arXiv:2303.04410v3 [cond-mat.stat-mech] 1 Sep 2023

确定中心自旋模型中累积量展开的有效性

Piper Fowler-Wright, [1] Kristín B. Arnardóttir, [1] Peter Kirton, [2] Brendon W. Lovett, [1] 和 Jonathan Keeling [1]*SUPA*，圣安德鲁斯大学物理与天文学学院，圣安德鲁斯，*KY16 9SS*，英国[2]斯特拉斯克莱德大学物理系及 *SUPA*，格拉斯哥，*G4 0NG*，英国（日期：2023年9月4日）

对于具有多对一连接的模型，人们普遍认为，平均场理论能够描述精确的多粒子 $N \to \infty$ 极限，而海森堡方程的高阶累积量展开会收敛至同一极限，同时在有限 N时提供更好的近似。本文表明，事实并非总是如此。相反，平均场理论能否正确描述大-N 极限，取决于模型参数如何随 N缩放；并且累积量展开的收敛性可能在偶数阶和奇数阶之间并不一致。此外，即使高阶累积量展开确实能恢复正确的极限，其误差也不会随 N 单调变化，而且可能大于平均场理论的误差。

数字对象标识符： 10.1103/PhysRevResearch.5.033148

I. 引言

在多体开放量子系统中，一个格点与许多卫星格点进行非局域耦合的网络十分常见。例如，受驱动电子自旋与核自旋浴相互作用的模型，与核磁共振谱学 [1–4]，量子传感 [5–7]以及量子信息处理 [8–14]相关。这种网络结构在量子光学中也很常见，它描述了玻色模式与发射体系综之间的相互作用 [15], ，或者同样地描述单个发射体与多个电磁模式之间的相互作用 [16]。在许多此类情况下，卫星格点的数量过多，使得精确计算难以进行，尤其是在考虑由非相干过程导致的非幺正动力学时。因此，需要能够处理具有多对一连接结构的大规模受驱动耗散系统的近似方法。下面我们将讨论平均场理论和累积量展开如何构成一套合适的方法。

对于具有有限连通性的模型，平均场理论通常只有在高维下才准确 [17]。相反，有许多理由相信，在热力学极限下，它应当能够重新得到多对一模型的精确行为。首先，给定 N 个相同卫星自旋，纠缠单配性 [18] 会限制任意两个格点之间的纠缠，使得系统中的量子关联随 $N \to \infty$ 趋于零。然而，对经典 关联并不存在类似的限制，因此它们完全可能在此极限下持续存在。其次，对于与卫星位点弱耦合的模型，可以将卫星位点视为中心位点的谐振浴，其线性响应会在 $N \to \infty$ [19] 时变得精确。第三，对于大量发射体与玻色模式相互作用的模型，可以通过鞍点分析 [20]证明平均场方程的合理性。在这一类模型中，关于平均场理论在 $N \to \infty$ 时精确成立的结果还有更多严格证明 [21–23]。尽管有这些结果，我们在此给出一个简单的例子，说明平均场理论并不总能捕捉多对一模型的 $N \to \infty$ 极限。

即使平均场理论能够正确描述精确的 $N \to \infty$ 行为，要捕捉有限 N 下的效应，仍可能需要其他方法。海森堡方程的各种累积量展开形式已被广泛应用于多体系统 [16, 24–39]，作为一种系统的近似方案，逐步纳入更高阶的关联；人们希望以复杂度不断增加为代价提升准确性。这种方法的优势在于所得问题的维度较小（且与系统尺寸无关 N），并且即便是较低阶的展开，也能在中间 N 产生准确结果。因此，这类方法既可用于捕捉 $N \gg 1$ 下的行为，也可用于研究有限尺寸效应。

在较大的 N 下直接进行模拟十分困难，这意味着累积量展开很少能在远超 $N \sim 30$的范围内与精确方法进行比较。因此，人们可能会基于这样的假设来判断结果是否可靠：在更大的 N 下进行计算，并采用更高阶的展开，会得到更准确的近似。然而，我们在此展示了一些案例，说明这两个假设都不成立。

在这项工作中，我们全面探究了驱动耗散中心自旋模型中累积量展开的收敛性。我们展示了平均场理论对完整量子模型的 $N \to \infty$ 稳态的描述能力如何取决于参数的标度。此外，我们还表明，即使平均场理论确实能在 $N \to \infty$下描述精确行为，也不能保证高阶累积量展开会收敛到相同结果。我们结合系统中存在的关联，讨论了这种收敛行为的成因，并指出在光-物质相互作用模型中也可能观察到类似行为。置换对称性使我们能够在相对较大的 $N \sim 150$ 下将中心自旋模型与精确结果进行比较，由此表明，累积量展开近似的误差通常不会随着 N或展开阶数的增加而单调减小。

本文的结构如下。在第 II节中，我们将概述中心自旋模型以及可用于求解该模型的置换对称方法

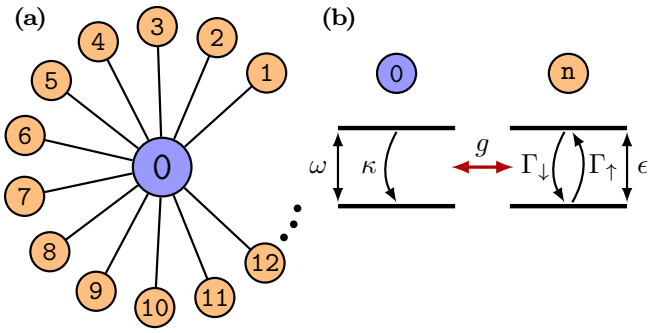

图1. (a) 模型网络：一个中心位点（索引为 0）与 N 个相同卫星自旋（$n = 1$、……、N）耦合。(b) 每个位点都是一个二能级系统（自旋-1/2），会发生衰减（κ 或 $\Gamma_\downarrow$）；此外，卫星还受到泵浦 $\Gamma_\uparrow$。

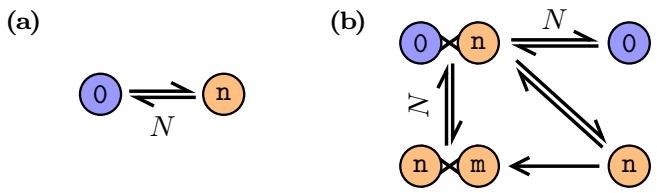

图 2. (a) 平均场约化为一个二体问题，其中卫星位点的期望值根据中心位点的期望值演化（⇀）而中心位点又根据 N 个卫星位点期望值的副本演化（↼）.(b) 在二阶累积量展开中，中心位点-卫星位点和卫星位点-卫星位点的期望值耦合进入系统[方程（10）和（11）]。

在有限 N下。在第 III 节中，我们将介绍累积量展开方法及其在平均场和二阶近似下应用于该模型的情况。随后，第 IV节将比较两种不同参数标度选择下，这些近似截至三阶的结果与精确数据的差异，即 $N \to \infty$。最后，在第 V 节中，我们将展示中心自旋模型和 Tavis–Cummings模型中高阶展开的结果，然后总结我们的发现，并在第 VI节讨论未来工作的方向。

II. 模型

我们考虑一个自旋-1/2（泡利矩阵 σ_0^α），它按照以下方式与 N 个自旋-1/2 卫星（泡利矩阵 σ_n^α）相互作用

$$H = \frac{\omega}{2}\sigma_0^z + \sum_{n=1}^{N}\left[\frac{\epsilon}{2}\sigma_n^z + g\left(\sigma_0^+\sigma_n^- + \sigma_0^-\sigma_n^+\right)\right]. \qquad (1)$$

其中，ω 和 ϵ分别是中心自旋和一个卫星自旋的格点能量，g 是相互作用强度。此外，我们考虑中心位点以速率 κ 发生耗散，以及每个卫星的非相干泵浦 $\Gamma_\uparrow$ 和损耗 $\Gamma_\downarrow$。这些过程作为马尔可夫项纳入总密度算符 ρ的主方程中，

$$\partial_t\rho = -i\,[H,\rho] + \kappa\mathcal{L}[\sigma_0^-] + \sum_{n=1}^{N}\left(\Gamma_\uparrow\mathcal{L}[\sigma_n^+] + \Gamma_\downarrow\mathcal{L}[\sigma_n^-]\right), \quad (2)$$

