arXiv:2303.04419v1 [math.AP] 8 Mar 2023

流体流动的概率描述：综述

Dennis Gallenmüller

应用分析研究所，乌尔姆大学，德国。电子邮件：
dennis.gallenmueller@alumni.uni-ulm.de

Raphael Wagner

应用分析研究所，乌尔姆大学，德国。电子邮件：
raphael.wagner@uni-ulm.de

Emil Wiedemann

德国埃尔朗根-纽伦堡弗里德里希-亚历山大大学数学系。电子邮箱：
emil.wiedemann@fau.de

谨以此文纪念奥尔加·亚历山德罗芙娜·拉迪任斯卡娅诞辰*100*周年

摘要： 流体可能呈现高度不规则的湍流状态。因此，人们早已认识到，在研究流体动力学的基本偏微分方程（如可压缩或不可压缩的纳维－斯托克斯方程或欧拉方程）时，需要采用某种弱解概念。标准的弱解概念（按分布的意义）仍是确定性的，因为它为几乎每个时空点上的状态变量（如速度或密度）给出精确值。然而，观测结果和数学理论都表明，这种确定性观点存在一定局限。因此，近年来数学流体力学界对概率解概念的兴趣日益浓厚。由于这类概念数量众多，要梳理相关文献——无论是经典文献还是近期文献——都颇具挑战。本文旨在对流体方程的概率表述作出较为简洁而又相当详尽的综述，这些表述大致可分为测度值 框架和统计框架。我们将讨论这两种方法及其相互关系，以及各种统计表述之间的联系，重点关注可压缩和不可压缩欧拉方程。

目录

1 引言 **2**

1.1 欧拉方程的测度值解.5 1.2 欧拉方程的统计解.6

2 测度值解 9

2.1 不可压缩欧拉系统与等熵欧拉系统的定义 . . 9 2.2 测度值解的存在性.12 2.3 弱强唯一性.14 2.4 测度值奇异极限.17

3 解的统计概念 22

3.1 不同概念的定义与比较.22 3.2 统计解的构造.36 3.2.1 时间参数测度逼近序列的紧性.38 3.2.2 基于克莱因–米尔曼定理的离散近似 42 3.2.3 可测选择与推前构造 45 3.2.4 结论.46 3.3 与测度值解的比较.47 3.3.1 奇异极限的统计性质.47 3.3.2 弱强唯一性.48

4 讨论与开放问题 **51**

1 引言

当流体的流动（无论是可压缩的还是不可压缩的、黏性的还是理想的）在经典连续介质力学的框架下进行描述时，人们通常会预期得到一种确定性理论：如果在某一时间完全知道流体的状态，那么原则上就应该能够唯一计算出其在之后任意时间的状态。这似乎与通过非线性偏微分方程描述流体流动的方式相一致，例如等熵可压缩欧拉方程

$$\begin{aligned} \partial_t(\rho u) + \operatorname{div}(\rho u \otimes u) + \nabla p(\rho) &= 0, \\ \partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho u) &= 0, \end{aligned} \tag{1}$$

或不可压缩欧拉方程

$$\begin{aligned} \partial_t u + \operatorname{div}(u \otimes u) + \nabla p &= 0 \\ \operatorname{div} u &= 0. \end{aligned} \tag{2}$$

这些方程既可以定义在开子集 $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ 上，也可以定义在环面 $\mathbb{T}^d$ 上，其中不可压缩情形下的空间维数为 $d \geq 2$，而 $d \geq 1$ 下的空间维数为

可压缩情形；无论哪种情况，对于给定的时间 $T > 0$，我们都要寻找未知速度场 $u\colon (0,T) \times \Omega \to \mathbb{R}^d$；对于方程 (1)，还要寻找未知密度场 $\rho\colon (0,T) \times \Omega \to \mathbb{R}$，它始终非负（非负性会随时间保持，因此只需规定初始密度非负）。压力在这两个模型中扮演的角色不同：在 (1) 中，压力是由密度通过本构关系给定的函数；而在 (2) 中，压力则是另一个未知量 $p\colon (0,T) \times \Omega \to \mathbb{R}$。若 Ω 的边界非空，通常会施加不可渗透边界条件 $u \cdot n = 0$，其中 $n\colon \partial\Omega \to \mathbb{R}^d$ 是外单位法向量。这意味着流体不能流入或流出给定区域。

这两个系统在形式上都是适定的，因为未知数的数量与方程的数量相同。相应的黏性模型也是如此，分别在方程 (1) 和 (2) 中加入适当的摩擦项即可。对于牛顿流体，由此便得到（可压缩或不可压缩）纳维–斯托克斯方程。

本文主要讨论无黏模型，不过我们的许多讨论并不局限于欧拉方程。我们选择这一主题有几个原因：首先，湍流通常出现在高雷诺数条件下，而欧拉方程对应于雷诺数趋于无穷大的极限情形。其次，从数学角度来看，在弱解框架下，欧拉方程存在大量适定性问题。可以说，这两点都动摇了我们试图以确定性方式描述湍流的朴素想法。

例如，设想这样一个实验：水流过一个障碍物。在障碍物的尾流中，可以观察到一片湍流区域。多次重复实验，每次都会看到湍流区域中的流场有所不同；至少在实际操作中，它无法被确定性地预测。然而，从定性角度看，每次实验的结果似乎都相似。事实证明，尽管流场的细节无法预测，流中的某些统计 量却显得非常规律且稳定，例如平均速度或所谓的结构函数。关于这些观察结果的讨论，见 [45]；支持类似结论的大量最新数值模拟见 [35]。

这种思路非常经典，至少在不可压缩情形下，它催生了湍流的统计性现象学理论，其中最著名的当属柯尔莫哥洛夫理论 [65]。柯尔莫哥洛夫理论与或许更为基础的基于偏微分方程的方法之间的关系仍不十分明朗，不过，近期对昂萨格猜想 [26, 17, 59, 7] 的严格证明为二者建立了一条引人入胜的联系。

但从分析的角度来看，确定性弱解的概念也引发了一些问题。自 Scheffer 的研究以来，人们已知不可压缩欧拉方程的弱解可以从相同的初始数据出发，演化为不同的解。尽管 Scheffer 的解可以被视为非物理的伪象而排除，但 De Lellis 和 Székelyhidi 开发的凸积分技术表明，即使施加额外的能量条件，柯西问题仍然是不适定的 [19], ；对于初始数据的一个稠密子集（在能量空间中） [79], ，即使在正则性类达到 Onsager 临界赫尔德指数时，情况也依然如此 [18]。可压缩欧拉

方程 [19, 12, 13, 15, 11]。

应对这一切困难的一种可行办法，是转而采用流体流动的概率描述，从而放弃准确预测任意时刻流体速度（和密度）场这一崇高目标。具体而言，在概率框架下，至少有三种不同的选择：

- **轨道统计解：**偏微分方程解轨道（例如速度解轨道）集合上的概率测度 μ ，例如定义在空间$C([0,T];\ H)$上，其中 H 是 $L^2(\mathbb{R}^3;\ \mathbb{R}^3)$中的无散向量场空间；

- **相空间统计解：**一个随时间变化的概率测度μ_t ，它在每个时刻 t都定义在相空间（例如 H）上，其演化以某种方式受支配方程控制；

- **测度值解（mvs）：**一个依赖于时间和空间的概率测度 $\mu_{t,\ x}$，它定义在 $\mathbb{R}^3$ 上，并且其对 x 和 t 的依赖同样受到支配方程的约束。

事实证明，前两个概念密切相关，而测度值解则具有截然不同的性质。这是因为后者只描述流的单点统计：用测度值解的语言，可以表达这样的陈述：“在时刻 t 、位置 x处，流体速度的竖直分量为负的概率是30%”，但无法描述不同空间点之间速度的相关性，例如：“在时刻 t ，空间点 x 和y 处的竖直速度分量符号相同的概率是30%。”关于相关性的这类信息可以从统计解中提取。这表明统计解包含更多信息，因此代表着比测度值概念更强的概念。在数学上，这需要付出代价：与统计解不同，测度值解很容易证明对于任意有限能量初始数据都存在。事实上，已有结果表明，统计解的存在性理论本质上与确定性弱解的存在性理论同样困难。

在更详细地描述本文正文将要讨论的测度值解和统计解的性质之前，我们先指出以下内容将不在此处涉及：首先，尽管该理论带有概率色彩，但不会出现实际的随机性，也相应地不会使用真正的随机数学方法。事实上，尽管初始数据通常是概率测度而非确定性函数，但演化过程本身不会受到任何随机强迫，例如。其次，在纳维–斯托克斯方程的统计解背景下，人们可能会从动力系统的角度关注系统的长期行为，并讨论统计平稳解、不变流形、全局吸引子等（例如参见 [40, 第三章和第四章]）。由于我们将重点放在存在性与唯一性这一基本问题，以及欧拉方程的各种概率表述之间的相互关系上，因此对上述两个主题我们都不作讨论。

1.1 欧拉方程的测度值解

一般而言，测度值解是经过参数化的概率测度，它们仅以平均意义求解偏微分方程。特别地，当一个测度值解等于狄拉克分布时，就可以将一个（弱）解视为测度值解。因此，在空间—时间中的某一点，测度值解由可能取值的概率分布构成，而不是由某个特定值构成。由此，我们将测度值解视为一种概率类型的解。需要注意的是，测度值解的平均值的演化受到偏微分方程的约束。下面将在第2.1节给出这一非常弱的解概念的严格定义。

测度值解建立在杨测度这一概念之上。杨测度是某种带参数的概率测度，因由 L. C. Young 在最优控制理论的背景下引入而得名 [88]。杨测度也是研究变分法和偏微分方程理论中振荡序列极限行为的有效工具，例见 [74, 80]。作为一种解的概念，由杨测度构成的测度值解由 DiPerna [23]为双曲守恒律引入，并借助补偿紧性证明了空间维数为 $d = 1$ 时能量容许弱解的存在性。

DiPerna 和 Majda [25], 引入了不可压缩欧拉系统的测度值解，并证明对于任意初始数据，这类解都存在；其中主要的技术进展是将可能出现的集中现象纳入考量。这与我们将在此讨论的框架并不完全相同；我们将重点介绍 [28], 的形式体系，另见[21]。随后，Neustupa [75] 为可压缩欧拉方程和纳维–斯托克斯方程定义了测度值解，并证明了它们的存在性。请注意，当尚不知弱解是否对所有初始数据都存在时，测度值解的存在性尤其值得关注；不可压缩和可压缩欧拉方程，以及绝热指数为 $\gamma \leq 3/2$的三维可压缩纳维–斯托克斯系统，正属于这种情况。

可以说，测度值解这一概念是非常弱的解概念。这一点体现在其极大的非唯一性上：杨测度仅受到其一阶矩和二阶矩的约束（见定义1），而对于给定的期望和（非零）协方差，总是存在无穷多个概率测度。除了这种显而易见的非唯一性之外，通过凸积分产生的弱解的非唯一性还带来了更深一层的不适定性，参见例如 [19]。然而，有些出人意料的是，测度值解仍具有弱-强唯一性性质；关于不可压缩情形的证明，见 [5] ；关于可压缩欧拉方程情形的证明，见 [55]。测度值解的一个更实际的用途，是描述近似解序列的奇异极限。例如，某些用于可压缩纳维–斯托克斯系统的数值格式会收敛到测度值解，如 [29] 所示。关于涡片初始数据的相关讨论，另见 [32] 。 [2, 30, 50] 也研究了其他测度值奇异极限。

此外，对于空间维数为 $d \geq 2$ 的不可压缩欧拉方程，

可以证明，每个振荡测度值解都是某个弱解序列的极限，参见下文的定理 6。因此，尽管测度值解仅受其一阶矩和二阶矩的约束，但它们本质上包含了与弱解相同的信息。

后一个性质也一直受到批评，因为测度值解只能呈现单点统计。不过，要充分描述湍流，也可以纳入相关性。

1.2 欧拉方程的统计解

一般而言，统计解是一种概率概念，旨在描述由某个偏微分方程支配的整组初始数据或整组解的演化。

对于前一种情况，E. Hopf 首先尝试将其应用于三维纳维–斯托克斯方程：给定初始数据集合上的概率分布 $\overline{\mu}$，并假设所有个别相位 u 经过时间 $t \geq 0$后都变换为 $S_t u$，则时间 t 时解的分布 μ_t 应由公式确定：

$$\mu_t(A) = \overline{\mu}(S_t^{-1} A) \tag{3}$$

对于所有可测集合 A。

由于概率分布由其特征泛函（即其傅里叶变换）唯一确定，

$$\mathcal{F}(v,t) = \int \exp(i(v,u)) \, \mathrm{d}\mu_t(u) = \int \exp(i(v, S_t u)) \, \mathrm{d}\overline{\mu}(u),$$

Hopf 继续形式上推导出一个关于 $\mathcal{F}(v,t)$ 的方程，即*Hopf*统计方程，该方程不再显式依赖于解算子 $S_t, t \geq 0$。在纳维–斯托克斯方程的自然相空间 L^2 中，可以用适当正交归一基的抽象傅里叶级数来表示这个希尔伯特空间的元素 v，从而将无限维空间上的 Hopf 统计方程转化为一个关于 $\mathcal{F}$ 的自变量 v 的无穷多个（有限维）傅里叶系数的方程。1976年，Ladyzhenskaya 和 Vershik 对此进行了研究并给出了严格的解 [82]。稍后我们将为欧拉方程推导这一坐标形式。

几年前，在两篇开创性论文 [38, 39], 中，Foiaş 在与 Prodi 讨论后，提出了纳维–斯托克斯方程统计解的首个严格概念。与 Hopf 一样，Foiaş 描述了以时间为参数的概率测度 $\{\mu_t\}_{t \geq 0}$，它们定义在基于 L^2 的相空间上，并对应给定的初始分布$\overline{\mu}$。同样，为了形式化地推导描述这些测度演化的方程，研究者假设存在描述确定性演化的解算子 $\{S_t\}_{t \geq 0}$，从而自然地，μ_t 是 $\overline{\mu}$ 沿着 S_t 的推前测度，如式 (3) 所示，记作 $S_{t\sharp}\overline{\mu}$。然而，Foiaş 考察的并非它们的傅里叶变换，而是更一般的 $\int \Phi(u) \, \mathrm{d}\mu_t(u) = \int \Phi(S_t u) \, \mathrm{d}\overline{\mu}(u)$，对于一

适当的 c 类泛函 Φ。于是，演化方程 $\partial_t u = F(t,u)$ 给出

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\int \Phi(u)\,\mathrm{d}\mu_t(u) &= \frac{d}{dt}\int \Phi(S_t u)\,\mathrm{d}\overline{\mu}(u) = \int (\Phi'(S_t u), \partial_t(S_t u))_{L^2}\,\mathrm{d}\overline{\mu}(u)\\ &= \int (\Phi'(S_t u), F(t, S_t u))_{L^2}\,\mathrm{d}\overline{\mu}(u) = \int (\Phi'(u), F(t,u))_{L^2}\,\mathrm{d}\mu_t(u).\end{aligned}$$

在某个时间区间 $[t', t]$, $0 \le t' \le t$ 上分别对左端和右端积分，得到*Foiaş-Liouville*方程

$$\int \Phi(u)\,\mathrm{d}\mu_t(u) = \int \Phi(u)\,\mathrm{d}\mu_{t'}(u) + \int_{t'}^{t}\int (\Phi'(u), F(t,u))_{L^2}\,\mathrm{d}\mu_s(u)\;\mathrm{d}s. \tag{4}$$

如上所述，Foiaş-Prodi 方法似乎更具一般性和灵活性，因为 Hopf 基本上只考虑了函数泛函 $\Phi(u) = \exp(i(v,u))$，其中$v \in L^2(\mathbb{R}^2)$固定。正如 Foiaş 在 [38], 中指出的，这些函数泛函可以用 Foiaş 的容许试验函数泛函进行逼近，因此 Foiaş-Prodi 统计解也满足 Hopf统计方程。

