z)} v_{\mathfrak{l}}\left(\frac{z}{\gamma}\right) \\ &\geq v_{\mathfrak{l}}(z) \cdot \#\{\gamma \in \Gamma \mid v_{\mathfrak{l}}(\gamma) > v_{\mathfrak{l}}(z)\}. \end{aligned}$$

因为对于非零的 $\gamma \in \Gamma$，$v_{\mathfrak{l}}(\gamma) < 0$。对于非零的 $z = \sum \psi_{a_i}(\xi_i) + \eta \in Z$，我们计算最后一个不等式成立 e

$$\begin{aligned} v_{\mathfrak{l}}(z) &\geq \min(\{v_{\mathfrak{l}}(\psi_{a_i}(\xi_i))\}_i \cup \{v_{\mathfrak{l}}(\eta)\}) \\ &= \min\{q^{r_\psi \deg(a_i)} v_{\mathfrak{l}}(\xi_i)\}_i \\ &\geq q^{r_\psi(\deg(\mathfrak{p}^m)-1)} \cdot q^{-r_\psi \deg(\mathfrak{p}^m)} \min\{v_{\mathfrak{l}}(\gamma_i)\}_i \\ &= -q^{-r_\psi} c_{r_\Gamma}^{r_\psi}. \end{aligned}$$

于是我们得到

$$\begin{aligned} &\#\{\gamma \in \Gamma \mid v_{\mathfrak{l}}(\gamma) > v_{\mathfrak{l}}(z)\} \\ &\leq \#\{\gamma \in \Gamma \mid v_{\mathfrak{l}}(\gamma) > -q^{-r_\psi} c_{r_\Gamma}^{r_\psi}\} \\ &= \#\left\{(a_1, \ldots, a_{r_\Gamma}) \in A^{r_\Gamma} \;\middle|\; v_{\mathfrak{l}}\left(\sum_{i=1}^{r_\Gamma} \psi_{a_i}(\gamma_i)\right) > -q^{-r_\psi} c_{r_\Gamma}^{r_\psi}\right\} \\ &= \prod_{i=1}^{r_\Gamma} \#\{a_i \in A \mid v_{\mathfrak{l}}(\psi_{a_i}(\gamma_i)) > -q^{-r_\psi} c_{r_\Gamma}^{r_\psi}\} \\ &= \prod_{i=1}^{r_\Gamma} \#\left\{a_i \in A \;\middle|\; \deg(a_i) < \log_q\left(\frac{c_{r_\Gamma}}{c_i}\right) - 1\right\} \\ &< \prod_{i=1}^{r_\Gamma} \frac{c_{r_\Gamma}}{c_i}. \end{aligned}$$

另一方面，γ_1 的共轭都包含在集合 $\{\gamma \in \Gamma \mid \|\gamma\|_{\mathfrak{l}} = c_1\}$ 中，其基数至多为$q^{r_\Gamma} - 1$。因此，γ_1 在 $K_{\mathfrak{l}}$ 上的最小多项式的分裂域 L' 的次数有界，且存在一个依赖于 r 的常数 C'，使得 $L'/K_{\mathfrak{l}}$ 的分歧指数 $e_{L'/K_{\mathfrak{l}}}$ 至多为 C'。（一个显然的上界是 $C' = (q^r - 1)!$。）由于 $v_{\mathfrak{l}}(\gamma_1) < 0$，我们有 $v_{\mathfrak{l}}(\gamma_1) \leq -1/C'$，因此 $c_1 = (-v_{\mathfrak{l}}(\gamma_1))^{1/r_\psi} \geq C'^{-1/r_\psi}$。应用引理 3.4，其中 $\varepsilon = C'^{-1/r_\psi}$，得到