其中 $\mathcal{L}[x] = x\rho x^\dagger - \{x^\dagger x, \rho\}/2$。系统及这些过程的示意图见图 1(a)和 1(b)。

式（1）中的各向异性交互作用，例如存在于氮空位中心与金刚石中的 ^{13}C 核自旋之间 [40]。人们已广泛研究这一系统，探索其在新兴量子技术中的潜在作用，包括光谱学 [2–4], 量子传感 [5–7], 以及量子计算 [12, 13]。就我们的研究目的而言，该模型为开放式多对一问题提供了一个最简表述，用于研究平均场理论和累积量展开。在某些情况下，例如不存在耗散，或卫星自旋的耗散是集体性的，存在能够处理中心自旋模型大-N 行为的解析或高效数值方法 [41–46]。然而，对于我们所考虑的独立退相干情形，这些方法并不适用。

模型方程（2）的累积量方程在三阶以内可解析求解，同时也允许对相对较大的系统进行精确计算。下文为比较各种近似方法，分析稳态下中心位点的占据数，$p_0^\uparrow$，它与极化 $\langle\sigma_0^z\rangle$之间的关系为 $p_0^\uparrow \equiv \left(1+\langle\sigma_0^z\rangle\right)/2$，并且随着比值 $\Gamma_\uparrow/\Gamma_T$（$\Gamma_T = \Gamma_\uparrow + \Gamma_\downarrow$）增大而从零开始增加。

模型在交换卫星自旋时具有不变性，因此进行精确计算时，可以采用置换对称基底 [47–52]。这在组合计数上缩减了李乌维尔算符的规模 L。在我们的情形下，这使得我们能够求出 L 的特征值为 0 的特征向量，即稳态，精确到 $N = 150$。采用这一基底不会丢失任何信息。特别是，所有关联都可以精确计算，并与累积量展开的预测进行比较。

III. 平均场与累积量展开

现在我们将介绍累积量展开方法，以及它在平均场和二阶近似下应用于中心自旋模型的情形。三阶累积量方程的表达式也见附录 A。

由主方程（式（2））可推导出

单格点期望值的运动方程，

$$\partial_t\langle\sigma_0^z\rangle = -\kappa\left(\langle\sigma_0^z\rangle+1\right)+4gN\,\mathrm{Im}\left[\langle\sigma_0^+\sigma_n^-\rangle\right], \quad (3)$$

$$\partial_t\langle\sigma_n^z\rangle = -\Gamma_T\langle\sigma_n^z\rangle+\Gamma_\Delta-4g\,\mathrm{Im}\left[\langle\sigma_0^+\sigma_n^-\rangle\right], \quad (4)$$

$$\partial_t\langle\sigma_0^+\rangle = \left(i\omega-\frac{\kappa}{2}\right)\langle\sigma_0^+\rangle-igN\langle\sigma_0^z\sigma_n^+\rangle, \quad (5)$$

$$\partial_t\langle\sigma_n^+\rangle = \left(i\epsilon-\frac{\Gamma_T}{2}\right)\langle\sigma_n^+\rangle-ig\langle\sigma_0^+\sigma_n^z\rangle, \quad (6)$$

其中 $\Gamma_\Delta=\Gamma_\uparrow-\Gamma_\downarrow$和 $\Gamma_T=\Gamma_\uparrow+\Gamma_\downarrow$。这组方程并未闭合，因为例如， $\partial_t\langle\sigma_0^z\rangle$ 取决于$\langle\sigma_0^+\sigma_n^-\rangle$。而 $\langle\sigma_0^+\sigma_n^-\rangle$ 的方程又会依赖来自三个不同格点的算符期望值，依此类推，最终产生数量呈指数增长、涉及所有格点上算符的方程。

为了得到数量可控的方程，在M^{th}阶累积量展开中，将 $M+1$阶矩改写为低阶矩的非线性组合，方法是令相应的累积量 [24, 53]为零。这种近似相当于对多体态 ρ 作出如下假设：其中的关联最多涉及 M 个格点。这里需要强调的是，区分的对象是多体系统中的格点（或希尔伯特空间），而非算符本身（例如参考文献 [28]中的用法）。对于二能级系统，这种区分很自然，因为很容易辨认出 $\langle\sigma_0^+\sigma_0^-\sigma_n^z\rangle=(\langle\sigma_0^z\sigma_n^z\rangle+\langle\sigma_n^z\rangle)/2$；但对于玻色算符，例如 a，常见的因式分解形式如 $\langle a^\dagger a\sigma^z\rangle\approx\langle a^\dagger\rangle\langle a\rangle\langle\sigma^z\rangle+\ldots$，其有效性取决于额外的高斯性假设 [54]。

A. 平均场方程

在一阶近似下，即平均场理论中，二阶矩可分解为乘积（$\langle\sigma_0^\alpha\sigma_n^\beta\rangle\approx\langle\sigma_0^\alpha\rangle\langle\sigma_n^\beta\rangle$），从而得到一个有效的二体问题 [图2(a)]。求解稳态可得 $\langle\sigma_0^z\rangle=-1$当 $\Gamma_\uparrow/\Gamma_T$ $R_c\equiv1+$低于 $\Gamma_T\kappa/4g^2N$ /2 $\Gamma_\uparrow/\Gamma_T>R_c$ 临界泵浦比 ()时，而当其满足以下条件时：

$$\langle\sigma_0^z\rangle=-\frac{1}{2}\left(1-\frac{\Gamma_\Delta N}{\kappa}\right)-\frac{1}{2}\sqrt{\left(1-\frac{\Gamma_\Delta N}{\kappa}\right)^2+\frac{\Gamma_T^2}{g^2}}, \quad (7)$$

$$\langle\sigma_n^z\rangle=-\frac{\kappa\Gamma_T}{4g^2N\langle\sigma_0^z\rangle}, \quad \langle\sigma_n^+\rangle=\frac{i\kappa}{2gN\langle\sigma_0^z\rangle}\langle\sigma_0^+\rangle, \quad (8)$$

其中， $\langle\sigma_0^+\rangle$ 的大小由下式确定

$$\left|\langle\sigma_0^+\rangle\right|^2=-\langle\sigma_0^z\rangle\left(1+\langle\sigma_0^z\rangle\right)/2. \quad (9)$$

为简便起见，我们在上文取了 $\omega=\epsilon$，但已验证离开共振时结论仍然不变。

尽管该模型具有 U(1) 对称性，即方程 (2) 在 $\sigma^\pm\to\sigma^\pm e^{\pm i\theta}$作用下保持不变，但在进行平均场近似时，必须保留对称性破缺项 $\langle\sigma_0^+\rangle$ 和$\langle\sigma_n^+\rangle$，才能得到非平凡解：状态 $\langle\sigma_0^z\rangle=-1$ 始终是平均场方程的一个解，只有当 $\Gamma_\uparrow/\Gamma_T>R_c$时才会变得不稳定。

B. 二阶累积量方程

在二阶近似下，无需破缺对称性，因为$\langle\sigma_0^+\sigma_n^-\rangle$ 可以非零，同时仍保持对称性。二阶矩所需的方程为[图2(b)]

$$\partial_t\langle\sigma_0^+\sigma_n^-\rangle=\left(i(\omega-\epsilon)-\frac{\kappa+\Gamma_T}{2}\right)\langle\sigma_0^+\sigma_n^-\rangle+\frac{ig}{2}\langle\sigma_n^z\rangle-\frac{ig}{2}\langle\sigma_0^z\rangle-ig(N-1)\langle\sigma_0^z\rangle\langle\sigma_n^+\sigma_m^-\rangle, \quad (10)$$

$$\partial_t\langle\sigma_n^+\sigma_m^-\rangle=-\Gamma_T\langle\sigma_n^+\sigma_m^-\rangle+2g\,\mathrm{Im}\left[\langle\sigma_0^+\sigma_n^-\rangle\right]\langle\sigma_n^z\rangle, \quad (11)$$