几年后，Vishik 和 Fursikov 引入了纳维–斯托克斯方程的另一种统计解，见 [83, 84]。他们考虑纳维–斯托克斯方程解轨道集合上的单个分布，并通过类似的方法证明了其存在性。

Foiaş、Rosa 和 Temam 在 [41], 中建立了它与 Foiaş-Prodi 统计解之间的联系。他们引入了一种非常相似的统计解，称为 Vishik-Fursikov 测度，但与 Vishik 和 Fursikov 最初的概念存在一些差异。例如，Foiaş、Rosa 和 Temam 假设了一种更强的能量不等式，并证明纳维–斯托克斯方程的 Leray-Hopf 解集合本身就是可测的，而不是假设 Leray-Hopf 解包含一个承载该测度的可测子集。

将这些 Vishik-Fursikov 测度在每个时间投影到相空间，可得到一族时间参数化测度，而它们确实是 Foiaş-Prodi 统计解。目前尚不清楚是否每个 Foiaş-Prodi 统计解都能以这种方式获得。

我们还想指出， [41], 中基于克莱因–米尔曼定理构造 Vishik-Fursikov 测度的方法足够灵活，也可应用于其他方程。事实上，这一方法促使 Bronzi、Mondaini 和 Rosa 开发了一个统计解理论的抽象框架 [6], ，并帮助本文最后两位作者以相当全面的方式构造了二维不可压缩欧拉方程的统计解 [85]。在这一更广泛的背景下，Vishik-Fursikov 测度的对应概念称为 轨道统计解 ，而 Foiaş-Prodi 统计解的对应概念则称为 相空间统计解。

此时，与测度值解之间的联系还不甚清晰。Chae 首次建立了这种联系：他在 [10], 中证明，在三维情形下，纳维–斯托克斯方程的 Foiaş-Prodi 统计解在消失黏性极限下收敛到欧拉

方程的一个测度值解，该解如 [24] 中所引入。具体而言，Chae 证明了，定义在 L^2 上的某些时间参数化测度对应于（广义）杨测度。

逆命题是否成立仍不清楚，也就是说，每个（广义）杨测度是否都对应于 L^2 上一个由时间参数化的测度。Fjordholm 、 Lanthaler 和 Mishra 的工作 [33] 与这一问题有关。他们在文中基于杨测度的无限层级，引入了双曲守恒律统计解的一种新概念，并将其称为 相关测度。他们特别证明，相关测度与 L^p 空间上的测度之间存在一一对应关系。

至于与测度值解的联系，相关测度并非专门针对双曲守恒律；事实上，也可以为欧拉方程或 Navier-Stokes 方程引入一种类似于其原始定义的表述 [37, 66, 36]。这种表述导出一条无限的方程链，其中第一个方程明确要求该层级中的第一个Young测度是 DiPerna 意义下的测度值解 [23] （不含集中部分）。

这应理解为：相关测度对经典杨测度或测度值解进行了扩充——后者只描述一阶矩和单点统计——纳入了所有多点相关，因此包含更多信息。

为了事先将这一统计解概念与其他概念区分开来，我们将其称为基于矩的统计解。在 [36],中，在欧拉方程和纳维–斯托克斯方程的语境下，这类解被称为（无黏） *Friedmann-Keller* 统计解。这一名称源于 Keller 和 Friedmann 在 1924 [61] 中的早期工作，以及 Fursikov 后来的研究；Fursikov 也用这个术语描述了与纳维–斯托克斯系统相关的、基于矩的演化方程链，参见例如 [46, 47, 48, 49]。

我们之前提到， L^p 空间上的测度与相关测度之间存在一一对应关系。由于后者是以时间为参数的对象，并被用于 Foiaş 和 Prodi 所提出的统计解概念，或更一般地说，用于上述相空间统计解概念，因此这种一一对应关系使我们能够比较这两种统计解概念。事实上，对于欧拉方程或纳维–斯托克斯方程，这两种统计解概念是等价的。对于后一种方程，这一结论见 Fjordholm、Mishra 和 Weber 最近发表的预印本 [36] 。对于欧拉方程，我们将在后文证明这一点；这有助于阐明主要论证，而且证明稍为简单，因为无需操心如何确保相关测度或其对应的 L^2 上的测度集中于 H^1。

在第 3.1 小节中，我们将给出本引言中提到的每种统计解概念的精确定义，并对它们进行更详细的比较。在随后的下一小节中，我们将讨论并比较构造统计解的各种方法。最后，在第 3.3 小节中，我们将更深入地探讨测度值解与统计解之间的联系，并在第 4 节中进一步提出一些思考和有待解决的问题。

2 测度值解

2.1 De不可压缩与等熵欧拉系统的定义

让我们快速回顾一下讨论所需的杨测度理论基础。

设 $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ 为开集（或 $\Omega = \mathbb{T}^d$），并设 $X \subset \mathbb{R}^N$ 为可测集。定义在 X 上、参数取自 $(0,T) \times \Omega$ 的 杨测度 ν 为 $L^\infty_{\mathrm{w}}((0,T) \times \Omega; \mathcal{P}(X))$ 中的一个元素。这里，$L^\infty_{\mathrm{w}}((0,T) \times \Omega; \mathcal{P}(X))$ 表示由概率测度 $\nu = (\nu_{t,x})_{(t,x)\in(0,T)\times\Omega}$ 构成的弱-* 可测族的集合，即映射

$$(t,x) \mapsto \int_X f(z)\,\mathrm{d}\nu_{t,x}(z) =: \langle \nu_{t,x}, f \rangle$$

对所有函数 $f \in C_0(X)$ 都是可测的。
此外，还有一种专为杨测度设计的收敛概念：
若一列可测函数 $(z_n)^{n\in\mathbb{N}}$ 从 $(0,T) \times \Omega$ 到 X 生成 杨测度，则称该序列生成了该杨测度，当且仅当

$$f(z_n(\cdot)) \overset{*}{\rightharpoonup} \langle \nu_{(\cdot)}, f \rangle \text{ in } L^\infty((0,T)\times\Omega)$$

对所有 $f \in C_0(X)$ 均成立。作为简写，我们将使用 $z_n \overset{Y}{\rightharpoonup} \nu$。
根据定义，这种收敛概念在与非线性函数复合时表现良好，这与弱极限不同。这或许是采用基于杨测度的解概念来处理非线性偏微分方程最重要的优势。举例来说，考虑定常涡片

$$u(t,x_1,x_2) = \begin{cases} e_1, & x_2 < \frac{1}{2} \\ -e_1, & x_2 > \frac{1}{2} \end{cases},$$

它是在环面 $\mathbb{T}^2$ 上的不可压缩欧拉方程的一个解。因此，对于每个 $n \in \mathbb{N}$，函数 $u_n(t,x_1,x_2) := u(nt,nx_1,nx_2)$ 也都是解。此外，$(u_n)^{n\in\mathbb{N}}$ 弱收敛到零。然而，如果我们将其与非线性运算 $f\colon v \mapsto v \otimes v$ 复合，常函数 $u_n \otimes u_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ 显然

有一个非零极限。
另一方面，不难证明

$$u_n \overset{Y}{\rightharpoonup} \frac{1}{2}\delta_{e_1} + \frac{1}{2}\delta_{-e_1}.$$

由于 $(u_n)^{n\in\mathbb{N}}$ 在 L^∞ 中一致有界，我们仍可以将张量积 $f\colon v \mapsto v \otimes v$ 代入杨测度收敛的定义，从而得到

$$u_n \otimes u_n = f(u_n) \overset{*}{\rightharpoonup} \langle \nu, f \rangle = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

下面的收敛结果至关重要，它是巴拿赫-阿劳格鲁定理的推论。

定理1（杨测度理论基本定理）。设（u_n）$^{n\in\mathbb{N}}$是一个映射序列，在某个 $1 \le p \le \infty$ 下有界于 $L^p((0,T) \times \Omega; \mathbb{B}^N)$ 中。那么，经过取子序列后，（u_n）$_{n\in\mathbb{N}}$在$\mathbb{B}^N$上生成一个杨测度。

注意，$L^\infty_{\mathrm{w}}((0,T) \times \Omega; \mathcal{P}(X))$ 中的每个元素都可以证明是由某个可测函数序列生成的。

有了定理1，我们便可以引入测度值解的概念。首先定义不可压缩欧拉系统的测度值解。

定义1。三元组（ν，m，D）是具有初始数据 $u^0 \in L^2(\Omega)$ 的不可压缩欧拉系统（2）的耗散测度值解，如果

i) $\nu \in L^\infty_{\mathrm{w}}((0,T) \times \Omega; \mathcal{P}(\mathbb{B}^d))$ *is a Young measure,*

ii) 测度 $m \in \mathcal{M}((0,T) \times \Omega; \mathbb{B}^{\overline{d}\times d})$ 满足

$$m(\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t) = m_t(\,\mathrm{d}x) \otimes \,\mathrm{d}t$$

for some family of measures $(t \mapsto m_t) \in L^\infty\left((0,T); \mathcal{M}(\overline{\Omega}; \mathbb{B}^{d\times d})\right)$,

iii) $D \in L^\infty(0,T)$ 满足 $D \ge 0$ 且

$$|m_t|(\overline{\Omega}) \le C \cdot D(t)$$

对于某个 $C > 0$，且几乎处处在 $t \in (0,T)$,

iv) 动量方程

$$\int_0^T \int_\Omega \langle \nu_{t,x}, \mathrm{id}\rangle \cdot \partial_t \varphi + \langle \nu_{t,x}, \mathrm{id} \otimes \mathrm{id}\rangle : \nabla\varphi \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t + \int_0^T \int_\Omega \nabla\varphi : m_t \,\mathrm{d}t$$

$$= -\int_\Omega u^0 \cdot \varphi(0,\cdot)\,\mathrm{d}x$$

对所有 $\varphi \in C_c^\infty([0,T) \times \Omega; \mathbb{B}^d)$ 成立，其中 散度 $\varphi = 0$,

v) 无散条件

$$\int_\Omega \langle \nu_{t,x}, \mathrm{id}\rangle \cdot \nabla\psi \,\mathrm{d}x = 0$$

对几乎处处的 $t \in (0,T)$ 以及所有 $\psi \in C_c^\infty(\Omega)$均成立,

vi) 能量不等式

$$\frac{1}{2}\int_{\Omega}\langle \nu_{t,x}, |\cdot|^2\rangle \,\mathrm{d}x + D(t) \le \frac{1}{2}\int_{\Omega}|u^0|^2\,\mathrm{d}x$$

对几乎处处的 $t\in(0,\ T)$成立。

通常，假定上述积分存在，这是定义的一部分。当$m = 0$ 且 $D = 0$时，我们简记为 ν ，并称其为振荡测度值解。此外，若振荡测度值解 ν 满足$\nu_{t,\ x} = \delta_{u(t,x)}$，其中某个 $u\in L^2((0,\ T)\times\Omega;\ \mathbb{R}^d)$，则这归结为 u 是弱解的通常定义。

等熵欧拉系统对应的测度值解概念定义如下。

定义 2. 三元组$(\nu,\ m,\ D)$ 是等熵欧拉系统 ***(1)*** 的耗散测度值解，其绝热指数为 $1<\gamma<\infty$ ，初始数据为$(\rho^0,\ u^0)\in L^1(\Omega)$ ，若

i) $\nu\in L^\infty_{\mathrm{w}}((0,T)\times\Omega;\mathcal{P}([0,\infty)\times\mathbb{R}^d))$ *is a Young measure,*

ii) 测度 $m\in\mathcal{M}((0,\ T)\times\Omega;\ \mathbb{R}^{d\times d})$ 满足

$$m(\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t) = m_t(\,\mathrm{d}x)\otimes\,\mathrm{d}t$$

for some family of measures $(t\mapsto m_t)\in L^\infty\left((0,T);\mathcal{M}(\overline{\Omega};\mathbb{R}^{d\times d})\right)$,

iii) $D\in L^\infty(0,T)$ 满足 $D\ge 0$ 且

$$|m_t|(\overline{\Omega}) \le C\cdot D(t)$$

对于某个 $C>0$，且几乎处处在 $t\in(0,T)$,

iv) 动量方程

$$\int_0^T\int_\Omega \langle\nu_{t,x},\rho u\rangle\cdot\partial_t\varphi + \langle\nu_{t,x},\rho u\otimes u\rangle : \nabla\varphi + \langle\nu_{t,x},\rho^\gamma\rangle\,\mathrm{div}\,\varphi\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t$$
$$+\int_0^T\int_\Omega \nabla\varphi :\,\mathrm{d}m_t\,\mathrm{d}t = -\int_\Omega \rho^0u^0\cdot\varphi(0,\cdot)\,\mathrm{d}x$$

对所有 $\varphi\in C_c^\infty([0,T)\times\Omega;\mathbb{R}^d)$均成立，

v) 连续性方程

$$\int_0^T\int_\Omega \langle\nu_{t,x},\rho\rangle\cdot\partial_t\psi + \langle\nu_{t,x},\rho u\rangle\cdot\nabla\psi\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t = -\int_\Omega\rho^0\psi(0,x)\,\mathrm{d}x$$

对所有 $\psi\in C_c^\infty([0,T)\times\Omega)$ 均成立，

vi) 能量不等式

$$\frac{1}{2}\int_\Omega \langle \nu_{t,x}, \rho|u|^2\rangle + \frac{1}{\gamma-1}\langle \nu_{t,x}, \rho^\gamma\rangle \,\mathrm{d}x + D(t) \le \frac{1}{2}\int_\Omega \rho^0|u^0|^2 + \frac{1}{\gamma-1}(\rho^0)^\gamma \,\mathrm{d}x$$

几乎处处成立于 $t \in (0,T)$。

同样，上述积分作为定义的一部分，假定其存在。当 $m = 0$和 $D = 0$时，我们简单地写作 ν，并称之为振荡测度值解。此外，如果一个振荡测度值解 ν 满足 $\nu_{t,x} = \delta_{(\rho(t,x),u(t,x))}$，其中某个$(\rho, u) \in L^1((0,T)\times\Omega; [0,\infty)\times \mathbb{B}^d)$，则这就归结为通常的定义，即$(\rho, u)$是一个弱解。

2.2 测度值解的存在性

测度值解这一概念最显著的优势之一是，对于任意 L^2-初始数据，已知存在相应的耗散测度值解，且其在全局范围内存在。弱解是否具有这一性质仍属未知。如果不要求能量耗散，那么至少对于不可压缩欧拉系统，任意初始数据都存在弱解，参见 [86]。

定理2。 设 $u^0 \in L^2(\Omega)$ 或 $(\rho^0, u^0) \in (L^\gamma \times L^2)(\Omega)$。那么，对于带有初始数据$u^0$的不可压缩欧拉系统，存在一个耗散测度值解；在可压缩情形下，对于带有初始数据 (ρ^0, u^0)的等熵欧拉系统，也存在一个耗散测度值解。

证明。 我们只证明等熵欧拉系统的情形：已知可压缩纳维–斯托克斯系统存在满足能量条件的弱解，例如，当 $\gamma > \frac{3}{2}$ 和 $d = 3$ 时，由 [31]中的存在性理论可知这一点。不可压缩情形的证明类似；根据 Leray-Hopf [67, 56]的工作，纳维–斯托克斯弱解存在。等熵欧拉方程的其他情形由 [28]处理。

因此，设 $(\rho^0, u^0) \in (L^\gamma \times L^2)(\Omega)$，并设 (ρ_n, u_n) 为具有黏性参数 $\alpha_n \to 0$ 的可压缩纳维–斯托克斯系统的相应能量可容许弱解。这意味着 (ρ_n, u_n) 满足

$$\begin{aligned}\partial_t(\rho_n u_n) + \operatorname{div}(\rho_n u_n \otimes u_n) + \nabla(\rho_n^\gamma) &= \alpha_n \operatorname{div}\mathbb{S}(\nabla u_n)\\ \partial_t \rho_n + \operatorname{div}(\rho_n u_n) &= 0\end{aligned}$$