$$\begin{aligned} v_{\mathfrak{l}}(a(\mathfrak{p}^m)) &= v_{\mathfrak{l}}(\mathfrak{p}^m) - \sum_{z \in Z \setminus \{0\}} v_{\mathfrak{l}}(e_\Gamma(z)) \\ &\leq v_{\mathfrak{l}}(\mathfrak{p}^m) - (q^{r_\phi \deg(\mathfrak{p}^m)} - 1)(-q^{-r_\psi} c_{r_\Gamma}^{r_\psi}) \prod_{i=1}^{r_\Gamma} \frac{c_{r_\Gamma}}{c_i} \\ &< v_{\mathfrak{l}}(\mathfrak{p}^m) + q^{r_\phi \deg(\mathfrak{p}^m) - 1} c_{r_\Gamma}^{r_\phi} \prod_{i=1}^{r_\Gamma - 1} c_i^{-1} \\ &\leq v_{\mathfrak{l}}(\mathfrak{p}^m) + q^{r_\phi \deg(\mathfrak{p}^m) - 1} (C'^{(r_\Gamma - 1)/r_\psi} D(\phi, \mathfrak{l}))^{r_\phi} C'^{r_\phi - 2} \\ &\leq v_{\mathfrak{l}}(\mathfrak{p}^m) + q^{r_\phi \deg(\mathfrak{p}^m) - 1} N^{r_\phi} C'^{(r_\phi + 1)(r_\phi - 2)}, \end{aligned}$$

这就证明了该命题。 □

对于正整数 r、由 $\mathfrak{M}_K^{\mathrm{f}}$ 索引的正整数族 $\boldsymbol{N} = (N_{\mathfrak{l}})_{\mathfrak{l} \in \mathfrak{M}_K^{\mathrm{f}}}$，以及由 $\mathfrak{M}_A$ 索引的非负整数族 $\boldsymbol{m} = (m_{\mathfrak{p}})_{\mathfrak{p} \in \mathfrak{M}_A}$，令 $\Phi_K(r, \boldsymbol{N}, \boldsymbol{m})$ 表示所有秩不超过 r 的 Drinfeld A-模 ϕ 在 K 上的集合，其中对所有 $\mathfrak{l} \in \mathfrak{M}_K^{\mathrm{f}}$ 都有 $D(\phi, \mathfrak{l}) \leq N_{\mathfrak{l}}$。定义 $K_{r,\ \boldsymbol{N},\ \boldsymbol{m}}$ 为由所有 $\phi \in \Phi_K(r, \boldsymbol{N}, \boldsymbol{m})$ 和所有 $\mathfrak{p} \in \mathfrak{M}_A$ 的 $\phi[\mathfrak{p}^{m_{\mathfrak{p}}}]$ 中的元素生成的 K 的扩张。

定理 3.6。域$K_{r,\ \boldsymbol{N},\ \boldsymbol{m}}$是 DKF。

证明。根据定理 2.6，只需证明 $K_{r,\ \boldsymbol{N},\ \boldsymbol{m}}$ 在 ∞ 外具有有限最大分歧断点。我们注意到，[OT22] 中的引理 3.1 在函数域的情形下仍然成立。因此，只需证明：对于任意 $\mathfrak{l} \in \mathfrak{M}_K^{\mathrm{f}}$，存在常数 $u(\mathfrak{l})$，使得对于任意 $\phi \in \Phi_K(r, \boldsymbol{N}, \boldsymbol{m})$ 和任意 $\mathfrak{p} \in \mathfrak{M}_A$，$K_{\mathfrak{l}}(\phi[\mathfrak{p}^{m_{\mathfrak{p}}}])/K_{\mathfrak{l}}$ 的最大分歧断点至多为 $u(\mathfrak{l})$。

固定 $\mathfrak{l} \in \mathfrak{M}_K^{\mathrm{f}}$, $\phi \in \Phi_K(r, \boldsymbol{N}, \boldsymbol{m})$，以及 $\mathfrak{p} \in \mathfrak{M}_A$。根据命题 3.5 前的评注，我们可以假设 ϕ在 K上于 $\mathfrak{l}$ 处具有稳定约化。