其中 $n\neq m$。此处令三阶累积量为零，并利用 U(1) 对称性，写为 $\langle\sigma_0^z\sigma_n^+\sigma_m^-\rangle\approx\langle\sigma_0^z\rangle\langle\sigma_n^+\sigma_m^-\rangle$，$\langle\sigma_0^+\sigma_n^-\sigma_m^z\rangle\approx\langle\sigma_0^+\sigma_n^-\rangle\langle\sigma_n^z\rangle$ 3 4 10 。方程 （）、（）、（）、和（11）也可以精确求解，尽管无法显式求解，从而得到 $p_0^\uparrow=[1+\langle\sigma_0^z\rangle]/2$。

IV. 平均场与二阶累积量的结果

下面我们将平均场结果方程（7）以及二阶方程（3）、（4）、（10）和（11）的解与精确稳态进行比较。我们针对模型中标度参数的两种可能选取方式进行比较，如下所示 $N\to\infty$。

A. 固定 $g\sqrt{N}$ —

图 3(a) 展示了 $p_0^\uparrow$ 随 $1/N$ 的变化，其中固定 $g\sqrt{N}$。这种标度在光与物质耦合的情境中经常出现，此时耦合强度 g 与模式体积的平方根成反比：随着系统变大， N 和模式体积都会增大，但 $g\sqrt{N}$保持不变。这里可以看到，精确结果与近似结果并不一致，它们分别取不同的 $N\to\infty$ 极限。这与 Tavis–Cummings 模型或 Dicke 模型形成鲜明对比；在这些模型中，对于这种标度，当 [51], 时，平均场近似和二阶累积量近似都收敛于精确稳态。下文将解释，对于中心自旋模型， $N\to\infty$ 如何阻碍二阶累积量向平均场理论收敛。$g\propto1/\sqrt{N}$。 —

B. 固定 κ/N

若改为固定比值 κ/N，图3(b)显示，平均场方法和二阶累积量具有共同的极限，能够捕捉精确行为。请注意，图 3(b) 所绘制的参数预期会出现非零 $p_0^\uparrow$；相图见图3(c) 。这种标度可理解为实现了对中心位点 [56]进行强连续测量的极限。它具有以下特征：

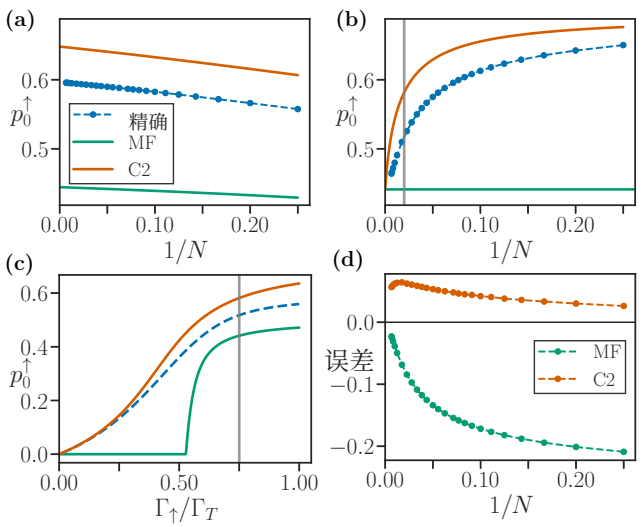

图 3. (a) 在 $g\sqrt{N}=3$ 固定且 $\kappa=1$ 以 ω 为单位时，平均场（MF）和二阶累积量（C2）近似下的中心位点布居 $p_0^{\uparrow}=[1+\langle\sigma_0^z\rangle]/2$。精确数据（蓝点）绘制至 $N=150$。水平刻度 $1/N$ 的设置使得 $N\to\infty$ 位于左侧。(b) 在 $\kappa/N=1/16$ 固定且 $g=3/4$ 时，MF、C2 和精确结果。$N=50$ 处的灰色垂直线表示与 (c) 中相应线上的点等效的点。(c) 在 $\kappa/N=1/16$、$g=3/4$ 和 $N=50$ 固定时，$p_0^{\uparrow}$ 随 $\Gamma_{\uparrow}/\Gamma_T$（$\Gamma_T=\Gamma_{\uparrow}+\Gamma_{\downarrow}$）的变化（精确计算成本低，因此可以绘制连续曲线）。$\Gamma_{\uparrow}/\Gamma_T=R_c\approx 0.53$ 处的平均场相变类似于受驱动耗散的 Tavis–Cummings模型 [15] 以及其他激光模型 [37, 55] 中的相变。(d) (b) 中 MF 和 C2 结果的误差。这些图中使用的其他参数为 $\epsilon=\omega=1$、
$\Gamma_T=2$ 和 [,
但 (c) 中为] $\Gamma_{\uparrow}=3/2$。

在方程（7）–（9）中，卫星位点和中心位点量的期望值具有相同的阶数，$O(1)$，与 $N\to\infty$相同。在附录 B 中，我们证明这对高阶关联同样成立。由此可观察到方程（10）的渐近形式（$\kappa\sim N$），

$$\partial_t\langle\sigma_0^+\sigma_n^-\rangle = N\left(-\frac{\kappa}{2N}\langle\sigma_0^+\sigma_n^-\rangle - ig\langle\sigma_0^z\rangle\langle\sigma_n^+\sigma_m^-\rangle\right) + O(1), \tag{12}$$

与平均场理论的预测相符，

$$\partial_t\left(\langle\sigma_0^+\rangle\langle\sigma_n^-\rangle\right) = N\left(-\frac{\kappa}{2N}\langle\sigma_0^+\rangle\langle\sigma_n^-\rangle - ig\langle\sigma_0^z\rangle\langle\sigma_n^+\rangle\langle\sigma_m^-\rangle\right) + O(1). \tag{13}$$

对于方程 (11及其平均场类比，情况也一样，因此在 $N\to\infty$ 固定时，二阶方程与平均场方程具有相同的结构，κ/N。

相比之下，在固定 $g\sqrt{N}$ 时，关联 $\langle\sigma_n^+\sigma_m^-\rangle$ 不会在 $N\to\infty$保持有限，而是比 $1/\sqrt{N}$衰减得更快（附录 B）。因此，方程（$\sim g\langle\sigma_0^z\rangle$，$g\langle\sigma_n^z\rangle$10）中的项在平均场理论中并不存在，不能视为 $N\to\infty$。这种差异导致图 3(a)中出现不同的极限。请注意，涉及中心位点的高阶矩方程将包含与平均场理论不一致的额外项。因此，尽管高阶展开可能能够更好地近似精确结果，但它们通常会有不同的极限。这一结果还说明，已知某些关联在较大的N 下趋于零，并不足以判断它们是否会随着 $N\to\infty$而变得无关紧要。相反，还必须考虑乘在这些关联前的参数随 N 的标度。

图 3(d) 进一步展示了，当 κ/N 固定时，二阶近似的误差并不随 N 单调变化，甚至在 $N\gtrsim 80$时超过平均场理论的误差。这种非单调性不可避免，因为该方法在 $N\to\infty$ 极限下能得到精确结果，而在 $N=2$时也必须精确，此时所有关联都已被完整捕获。因此，二阶展开仅在两个极限处渐近地与精确结果相符，在两者之间使用时须谨慎。

V. 高阶累积量展开

A. 中心自旋模型

在确定了 κ/N固定时截至二阶的良定义极限后，我们现在研究这种标度下的高阶累积量展开。我们使用 Quantum-Cumulants.jl Julia 框架 [35] 得到四阶和五阶结果，并求解附录 A中给出的三阶方程。令人惊讶的是，从图 4(a) 可以看到，尽管四阶展开在整个 N范围内都能提高近似精度，三阶展开却并非如此。相反，它收敛到一个与真实结果相距甚远的极限，因此存在某个 N，超过该值后，二阶（以及平均场）结果反而能提供更好的近似。类似地，五阶结果虽然在$N=5$ 之前是精确的，并且在 N非常小时给出最佳近似，却无法捕捉精确的 $N\to\infty$ 极限。