在满足能量界的分布意义下

$$\begin{aligned}&\int_\Omega \frac{1}{2}\rho_n|u_n|^2 + \frac{1}{\gamma-1}(\rho_n)^\gamma \,\mathrm{d}x + \int_0^t\int_\Omega \alpha_n \mathbb{S}(\nabla u_n) : \nabla u_n \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\\ \le &\int_\Omega \frac{1}{2}\rho^0|u^0|^2 + \frac{1}{\gamma-1}(\rho^0)^\gamma \,\mathrm{d}x =: E_0\end{aligned}$$

对于几乎处处的 $t \in (0,T)$，其中

$$\mathbb{S}(A) = \kappa\left(A + A^{\mathrm{T}} + \frac{2}{3}(\operatorname{tr} A)\cdot \mathbb{E}_d\right) + \eta(\operatorname{tr} A)\mathbb{E}_d.$$

这里， $\mathbb{E}_d$ 表示 d 维空间中的单位矩阵， κ和 η 是一些固定的正数。（纯粹从数学角度来说，令 $\mathbb{S}（A）= A$ 也完全可以。）

一致能量界意味着$(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 有$L_t^\infty L_x^\gamma$界，而$(\sqrt{\rho_n}u_n^2)^{n\in\mathbb{N}}$ 有 $L_t^\infty L_x^2$界。因此，定理1说明存在一个生成杨测度 ν的子序列（我们仍用原记号表示）。

当我们考察$(\rho_n u_n \otimes u_n)$和$(\rho_n^\gamma)\mathbb{E}_d$时，可以发现这些序列在 $L^\infty((0,T);\ L^1(\Omega))$中有界，但可能并非有界。因此，函数$(\rho, \sqrt{\rho}u) \mapsto \rho u\otimes u$和$\rho \mapsto \rho^\gamma$可能不是杨测度生成定义中的可 admissible 测试函数，因此相应的项

$$\rho_n u_n \otimes u_n - \langle \nu_{t,x}, \rho u\otimes u\rangle \text{ and } (\rho_n)^\gamma \mathbb{E}_d - \langle \nu_{t,x}, \rho^\gamma \mathbb{E}_d\rangle$$

可能不会弱-* 收敛到零。另一方面，我们可以将上述各项视为 $[0,T]\times\Omega$ 上有界的拉东测度。于是，我们得到（未重新标记的）子序列，它们分别在拉东测度的意义下弱-* 收敛到某些 $m^{\rho u\otimes u}$、 $m^{\rho^\gamma} \in \mathcal{M}([0,T]\times\Omega;\ \mathbb{R}^{d\times d})$。测度论中的标准论证表明，由 $L_t^\infty L_x^1$-界可推出如下形式的测度分解

$$\begin{aligned} m^{\rho u\otimes u}(\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}t\ ) &= m_t^{\rho u\otimes u}(\ \mathrm{d}x\ )\otimes\ \mathrm{d}t, \\ m^{\rho^\gamma}(\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}t\ ) &= m_t^{\rho^\gamma}(\ \mathrm{d}x\ )\otimes\ \mathrm{d}t, \end{aligned}$$

其中 $(m_t^{\rho u\otimes u})$、$(m_t^{\rho^\gamma})$ 是 $\mathcal{M}(\Omega;\ \mathbb{R}^{d\times d})$ 中一致有界的测度族。我们定义 $\overline{m}:= m^{\rho u\otimes u} + m^{\rho^\gamma}$。于是，分解测度之和也相等，即 $m_t = m_t^{\rho u\otimes u} + m_t^{\rho^\gamma}$。

我们还将耗散缺陷 D 定义为 m 的迹所对应的一致有界函数

$$D(t) := \frac{1}{2}\operatorname{tr}\left(m_t^{\rho u\otimes u}(\overline{\Omega})\right) + \frac{1}{d(\gamma-1)}\operatorname{tr}\left(m_t^{\rho^\gamma}(\overline{\Omega})\right)$$

对几乎处处的 $t \in (0,T)$ 成立。由于 $m_t^{\rho u\otimes u}$ 和 $m_t^{\rho^\gamma}$ 都取值于半正定对称矩阵构成的凸集，任意矩阵范数都与迹等价，因此存在某个 $C>0$ 使得

$$|m_t|(\overline{\Omega}) \le C\cdot D(t)$$

对于几乎处处的 $t \in (0,T)$。特别地， $D \ge 0$。现在我们将证明 (ν, m, D) 是一个耗散测度值解。

注意到，定义 2 中的 i)、ii) 和 iii) 根据构造均成立。由于 $(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 有界于 $L_t^\infty L_x^\gamma$，且 Ω 是有界集，因此它是等可积的。根据赫尔德

不等式和动能界 $\sqrt{\rho_n}u_n \in L^\infty L^2$，我们看到 $(\rho_n u_n)^{n\in\mathbb{N}}$ 在 $L^{2\gamma/(\gamma+1)}$ 中有界，因此当 $\gamma > 1$ 时，它关于 $\frac{2\gamma}{\gamma+1} > 1$ 等可积。因此，

$$\int_0^T \int_\Omega \rho_n \partial_t \psi + \rho_n u_n \cdot \nabla \psi \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t \to \int_0^T \int_\Omega \langle \nu_{t,x}, \rho \rangle \partial_t \psi + \langle \nu_{t,x}, \rho u \rangle \cdot \partial_t \psi \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t$$

对于任意 $\psi \in C_c^\infty((0,T) \times \Omega; \mathbb{R})$。这表明定义 2 中的 v)。
对于动量方程，注意到对固定的 $\varphi \in C_c^\infty([0,T) \times \Omega; \mathbb{R}^d)$，我们有

$$\alpha_n \int_0^T \int_\Omega \mathbb{S}(\nabla u_n) : \nabla \varphi \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t \leq C\alpha_n \|\nabla \varphi\|_{L_t^\infty L_x^2} \int_0^T \|\nabla u_n(t)\|_{L_x^2} \, \mathrm{d}t$$

$$\leq C\alpha_n \|\nabla \varphi\|_{L_t^\infty L_x^2} \int_0^T \left(\int_\Omega \mathbb{S}(\nabla u_n) : \nabla u_n \, \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{2}} \mathrm{d}t \|\nabla \varphi\|_{L_t^\infty L_x^2} \leq C\sqrt{\alpha_n E_0} T$$

$$\to 0$$

根据 Korn 不等式以及纳维–斯托克斯方程的能量不等式。另请注意，

$$(\rho_n)^\gamma \mathbb{E}_d : \nabla \varphi = (\rho_n)^\gamma \operatorname{div} \varphi.$$

因此，

$$\int_0^T \int_\Omega \rho_n u_n \cdot \partial_t \varphi + \rho_n u_n \otimes u_n : \nabla \varphi + (\rho_n)^\gamma \operatorname{div} \varphi \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t$$

$$\to \int_0^T \int_\Omega \langle \nu_{t,x}, \rho u \rangle \cdot \partial_t \varphi + \langle \nu_{t,x}, \rho u \otimes u \rangle : \nabla \varphi + \langle \nu_{t,x}, \rho^\gamma \rangle \operatorname{div} \varphi \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t + \int_0^T \int_\Omega \nabla \varphi : \mathrm{d}m_t \, \mathrm{d}t$$

对于所有 $\varphi \in C_c^\infty([0,T) \times \Omega; \mathbb{R}^d)$。这意味着 iv)。

最后，通过对项 $\rho_n u_n \otimes u_n$ and $(\rho_n)^\gamma \mathbb{E}_d$ 取迹并使用正确的系数，根据上述讨论可得能量不等式 vi)。■

2.3 弱强唯一性

尽管测度值解是一种非常弱的解的概念，但它们满足某种唯一性性质。显然，存在初始数据使得测度值解不唯一。甚至弱解本身也已经不唯一。然而，如果初始数据产生了经典解，那么所有与该初始数据相对应的耗散测度值解都等于这个经典解。这称为弱强唯一性。因此，产生层流的初始数据不可能生成湍流。

为简便起见，我们将环面 $\mathbb{T}^d$ 作为空间区域 .

定理3。 设初始数据 u_0 产生一个强不可压缩解 $U \in C^1([0,T]\times \mathbb{T}^d)$ 以及一个不可压缩耗散型测度值解 $(\nu,\ m,\ D)$。那么 $(\nu,\ m,\ D) = (\delta_U,\ 0,\ \mathbf{0})$。

定理4。 设初始数据 $(\rho_0,\ u_0)$ 导出强可压缩解$(r,\ U) \in C^1([0,T]\times \mathbb{T}^d)$，且 $r>0$ 处处成立，同时也导出可压缩耗散测度值解 $(\nu,\ m,\ D)$。

则 $(\nu,\ m,\ D) = \big(\delta_{(r,U)},\ 0,\ 0\big)$。

我们只证明可压缩情形，因为不可压缩情形的证明较为简单，且可由相同论证得出。关于不可压缩情形的证明，参见例如 [5]或 [87]。

细心的读者会发现，强解中排除真空（$r>0$）使我们能够在证明中将 r 提升至负幂。一般而言，在存在真空时，弱强唯一性尚未得到证明，但可以容忍某些特定的真空情形 [54]。

对于初始数据为（$r_0,\ U_0$）的强解（$r,\ U$），以及初始数据为（$\rho_0,\ u_0$）的测度值解（$\nu,\ m,\ D$），定义相对能量为

$$
\begin{aligned}
&E_{\mathrm{rel}}(\nu,m,D|r,U)(t)\\
&:=\int_{\mathbb{T}^d}\left\langle \nu_{t,x},\frac{1}{2}|u-U(t,\cdot)|^2+\frac{1}{\gamma-1}\big(\rho^\gamma-r^\gamma\big)-\frac{\gamma}{\gamma-1}r^{\gamma-1}(\rho-r)\right\rangle \,\mathrm{d}x + D(t)
\end{aligned}
$$

对几乎处处的 $t\in(0,T)$，以及在 $t=0$ 处定义

$$
E_{\mathrm{rel}}(\nu,m,D|r,U)(0) := \int_{\mathbb{T}^d}\frac{1}{2}|u_0-U_0|^2+\frac{1}{\gamma-1}\big(\rho_0^\gamma-r_0^\gamma\big)-\frac{\gamma}{\gamma-1}r_0^{\gamma-1}(\rho_0-r_0)\,\mathrm{d}x.
$$

由 $\rho\mapsto\rho^\gamma$ 的强凸性，利用弱-强稳定性的概念，我们直接推得弱-强唯一性性质，具体表述如下。

定理5. 设初始数据(ρ_0,u_0) 产生一个可压缩耗散测度值解(ν,m,D)，并设初始数据(r_0,U_0) 产生一个强可压缩解$(r,U)\in C^1([0,T]\times\mathbb{T}^d)$。

那么存在常数 $C>0$，使得

$$
E_{\mathrm{rel}}(\nu,m,D|r,U)(t)\le e^{CT\|\nabla U\|_{C([0,T]\times\mathbb{T}^d)}}E_{\mathrm{rel}}(\nu,m,D|r,U)(0)
$$

对几乎处处的 $t\in(0,T)$。

证明。 我们沿用 [28] 中给出的证明。

作为准备，我们将连续性方程与 $\frac{1}{2}|U|^2$和 $\frac{\gamma}{\gamma-1}r^{\gamma-1}$相乘，并乘以一个适当的时间截断函数，从而得到

$$
\int_0^\tau\int_{\mathbb{T}^d}\langle\nu,\rho\rangle U\cdot\partial_t U+\langle\nu,\rho u\rangle\cdot\nabla U\cdot U\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t=\int_{\mathbb{T}^d}\langle\nu,\rho\rangle(\tau)\frac{1}{2}|U|^2(\tau)\,\mathrm{d}x-\int_{\mathbb{T}^d}\rho_0\frac{1}{2}|U_0|^2\,\mathrm{d}x
$$

and

$$\int_0^\tau \int_{\mathbb{T}^d} \langle \nu, \rho \rangle \gamma r^{\gamma-2} \partial_t r + \langle \nu, \rho u \rangle \cdot \gamma r^{\gamma-2} \nabla r \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t$$
$$= \int_{\mathbb{T}^d} \langle \nu, \rho \rangle(\tau) \frac{\gamma}{\gamma-1} r^{\gamma-1}(\tau) \, \mathrm{d}x - \int_{\mathbb{T}^d} \rho_0 \frac{\gamma}{\gamma-1} r_0^{\gamma-1} \, \mathrm{d}x$$

对几乎处处的 $\tau \in (0,T)$ 成立。此外，将动量方程与 U 相乘可得

$$\int_0^\tau \int_{\mathbb{T}^d} \langle \nu, \rho u \rangle \cdot \partial_t U + \langle \nu, \rho u \otimes u \rangle : \nabla U + \langle \nu, \rho^\gamma \rangle \operatorname{div} U \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t + \int_0^\tau \int_{\mathbb{T}^d} \nabla U : \mathrm{d}m_t \, \mathrm{d}t$$
$$= \int_{\mathbb{T}^d} \langle \nu, \rho u \rangle(\tau) \cdot U(\tau) \, \mathrm{d}x - \int_{\mathbb{T}^d} \rho_0 u_0 \cdot U_0 \, \mathrm{d}x.$$

利用这些恒等式以及 ν的能量不等式，我们得到

$$\begin{aligned}
&E_{\mathrm{rel}}(\nu, m, D|r, U)(\tau) \\
&\le E_{\mathrm{rel}}(\nu, m, D|r, U)(0) - \int_0^\tau \int_{\mathbb{T}^d} \nabla U : \mathrm{d}m_t \, \mathrm{d}t + \int_{\mathbb{T}^d} r^\gamma - r_0^\gamma \, \mathrm{d}x \\
&\quad - \int_0^\tau \int_{\mathbb{T}^d} \langle \nu, \rho u \rangle \cdot \partial_t U + \langle \nu, \rho u \otimes u \rangle : \nabla U + \langle \nu, \rho^\gamma \rangle \operatorname{div} U \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t \\
&\quad - \int_0^\tau \int_{\mathbb{T}^d} \langle \nu, \rho \rangle \left(\gamma r^{\gamma-2} \partial_t r - U \cdot \partial_t U \right) + \langle \nu, \rho u \rangle \cdot \left(\gamma r^{\gamma-2} \nabla r - \nabla U \cdot U \right) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t \\
&= E_{\mathrm{rel}}(\nu, m, D|r, U)(0) + C \|\nabla U\|_{C([0,T] \times \mathbb{T}^d)} \int_0^\tau D(t) \, \mathrm{d}t \\
&\quad - \int_0^\tau \int_{\mathbb{T}^d} \langle \nu, \rho^\gamma - r^\gamma - \gamma r^{\gamma-1}(\rho - \gamma) \rangle \operatorname{div} U \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t \\
&\quad - \int_0^\tau \int_{\mathbb{T}^d} \langle \nu, \rho u \rangle \cdot \partial_t U + \langle \nu, \rho u \otimes u \rangle : \nabla U \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t \\
&\quad - \int_0^\tau \int_{\mathbb{T}^d} \langle \nu, \rho U \rangle \cdot \left(-\gamma r^{\gamma-2} \nabla r - \partial_t U \right) + \langle \nu, \rho u \rangle \cdot \left(\gamma r^{\gamma-2} \nabla r - \nabla U \cdot U \right) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t,
\end{aligned}$$