若 $\mathfrak{p}$ 位于 $\mathfrak{l}$之下，则由命题 3.5，存在常数 C_1，使得 $K_{\mathfrak{l}}(\phi[\mathfrak{p}^{m_{\mathfrak{p}}}])/K_{\mathfrak{l}}$ 的最大分歧断点至多为 C_1。设 $\mathfrak{l} \nmid \mathfrak{p}$。令 (ψ, Γ) 为 ϕ 在 $\mathfrak{l}$处的 Tate 均匀化。由于 ψ 具有良约化，$K_{\mathfrak{l}}(\psi[\mathfrak{p}^{m_{\mathfrak{p}}}])/K_{\mathfrak{l}}$ 是非分歧的 [Tak82，定理 1]。取一个实数 u，使得 $G^u_{K_{\mathfrak{l}}} \neq 1$ 和 $\sigma \neq 1$ 属于 $G^u_{K_{\mathfrak{l}}}$。那么存在 i，满足 $\gamma_i^\sigma \neq \gamma_i$。根据第一逐次极小值 c_1的定义，我们有 $\|\gamma_i^\sigma - \gamma_i\|_{\mathfrak{l}} \geq c_1$。因此 $v_{\mathfrak{l}}(\gamma_i^\sigma - \gamma_i) \leq -c_1^{r_\psi}$。取 $b \in K_{\mathfrak{l}}$，使得 $-v_{\mathfrak{l}}(\gamma_i) \leq v_{\mathfrak{l}}(b) < -v_{\mathfrak{l}}(\gamma_i) + 1$。于是 $v_{\mathfrak{l}}(b\gamma_i) \geq 0$，并且

$$\begin{aligned} v_{K_{\mathfrak{l}}(\Gamma)}((b\gamma_i)^\sigma - b\gamma_i) &= e_{K_{\mathfrak{l}}(\Gamma)/K_{\mathfrak{l}}} v_{\mathfrak{l}}((b\gamma_i)^\sigma - b\gamma_i) \\ &= e_{K_{\mathfrak{l}}(\Gamma)/K_{\mathfrak{l}}}(v_{\mathfrak{l}}(\gamma_i^\sigma - \gamma_i) + v_{\mathfrak{l}}(b)) \\ &< e_{K_{\mathfrak{l}}(\Gamma)/K_{\mathfrak{l}}}(-c_1^{r_\psi} - v_{\mathfrak{l}}(\gamma_i) + 1) \\ &\leq e_{K_{\mathfrak{l}}(\Gamma)/K_{\mathfrak{l}}}(-c_1^{r_\psi} + c_{r_\Gamma}^{r_\psi} + 1), \end{aligned}$$

其中 $e_{K_{\mathfrak{l}}(\Gamma)/K_{\mathfrak{l}}}$ 是 $K_{\mathfrak{l}}(\Gamma)/K_{\mathfrak{l}}$的分歧指数。因此

$$u \leq e_{K_{\mathfrak{l}}(\Gamma)/K_{\mathfrak{l}}}(-c_1^{r_\psi} + c_{r_\Gamma}^{r_\psi} + 1) - 1.$$

根据 [Gar02, 关于 $K_{\mathfrak{l}}(\Gamma)/K_{\mathfrak{l}}$的不同理想 $\mathfrak{D}(K_{\mathfrak{l}}(\Gamma)/K_{\mathfrak{l}})$ 的命题 4]，，我们有

$$\mathrm{ord}_{\mathfrak{l}}\, \mathfrak{D}(K_{\mathfrak{l}}(\Gamma)/K_{\mathfrak{l}}) \leq 1 + 2\sum_{i=1}^{r_\Gamma} \left(q^{i-1} v_{\mathfrak{l}}\left(\frac{\gamma_1}{\gamma_i}\right) \prod_{j=1}^{i} \frac{c_i}{c_j} \right).$$