为理解收敛性对阶数奇偶性的依赖，可以将前文关于二阶方程渐近约化为平均场的论证$N\to\infty$ 推广到所有偶数阶。首先请注意，在进行任何因式分解之前，仅涉及卫星位点的矩的方程在结构上与平均场理论相符，因为 H [方程（1）] 对这些位点是线性的。若涉及中心位点，情况便不再如此。不过，在固定 $N\to\infty$时仍然存在的项 κ/N，是由中心算符与 $\sigma_0^+\sigma_n^-$或 $\sigma_0^-\sigma_n^+$的对易子产生，再对卫星位点求和 $\sim N$ 所得的项。这些项在累积量方程和平均场理论中具有相同的结构。其次，给定项的累积量展开所对应的系数有一个关键问题。正如附录C中进一步讨论的那样，按照

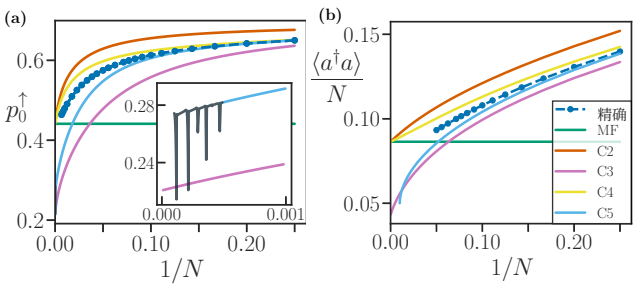

图4。（a）中心位点布居 $p_0^{\uparrow}$ 在固定参数$\kappa/N = 1/16$ [下的平均场（MF）和最高五阶的累积量近似（C2-5），精确数据与图3(b)]相同。四阶和五阶结果使用 Quan- tumCumulants.jl 推导[35]。插图：五阶解在 $N \gtrsim 2{,}500$之后出现数值噪声，但正趋近于一个不同于三阶极限的值。（b）使用 Quantum-Cumulants.jl 得到的驱动耗散塔维斯–卡明斯模型中，缩放后的光子数 $\langle a^\dagger a\rangle/N$ 的平均场和累积量结果。图中还给出了经过 Fock 空间截断后得到的精确结果，截断至 $N = 20$ ($N_{\mathrm{phot.}} = 20$ 个能级即可实现收敛）。此处参数为 $g\sqrt{N} = 9/10$, $\epsilon = \omega = \kappa = 1$, $\Gamma_T = 1/2$，以及 $\Gamma_\uparrow = 3\Gamma_T/4$。五阶解在 $N \gtrsim 100$时变得不稳定。

定义，任意给定项的累积量展开中各系数之和应为 1。然而，当某些项因不符合模型的对称性而被消去时，这一结论未必仍然成立。在偶数阶展开中对矩进行因式分解时，U(1)对称性下非零项的数量确实等于 1 [57]。由于这与平均场预测的项数相符，偶数阶方程的渐近结构与平均场理论相容。

另一方面，在奇数阶截断方程时，只需对涉及升降算符的矩 $\langle\sigma_0^+\sigma_n^-\sigma_m^+\sigma_k^-\ldots\rangle$ 进行因式分解。这会产生一组系数和不为 1 的项。例如，构造三阶方程时，将累积量 $\langle\langle\sigma_0^+\sigma_n^-\sigma_m^+\sigma_k^-\rangle\rangle$ 设为零，可得

$$\langle\sigma_0^+\sigma_n^-\sigma_m^+\sigma_k^-\rangle \approx 2\langle\sigma_0^+\sigma_n^-\rangle\langle\sigma_m^+\sigma_k^-\rangle, \tag{14}$$

排除因 U(1)对称性而消失的项后。这里出现的因子2 与平均场理论不一致。通过这类因式分解得到的项数会随着后续奇数阶的增加而变化（2，−3，34，−455.....），因此可以预期每一阶都会在 $N \to \infty$时各自收敛到其极限值，正如图4(a) 中三阶和五阶的情况所示。

这些观察带来的一个结果是，对于$\langle\sigma_0^+\sigma_n^-\sigma_m^+\sigma_k^-\ldots\rangle$近似中的所有项均不消失的奇数阶方程，其对称性破缺版本可以产生正确的极限。在附录C 中，我们证明这确实适用于我们的模型。不过，我们注意到，在有限 N 时，精确解从未表现出对称性破缺，而对称性破缺近似未必能带来可靠的改进。

B. Tavis–Cummings 模型

最后，我们观察到，在光与物质相互作用模型中，偶数阶与奇数阶之间也呈现出类似的收敛行为。图4(b) 给出了驱动耗散型 Tavis–Cummings 模型中累积量展开至五阶的结果 [58]。Tavis–Cummings 哈密顿量 [59] 常用于腔量子电动力学，用来描述一组彼此不相互作用、且耦合到同一腔模的发射体；将式（1）中的中心自旋替换为玻色算符 a [15]即可得到该模型。对于该模型，注意到 $g\sqrt{N}$ fixed 为稳态提供了匹配的精确极限和平均场极限 $N \to \infty$ 。

VI. 讨论

本文考察了平均场理论和累积量展开在 $N \to \infty$处的收敛性，以及它们在中间 N处的准确性。我们研究了全对一模型这一类模型，在这类模型中，平均场理论有望具有稳健性。然而，对于我们的中心自旋模型，我们证明，平均场理论能否在 $N \to \infty$ 时刻准确描述精确稳态，取决于模型中参数的标度。此外，即使平均场理论确实能够描述精确的 $N \to \infty$ 行为，高阶累积量展开也未必会收敛到相同结果。与精确结果比较至 $N = 150$ ，使我们得以验证大 N 行为，并表明累积量展开的误差并不随 N单调变化。

本文所考察的模型已被直接用于研究金刚石中的缺陷中心 [2, 3, 60] 以及量子点系统 [60, 61], ，但我们的推理或许普遍适用于中心自旋模型，包括例如其他各向异性或各向同性耦合 [62–65] ，或相干驱动 [55, 66, 67]。我们还看到，我们的结果与集体光-物质耦合模型相关；在这类模型中，累积量展开正日益成为分析小型和大型系统的热门方法 [16, 30–37]。

虽然我们着重研究了稳态性质，但未来的工作或可利用累积量展开考察开放中心自旋模型的动力学 [65, 68–72] ；近期已有研究探讨平均场理论捕捉精确 $N \to \infty$ 行为的适用范围 [23, 73]。类似地，也可以将我们的推理应用于全连接模型，并参考关于这一类模型中平均场近似局限性的研究 [29, 33, 36, 39, 74] 。我们的结果凸显了评估累积量展开在此类应用中有效性的必要性，并促使人们进一步探索如何找到可靠的高阶展开。

补充说明。 近期，另一项研究相同问题的工作也已发表[73]。

支持本出版物的研究数据可在参考文献 [75]中获取。

致谢

作者感谢 Federico Carollo 提供的宝贵讨论。P.F.-W. 感谢英国工程与自然科学研究委员会的资助（资助编号：EP/T518062/1）。K.B.A、B.W.L. 和 J.K. 感谢英国工程与自然科学研究委员会的资助（资助编号：EP/T014032/1）。