其中在最后一个等式中，我们还使用了 $\partial_t r + r \operatorname{div} U + U \cdot \nabla r = 0$。现在，根据动量方程，我们有

$$\partial_t U + (U \cdot \nabla) U + \gamma r^{\gamma-2} \nabla r = 0$$

对于 U。因此，对于几乎处处的 $\tau \in (0,T)$，我们得到

$$
\begin{aligned}
&E_{\mathrm{rel}}(\nu, m, D|r, U)(\tau) \\
&\leq E_{\mathrm{rel}}(\nu, m, D|r, U)(0) + C\|\nabla U\|_{C([0,T]\times \mathbb{T}^d)} \int_0^\tau D(t)\ \mathrm{d}t \\
&\quad - \int_0^\tau \int_{\mathbb{T}^d} \langle \nu, \rho^\gamma - r^\gamma - \gamma r^{\gamma-1}(\rho - \gamma)\rangle \operatorname{div} U\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}t \\
&\quad + \int_0^\tau \int_{\mathbb{T}^d} \langle \nu, \rho u\rangle \cdot \nabla U \cdot U + \langle \nu, \rho U \cdot \nabla U \cdot u\rangle \\
&\quad - \int_0^\tau \int_{\mathbb{T}^d} \langle \nu, \rho u \otimes u\rangle : \nabla U + \langle \nu, \rho U\rangle \cdot \nabla U \cdot U\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}t \\
&= E_{\mathrm{rel}}(\nu, m, D|r, U)(0) + C\|\nabla U\|_{C([0,T]\times \mathbb{T}^d)} \int_0^\tau D(t)\ \mathrm{d}t \\
&\quad - \int_0^\tau \int_{\mathbb{T}^d} \langle \nu, \rho^\gamma - r^\gamma - \gamma r^{\gamma-1}(\rho - \gamma)\rangle \operatorname{div} U\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}t \\
&\quad - \int_0^\tau \int_{\mathbb{T}^d} \langle \nu, \rho(u - U) \cdot \nabla U \cdot (u - U)\rangle\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}t \\
&\leq E_{\mathrm{rel}}(\nu, m, D|r, U)(0) + C\|\nabla U\|_{C([0,T]\times \mathbb{T}^d)} \int_0^\tau E_{\mathrm{rel}}(\nu, m, D|r, U)(t)\ \mathrm{d}t
\end{aligned}
$$

对于某个 $C > 0$，它仅取决于维数 d 和定义 2 iii) 中的常数。由格朗沃尔不等式即可得到该结论。■

2.4 测度值奇异极限

关于测度值解的存在性，我们已经看到，对应于固定初始数据的黏性极限会生成一个测度值解。此外，每个杨测度都可以由某个可测函数序列生成。因此，一个自然的问题是：每个测度值解是否都可能来自某个（近似）弱解序列，例如一个消失黏性序列？其他可能性还包括数值格式的极限、低马赫数极限或弱解的极限。需要注意的是，测度值解的定义当然并未要求它们由近似解生成。

在不可压缩情形中，一个令人惊讶且极不平凡的事实是，每个测度值解都来自一个弱解序列，证明见 [79] 。

定理 6. 设 ν 是定义在 $\mathbb{R}^d$ 上的不可压缩耗散型测度值解，其初始数据为 $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^d)$。那么，存在一个能量可容许弱解序列 $(u_n)^{n\in\mathbb{N}}$，其初始数据为 $(u_n^0)_{n\in\mathbb{N}}$，使得 $u_n^0 \to u_0$ 在 $L^2(\mathbb{R}^d)$ 中成立，并且$(u_n)^{n\in\mathbb{N}}$ 生成 ν，即

$$u_n \xrightarrow{Y} \nu.$$

事实上，Székelyhidi-Wiedemann 的这一结果采用了不同的集中测度表述，见 [79]。不过，我们不打算深入探讨这一主题。

无论如何，上述定理带来的惊人结论是：不可压缩的测度值解与弱解所包含的信息实质上相同，尽管测度值解作为解的概念先验上弱得多，因为只有测度的一阶矩和二阶矩受到约束。

那么，可压缩情形又如何呢？事实上，可压缩欧拉系统的情形截然不同，也更加复杂。作为准备，我们先给出以下元结果。

定理 7。 对于空间维数 $d \geq 2$，并非每个可压缩欧拉方程的振荡测度值解都来自弱解序列。

这一点最早在 [14], 中得到观察，文中构造了一个由两个狄拉克测度组成的常值测度值解，证明它无法由弱解生成。 [14] 中的思路在 [52] 中得到了进一步发展，进而得到如下结果：甚至存在确定性初始数据，它在某个有限时间内按经典方式演化，随后却分裂为实际上无穷多个无法由弱解生成的振荡测度值解。

上述定理的两个版本的证明思路，都依赖于 Ball 和 James [1]风格的补偿紧性刚性论证。为此， [1] 中的秩一连通性对应于底层杨测度的波锥连通性 。在这里，我们考虑线性齐次微分算子 $\mathcal{A}$ 的变分法框架，其阶数 为$k \in \mathbb{N}$，即

$$\mathcal{A} = \sum_{|\alpha|=k} A^\alpha \partial_\alpha$$

其中， A^α 常系数矩阵作用于状态空间$\mathbb{R}^N$。这一框架由 Tartar 开创，参见 [80]。相应的傅里叶符号定义为：对 $\mathcal{A}$ 的$\xi \in \mathbb{R}^d$

$$\mathbb{A}(\xi) = \sum_{|\alpha|=k} \xi_\alpha A^\alpha.$$

$\mathcal{A}$ 的波锥 定义为

$$\Lambda_{\mathcal{A}} = \bigcup_{|\xi|=1} \ker \mathbb{A}(\xi).$$

此外，如果$\mathbb{B}^N$中的两个向量 z_1、$z_2 \in$ 满足以下条件，则称它们波锥相连

$$z_1 - z_2 \in \Lambda_{\mathcal{A}}.$$

现在，可压缩欧拉系统可以松弛为一阶线性齐次偏微分方程组。相应的线性算子可通过用新变量简单替换非线性项得到。我们称之为线性松弛欧拉方程组

$$\begin{aligned} \partial_t m + \operatorname{div} M + \nabla Q &= 0, \\ \partial_t \rho + \operatorname{div} m &= 0 \end{aligned}$$

适用于变量 $(\rho, m, M, Q) \in [0,\infty)\times\mathbb{B}^d\times S_0^d\times\mathbb{B}$，其中 S_0^d表示迹为零的对称 $(d\times d)$-矩阵。现在，松弛系统直接对应于一个一阶线性齐次微分算子 $\mathcal{A}_E$。通过提升映射，可以实现从非线性系统到线性化系统的转换

$$\Theta\colon (\rho, m) \mapsto \left(\rho, m, \frac{m\otimes m}{\rho} - \frac{|m|^2}{\rho d}\mathbb{E}_d, \rho^\gamma + \frac{|m|^2}{\rho d}\right),$$

其中 $\mathbb{E}_d$ 是 d 维单位矩阵。为方便起见，我们在此使用动量 $m = \rho u$ 作为原始变量，而非速度 u。无论如何，这个提升映射 Θ 编码了非线性逐点约束，这些约束与线性算子 $\mathcal{A}_E$ 共同构成非线性可压缩欧拉系统。

考虑线性化欧拉方程组 $\mathcal{A}_E$ 的另一个结果是以下必要条件，参见 [14] 和 [53]。这一结果源自 Fonseca-Müller [44] 的开创性工作，该工作推广了 Kinderlehrer-Pedregal[62, 63]的研究。事实上，也可以由定理 8推得定理 7。

定理 8. 假设 ν 是由可压缩欧拉方程组在$(0,T)\times\mathbb{T}^d$上的一列一致有界的能量容许弱解$(\rho_n, m_n)^{n\in\mathbb{N}}$生成的杨测度。此外，假设初始数据满足$(\rho_n^0, m_n^0) \to (\rho_0, m_0)$于 $L^\gamma\times L^2$ 中成立，并假设存在 $\eta > 0$ 使得对所有 $n \in$， $\rho_n \geq \eta$

那么，$\dot{\nu}^{\mathbb{N}}$是一个初始数据为(ρ_0, m_0)的耗散振荡测度值解，并满足 *Jensen* 型条件

$$\langle \Theta_\sharp \nu, f\rangle \geq Q_{\mathcal{A}_E} f\left(\langle \Theta_{\mathcal{A}_E}\nu, \mathrm{id}\rangle\right)$$

该条件在一个全测度集上成立，且对所有 $f \in C(\mathbb{B}^N)$均成立。

我们需要澄清一些记号：
提升测度 $\Theta_\sharp\nu$ 定义为如下推前测度

$$\langle \Theta_\sharp\nu, f\rangle = \langle \nu, f\circ\Theta\rangle \text{ for } f \in C(\mathbb{B}^N).$$

因此， ν 是可压缩欧拉系统的振荡测度值解，当且仅当相应的提升测度满足线性约束

$$\mathcal{A}_E\langle \Theta_\sharp\nu, \mathrm{id}\rangle = 0.$$

此外，对于任意线性齐次微分算子 $\mathcal{A}$，我们称函数$f \in C(\mathbb{R}^N)$ 为 $\mathcal{A}$-拟凸，如果对于所有 $z \in \mathbb{R}^N$

$$\int_{\mathbb{T}^d} f(z + w(x))\, \mathrm{d}x \geq f(z)$$

对于所有 $w \in C^\infty(\mathbb{T}^d, \mathbb{R}^N)$，其中 $\mathcal{A}w = 0$ 且 $\int_{\mathbb{T}^d} w(x)\, \mathrm{d}x = 0$，该结论均成立。注意，对于 $\mathcal{A} = 0$，这相当于 f 只是凸函数。

给定函数 $f \in C(\mathbb{R}^N)$，小于等于 f 的最大 $\mathcal{A}$-拟凸函数是由下式定义的 $\mathcal{A}$-拟凸包络 $Q_{\mathcal{A}} f$

$$Q_{\mathcal{A}} f(z) = \inf \left\{ \fint_{\mathbb{T}^d} f(z + w(x))\, \mathrm{d}x \,:\, w \in C^\infty(\mathbb{T}^d) \cap \ker \mathcal{A},\ \int_{\mathbb{T}^d} w(x)\, \mathrm{d}x = 0 \right\}.$$

设 $\mathcal{B}$ 是针对 $\mathcal{A}$的势算子，也就是说，$\mathcal{B}$ 这个 $l \in \mathbb{N}$ 阶线性齐次微分算子满足

$$\ker \mathbb{A}(\xi) = \operatorname{image} \mathbb{B}(\xi) \text{ for } \xi \in \mathbb{R}^d \backslash \{0\}.$$

那么 f 对于 $q > 0$ 和 $z \in \mathbb{R}^N$，我们将截断拟凸包络 $Q^q_{\mathcal{B}} f$ 定义为

$$Q^q_{\mathcal{B}} f(z) = \inf \left\{ \int_{(0,1)^d} f(z + \mathcal{B}\varphi(x))\, \mathrm{d}x \,:\, \varphi \in C^\infty_c((0,1)^d),\ \|D^l \varphi\|_{L^\infty} \leq q \right\}.$$

由上述定义可直接推出，对于所有 $f \in C(\mathbb{R}^N)$ 和 $q > 0$，均有

$$Q_{\mathcal{A}} f \leq Q^q_{\mathcal{B}} f \leq f.$$

例如，参见 [53] 和 [44]，了解更多关于（截断）拟凸包络的内容。

上述定理 8 给出了以下测度值解的选择准则：

如果某个测度值解并非由弱解序列生成，则可将其视为非物理解并予以舍弃。

事实上，通过奇异极限进行选择是识别非物理解的一种常见方法；消失黏性的情形参见 [2]，低马赫数极限的情形参见 [50]。

让我们快速回顾一下不可压缩情形。在这种情况下，也可以导出一个必要的詹森条件。然而，由于对于相应的线性算子，所有拟凸函数本身就是凸函数，因此这一詹森条件可由经典的詹森不等式平凡地满足，参见 [14]中的注 4。因此，不能从每个不可压缩测度值解都由弱解生成这一事实中得出矛盾。

我们已经了解到，能够由弱解生成的可压缩测度值解必然需要满足 Jensen 型条件。那么，充分条件又是什么呢？事实证明，测度满足某个相关的詹森条件以及其他一些结构条件，就足以保证这一点。以下定理摘自 [53]。

定理 9。设 $T > 0$ 和 $d \geq 2$。设 ν 是可压缩欧拉系统上的耗散振荡测度值解，其定义于 $(0,T) \times \mathbb{T}^d$，初始数据为 $(\rho_0, m_0) \in L^\infty(\mathbb{T}^d)$，绝热指数为 $\gamma = 1 + \frac{2}{d}$。假设 ν满足以下条件：

- 存在 $R > 0$ 使得

$$\langle \Theta_\sharp \nu, f \rangle \geq Q^R_{\mathcal{B}_E} f(\langle \Theta_\sharp \nu, \mathrm{id} \rangle)$$

对所有 $f \in C([0,\infty) \times \mathbb{B}^d \times S^d_0 \times \mathbb{B})$，该条件在一个全测度集上成立。

- 存在 $\eta > 0$ 使得

$$\operatorname{supp}\left((\Theta_\sharp \nu)_{(t,x)}\right) \subset \left\{ (\rho, m, M, Q) \,:\, \rho \geq \eta \text{ and } Q = \left\langle \nu_{(t,x)}, \frac{1}{d}\frac{|m|^2}{\rho} + \rho^\gamma \right\rangle \right\}$$

对几乎处处的$(t,x) \in (0,T) \times \mathbb{T}^d$.

- 存在 $w \in W^{2,\infty}((0,T) \times \mathbb{T}^d)$ 以及 $\sigma \in C([0,T] \times \mathbb{T}^d)$，使得提升测度的重心满足

$$\langle \Theta_\sharp \nu, \mathrm{id} \rangle = \sigma + \mathcal{B} w.$$

- 映射$(t,x) \mapsto \left\langle \nu_{(t,x)} \ \frac{1}{d}\frac{|m|^2}{\rho} + \rho^\gamma \right\rangle$ 在 $[0,T] \times \mathbb{T}^d$ 上连续。

于是 ν 由一列一致有界的能量可容许弱解$(\rho_n, m_n)^{n \in \mathbb{N}}$ 生成，使得对所有 $n \in \mathbb{N}$，均有

$$\begin{aligned} \rho_n &\geq \tilde{\eta}, \\ \|\rho_n(0,\cdot) - \rho_0\|_{L^\gamma} &\leq \frac{1}{n}, \\ \|m_n(0,\cdot) - m_0\|_{L^2} &\leq \frac{1}{n} \end{aligned}$$

其中 $\tilde{\eta} > 0$ 为某个固定值。

这里， $\mathcal{B}_E$ 表示松弛欧拉系统 $\mathcal{A}_E$ 的二阶势，该系统构造于 [51] 中。

这里我们只给出证明思路：

从提升测度的詹森条件出发，我们得到一个生成 $\Theta_\sharp \nu$的松弛系统弱解序列。这源于 [50]中 Fonseca-Müller刻画精神下的一个结果。一种截断方法

可用于获得适合应用凸积分方法的生成序列。我们采用的具体凸积分结果来自[20]。通过这种方式，生成 $\Theta_\sharp\nu$ 的松弛解序列给出了一个生成测度 ν的真正能量可容许弱解序列。这意味着，通过凸积分，我们可以从线性机制转回非线性机制。

现在，空间维数 $d \geq 2$这一条件也得到了合理解释，因为凸积分方法不适用于 $d = 1$。此外，条件 $\gamma = 1 + \frac{2}{d}$ 也源于我们所使用的特定可压缩凸积分方案。此情形的主要优点是，广义压力 Q 等于能量密度 $\frac{1}{2}\frac{|m|^2}{\rho} + \frac{1}{\gamma-1}\rho^\gamma$ 乘以常数因子 $\frac{d}{2}$，这对证明至关重要。不过请注意，从物理角度看，这一特定的 γ 选择对应于单原子气体的情形。

我们简要讨论一下，通过弱解生成可压缩测度值解的上述充要条件之间的差距。在不考虑能量可容许性的情况下，Jensen 条件和重心条件的充要条件之间唯一真正的差距，源于 Calderón-Zygmund 不等式在 L^∞ 情形下失效，因此我们使用了不同的拟凸包络。目前尚不清楚如何处理这一十分微妙的问题。