与命题 3.5 的证明中一样，存在一个仅依赖于 r 的常数 C'，使得 $c_1 \geq C'^{-1/r_\psi}$。然后根据 [Ser79, Chapter III, Section 6, Proposition 13]，，我们计算

$$\begin{aligned} e_{K_{\mathfrak{l}}(\Gamma)/K_{\mathfrak{l}}} &\leq 1 + \mathrm{ord}_{\mathfrak{l}}\, \mathfrak{D}(K_{\mathfrak{l}}(\Gamma)/K_{\mathfrak{l}}) \\ &= 2 + 2\sum_{i=1}^{r_\Gamma} \left(q^{i-1}(-c_1^{r_\psi} + c_i^{r_\psi}) \prod_{j=1}^{i} \frac{c_i}{c_j} \right) \\ &\leq 2 + 2\sum_{i=1}^{r_\Gamma} q^{i-1} c_i^{r_\psi} \left(\frac{c_i}{c_1}\right)^{i-1} \\ &\leq 2 + 2c_{r_\Gamma}^{r_\psi} \sum_{i=1}^{r_\Gamma} \left(\frac{q c_{r_\Gamma}}{c_1}\right)^{i-1} \\ &< 2 + 2c_{r_\Gamma}^{r_\psi} \cdot 2 \left(\frac{q c_{r_\Gamma}}{c_1}\right)^{r_\Gamma - 1} \\ &= 2 + 4q^{r_\Gamma - 1} c_{r_\Gamma}^{r_\phi - 1} c_1^{-(r_\Gamma - 1)} \\ &\leq 2 + 4q^{r-2}(C'^{r-2} D(\phi, \mathfrak{l}))^{r-1} C'^{r-2} \\ &\leq 2 + 4q^{r-2} C'^{r(r-2)} N_{\mathfrak{l}}^{r-1}. \end{aligned}$$

这里我们对 $\alpha \geq 2$ 使用 $\sum_{i=1}^{r_\Gamma} \alpha^{i-1} < 2\alpha^{r_\Gamma - 1}$，并应用引理 3.4。因此

$$\begin{aligned} u &< (2 + 4q^{r-2} C'^{r(r-2)} N_{\mathfrak{l}}^{r-1})((C'^{r_\Gamma - 1} N_{\mathfrak{l}})^{r_\psi} + 1) - 1 \\ &\leq (2 + 4q^{r-2} C'^{r(r-2)} N_{\mathfrak{l}}^{r-1})(C'^{(r-1)^2/4} N_{\mathfrak{l}}^{r} + 1) - 1. \end{aligned}$$

令 C_2 为上述不等式右端。

现在令 $u(\mathfrak{l}) = \max\{C_1, C_2\}$。我们将证明这个 $u(\mathfrak{l})$ 就是所需的常数。$\mathfrak{l} \mid \mathfrak{p}$ 的情形显然。假设 $\mathfrak{l} \nmid \mathfrak{p}$。我们有正合列

$$0 \to \psi[\mathfrak{p}^{m_{\mathfrak{p}}}] \xrightarrow{e_\Gamma} \phi[\mathfrak{p}^{m_{\mathfrak{p}}}] \to \Gamma/\mathfrak{p}^{m_{\mathfrak{p}}}\Gamma \to 0$$

在该正合列上， $G_{K_\mathfrak{l}}$ 的作用与之相容。我们将此列视为 $\mathbb{F}_q$-向量空间的正合列。于是该列分裂。若$u \geq u(\mathfrak{l})$，则 $G^u_{K_\mathfrak{l}}$ 在 $\psi[\mathfrak{p}^{m_\mathfrak{p}}]$ 和 $\Gamma/\mathfrak{p}^{m_\mathfrak{p}}\Gamma$上的作用平凡。因此，$G^u_{K_\mathfrak{l}}$ 在 $\phi[\mathfrak{p}^{m_\mathfrak{p}}]$ 上的作用也平凡，证明完成。□