附录 A：三阶累积量方程

本附录给出了具有 U(1)对称性的中心自旋模型的三阶累积量方程。下文中，n、m 和 k 表示不同的卫星位点。

$$\partial_t\langle\sigma_0^z\rangle = -\kappa(\langle\sigma_0^z\rangle+1) + 4gN\,\text{虚部}\big[\langle\sigma_0^+\sigma_n^-\rangle\big] \tag{A1}$$

$$\partial_t\langle\sigma_n^z\rangle = -\Gamma_T\langle\sigma_n^z\rangle + \Gamma_\Delta - 4g\,\text{虚部}\big[\langle\sigma_0^+\sigma_n^-\rangle\big] \tag{A2}$$

$$\partial_t\langle\sigma_0^+\sigma_n^-\rangle = \left(i(\omega-\epsilon) - \frac{\kappa+\Gamma_T}{2}\right)\langle\sigma_0^+\sigma_n^-\rangle + \frac{ig}{2}\langle\sigma_n^z\rangle - \frac{ig}{2}\langle\sigma_0^z\rangle - ig(N-1)\langle\sigma_0^z\sigma_n^+\sigma_m^-\rangle \tag{A3}$$

$$\partial_t\langle\sigma_n^+\sigma_m^-\rangle = -\Gamma_T\langle\sigma_n^+\sigma_m^-\rangle + 2g\,\text{虚部}\big[\langle\sigma_0^+\sigma_n^-\sigma_m^z\rangle\big] \tag{A4}$$

$$\partial_t\langle\sigma_0^z\sigma_n^+\sigma_m^-\rangle = -(\kappa+\Gamma_T)\langle\sigma_0^z\sigma_n^+\sigma_m^-\rangle - \kappa\langle\sigma_n^+\sigma_m^-\rangle + 2g\,\mathrm{Im}\big[\langle\sigma_0^+\sigma_n^-\rangle\big] + 8g(N-2)\,\mathrm{Im}\big[\langle\sigma_0^+\sigma_n^-\rangle\big]\langle\sigma_n^+\sigma_m^-\rangle \tag{A5}$$

$$\begin{aligned}\partial_t\langle\sigma_0^+\sigma_n^-\sigma_m^z\rangle = &\left(i(\omega-\epsilon) - \frac{\kappa+3\Gamma_T}{2}\right)\langle\sigma_0^+\sigma_n^-\sigma_m^z\rangle + \Gamma_\Delta\langle\sigma_0^+\sigma_n^-\rangle - ig\langle\sigma_n^+\sigma_m^-\rangle + \frac{ig}{2}\langle\sigma_n^z\sigma_m^z\rangle - \frac{ig}{2}\langle\sigma_0^z\sigma_n^z\rangle \\ &- ig\,(N-2) \\ &\left(\langle\sigma_0^z\sigma_n^+\sigma_m^-\rangle\langle\sigma_n^z\rangle + \langle\sigma_0^z\rangle\langle\sigma_n^z\sigma_m^+\sigma_k^-\rangle + \langle\sigma_0^z\sigma_n^z\rangle\langle\sigma_n^+\sigma_m^-\rangle - 2\langle\sigma_0^z\rangle\langle\sigma_n^z\rangle\langle\sigma_n^+\sigma_m^-\rangle\right)\end{aligned} \tag{A6}$$

$$\begin{aligned}\partial_t\langle\sigma_n^z\sigma_m^+\sigma_k^-\rangle = &-2\Gamma_T\langle\sigma_n^z\sigma_m^+\sigma_k^-\rangle + \Gamma_\Delta\langle\sigma_n^+\sigma_m^-\rangle - 8g\,\text{虚部}\big[\langle\sigma_0^+\sigma_n^-\rangle\big]\langle\sigma_n^+\sigma_m^-\rangle \\ &+ 2g\left(\mathrm{Im}\big[\langle\sigma_0^+\sigma_n^-\rangle\big]\langle\sigma_n^z\sigma_m^z\rangle - 2\,\mathrm{Im}\big[\langle\sigma_0^+\sigma_n^-\rangle\big]\langle\sigma_n^z\rangle^2 + 2\,\mathrm{Im}\big[\langle\sigma_0^+\sigma_n^-\sigma_m^z\rangle\big]\langle\sigma_n^z\rangle\right)\end{aligned} \tag{A7}$$

$$\partial_t\langle\sigma_n^z\sigma_m^z\rangle = -2\Gamma_T\langle\sigma_n^z\sigma_m^z\rangle + 2\Gamma_\Delta\langle\sigma_n^z\rangle - 8g\,\text{虚部}\big[\langle\sigma_0^+\sigma_n^-\sigma_m^z\rangle\big] \tag{A8}$$

$$\partial_t\langle\sigma_0^z\sigma_n^z\rangle = -(\kappa+\Gamma_T)\langle\sigma_0^z\sigma_n^z\rangle - \kappa\langle\sigma_n^z\rangle + \Gamma_\Delta\langle\sigma_0^z\rangle + 4g(N-1)\,\mathrm{Im}\big[\langle\sigma_0^+\sigma_n^-\sigma_m^z\rangle\big] \tag{A9}$$

在写出方程（A5）–（A7）时，四阶矩通过将四阶累积量设为零来近似：

$$\langle\langle\sigma_0^+\sigma_n^-\sigma_m^+\sigma_k^-\rangle\rangle = 0, \quad \langle\langle\sigma_0^z\sigma_n^z\sigma_m^+\sigma_k^-\rangle\rangle = 0, \quad \langle\langle\sigma_0^+\sigma_n^-\sigma_m^z\sigma_k^z\rangle\rangle = 0, \tag{A10}$$

其中

$$\begin{aligned}\langle\langle\sigma_a^\alpha\sigma_b^\beta\sigma_c^\gamma\sigma_d^\delta\rangle\rangle := &\langle\sigma_a^\alpha\sigma_b^\beta\sigma_c^\gamma\sigma_d^\delta\rangle - \langle\sigma_a^\alpha\sigma_b^\beta\rangle\langle\sigma_c^\gamma\sigma_d^\delta\rangle - \langle\sigma_a^\alpha\sigma_c^\gamma\rangle\langle\sigma_b^\beta\sigma_d^\delta\rangle - \langle\sigma_a^\alpha\sigma_d^\delta\rangle\langle\sigma_b^\beta\sigma_c^\gamma\rangle \\ &-\langle\sigma_a^\alpha\rangle\langle\sigma_b^\beta\sigma_c^\gamma\sigma_d^\delta\rangle - \langle\sigma_b^\beta\rangle\langle\sigma_a^\alpha\sigma_c^\gamma\sigma_d^\delta\rangle - \langle\sigma_a^\alpha\sigma_b^\beta\sigma_d^\delta\rangle\langle\sigma_c^\gamma\rangle - \langle\sigma_a^\alpha\sigma_b^\beta\sigma_c^\gamma\rangle\langle\sigma_d^\delta\rangle \\ &+2\langle\sigma_a^\alpha\rangle\langle\sigma_b^\beta\rangle\langle\sigma_c^\gamma\sigma_d^\delta\rangle + 2\langle\sigma_a^\alpha\rangle\langle\sigma_b^\beta\sigma_c^\gamma\rangle\langle\sigma_d^\delta\rangle + 2\langle\sigma_a^\alpha\rangle\langle\sigma_b^\beta\sigma_d^\delta\rangle\langle\sigma_c^\gamma\rangle \\ &+2\langle\sigma_a^\alpha\sigma_b^\beta\rangle\langle\sigma_c^\gamma\rangle\langle\sigma_d^\delta\rangle + 2\langle\sigma_a^\alpha\sigma_c^\gamma\rangle\langle\sigma_b^\beta\rangle\langle\sigma_d^\delta\rangle + 2\langle\sigma_a^\alpha\sigma_d^\delta\rangle\langle\sigma_b^\beta\rangle\langle\sigma_c^\gamma\rangle \\ &-6\langle\sigma_a^\alpha\rangle\langle\sigma_b^\beta\rangle\langle\sigma_c^\gamma\rangle\langle\sigma_d^\delta\rangle.\end{aligned} \tag{A11}$$