如果考虑导致能量可容许性的条件，我们会发现假设 $Q = \left\langle \nu, \frac{1}{d}\frac{|m|^2}{\rho} + \rho^\gamma \right\rangle$ 过于严格，因为一般的耗散测度值解可能不满足该条件。例如，可以考虑一个由两个狄拉克测度构成的解，它们分别支撑在能量不同的弱解上。此外，对 ν 的能量施加连续性条件显然也过于严格。不过，出于技术原因，证明中需要这一条件，而目前尚无显而易见的方法可以绕过它。

我们还想非常直观地说明，为什么不可压缩与可压缩情形有所不同：

如果凸积分方案更加灵活，就更容易找到生成该测度的真正解。而这又对应着较大的波锥，因为这样一来，我们就能更容易地找到松弛系统的解。然而，较大的波锥意味着有更多函数 w 满足 $\mathcal{A}w = 0$，因而符合 $\mathcal{A}$-拟凸性定义中的测试函数要求。因此，函数与其对应的 $\mathcal{A}$-拟凸包络之间的差异会更大。由此， $\mathcal{A}$-拟凸包络相对较小。

请注意，与可压缩系统所对应的波锥相比，不可压缩系统所对应的波锥要大得多。因此，在不可压缩情形下，詹森条件更容易满足；事实上，该条件是空泛的。

3 解的统计概念

3.1 不同概念的定义与比较

下文中，我们研究二维环面 $\mathbb{T}^2$ 以及某个有限但任意的时间区间 $[0, T]$，并将 $\mathcal{U}$记为所有满足能量不等式的弱解的集合

不可压 在 $C([0,T];\, H_w)$ 中的可行欧拉方程

$$\frac{1}{2}\int_{\mathbb{L}^2} |u(x,t)|^2 \,\mathrm{d}x \le \frac{1}{2}\int_{\mathbb{L}^2} |u(x,0)|^2 \,\mathrm{d}x \tag{5}$$

对几乎处处的 $0 \le t \le T$。这里， H_w 是由弱无散向量场组成的集合，这些向量场属于 $(\mathbb{L}^2;\mathbb{R}^2)$-向量场空间，并赋予弱拓扑，因此对每个 $v \in L^2(\mathbb{L}^2;\mathbb{R}^2)$， $t \mapsto \int_{\mathbb{L}^2} u(x,t)\cdot v(x)\,\mathrm{d}x$ 关于 $[0,T]$ 连续。事实上，由于范数的弱下半连续性，这意味着对于每个 $t \in [0,T]$， 式 (5) 都成立。

我们引入时间求值映射 $\{\Pi_t\}_{0\le t\le T}$，其中 $\Pi_t\colon C([0,T];\, H_w) \to H_w, u \mapsto u(t)$。

对于接下来的讨论，我们指出，在诸如 H 这样的波兰空间上，由弱拓扑与强拓扑生成的博雷尔-σ-代数相同。因此，出于纯测度论方面的考虑和记号简便起见，我们不区分 H 和 H_w。

定义 3 (轨道统计解)。 设 $\overline{\mu}$ 是定义在 H 上的博雷尔概率测度，使得

$$\int_H \|u_0\|_{L^2}^2 \,\mathrm{d}\overline{\mu}(u_0) < \infty.$$

（二维不可压缩）欧拉方程的轨道统计解 或具有初始分布 $\overline{\mu}$ 的 $\mathcal{U}$- 轨道统计解是定义在 $C([0,T];\, H_w)$ 上的博雷尔概率测度 μ，使得

i) 存在一个博雷尔可测子集 $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$，使得 $\mu(\mathcal{V}) = 1$;

ii) 初始数据以如下意义达到：推前测度 $\Pi_{0\sharp}\mu$ 等于 $\overline{\mu}$;

iii) μ 满足能量不等式，具体而言，对每个 $0 \le t \le T$

$$\int_{C([0,T];H_w)} \|u(t)\|_{L^2}^2 \,\mathrm{d}\mu(u) \le \int_H \|u_0\|_{L^2}^2 \,\mathrm{d}\overline{\mu}(u_0). \tag{6}$$

为了定义相空间统计解，我们需要一类恰当的测试泛函 $\mathcal{T}$。受 [40, 41, 6], 启发，我们令 $\mathcal{T}$ 为如下泛函 Φ 的集合：$H \to \mathbb{R}$，使得对某个 $k \in \mathbb{N}$ 和 $L > 2$, 存在 $\phi \in C_c^1(\mathbb{R}^k)$ 和 $g_1, ..., g_k \in H^L(\mathbb{L}^2;\mathbb{R}^2) \cap H =: H^L$，使得

$$\Phi(u) = \phi((u,g_1)_{L^2}, ..., (u,g_k)_{L^2})$$

对所有 $u \in H$。特别是 $\mathcal{T} \subset C_b(H_w)$。这类泛函 Φ 也可根据链式法则进行弗雷歇可微，其在某个 $u \in H$处的弗雷歇导数 $\Phi'(u)$可与函数 $\sum_{j=1}^k \partial_j\phi((u,g_1)_{L^2}, ..., (u,g_k)_{L^2})g_j$in H^L相对应。

作为 $L > 2$, 我们注意到，考虑二维情形时，我们有嵌入 $H^L \hookrightarrow C^{1,\beta}$ $0 < \beta < 1$ $\nabla\Phi'(u) \in C^{0,\beta}(\mathbb{L}^2;\mathbb{R}^2) \subset L^\infty(\mathbb{L}^2;\mathbb{R}^2)$, 其中某个值使得 $\Phi(\cdot), \Phi'(u) \in H$。对于 $g_1, ..., g_k \in H^L$，我们还将经常使用记号 $(u,g)_{L^2}^k := ((u,g_1)_{L^2}, ..., (u,g_k)_{L^2}) \in \mathbb{R}^k$。

$\mathcal{T}$中的泛函称为柱状测试泛函，因为对于 H 上的每个博雷尔测度 μ，都可以唯一地关联广义矩 $\{\int_H \Phi(u)\,\mathrm{d}\mu(u)\colon\ \Phi\in\mathcal{T}\}$. 例如，可以利用斯通-魏尔斯特拉斯定理 [6,注 2。7] 或单调类论证证明这一点。

鉴于（4）是我们在引言中形式化推导出的结果，现作如下定义。

定义 4（相空间统计解）。 设 $\overline{\mu}$ 是 H 上的博雷尔概率测度，使得

$$\int_H \|u_0\|_{L^2}^2\,\mathrm{d}\overline{\mu}(u_0)<\infty.$$

具有初始分布$\overline{\mu}$ 的（二维不可压）欧拉方程的相空间统计解 是 $\{\mu_t\}_{0\le t\le T}$ 这一族定义在 H 上的博雷尔概率测度，满足 $\mu_0=\overline{\mu}$ 且

i）对于每个 $\varphi\in C_b(H_w)$

$$t\mapsto\int_H\varphi(u)\,\mathrm{d}\mu_t(u)\tag{7}$$

是 $[0,T]$上的勒贝格可测映射；

ii）能量不等式

$$\int_H\|u\|_{L^2}^2\,\mathrm{d}\mu_t(u)\le\int_H\|u\|_{L^2}^2\,\mathrm{d}\overline{\mu}(u)\tag{8}$$

对几乎所有的 $0\le t\le T$都成立；

iii) 对任意 $\Phi\in\mathcal{T}$，每个 $0\le t'\le t\le T$, $\{\mu_t\}_{0\le t\le T}$ 都满足 *Foiaş-Liouville*方程

$$\int_H\Phi(u)\,\mathrm{d}\mu_t(u)=\int_H\Phi(u)\,\mathrm{d}\mu_{t'}(u)+\int_{t'}^t\int_H(\nabla\Phi'(u),u\otimes u)_{L^2}\,\mathrm{d}\mu_s(u)\,\mathrm{d}s.\tag{9}$$

备注 1. 这里我们选择 H_w 作为相空间统计解这一概念的相空间，并将轨道统计解定义为 $C([0,T];\ H_w)$ 上的测度。与 *[85],* 中的做法一样，改用某个负阶索博列夫空间 $H^{-s}(\mathbb{T}^2;\ \mathbb{R}^2)$ $s>2$ 也同样可行且自然。我们在此选择了 H_w，因为这样更便于与稍后将要介绍的基于矩的统计解进行比较。

下面的定理说明轨道统计解以何种方式对应于相空间统计解。其证明可参照 [41, 第 3] 章（另见 [6, 85]）。

定理10。 设 $\overline{\mu}$ 是定义在 H 上的博雷尔概率测度，且 μ 是具有初始分布 $\overline{\mu}$的欧拉方程的轨道统计解。那么，推前测度族 $\{\mu_t:=\Pi_{t\sharp}\mu\}_{0\le t\le T}$ 是相空间中具有初始分布$\overline{\mu}$的欧拉方程的统计解。

此时，我们也更严格地描述一下 Hopf 统计方程。与推导 Foiaş-Liouville方程 (4) 时的讨论一样，给定定义在 H上的博雷尔概率测度，我们假设存在解算子 $\{S_t\}_{0\le t\le T}$，使得 $t\mapsto S_t u_0 \in C([0,T];\, H_w)$是具有初始数据 $u_0\in H$的欧拉方程的弱解。于是， $\overline{\mu}$ 的演化自然由定义在 H_w上的推前测度 $\mu_t := S_{t\sharp}\overline{\mu},\ 0\le t\le T$ 描述。它们的特征泛函为

$$\mathcal{F}(t,v)=\int_H \exp(i(u,v)_{L^2})\,\mathrm{d}\mu_t(u)=\int_H \exp(i(S_t u_0,v)_{L^2})\,\mathrm{d}\overline{\mu}(u_0)$$

$\mathcal{F}$ 的演化可以描述如下

$$\begin{aligned}\partial_t\mathcal{F}(t,v)&=\int_H i(\partial_t S_t u_0,v)_{L^2}\exp(i(S_t u_0,v)_{L^2})\,\mathrm{d}\overline{\mu}(u_0)\\&=\int_H i(S_t u_0\otimes S_t u_0,\nabla v)_{L^2}\exp(i(S_t u_0,v)_{L^2})\,\mathrm{d}\overline{\mu}(u_0)\\&=\int_H i(u\otimes u,\nabla v)_{L^2}\exp(i(u,v)_{L^2})\,\mathrm{d}\mu_t(u)\end{aligned}\tag{10}$$

对几乎处处的 $0\le t\le T$ 和 $v\in H^L$ 成立。若 μ_t 关于 $\|\cdot\|_{L^2}$ 具有有限二阶矩，则右端项定义良好。我们用 $\mathcal{C}$ 表示具有此性质的定义在 H 上的博雷尔概率测度的特征泛函集合。接着，我们在 $\mathcal{C}$ 上引入算子 B，使得 $B(\chi)\colon H\to H^{-L}:=(H^L)'$ 由下式给出

$$(B(\chi)w,v)_{H^{-L},H^L}=\int_H i(u\otimes u,\nabla v)_{L^2}\exp(i(u,w)_{L^2})\,\mathrm{d}\mu(u)$$

对所有 $w\in H$ 和 $v\in H^L$ 均成立，其中 $\chi\in\mathcal{C}$ 是测度 μ 的特征泛函。

于是我们可以将式 (10) 改写为

$$\partial_t\mathcal{F}(t,v)=(B\mathcal{F}(t,v),v)_{H^{-L},H^L},\tag{11}$$

我们将其称为欧拉方程的泛函形式的 ***Hopf*统计方程**（二维不可压缩情形）。或者，若要更贴近 Hopf 最初的形式化考量，也可以研究坐标形式。这里指的是，相对于 H的某个固定正交归一基（在我们的情形中记为 $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}\subset C^\infty(\mathbb{T}^2)\cap H$）来描述傅里叶系数。我们将某个 $v\in H$ 的傅里叶系数记为 $\hat{v}_n:=(v,\varphi_n)_{L^2},\ n\in\mathbb{N}$，更具体地，将$S_t u_0$的傅里叶系数记为 $w_n(t,u_0)$，于是 $S_t u_0=\sum_{n=1}^\infty w_n(t,u_0)\varphi_n$，并且

$$\mathcal{F}(t,v)=\int_H \exp\left(i\sum_{n=1}^\infty w_n(t,u_0)\hat{v}_n\right)\mathrm{d}\overline{\mu}(u_0).$$

于是，由 (10) 可得

$$\begin{aligned}\partial_t \mathcal{F}(t,v) &= \int_H i \sum_{j,k,m=1}^{\infty} a_{jkm} w_j(t,u_0) w_k(t,u_0) \hat{v}_m \exp\left(i \sum_{n=1}^{\infty} w_n(t,u_0)\hat{v}_n \right) \mathrm{d}\overline{\mu}(u_0) \\ &= \sum_{j,k,m=1}^{\infty} -i a_{jkm} \hat{v}_m \partial_{\hat{v}_j \hat{v}_k} \mathcal{F}(t,v),\end{aligned} \tag{12}$$

其中 $a_{jkm} \coloneqq (\varphi_j \otimes \varphi_k, \nabla \varphi_m)_{L^2}, j, k, m \in \mathbb{N}$。接下来

$$\partial_t \mathcal{F}(t,v) = \sum_{j,k,m=1}^{\infty} -i a_{jkm} \hat{v}_m \partial_{\hat{v}_j \hat{v}_k} \mathcal{F}(t,v) \tag{13}$$

称为（二维不可压）欧拉方程坐标形式的 Hopf 统计方程。

正如这里可能显而易见的，要为 Hopf 统计方程的泛函形式或坐标形式赋予精确含义，都相当不便。鉴于 Foiaş-Liouville方程的推导与相空间统计解的推导相似，后者实际上导出 Hopf 统计方程的解，或许并不令人意外。针对欧拉方程的情形，我们陈述以下结果；它与 Foiaş 对纳维–斯托克斯方程所作的考察类似 [39, 第 9 节，定理 1], [40, 第 V.1.3、V.2.4] 节。坐标形式另见 Ladyzhenskaya 和 Vershik 的 [82, 定理 2] 。

定理 11。 设 $\overline{\mu}$ 是 H 上的博雷尔概率测度，且满足

$$\int_H \|u_0\|_{L^2}^2 \, \mathrm{d}\overline{\mu}(u_0) < \infty.$$

假设 $\{\mu_t\}_{0 \le t \le T}$ 是相空间中欧拉方程的一个统计解，其初始分布为 $\overline{\mu}$ ，并分别用 $\overline{\mathcal{F}}$ 和 $\mathcal{F} = \{\mathcal{F}(t, \cdot)\}_{0 \le t \le T}$表示 $\overline{\mu}$ 和$\{\mu_t\}_{0 \le t \le T}$的特征泛函。

则 $\mathcal{F}$ 满足 *Hopf*统计方程的泛函形式，具体而言，

$$\mathcal{F}(t,v) = \overline{\mathcal{F}}(v) + \int_0^t (B\mathcal{F}(s,v), v)_{H^{-L}, H^L} \, \mathrm{d}s \tag{14}$$

对所有 $v \in H^L$ 以及每个 $0 \le t \le T$ 均成立。

定理 11 的证明中我们在此省略的主要部分是：对于固定的 $v \in H^L$，相空间统计解表述中的可容许泛函类 $\mathcal{T}$ 可以扩展为还包括 $u \mapsto \exp(i(u,v)_{L^2})$。这可以通过标准的截断论证以及对相关空间 H and H^L 的复化来实现。

对于我们在引言中提到的第三种统计解概念，我们首先将 {style id='1'>相关测度 </style} 定义为 [33]，中引入的形式，但仅考虑 L^2 情形。我们引入以下（依赖于时间的）Carathéodory函数集合

$$\mathcal{H}_0^k(\mathbb{R}^2;\mathbb{R}^2) := L^1((\mathbb{R}^2)^k; C_0((\mathbb{R}^2)^k)),$$
$$\mathcal{H}_0^k([0,T],\mathbb{R}^2;\mathbb{R}^2) := L^1([0,T]\times(\mathbb{R}^2)^k; C_0((\mathbb{R}^2)^k)))$$