注 3.7. 存在一个常数 C，仅依赖于 K 和 r，使得对于任意在 K上秩为 r的 Drinfeld A-模 ϕ， $K(\phi(K^{\mathrm{sep}})_{\mathrm{tor}})$中 $\mathbb{F}_q$ 的代数闭包的次数至多为 C [Gek19，注 4.2]。因此，$K_{r,\boldsymbol{N},\boldsymbol{m}}$ 中 $\mathbb{F}_q$ 的代数闭包是有限的。由推论 2.7 可知，$K_{r,\boldsymbol{N},\boldsymbol{m}}\overline{\mathbb{F}_q}$ 是$K_{r,\boldsymbol{N},\boldsymbol{m}}$ 的无限扩张，且仍然是 DKF。

References

[AT09] E. Artin 和 J. Tate, *Class field theory*, AMS Chelsea Publishing, 普罗维登斯，RI，2009 年，根据 1967 年原版更正后重印。[AH23] T. Asayama 和 M. Huang, *Ramification of Tate modules for rank* 2 *Drinfeld modules*, arXiv:2204.13275，即将在 Tohoku Math. J. 发表。[CL13] I. Chen 和 Y. Lee, *Explicit isogeny theorems for Drinfeld modules*, Pac. J. Math. 263 (2013)，87–116。[Dri74] V. G. Drinfeld, *Elliptic modules*, Math. USSR Sb. 23 (1974)，561–592。[FV02] I. B. Fesenko 和 S. V. Vostokov, *Local fields and their extensions*, 第 2 版，数学专著译丛 121，美国数学会，普罗维登斯，RI，2002。[FJ08] M. D. Fried 和 M. Jarden, *Field arithmetic*, 第 3 版，Springer-Verlag，柏林，2008。[Gar02] F. Gardeyn, *Une borne pour l'action de l'inertie sauvage sur la torsion d'un module de Drinfeld*, Arch. Math. 79 (2002)，241–251。[Gek19] E.-U. Gekeler, *On the field generated by the periods of a Drinfeld module*, Arch. Math. 113 (2019)，581–591。[Moc15] S. Mochizuki, *Topics in absolute anabelian geomerty III*: *global reconstruction algorithms*, J. Math. Sci. Univ. Tokyo 22 (2015)，939–1156。[Neu99] J. Neukirch, *Algebraic number theory*, 数学科学基础丛书 322，Springer-Verlag，柏林海德堡，1999。[OT22] Y. Ozeki 和 Y. Taguchi, *A note on highly Kummer-faithful fields*, Kodai Math. J. 45 (2022)，49–64。[Poo95] B. Poonen, *Local height functions amd the Mordell-Weil theorem for Drinfeld modules*, Compos. Math. 97 (1995)，349–368。[Ros03] M. Rosen, *Formal Drinfeld modules*, J. Number Theory 103 (2003)，234–256。[Ser79] J.-P. Serre, *Local fields*, 数学研究生教材 67, Springer-Verlag，纽约-柏林，1979。[Tag92] Y. Taguchi, *Ramifications arising from Drinfeld modules*, 载于: *The Arithmetic of Function Fields*, 1991 年 6 月 17–26 日在俄亥俄州立大学举行的研讨会论文集，de Gruyter，柏林，1992，171–187。[Tag93] Y. Taguchi, *Semi-simplicity of the Galois representations attached to Drinfeld modules over fields of "infinite characteristics"*, J. Number Theory 44 (1993)，292–314。[Tak82] T. Takahashi, *Good reduction of elliptic modules*, J. Math. Soc. Japan 34 (1982)，475–487。[Wan01] J. T.-Y. Wang, *The Mordell–Weil theorems for Drinfeld modules over finitely generated function fields*, Manuscr. Math. 106 (2001)，305–314。

(TAKUYA ASAYAMA) Department of Mathematics, Tokyo Institute of Technology, 2-12-1, O-okayama, Meguro-ku, Tokyo152-8551, Japan*Email address*: asayama.t.aa@m.titech.ac.jp