注意，对于具有 U(1)对称性的模型，其中许多项都会消失。

附录 B：当 $N\to\infty$ 时关联的行为

在本附录中，我们展示了中心自旋模型中成对关联在 $N\to\infty$ 时的行为。这些结果支持了第 IVB 节中关于收敛性的论证。

图 5(a) 和 5(b) 展示了卫星-卫星 $\langle\sigma_n^+\sigma_m^-\rangle$和中心-卫星 $\langle\sigma_0^+\sigma_n^-\rangle$ 关联随 $1/\sqrt{N}$的变化，其中模型的 $g\sqrt{N}$固定。我们展示了截至 $N=150$ 的精确结果，以及二阶累积量和平均场理论的预测。特别要注意，$\langle\sigma_n^+\sigma_m^-\rangle$ 衰减速度快于 $1/\sqrt{N}$，因为 $N\to\infty$ （在图 $1/\sqrt{N}\to 0$ 5(a)中的 处梯度为零）。因此，在较大的N下，二阶方程 Eq. ($\sim g\langle\sigma_0^z\rangle$*10*) 中存在的项（平均场理论中没有）相较于其中出现的最后一项$\sim g\langle\sigma_n^z\rangle$，占主导地位。$\sim g\langle\sigma_0^z\rangle\langle\sigma_n^+\sigma_m^-\rangle$ 。

而在固定κ/N时考察关联，如图 5(c) 和 5(d)所示，我们看到二者均

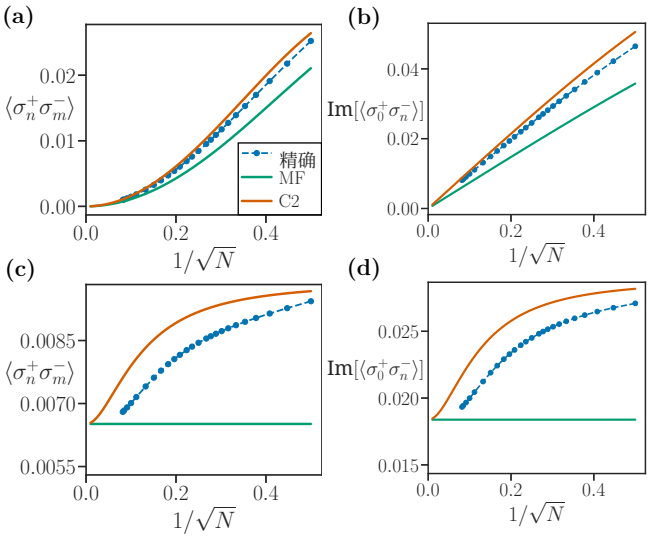

图 5. (a) 稳态下模型中的卫星-卫星关联，以及 (b) 中心-卫星关联，其中标度 $g\sqrt{N}$ 固定，参数与图 3(a) 相同（$g\sqrt{N}=3$、$\kappa=1$）。图中还给出了截至 $N=150$ 的精确数据（蓝点）、关联的二阶结果（二阶累积量），以及平均场（平均场）近似 $\langle\sigma_n^+\sigma_m^-\rangle \approx |\langle\sigma_n^+\rangle|^2$ 和 $\langle\sigma_0^+\sigma_n^-\rangle \approx \langle\sigma_0^+\rangle\langle\sigma_n^-\rangle$。请注意横轴使用了 $1/\sqrt{N}$：对于这种标度，$\langle\sigma_n^+\sigma_m^-\rangle = o(1/\sqrt{N})$ 和 $\mathrm{Im}\left[\langle\sigma_0^+\sigma_n^-\rangle\right] = O(1/\sqrt{N})$ 随 $N\to\infty$ 变化（共振时 $\langle\sigma_0^+\sigma_n^-\rangle$ 的实部为零）。(c)、(d) 当改为固定 κ/N 时，相同的关联，其中参数与图 3(b) 相同（$\kappa/N=1/16$、$g=3/4$）。在这种情况下，两对关联在所有 N下都保持有限。

趋于有限极限，因此当 $N\to\infty$ 时，二阶累积量方程可以简化为平均场理论，正如正文所述。

因此，我们既有这样一种情况：关联在 $N\to\infty$ 时消失，但平均场和二阶累积量没有定义良好的极限 [图 3(a)]，；也有这样一种情况：它们保持有限，但两种方法有共同的极限，能够捕捉精确行为 [图3(b)]。这清楚地表明，仅了解关联在 $N\to\infty$ 时的行为，并不足以断定平均场理论是否正确，也不足以判断高阶累积量展开在此极限下是否收敛。

附录C：含对称性破缺的三阶累积量方程

本附录给出中心自旋模型和 Tavis–Cummings 模型中包含对称性破缺项的三阶累积量展开结果。

在运动方程中保留原本会因 U(1) 对称性而消失的矩，例如 $\langle\sigma_0^+\sigma_n^+\rangle$，会显著增加在任意给定阶数下构成完备方程组所需的方程数量。我们使用 QuantumCumulants.jl Julia 软件包 [35] 推导了各情况下的三阶方程。使用一种

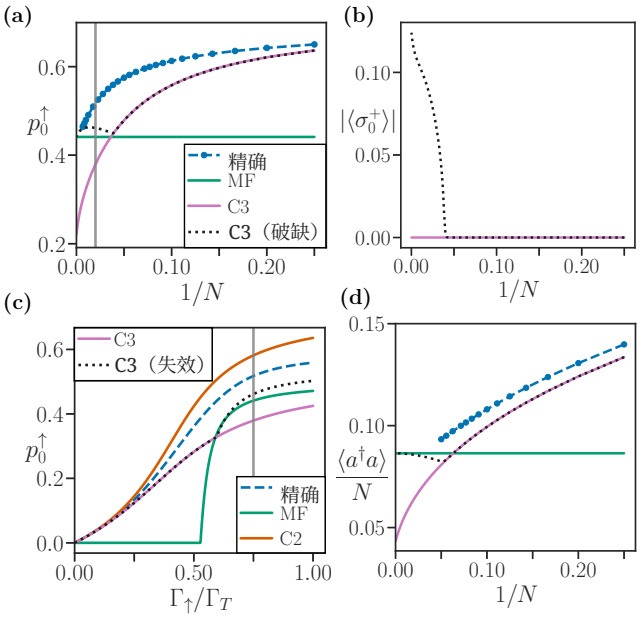

图6。（a）中心自旋模型在固定 $p_0^\uparrow = [1+\langle\sigma_0^z\rangle]/2$ 参数下的稳态中心位点布居的精确结果、平均场（MF）结果和三阶（C3）结果，参数与图 κ/N [3(b)中的相同：$\kappa/N=1/16$，$g=3/4$]。方程中保留对称性破缺项的三阶结果以黑色点线表示。（b）在 $N=26$ 处，$\langle\sigma_0^+\rangle\neq 0$ 这些方程的稳态发生对称性破缺，对应于（a）中点线的转折点。（c）在 $\Gamma_\uparrow/\Gamma_T$（$\Gamma_T=\Gamma_\uparrow+\Gamma_\downarrow$）处的中心布居与$N=50$ 的关系，参数与图 3(c)（$\kappa/N=1/16$，$g=3/4$）中的相同；此处纳入了含有和不含对称性破缺项的三阶结果。灰色垂直线标示（a）中的数据。（d）Tavis–Cummings模型中缩放后的光子数的精确结果、平均场（MF）结果和三阶（C3）结果，参数与图4(b)（$g\sqrt{N}=9/10$，$\Gamma_\uparrow=3\Gamma_T/4$）中的相同。

打破对称性的初态，将这些方程演化至长时间，从而获得稳态的数值近似。

由于累积量定义中各项的系数之和始终为零 [参见方程（A11）]，因此，将某个累积量设为零以获得高阶矩的近似时，该矩的近似表达式中各项的数量（计入正负号）为 1，前提是累积量中没有任何项因对称性而消失。因此，在存在对称性破缺时，奇数阶累积量方程的渐近形式与平均场理论之间不再存在因矩的因子化而产生的差异 $N\to\infty$，$\langle\sigma_0^+\sigma_n^-\sigma_m^+\sigma_k^-\ldots\rangle$。