及其各自的对偶空间

$$\mathcal{H}_0^{k*}(\mathbb{R}^2;\mathbb{R}^2) := L^\infty_{\mathrm{w}}((\mathbb{R}^2)^k; \mathcal{M}((\mathbb{R}^2)^k))),$$
$$\mathcal{H}_0^{k*}([0,T],\mathbb{R}^2;\mathbb{R}^2) := L^\infty_{\mathrm{w}}([0,T]\times(\mathbb{R}^2)^k; \mathcal{M}((\mathbb{R}^2)^k)))$$

对每个 $k\in\mathbb{N}$，其中 $\mathcal{M}$ 表示相应空间上所有有界 Radon测度的集合。下标 w 表示弱-*可测性，如第2.1节所述。

定义 5. 相关测度是由映射 $\boldsymbol{\nu}=(\nu^1,\nu^2,\dots)$ $\nu^k\in\mathcal{H}_0^{k*}(\mathbb{R}^2;\mathbb{R}^2)$ 组成的集合，满足以下性质：

1. 弱-*可测性：每个 ν^k 都是一个杨测度，即对每个 $f\in C_0((\mathbb{R}^2)^k)$，映射

$$x\mapsto\langle\nu_x^k, f(\xi)\rangle := \int_{(\mathbb{R}^2)^k} f(\xi)\,\mathrm{d}\nu_x^k(\xi)$$

在 $(\mathbb{R}^2)^k$ 上可测。

2. L^2-有界性：$\int_{\mathbb{R}^2}\langle\nu_x^1,|\xi|^2\rangle\,dx<\infty$。

3. 对称性：对于 $\{1,\dots,k\}$ 和 $f\in C_0$ 的每个置换 $\pi((\mathbb{R}^2)^k)$，都有

$$\begin{aligned}\langle\nu^k_{\pi(x)}, f(\pi(\xi))\rangle &:= \langle\nu^k_{x_{\pi(1)},\dots,x_{\pi(k)}}, f(\xi_{\pi(1)},\dots,\xi_{\pi(k)})\rangle\\ &= \langle\nu_x^k, f(\xi)\rangle\end{aligned}$$

对几乎处处的 $x\in(\mathbb{R}^2)^k$。

4. 一致性：设 $f\in C_0$ $g\in C_0$ $f(\xi_1,\dots,\xi_k)=g(\xi_1,\dots,\xi_{k-1})$ $\xi\in$ $((\mathbb{R}^2)^k)$，并假设存在某个 $((\mathbb{R}^2))$，使得对于所有 $(\mathbb{R}^2)$，都有 $(,,)(,,)$

$$\langle\nu^k_{x_1,\dots,x_k}, f(\xi_1,\dots,\xi_k)\rangle = \langle\nu^{k-1}_{x_1,\dots,x_{k-1}}, g(\xi_1,\dots,\xi_{k-1})\rangle$$

对几乎处处的 $x\in(\mathbb{R}^2)^k$。

5. 对角连续性：$\lim_{r\to0}\omega_r^2(\nu^2)=0$，其中我们定义连续性模量

$$\omega_r^2(\nu^2) := \int_{\mathbb{R}^2}\fint_{B_r(x)}\langle\nu^2_{x,y},|\xi_1-\xi_2|^2\rangle\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x.$$

每个映射 ν^k 称为一个相关边缘，所有相关测度的集合记为 $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^2;\mathbb{R}^2)$。

相关测度 $\boldsymbol{\nu}$ 的含义在于描述一个流的所有多点相关性，即：设 $\mathcal{F}$为一组速度场， $V_1, ..., V_k \subset \mathbb{R}^2$可测，且 $x = (x_1, ..., x_k) \in (\mathbb{T}^2)^k$，则

$$\nu_x^k(V_1 \times ... \times V_k) = \text{Probability}\big(\{u \in \mathcal{F} : u(x_1) \in V_1, ..., u(x_k) \in V_k\}\big).$$

这将在定理 12 中得到更精确的说明。

对于时变相关测度，我们按照 [34, 36]作如下调整。

定义 6. 时变相关测度 是由映射组成的集合 $\boldsymbol{\nu} = (\nu^1, \nu^2, ...)$ $\nu^k \in \mathcal{H}_0^{k*}([0,T], \mathbb{T}^2; \mathbb{R}^2)$，满足以下性质：

1. $(\nu_t^1, \nu_t^2, ...) \in \mathcal{L}^2(\mathbb{T}^2; \mathbb{R}^2)$ 对几乎处处的 $0 \le t \le T$ 成立。
2. L^2-有界性：本质上确界$_{0 \le t \le T} \int_{\mathbb{T}^2} \langle \nu_{t,x}^1, |\xi|^2 \rangle \, \mathrm{d}x < \infty$。
3. 对角连续性：

$$\lim_{r \to 0} \int_0^T \omega_r^2(\nu_t^2) \, \mathrm{d}t = 0. \tag{15}$$

所有这类时变相关测度的集合记为 $\mathcal{L}^2([0,T], \mathbb{T}^2; \mathbb{R}^2)$。

相关测度最简单的例子是所谓的原子相关测度，其中我们考虑一个给定函数 $u \in L^\infty(0,T; L^2(\mathbb{T}^2; \mathbb{R}^2))$，并将 $\boldsymbol{\nu} = (\nu^1, \nu^2, ...)$ 定义为如下乘积测度层级

$$\nu_{t,x_1,...,x_k}^k = \delta_{u(t,x_1)} \otimes ... \otimes \delta_{u(t,x_k)}.$$

事实上， [33] 中指出，由对角连续性可知，给定一个杨测度 $\{\nu_x\}_{x \in \mathbb{T}^2}$，乘积测度序列 $(\nu_x, \nu_x \otimes \nu_y, ...)$ 构成相关测度，当且仅当 $\{\nu_x\}_{x \in \mathbb{T}^2}$ 是狄拉克Young测度。

类似于双曲守恒律的情形 [33] ，我们现在基于相关测度的演化，或者换言之，矩的演化，推导出欧拉方程统计解的概念。矩的演化意味着状态空间 $\mathbb{R}^2$ 中乘积的演化。为此，对于每个 $k \in \mathbb{N}$，我们宽松地使用张量积空间 $(\mathbb{R}^2)^{\otimes k}$ 的概念。在 $(\mathbb{R}^2)^{\otimes k}$ 上，乘积 : 定义为

$$\eta : \zeta := (\eta_1 \cdot \zeta_1)...(\eta_k \cdot \zeta_k) \in \mathbb{R} \tag{16}$$

对所有 $\eta = \eta_1 \otimes ... \otimes \eta_k, \zeta = \zeta_1 \otimes ... \otimes \zeta_k \in (\mathbb{R}^2)^{\otimes k}$ 均成立。由于右侧在式 (16) 中具有多重线性，因此定义良好。同样，我们在 $(\mathbb{R}^{2\times 2})^{\otimes k}$ 中定义 :，并定义 $\mathbb{R}^2$ 与 $\mathbb{R}^{2\times 2}$ 之间的混合张量积空间，此时我们将点积 $\cdot$ 解释为矩阵之间的弗罗贝尼乌斯内积。

现在假设 ose $u: [0,T] \times \mathbb{T}^2 \to \mathbb{R}^2$ 是欧拉方程的一个经典解，其

压力 $p\colon [0,T]\times \mathbb{T}^2 \to \mathbb{R}$，初始数据为 $u(0)=u_0\in C^1(\mathbb{T}^2;\mathbb{R}^2)\cap H$。我们形式上使用乘积法则演化以下张量积：

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}(u(t,x_1)\otimes ...\otimes u(t,x_k))\\
=&\sum_{i=1}^{k} u(t,x_1)\otimes ...\otimes \partial_t u(t,x_i)\otimes ...\otimes u(t,x_k)\\
=&-\sum_{i=1}^{k} u(t,x_1)\otimes ...\otimes [\operatorname{div}(u(t,x_i)\otimes u(t,x_i))+\nabla p(t,x_i)]\otimes ...\otimes u(t,x_k).
\end{aligned} \tag{17}$$

为了在分布的意义下解释这个方程，令 $\theta\in C_c^1([0,T))$ 和 $g_1,...,g_k\in H^L$，并设

$$g(x)=g_1(x_1)\otimes ...\otimes g_k(x_k),\quad x=(x_1,...,x_k)\in (\mathbb{T}^2)^k.$$

然后，由 (17) 可进一步推导得出

$$\begin{aligned}
&-\int_0^T\int_{(\mathbb{T}^2)^k} \theta'(t)g(x):(u(t,x_1)\otimes ...\otimes u(t,x_k))\\
&\qquad+\sum_{i=1}^{k}\theta(t)\nabla_{x_i}g(x):(u(t,x_1)\otimes ...\otimes [u(t,x_i)\otimes u(t,x_i)]\otimes ...\otimes u(t,x_k))\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}t\\
=&\int_{(\mathbb{T}^2)^k}\theta(0)g(x):(u_0(x_1)\otimes ...\otimes u_0(x_k))\ \mathrm{d}x,
\end{aligned} \tag{18}$$

其中，对于每个 $i=1,...,k$，$\nabla_{x_i}g(x)=g_1(x_1)\otimes ...\otimes \nabla_{x_i}g_i(x_i)\otimes ...\otimes g_k(x_k)$。

假设 u 属于 $L^\infty(0,T;H)$ 且 u_0 属于 H，现在考虑由下式给出的原子相关测度 $\boldsymbol{\nu}=(\nu^1,\nu^2,...)$、$\overline{\boldsymbol{\nu}}=(\overline{\nu}^1,\overline{\nu}^2,...)$

$$\nu_{t,x}^k=\delta_{u(t,x_1)}\otimes ...\otimes \delta_{u(t,x_k)},\quad \overline{\nu}_x^k=\delta_{u_0(x_1)}\otimes ...\otimes \delta_{u_0(x_k)}$$

对于所有 $k\in\mathbb{N}$、$0\le t\le T$ 以及 $x=(x_1,...,x_k)\in(\mathbb{T}^2)^k$。然后，我们可以将 (18) 重写为

$$\begin{aligned}
&-\int_0^T\int_{(\mathbb{T}^2)^k}\langle \nu_{t,x}^k,\theta'(t)g(x):(\xi_1\otimes ...\otimes \xi_k)\rangle\\
&\qquad+\sum_{i=1}^{k}\langle \nu_{t,x}^k,\theta(t)\nabla_{x_i}g(x):(\xi_1\otimes ...\otimes [\xi_i\otimes\xi_i]\otimes ...\otimes \xi_k)\rangle\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}t\\
=&\int_{(\mathbb{T}^2)^k}\langle \overline{\nu}_x^k,\theta(0)g(x):(\xi_1\otimes ...\otimes \xi_k)\rangle\ \mathrm{d}x.
\end{aligned} \tag{19}$$

在下文中，我们通常会把不依赖于 ξ in $\langle\nu_x,...\rangle$ 的因子写在括号外。

我们现在注意到，解不再显式出现在 (19) 中，因此可以将其用作定义方程。不过，这样做的代价是需要严格的

可积性条件，才能确保 (19) 通常是良定义的。因此，Following[36], 我们引入了另外两类函数，它们与 $\mathcal{H}_0^k$ 类似，之后也会在定理 17 中使用。

对于每个 $k \in \mathbb{N}$、 $\alpha \in \{0,1\}^k$ 和 $x \in (\mathbb{T}^2)^k$，我们定义 $\overline{\alpha} := (1-\alpha_1, ..., 1-\alpha_k)$、$|\alpha| := \alpha_1 + ... + \alpha_k$，而 $x_\alpha \in (\mathbb{T}^2)^{|\alpha|}$ 由 x 中满足 $\alpha_i = 1$ 的那些项 x_i 构成。此外，对于每个 $i = 1, ..., k$，我们定义 $\hat{}x^i := (x_1, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_k) \in (\mathbb{T}^2)^{k-1}$。于是，对于每个 $k \in \mathbb{N}$，空间 $\mathcal{H}^{k,2}([0,T], \mathbb{T}^2; \mathbb{R}^2)$ 由所有可测函数 $f\colon [0,T] \times (\mathbb{T}^2)^k \times (\mathbb{R}^2)^k \to \mathbb{R}$ 组成，且这些函数满足：对于几乎处处的 $(t,x) \in [0,T] \times (\mathbb{T}^2)^k$， $\xi \mapsto f(t,x,\xi)$ 连续，并且

$$|f(t,x,\xi)| \le \sum_{\alpha \in \{0,1\}^k} \varphi_{|\overline{\alpha}|}(t, x_{\overline{\alpha}}) |\xi^\alpha|^2, \quad (t,x) \in [0,T] \times (\mathbb{T}^2)^k, \quad \xi \in (\mathbb{R}^2)^k$$

对于非负的 $\varphi_i \in L^\infty(0,T;\, L^1((\mathbb{T}^2)^i))$ $i = 0, 1, ..., k$（约定 $L^1((\mathbb{T}^2)^0) = \mathbb{R}$）.

那么， $\mathcal{H}^{k,2\,1}([0,T], \mathbb{T}^2; \mathbb{R}^2)$ 是函数空间 $f \in \mathcal{H}^{k,2}([0,T], \mathbb{T}^2; \mathbb{R}^2)$ 的子空间，其中的函数满足利普希茨条件，也就是说，存在某个 $r > 0$，以及非负的 $h \in \mathcal{H}^{k-1,2}([0,T], \mathbb{T}^2; \mathbb{R}^2)$ $\tilde{h} \in \mathcal{H}^{k,2}([0,T], \mathbb{T}^2; \mathbb{R}^2)$ $\psi \in L^\infty(0,T)$，使得

$$|f(t,x,\xi) - f(t,x,\zeta)| \le \sum_{i=1}^k \psi(t) |\xi_i - \zeta_i| \max\{|\xi_i|, |\zeta_i|\} h(t, \hat{x}^i, \hat{\xi}^i) + \mathcal{O}(|x-y|) \tilde{h}(t,x,\xi) \tag{20}$$

对所有 $x \in (\mathbb{T}^2)^k, y \in B_r(x)$ $\xi, \zeta \in (\mathbb{R}^2)^k$ 均成立。在时间无关的情形下， $\mathcal{H}^{k,2}(\mathbb{T}^2; \mathbb{R}^2)$ 以显然类似的方式定义。除这些定义外，我们不再进一步讨论这些函数空间。注意，(19) 中的每个被积函数都属于 $\mathcal{H}^{k,2}([0,T], \mathbb{T}^2; \mathbb{R}^2)$（回忆一下， $H^L \hookrightarrow C^{1,\beta}(\mathbb{T}^2; \mathbb{R}^2)$），并且我们称相关测度 $\boldsymbol{\nu}$ 具有可积的 $\mathcal{H}^{\cdot,2}$ 矩，若对于每个 $k \in \mathbb{N}$ 和 $f \in \mathcal{H}^{k,2}([0,T], \mathbb{T}^2; \mathbb{R}^2)$, $\langle \nu_t^k, x, f \rangle$ 在 $[0,T] \times (\mathbb{T}^2)^k$ 上可积（在时间无关的情形下，或简写为 $(\mathbb{T}^2)^k$）。

定义 7. 设 $\overline{\boldsymbol{\nu}} \in \mathcal{L}^2(\mathbb{T}^2; \mathbb{R}^2)$ 是一个具有可积 $\mathcal{H}^{\cdot,2}$ 矩的相关测度。具有可积 $\mathcal{H}^{\cdot,2}$ 矩的时间依赖相关测度 $\boldsymbol{\nu} \in \mathcal{L}^2([0,T], \mathbb{T}^2; \mathbb{R}^2)$ 称为具有初始相关测度 $\overline{\boldsymbol{\nu}}$ 的（二维不可压缩）欧拉方程的基于矩的统计解，如果

i) 对所有 $\psi \in C^\infty(\mathbb{T}^2)$，均有

$$\int_{(\mathbb{T}^2)^2} \langle \nu^2_{t,x_1,x_2}, \xi_1 \otimes \xi_2 \rangle : (\nabla\psi(x_1) \otimes \nabla\psi(x_2)) \, \mathrm{d}x = 0 \tag{21}$$