与上述一致，图6(a)显示，$N\to\infty$ 在具有对称性破缺的三阶方程（虚线）与平均场理论之间存在一个共同的 N [$N\leq 26$ 范围，见图6(a)]。不过，在某个范围内，所得稳态中并未出现对称性破缺（图6(b)），此时原始三阶结果沿着虚线变化。此外，

即使考虑对称性破缺，三阶结果也不能保证比二阶展开提供更好的近似。这在图6(c)中清楚可见，该图显示 $p_0^{\uparrow}$ 随 $\Gamma_{\uparrow}/\Gamma_{\downarrow}$ 在 $N = 50$处的变化。我们指出，当泵浦强度远低于平均场阈值时，所有累积量展开都相符；在此处 $p_0^{\uparrow}$ 必须随 $N \to \infty$趋于零。另请注意交叉三阶（保持对称性）曲线与平均场曲线的交点标志着向对称性破缺稳态的转变；当 N 较大时，这种转变不可避免，此时三阶结果低于平均场预测。

最后，在图6(d)中，我们观察到，尽管在这种情况下平均场极限是从下方逼近的，但对于 Tavis–Cummings 模型，含对称性破缺项的三阶方程也呈现出类似的行为。

[1] A. S. Lilly Thankamony、J. J. Wittmann、M. Kaushik 和 B. Corzilius，《用于提升现代固态核磁共振灵敏度的动态核极化》，Prog. Nucl. Magn. Reson. Spectrosc. 102-103, 120 (2017)。[2] P. Fernández-Acebal、O. Rosolio、J. Scheuer、C. Müller、S. Müller、S. Schmitt、L. McGuinness、I. Schwarz、Q. Chen、A. Retzker、B. Naydenov、F. Jelezko 和 M. Plenio，《利用金刚石中的单氮空位中心实现油分子超极化》，《纳米快报》18, 1882 (2018)。[3] T. Villazon、P. W. Claeys、A. Polkovnikov 和 A. Chandran，《动态极化的捷径》，Phys. Rev. B 103, 075118 (2021)。[4] R. Rizzato、F. Bruckmaier、K. Liu、S. Glaser 和 D. Bucher，《从光泵浦系综向多核自旋浴的极化转移》，《物理评论应用》17, 024067 (2022)。[5] R. Schirhagl、K. Chang、M. Loretz 和 C. L. Degen，《金刚石中的氮-空位中心：用于物理学和生物学的纳米级传感器》，《物理化学年度评论》65, 83 (2014)。[6] Y. Wu、F. Jelezko、M. B. Plenio 和 T. Weil，《生物学中的金刚石量子器件》，《德国应用化学国际版》55, 6586 2016( )。[7] R. D. Allert、K. D. Briegel 和 D. B. Bucher，《利用金刚石量子传感器进行纳米和微米尺度核磁共振光谱的进展》，《化学通讯》58, 8165 (2022)。[8] J. M. Taylor、C. M. Marcus 和 M. D. Lukin，《介观量子比特的长寿命存储器》，物理评论快报 90, 206803 (2003)。[9] D. P. DiVincenzo，《作为量子比特的双量子点》，Science 309, 2173 (2005)。[10] F. H. L. Koppens、C. Buizert、K. J. Tielrooij、I. T. Vink、K. C. Nowack、T. Meunier、L. P. Kouwenhoven 和 L. M. K. Vandersypen，《量子点中单电子自旋的驱动相干振荡》，《自然》（伦敦）442, 766 (2006)。[11] R. Hanson、L. P. Kouwenhoven、J. R. Petta、S. Tarucha 和 L. M. K. Vandersypen，《少电子量子点中的自旋》，《现代物理评论》79, 1217 (2007)。[12] P. C. Maurer、G. Kucsko、C. Latta、L. Jiang、N. Y. Yao、S. D. Bennett、F. Pastawski、D. Hunger、N. Chisholm、M. Markham、D. J. Twitchen、J. I. Cirac 和 M. D. Lukin，《超过一秒的室温量子比特存储器》，Science 336, 1283 (2012)。[13] L. Childress 和 R. Hanson，《用于量子计算和量子网络的金刚石氮-空位中心》，《MRS通报》38, 134 (2013)。[14] J. Cai、A. Retzker、F. Jelezko 和 M. B. Plenio，《室温下金刚石表面上的大规模量子模拟器》温度，《Nature Phys.》9, 168 (2013)。[15] P. Kirton、M. M. Roses、J. Keeling 和 E. G. Dalla Torre，《Dicke 模型导论：从平衡到非平衡，反之亦然》，Adv. Quantum Technol. 2, 1800043 (2019)。[16] M. Sánchez-Barquilla、R. E. F. Silva 和 J. Feist，《用于处理任意材料结构中光–物质相互作用的累积量展开》，J. Chem. Phys. 152, 034108 (2020)。[17] P. M. Chaikin 和 T. C. Lubensky，《凝聚态物理学原理》，第1版（剑桥大学出版社，剑桥，英国，1995）。[18] T. J. Osborne 和 F. Verstraete，《双体量子比特纠缠的一般单配性不等式》，物理评论快报 96, 220503 (2006)。[19] N. Makri，《线性响应近似及其最低阶修正：一种影响泛函方法》，J. Phys. Chem. B 103, 2823 (1999)。[20] P. R. Eastham 和 P. B. Littlewood，《超越线性区域的腔极化激元玻色凝聚：模型微腔的热平衡》，Phys. Rev. B 64, 235101 2001( )。[21] T. Mori，《光学腔系统中平均场动力学的精确性》，J. Stat. Mech. 2013, P06005 (2013)。[22] F. Carollo 和 I. Lesanovsky，《开放迪克模型平均场方程的精确性及其在模式检索动力学中的应用》，物理评论快报 126, 230601 2021( )。[23] E. Fiorelli、M. Müller、I. Lesanovsky 和 F. Carollo，《具有集体算符值速率的开放量子系统的平均场动力学：有效性与应用》，新物理学杂志 25, 083010 (2023)。[24] R. Kubo，《广义累积量展开法》，J. Phys. Soc. Jpn. 17, 1100 (1962)。[25] J. Fricke，《包含多粒子关联的任意量子系统输运方程：一般形式》，Ann. Phys. 252, 479 (1996)。[26] A. Vardi 和 J. R. Anglin，《超越平均场理论的玻色–爱因斯坦凝聚体：作为退相干的量子反作用》，物理评论快报 86, 568 (2001)。[27] T. Köhler 和 K. Burnett，《稀薄凝聚玻色气体的微观量子动力学方法》，物理评论A辑 65, 033601 (2002)。[28] M. Kira 和 S. W. Koch，《量子光学中的簇展开表示》，物理评论 A 辑 78, 022102 (2008)。[29] S. Krämer 和 H. Ritsch，《用于模拟具有长程相互作用的大型开放自旋系综动力学的广义平均场方法》，Eur. Phys. J. D 69, 282 2015( )。[30] P. Kirton 和 J. Keeling，《驱动耗散迪克模型中的超辐射态与激光态》，新物理学杂志 20,