对几乎处处的 $0 \le t \le T$,

ii) 能量不等式

$$\int_{\mathbb{T}^2} \langle \nu^1_{t,x}, |\xi|^2 \rangle \, \mathrm{d}x \le \int_{\mathbb{T}^2} \langle \overline{\nu}^1_x, |\xi|^2 \rangle \, \mathrm{d}x \tag{22}$$

对几乎处处的 $0 \le t \le T$ 成立,

iii) 对于每个 $k \in \mathbb{N}$，方程 (19) 由 $\boldsymbol{\nu}$ 满足，对所有 $\theta \in C_c^1([0,T))$ 以及 $g(x) = g_1(x_1) \otimes ... \otimes g_k(x_k)$ $x = (x_1, ..., x_k) \in (\mathbb{L}^2)^k$，其中 $g_1, ..., g_k \in H^L$。

(21) 中的被积函数可以看作散度的平方。因此，上述定义中的性质 i) 是一种弱无散条件，具体说明见引理 1。

给定函数 $u \in L^\infty(0,T;\ H)$ 和 $u_0 \in H$，不难看出，u 是具有初始数据 u_0 的欧拉方程弱解，当且仅当相应的原子相关测度 $(\delta_{u(t,x)}, \delta_{u(t,x)} \otimes \delta_{u(t,y)}, ...)$ 是具有初始相关测度 $(\delta_{u_0(x)}\ \delta_{u_0(x)} \otimes \delta_{u_0(y)}\ ...)$ 的基于矩的统计解。这是因为对于 $k = 1$，(19) 只是欧拉方程的弱形式，(22) 等价于能量不等式；并且我们注意到，欧拉方程的任何弱解 $u \in L^\infty(0,T;\ H)$ 已经属于 $C([0,T];\ H_w)$（更准确地说，或者说它有一个取值于该空间的代表元）。

现在我们将说明定义 4 中的相空间统计解与刚刚引入的定义 7 中基于矩的统计解等价。在纳维–斯托克斯方程的背景下，[36] 已证明这一点。其核心工具是相关测度的主定理 [33, 定理2.7]，此处我们将陈述其更一般的含时版本 [34, 定理2.20]。

定理 12. 设 $\boldsymbol{\nu} \in \mathcal{L}^2([0,T], \mathbb{L}^2; \mathbb{B}^2)$ 为一个含时相关测度。除一个勒贝格零测集外，存在一族定义在 $L^2(\mathbb{L}^2; \mathbb{B}^2)$ 上的博雷尔概率测度 $\{\mu_t\}_{0\le t\le T}$，使得

i) 映射

$$t \mapsto \int_{L^2} \int_{(\mathbb{L}^2)^k} h(x, u(x))\ \mathrm{d}x\, \mathrm{d}\mu_t(u) \tag{23}$$

对所有 $h \in \mathcal{H}_0^k(\mathbb{L}^2; \mathbb{B}^2)$ 均为可测，

ii) 关于 $\|\cdot\|_{L^2}$ 的二阶矩关于时间一致有界，即

$$\operatorname*{ess\,sup}_{0\le t\le T} \int_{L^2} \|u\|_{L^2}^2\, \mathrm{d}\mu_t(u) < \infty, \tag{24}$$

iii) 恒等式

$$\int_{(\mathbb{L}^2)^k} \langle \nu_t^k, h(x,\xi)\rangle\ \mathrm{d}x = \int_{L^2} \int_{(\mathbb{L}^2)^k} h(x, u(x))\ \mathrm{d}x\, \mathrm{d}\mu_t(u) \tag{25}$$

对几乎处处的 $t \in [0,T]$、任意 $h \in \mathcal{H}_0^k(\mathbb{L}^2; \mathbb{B}^2)$ 以及所有 $k \in \mathbb{N}$ 均成立。

反过来，对于满足 *i)* 和 *ii)* 的每个族，都存在唯一的相关测度 $\boldsymbol{\nu} \in \mathcal{L}^2([0,T], \mathbb{L}^2; \mathbb{B}^2)$ 满足 *iii)*。

因此，我们可以将基于矩的统计解与欧拉方程的相空间统计解之间的等价性表述如下。

定理 13. 设 $\overline{\mu}, \{\mu_t\}_{0\le t\le T}$ 是 H 上的博雷尔概率测度，并假设存在 $R>0$，使得

$$\operatorname{supp}\overline{\mu}, \operatorname{supp}\mu_t \subset B_R^H \tag{26}$$

对几乎处处的 $t\in[0,T]$。此外，令 $\{\mu_t\}_{0\le t\le T}$满足(24) 以及以下等价的可测性条件之一：(23) 或(7) （见引理 *2*）。
若考虑相应的相关测度 $\boldsymbol{\overline{\nu}}\in\mathcal{L}^2(\mathbb{L}^2;\mathbb{B}^2)$ 和 $\boldsymbol{\nu}\in\mathcal{L}^2([0,T],\mathbb{L}^2;\mathbb{B}^2)$，那么 $\boldsymbol{\nu}$ 是具有初始相关测度 $\boldsymbol{\overline{\nu}}$ 的欧拉方程的基于矩的统计解，当且仅当（在勒贝格零测集上重新定义后）$\{\mu_t\}_{0\le t\le T}$是具有初始分布 $\overline{\mu}$的欧拉方程的相空间统计解。

注 2. 由能量不等式可知，具有有界支撑初始分布（在H 中）的轨道统计解所导出的欧拉方程相空间统计解，在 H 中具有一致有界支撑。一般而言，这一点尚不明确，而且也未必需要如此。

可以证明， L^2上的博雷尔概率测度（$\mathbb{L}^2;\mathbb{B}^2$）集中于 $L^2(\mathbb{L}^2;\mathbb{B}^2)$ 的闭子集 H（因而该子集可测），等价于相应的相关测度满足 (21)。

引理 1. *([66,* 引理 *3.1])* 设 μ 是 $L^2(\mathbb{L}^2;\mathbb{B}^2)$上的博雷尔概率测度，对应于相关测度 $\boldsymbol{\nu}\in\mathcal{L}^2(\mathbb{L}^2;\mathbb{B}^2)$。那么， μ 集中于 H 当且仅当(21) 成立。

此外，定理 12 中的可测性条件 i) 与定义 4 中的可测性条件 i) 等价。

引理 2. 设 $\{\mu_t\}_{0\le t\le T}$ 是 H上的博雷尔概率测度族。则下列条件等价：

i) 映射

$$t\mapsto\int_H\int_{(\mathbb{L}^2)^k} h(x,u(x))\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\mu_t(u) \tag{27}$$

对于所有 $h\in\mathcal{H}_0^k(\mathbb{L}^2;\mathbb{B}^2)$ 以及所有 $k\in\mathbb{N}$均可测。

ii) 映射

$$t\mapsto\int_H\varphi(u)\,\mathrm{d}\mu_t(u) \tag{28}$$

对所有 $\varphi\in C_b(H_w)$ 均可测。

与 [36]，类似，我们采用单调类论证（例如参见[60,定理 A.1]）。

定理 14. 设 W 是集合 Ω 上的有界实值函数构成的向量空间，其中包含常函数，并且在有界单调收敛下封闭。若 M 是 W 的一个子集，且对乘法封闭，则 W 包含所有关于由M生成的 Ω 上的 σ-代数可测的有界函数。

我们还将使用 [33, 引理 2.10]中的以下结果。

引理 3. 对于每个 $h \in \mathcal{H}_0^k(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}^2)$ 以及 $k \in \mathbb{N}$，函数

$$u \mapsto \int_{(\mathbb{R}^2)^k} h(x, u(x)) \, \mathrm{d}x \tag{29}$$

在 H上连续。

在下面引理 2 的证明中，我们令 $(\mathcal{J}_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ 为与一族标准磨光函数相对应的平滑算子族。

引理 *2* 的证明。 我们先假设 ii)。然后，令 $k \in \mathbb{N}$ $h \in \mathcal{H}_0^k(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}^2)$，并定义

$$\varphi(u) \coloneqq \int_{(\mathbb{R}^2)^k} h(x, u(x)) \, \mathrm{d}x, \quad u \in H$$

以及

$$\varphi_\varepsilon(u) \coloneqq \varphi(\mathcal{J}_\varepsilon u) = \int_{(\mathbb{R}^2)^k} h(x, \mathcal{J}_\varepsilon u(x)) \, \mathrm{d}x, \quad u \in H,$$

对每个 $\varepsilon > 0$。注意，只要 $u^n \rightharpoonup u (n \to \infty)$ 属于 H，那么 $\mathcal{J}_\varepsilon u^n \to \mathcal{J}_\varepsilon u (n \to \infty)$ 在 $\mathbb{R}^2$ 上逐点成立。由于 h 关于第二个变量连续，控制收敛定理得出 $\varphi_\varepsilon \in C_b(H_w)$。特别地，

$$t \mapsto \int_H \varphi_\varepsilon(u) \, \mathrm{d}\mu_t(u)$$

是可测的。
由引理 3 可知， φ 关于 $\|\cdot\|_{L^2}$ 连续；又由于对任意 $u \in H$， $\mathcal{J}_\varepsilon u \to u (\varepsilon \to 0)$在 H 中收敛，因此我们得到 $\varphi_\varepsilon \to \varphi (\varepsilon \to 0)$在 H上逐点收敛。然后，根据控制收敛定理， $t \mapsto \int_H \varphi(u) \, \mathrm{d}\mu_t(u)$作为可测函数列的几乎处处逐点极限，是可测的。

现在假设 i) 成立，并证明其逆命题。为应用定理 14，我们考虑 $\Omega = H$, W 为有界博雷尔可测函数 $\Psi \colon H \to \mathbb{R}$的集合，其中$t \mapsto \int_H \Psi(u) \, \mathrm{d}\mu_t(u)$是可测的；并令 M为所有满足式 (29) 的函数构成的空间，其中 $h \in \mathcal{H}_0^k(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}^2)$，且对所有$k \in \mathbb{N}$均成立。我们的假设 i) 恰好保证了$M \subset W$。

可以证明，按照这些定义，定理 14 的假设均得到满足。我们将由 M 生成的 σ-代数记作 $\mathcal{A}$。

对于任意固定的 $u_0 \in H$，通过考虑光滑截断函数 $\chi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$，可以利用近似 $(x, \xi) \mapsto |\xi - u_0(x)|\chi(\xi) \in \mathcal{H}_0^1(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}^2)$ 证明 $u \mapsto \int_{\mathbb{R}^2} |u(x) - u_0(x)|^2 \, \mathrm{d}x = \|u - u_0\|_{L^2}^2$ 是 $\mathcal{A}$-可测的，因此， H 中的所有开球都是 $\mathcal{A}$-可测的。特别地， $\mathcal{A}$ 包含 H 上的 Borel-σ-代数。正如前文所述，后者也由 H_w 拓扑生成，因此任意 $\varphi \in C_b(H_w)$ 都属于 W，如所需。■

在最终证明定理 13 之前，我们先给出 Foiaş-Liouville 方程的一种等价表述，这种表述更便于与 (19) 进行比较。定义 4 中 (9) 的替代表述 (30) 几乎处处成立，其证明可参见 [38, §3 引理 5]。在勒贝格零测集上改变测度族，使 (9) 处处成立，可在一致有界支撑这一假设下按 [38, §3 定理 2] 的方法完成；我们在定理 13 中也采用了这一假设。

引理4. 设 $\overline{\mu}$ 和 $\{\mu_t\}_{0\le t\le T}$ 是 H 上的博雷尔概率测度，满足定义 *4* 中的 *i)* 和 *ii)*，并假设存在 $R>0$，使得对几乎处处的 $0\le t\le T$

$$\operatorname{supp}\overline{\mu}, \operatorname{supp}\mu_t \subset B_R^H.$$

那么，若（在一个勒贝格零测集上修改 $\{\mu_t\}_{0\le t\le T}$ 后）满足……，则定义 *4* 中的 *iii)* 成立；反之亦然

$$-\int_0^T \int_H \theta'(t)\Phi(u) + (u\otimes u, \theta(t)\nabla\Phi(u))_{L^2}\,\mathrm{d}\mu_t(u)\,\mathrm{d}t = \int_H \theta(0)\Phi(u_0)\,\mathrm{d}\overline{\mu}(u_0) \quad (30)$$

对所有 $\Phi\in\mathcal{T}$ 和 $\theta\in C_c^1([0,T))$。

定理 *13* 的证明。 由引理 1 和引理 2 可知，剩下只需证明 Foiaş-Liouville 方程的两种形式 (30) 和 (19) 等价，以及能量不等式 (8) 和 (22) 等价。不过，后者可由定理 12 以相当直接的方式推出。

首先，假设 $\{\mu_t\}_{0\le t\le T}$ 是一个初始分布为 $\overline{\mu}$ 且在 B_R^H 中具有一致有界支撑的相空间统计解。接下来证明 $\boldsymbol{\nu,\overline{\nu}}$ 满足 (19)。

令 $k\in$ g_1，……，以及 $g_k\in H^L$ 和 $\theta\in C_c^1([0,T))$，并考虑定义 7 iii) 中的 $g=g_1\otimes\ldots\otimes g_k$。对于光滑截断函数 $\chi\in C_c^\infty($ ^{k})，定义

$$p(s)=s_1\ldots s_k\chi(s),\quad s\in \ ^k,$$

使得 $p \in C_c^1(\mathbb{R}^k)$。利用 $\Phi(u) = p((u,g)_{L^2}^k)$，方程 (30) 可写为

$$
\begin{aligned}
&-\int_0^T \int_H \theta'(t) \prod_{j=1}^k (u,g_j)_{L^2} \chi((u,g)_{L^2}^k) \\
&\qquad + \left(u \otimes u, \theta(t) \sum_{i=1}^k \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^k (u,g_j)_{L^2} \nabla g_i \chi((u,g)_{L^2}^k) \right)_{L^2} \mathrm{d}\mu_t(u)\ \mathrm{d}t + \varepsilon(\chi) \\
&= \int_H \theta(0) \prod_{j=1}^k (u_0,g_j)_{L^2} \chi((u_0,g)_{L^2}^k)\, \mathrm{d}\overline{\mu}(u_0) \\
\Leftrightarrow &-\int_0^T \int_H \theta'(t) \prod_{j=1}^k (u,g_j)_{L^2} \chi((u,g)_{L^2}^k) \\
&+ \theta(t) \sum_{i=1}^k (u,g_1)_{L^2} \ldots (u,g_{i-1})_{L^2} (u \otimes u, \nabla g_i)_{L^2} (u,g_{i+1})_{L^2} \ldots (u,g_k)_{L^2} \chi((u,g)_{L^2}^k)\, \mathrm{d}\mu_t(u)\ \mathrm{d}t + \varepsilon(\chi) \\
&= \int_H \theta(0) \prod_{j=1}^k (u_0,g_j)_{L^2} \chi((u_0,g)_{L^2}^k)\, \mathrm{d}\overline{\mu}(u_0),
\end{aligned}
\tag{31}
$$

其中， $\varepsilon(\chi) = -\int_0^T \int_H (u \otimes u, \theta(t) \prod_{j=1}^k (u,g_j)_{L^2} \sum_{i=1}^k \partial_i \chi((u,g)_{L^2}^k) g_i)_{L^2}\, \mathrm{d}\mu_t(u)\ \mathrm{d}t$ 是依赖于 χ的误差项。然而，选取一列光滑截断函数$(\chi_n)_{n \in \mathbb{N}} \in C_c^\infty(\mathbb{R}^k)$，使得

$$
0 \le \chi_n \le 1, \chi_n \equiv 1 \text{ on } B_n^H \text{ and } \|\nabla \chi_n\|_{L^\infty} \le 1,
$$