015009 (2018)。[31] F. Reiter、T. L. Nguyen、J. P. Home 和 S. F. Yelin, 《Dicke 模型中振子阻塞的协同崩溃》, 物理评论快报 125, 233602 (2020)。[32] K. B. Arnardottir、A. J. Moilanen、A. Strashko、P. Törmä 和 J. Keeling, 《多模有机极化激元激光》, 物理评论快报 125, 233603 (2020)。[33] F. Robicheaux 和 D. A. Suresh, 《超越光与原子阵列相互作用的最低阶平均场理论》, 物理评论A辑 104, 023702 (2021)。[34] H. Wang 和 M. Blencowe, 《利用致密加速光电探测器云从真空相干放大光子产生》, 通讯物理 4, 128 (2022)。[35] D. Plankensteiner、C. Hotter 和 H. Ritsch, 《Quantum-Cumulants.jl：用于开放量子系统广义平均场方程的 Julia 框架》, Quantum 6, 617 2022( )。[36] K. J. Kusmierek、S. Mahmoodian、M. Cordier、J. Hinney、A. Rauschenbeutel、M. Schemmer、P. Schneeweiss、J. Volz 和 K. Hammerer, 《手性波导量子电动力学的高阶平均场理论》, SciPost物理核心 6, 041 (2023)。[37] N. Werren、E. M. Gauger 和 P. Kirton, 《无反转激光的量子模型》, 新物理学杂志 24, 093027 2022( )。[38] Y.-X. Huang、M. Li、K. Lin、Y.-L. Zhang、G.-C. Guo 和 C.-L. Zou, 《强光子-光子耦合多模非线性系统中的经典到量子转变》, 物理评论A辑 105, 043707 (2022)。[39] O. Rubies-Bigorda、S. Ostermann 和 S. F. Yelin, 《通过累积量展开方法表征原子阵列中的超辐射动力学》, 物理评论研究 5, 013091 2023( )。[40] M. W. Doherty、N. B. Manson、P. Delaney、F. Jelezko、J. Wrachtrup 和 L. C. Hollenberg, 《金刚石中的氮空位色心》, 物理报告 528, 1 (2013)。[41] G. Chen、D. L. Bergman 和 L. Balents, 《量子点中中心自旋问题的半经典动力学与长时间渐近行为》, Phys. Rev. B 76, 045312 (2007)。[42] L. P. Lindoy 和 D. E. Manolopoulos, 《中心自旋问题的简便准确方法》, 物理评论快报 120, 220604 (2018)。[43] P. Ribeiro 和 T. Prosen, 《开放集体自旋模型的可积量子动力学》, 物理评论快报 122, 010401 2019( )。[44] A. Ricottone、Y. N. Fang 和 W. A. Coish, 《平衡中心自旋系统中的相干与耗散动力学》, Phys. Rev. B 102, 085413 (2020)。[45] T. Villazon、A. Chandran 和 P. W. Claeys, 《各向异性中心自旋模型中的可积性与暗态》, 物理评论研究 2, 032052 (2020)。[46] D. Malz、R. Trivedi 和 J. I. Cirac, 《Dicke 超辐射的大-N 极限》, 物理评论A辑 106, 013716 (2022)。[47] B. A. Chase 和 J. M. Geremia, 《自旋-1/2粒子系综的集体过程》, 物理评论A辑 78, 052101 (2008)。[48] M. Xu、D. A. Tieri 和 M. J. Holland, 《应用 SU(4) 求解量子主方程以模拟开放量子系统》, 物理评论A辑 87, 062101 (2013)。[49] F. Damanet、D. Braun 和 J. Martin, 《包含量子化原子运动的集体自发辐射主方程》, 物理评论A辑 93, 022124 (2016)。[50] M. Gegg 和 M. Richter, 《开放系统腔量子电动力学中多能级系统的高效精确数值方法》, 新物理学杂志 18, 043037 (2016)。[51] P. Kirton 和 J. Keeling, 《通过退相干和衰减抑制并恢复 Dicke 超辐射相变》, 物理评论快报 118, 123602 (2017)。[52] N. Shammah、S. Ahmed、N. Lambert、S. De Liberato 和 F. Nori, 《具有局域和集体非相干过程的开放量子系统：利用置换不变性的高效数值模拟》, 物理评论A辑 98, 063815 2023( )。[53] C. Gardiner, 《随机方法：自然科学与社会科学手册》, 第4版, Springer 协同学系列, 第13卷（Springer, 纽约, 2009）。[54] C. Weedbrook、S. Pirandola、R. García-Patrón、N. J. Cerf、T. C. Ralph、J. H. Shapiro 和 S. Lloyd, 《高斯量子信息》, 《现代物理评论》 84, 621 (2012)。[55] R. Frantzeskakis、J. Van Dyke、L. Zaporski、D. A. Gangloff、C. Le Gall、M. Atatüre、S. E. Economou 和 E. Barnes, 《具有海森堡相互作用的中心自旋模型中的时间晶体行为》, Phys. Rev. B 108, 075302 2023( )。[56] M. Krishna、P. Solanki、M. Hajdušek 和 S. Vinjanampathy, 《测量诱导连续时间晶体》, 物理评论快报 130, 150401 (2023)。[57] 我们已明确验证至第 14 阶。[58] 如文中所述，通过对算符计数来处理累积量方程，a 在将高阶矩分解以获得封闭方程组时，必须将多个光子算符视为不同对象。另一种方法是将光子空间截断至 $N_{\mathrm{phot.}}$ 个能级，并例如在广义盖尔曼矩阵基底中进行计算。这会增加任意展开阶数下的方程数量，但不再依赖额外假设，即高斯性。[59] M. Tavis 和 F. W. Cummings, 《N分子—辐射场哈密顿量的精确解》, Phys. Rev. 170, 379 (1968)。[60] D. D. B. Rao、A. Ghosh、D. Gelbwaser-Klimovsky、N. Bar-Gill 和 G. Kurizki, 《通过解纠缠实现自旋浴极化》, 新物理学杂志 22, 083035 (2020)。[61] C. W. Lai、P. Maletinsky、A. Badolato 和 A. Imamoglu, 《奈特场诱导的单量子点核自旋极化》, 物理评论快报 96, 167403 (2006)。[62] K. A. Al-Hassanieh、V. V. Dobrovitski、E. Dagotto 和 B. N. Harmon, 《利用自旋相干态 P 表示法对中心自旋问题进行数值建模》, 物理评论快报 97, 037204 (2006)。[63] B. Fauseweh、P. Schering、J. Hüdepohl 和 G. S. Uhrig, 《大规模及无限经典中心自旋模型动力学的高效算法》, Phys. Rev. B 96, 054415 (2017)。[64] R. Röhrig、P. Schering、L. B. Gravert、B. Fauseweh 和 G. S. Uhrig, 《大自旋浴的量子力学处理》, Phys. Rev. B 97, 165431 (2018)。[65] X. Zhou、Q.-K. Wan 和 X.-H. Wang, 《外磁场中 XXZ 中心自旋模型的多体动力学与退相干》, Entropy 22, 23 (2019)。[66] E. M. Kessler、G. Giedke、A. Imamoglu、S. F. Yelin、M. D. Lukin 和 J. I. Cirac, 《中心自旋系统中的耗散相变》, 物理评论A辑 86, 012116 (2012)。[67] J. Hildmann、E. Kavousanaki、G. Burkard 和 H. Ribeiro, 《半导体量子点中核自旋极化的量子极限》, Phys. Rev. B 89, 205302

(2014)。[68] M. Bortz 和 J. Stolze，《均匀耦合中心自旋模型中的自旋与纠缠动力学》，J. Stat. Mech: Theory Exp. **2007**, P06018 (2007)。[69] D. Stanek、C. Raas 和 G. S. Uhrig，《XX 中心自旋模型的精确动力学》，Phys. Scr. **2009**, 014049 (2009)。[70] D. Stanek、C. Raas 和 G. S. Uhrig，《从量子动力学到中心自旋模型的经典动力学》，物理评论B辑**90**, 064301 (2014)。[71] S. Bhattacharya 和 S. Banerjee，《重新审视中心自旋模型的量子开放系统动力学》，Quanta **10**, 55(2021)。[72] L.-H. Tang、D. M. Long、A. Polkovnikov、A. Chandran 和 P. W. Claeys，《可积性与淬火动力学》

自旋-1 中心自旋 XX 模型，SciPost Phys.**15**，030 (2023)。[73] F. Carollo，开放量子中心自旋系统中量子涨落的非高斯动力学与平均场极限，arXiv:2305.15547 (2023)。[74] S. Mahmoodian、G. Calajó、D. E. Chang、K. Hammerer 和 A. S. Sørensen，手性波导量子电动力学中的多体光子束缚态动力学，Phys. Rev. X **10**，031011 (2023)。[75] P. Fowler-Wright、J. Keeling、B. W. Lovett、K. B. Arnardottir 和 P. Kirton，数据依据：确定中心自旋模型中累积量展开的有效性 (2023)。