支集的一致有界性(26)和控制收敛定理表明，(31)在极限下也成立，即不含 χ 和 $\varepsilon(\chi)$时也成立。我们特别用到了这一点：可以用常数乘以$\|\theta\|_{C^1} \max_{i=1,\ldots,k} \|g_i\|_{C^1}(1 + \|u\|_{L^2}^{k+2})$来控制(31)中的每个被积函数以及误差项 ε 。利用这一估计以及支集的一致有界性(26) $\{\mu_t\}_{0 \le t \le T}$ 和$\overline{\mu}$，还可以通过标准的截断论证证明，等式(25)可应用于上述积分。对(31)进行变换即可得到(19)。

现在假设 $\boldsymbol{\nu}$ 是一个以初始相关测度 $\overline{\boldsymbol{\nu}}$ 为初始条件的基于矩的统计解，并证明反过来的结论，即 $\{\mu_t\}_{0 \le t \le T}$ 是一个以初始分布 $\overline{\mu}$为初始条件的相空间统计解。

设 $\phi \in C_c^1(\mathbb{R}^k)$、 g_1、...、 $g_k \in H^L$ 和 $\theta \in C_c^1([0,T))$.
存在一个多元多项式序列 $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$，使得 $P_n \to \phi(\,)$ 属于 $(C^1_{\infty}[-l,l]^k)$（例如参见 [81]），其中我们将在稍后选取足够大的值。暂时固定 $l \ge 0$，并将 P_n 写成如下形式

$$
P_n(s) = \sum_{|\alpha| \le N} a_\alpha s_1^{\alpha_1} \ldots s_k^{\alpha_k},
$$

其中， $|\alpha|$ 表示多重指标 $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ 的阶数，$\in \mathbb{N}^k$ 和 $a_\alpha \in \mathbb{R}$ 是每个此类多重指标 α对应的实系数。

然后，我们可以演化这些矩（$|\alpha| \le N$）

$$(\xi_1 \otimes ... \otimes \xi_{\alpha_1}) \otimes ... \otimes (\xi_{|\alpha|-\alpha_k} \otimes ... \otimes \xi_{|\alpha|})$$

与.....进行检验

$$(g_1(x_1) \otimes ... \otimes g_1(x_{\alpha_1})) \otimes ... \otimes (g_k(x_{|\alpha|-\alpha_k}) \otimes ... \otimes g_k(x_{|\alpha|}))$$

根据（19）。我们也可以考虑这些方程的加权和 $\sum_{|\alpha|\le N}$。

（19）左端得到的第一个项

$$\int_0^T \int_{(\mathbb{I}^2)^k} \langle \nu_{t,x}^{|\alpha|}, \theta'(t)(\xi_1 \otimes ... \otimes \xi_{\alpha_1}) \otimes ... \otimes (\xi_{|\alpha|-\alpha_k} \otimes ... \otimes \xi_{|\alpha|}) \rangle : \\ : (g_1(x_1) \otimes ... \otimes g_1(x_{\alpha_1})) \otimes ... \otimes (g_k(x_{|\alpha|-\alpha_k}) \otimes ... \otimes g_k(x_{|\alpha|}))\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}t$$

通过（25）变换为

$$\int_0^T \int_H \theta'(t)(u, g_1)_{L^2}^{\alpha_1} ... (u, g_k)_{L^2}^{\alpha_k}\, \mathrm{d}\mu_t(u)\ \mathrm{d}t.$$

我们不再写出其他项，因为这样会变得相当繁琐；只需注意，所有项都可以类似地变换，使其乘以 a_α 并对$|\alpha| \le N$ 求和后得到

$$\begin{aligned} &-\int_0^T \int_H \theta'(t) P_n((u,g)_{L^2}^k) + \sum_{i=1}^k (u \otimes u, \theta(t)\partial_i P_n((u,g)_{L^2}^k)\nabla g_i)_{L^2}\, \mathrm{d}\mu_t(u)\ \mathrm{d}t \\ &\quad = \int_0^T \int_H \theta(0) P_n((u,g)_{L^2}^k)\, \mathrm{d}\overline{\mu}(u)\ \mathrm{d}t. \end{aligned} \tag{32}$$

由于以下原因，积分中 P_n 和 $\partial_i P_n$ 的自变量在欧几里得距离上有上界

$$|(u,g)_{L^2}^k| \le \sqrt{k} \max_{i=1,...,k} \|g_i\|_{L^2} \|u\|_{L^2}^k. \tag{33}$$

由于 μ_t，对几乎处处的 $0 \le t \le T$，且 $\overline{\mu}$在 B_R^H中有支撑，选取上文中的 $l = \sqrt{k}\max_{i=1,...,k}\|g_i\|_{L^2} R^k$，并利用在 $C^1([-l,l]^k)$ 中以 $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 对 ϕ 作一致逼近，令 $(n \to \infty)$ 趋于极限，得到 (30)。■

注 3。在上述定理 *13* 的证明中，由于多项式对紧支撑函数的一致逼近，似乎很难大幅放宽对 $\overline{\mu}$ 和 $\{\mu_t\}_{0\le t\le T}$ 具有一致有界支撑的假设。

3.2 统计解的构造

在本小节中，我们将对已有的几种方法加以评述并进行比较，这些方法可用于构造我们在前一部分中介绍的统计解。这里我们将重点讨论以下三种方法:

I) 时间参数测度逼近序列的紧性 ;

II）基于克莱因–米尔曼定理的离散近似;

III）可测选择与推前构造。

然而，我们至少想指出，对于（非自治）耗散动力系统，利用（拉回）吸引子理论和巴拿赫极限来构造统计解和定常统计解，有一种相当一般的方法。我们请读者参阅 Foiaş、Rosa 和 Teman 的一些工作 [42, 43],以及 Łukaszewicz 等人的工作。 [69, 71, 72], 另请参见 [70], Zhao 等人的工作。 [89, 90, 91]

对于上述每一种方法，我们都将概述如何应用它们来证明以下存在性结果。

定理 15。 设 $\overline{\mu}$ 是一个博雷尔概率测度，其满足 H

$$\int_H \|u_0\|_{H^1}^2 \,\mathrm{d}\overline{\mu}(u_0) < \infty. \tag{34}$$

那么，存在一个二维不可压缩欧拉方程的相空间统计解 $\{\mu_t\}_{0\le t\le T}$，其初始分布为$\overline{\mu}$，并满足能量不等式

$$\int_H \|u\|_{L^2}^2 \,\mathrm{d}\mu_t(u) \le \int_H \|u_0\|_{L^2}^2 \,\mathrm{d}\overline{\mu}(u_0) \tag{35}$$

对几乎处处的每个 $0 \le t \le T$ 都成立。

在初始数据属于 H^1 的假设下，存在取值连续于 H 甚至 H^1 的欧拉方程弱解，而不仅仅是在 H_w 中连续。因此，在 II) 和 III) 的构造中，我们可以更自然地将统计解视为定义在 H 或 $C([0,T];H)$ 上的博雷尔概率测度，这与上一节稍微更一般的表述形成对照。

我们将以下陈述表述为对所有时间均成立，以便在考虑半流选择时，也能在 III) 中应用它。

命题 1。 令 $u_0 \in H^1$，则存在欧拉方程的一个全局弱解 $u \in C_{loc}([0,\infty);\ H^1)$，其涡量 $\omega(u) \in C_{loc}([0,\infty);\ L^2(\mathbb{T}^2))$ 是欧拉方程涡量形式的一个重整化解，并且满足以下性质:

i) $\|u(t)\|_{L^2} \le \|u(t')\|_{L^2}$ 对所有 $0 \le t' \le t < \infty$,

ii) $\|\omega(u)(t)\|_{L^2} = \|\omega(u)(0)\|_{L^2}$ 对所有 $0 \le t < \infty$,

iii) 本质上确界$_{t'\le\tau\le t}\|\partial_t u(\tau)\|_{H^{-s}} \le C\|u(t')\|_{L^2}$ 对某个 $s > 0, C = C(s) > 0$ 以及所有 $0 \le t' \le t < \infty$。

这里，流场 u 的涡量 定义为 $\omega = \partial_{x_1} u_2 - \partial_{x_2} u_1$。对动量方程取旋度，即可得到欧拉方程的涡量形式，因此

$$\partial_t \omega + u \cdot \nabla \omega = 0. \tag{36}$$

该涡量输运方程的分布解 ω 称为重整化的，如果对于每个 $\beta \in C^1(\mathbb{R}; \mathbb{R})$，若 $\beta(0) = 0$ 且导数有界，则也有

$$\partial_t \beta(\omega) + u \cdot \nabla \beta(\omega) = 0.$$

这里的下标 loc 表示我们在这些连续函数空间上考虑紧开拓扑。这个命题在任意有限时间区间上的证明颇为经典（参见 [24, 22, 68, 58]）。对于整体存在性，可以采用对角线论证。

3.2.1 时间参数化测度逼近序列的紧性

这里的思路是通过考虑博雷尔概率测度族 $(\{\mu_t^N\}_{0\le t\le T})_{N\in\mathbb{N}}$ 的逼近序列 $\{\mu_t\}_{0\le t\le T}$ 并利用紧性定理，来构造一个统计解。

这里我们以原型形式陈述 Foiaş 关于纳维–斯托克斯方程统计解的首篇论文 [38]中的论证。在该文中，给定 H的一个适当固定的正交基，考虑了 N阶伽辽金解算子 $S_t^N, 0 \le t \le T$。随后，给定 H上的一个博雷尔概率测度 $\overline{\mu}$，研究了近似 $\mu_t^N := S_t^N{}_\sharp \overline{\mu}$。

我们总结 Foiaş 在以下定理中得出的紧性论证；这些论证普遍成立，并不局限于上述推前 Galerkin 近似的例子。为此，我们定义 $C_2(H)$ 为所有连续函数 $\varphi : H \to \mathbb{R}$ 所构成的空间，使得 $\|\varphi\|_{C_2(H)} := \sup_{u\in H} \frac{|\varphi(u)|}{1+\|u\|_{L^2}^2} < \infty$。

于是，$(C_2(H), \|\cdot\|_{C_2(H)})$ 是一个巴拿赫空间，既非自反也非可分，而这正是证明中的一个主要困难。

此外，我们回顾一下：对于拓扑空间 X，若子集 A of X 中的 $x \in X$ 满足对 x 的每个开邻域 U，$A \cap (U \setminus \{x\})$ 都非空，则称 $x \in X$ 为聚点。

按照惯例并沿用前文的定义，巴拿赫空间Y 对偶空间上的弱-*拓扑，是使定义在 Y' 上的线性泛函 $\{f_y\}_{y\in Y}$（给定为$f_y(\varphi) = \varphi(y)$，对所有 $\varphi \in Y', y \in Y$）连续的最粗拓扑。

特别地，如果 $\varphi \in Y'$ 是 $A \subset Y'$ 的弱-* 聚点，那么对于每个 $\varepsilon > 0$ 和 $y_1, \ldots\ldots, y_k \in Y$，$A \cap \{\psi \in Y' : |\psi(y_i) - \varphi(y_i)| < \varepsilon$ 对所有 $i = 1, \ldots\ldots, k\} \neq \emptyset$ 均成立。

以下定理在二维和三维中均成立。

定理 16. 假设一列定义在 H 上的 *Borel* 概率测度族 $(\{\mu_t^N\}_{0\le t\le T})_{N\in\mathbb{N}}$ 满足

$$t \mapsto \int_H \varphi(u)\, \mathrm{d}\mu_t^N(u) \text{ is Lebesgue measurable for every } N \in \mathbb{N}, \varphi \in C_b(H), \tag{37}$$

$$C_1 := \sup_{N\in_{\mathbb{И}}} \operatorname{ess\,sup}_{0\le t\le T} \int_H \|u\|_{L^2}^2 \,\mathrm{d}\mu_t^N(u) < \infty, \tag{38}$$

$$C_2 := \sup_{N\in_{\mathbb{И}}} \int_0^T \int_H \|u\|_{H^1}^2 \,\mathrm{d}\mu_t^N(u)\,\mathrm{d}t < \infty, \tag{39}$$

并考虑相应的泛函 $(F^N)_{N\in_{\mathbb{И}}} \subset L^1(0,T;C_2(H))'$，其定义为 $F^N(\Phi) = \int_0^T \int_H \Phi(t,u)\,\mathrm{d}\mu_t^N(u)\,\mathrm{d}t$，对所有 $N \in_{\mathbb{И}}$ 以及 $\Phi \in L^1(0,T;C_2(H))$均成立。则有以下结论：

i) 存在一个弱-* 聚点 F *of* $(F^N)^{N\in_{\mathbb{И}}}$ *in* $L^1(0,T;C_2(H))'$ 以及一个函数 $G:(0,T) \to C_2(H)'$，它以如下意义表示 F

$$\sup_{0<t<T} \|G(t)\|_{C_2(H)'} = \|F\|_{L^1(0,T;C_2(H))'}$$

and

$$F(\Phi) = \int_0^T \langle G(t), \Phi(t)\rangle \,\mathrm{d}t$$

对所有 $\Phi \in L^1(0,T;C_2(H))$ 均成立，其中 $\langle G(t)\ \Phi(t)\rangle := G(t(\Phi(t))$。此外，存在一族概率测度 $\{\mu_t\}_{0\le t\le T}$，它们也满足 (37)-(39)，以及一个勒贝格零测集 $E\subset(0,T)$，使得

$$\langle G(t),\varphi\rangle = \int_H \varphi(u)\,\mathrm{d}\mu_t(u) \ \textit{and}\ F(\Phi) = \int_0^T \int_H \Phi(t,u)\,\mathrm{d}\mu_t(u)\,\mathrm{d}t \tag{40}$$

对所有 $t\in(0,T)\setminus E$ 以及所有 $\varphi\in C_b(H)$ $\Phi\in L^1(0,T;C_b(H))$ 均成立。

ii) 另假设 $\|\cdot\|_{L^2}^2$ 关于序列 $(\{\mu_t^{(N)}\}_{0\le t\le T}\})_{N\in_{\mathbb{И}}}$ 一致可积，具体而言

$$\lim_{r\to\infty} \sup_{N\in_{\mathbb{И}}} \operatorname{ess\,sup}_{0\le t\le T} \int_{\{\|u\|_{L^2}>r\}} \|u\|_{L^2}^2 \,\mathrm{d}\mu_t^{(N)}(u) = 0. \tag{41}$$

Then

$$F(\Phi) = \int_0^T \int_H \Phi(t,u)\,\mathrm{d}\mu_t(u)\,\mathrm{d}t$$

对于所有 $\Phi\in L^1(0,T;C_2(H))$。

在初始平均涡量满足形式如 (34) 的假设下，Chae 在 [9]基本沿着相同思路，得到了周期区域上二维不可压缩欧拉方程统计解的首个存在性结果，不过在某种程度上忽略了 $C_2(H)$ 不可分的问题。我们在此概述证明。首先需要指出，在下文中，根据定理 16，我们可能只能得到一族测度 $\{\mu_t\}_{0\le t\le T}$，它表示一个聚点，并满足 (30)，而非 (9)。我们指出，若 $\overline{\mu}$ 在 H 中具有有界支撑（那么根据构造，$\{\mu_t\}_{0\le t\le T}$ 的有界支撑也随之成立），则可在下述证明中应用引理4，从而实际得到 (9)。

定理 *15* 的证明（概述 *1*）。我们考虑消失黏性近似。因此，令 $\varepsilon > 0$ 表示运动黏度，并考虑具有黏性 ε、初始分布为 $\overline{\mu}$ 的二维纳维–斯托克斯方程统计解 $\{\mu_t^\varepsilon\}_{0\le t\le T}$（参见 [40, 定理 V.1.1、V.1.2]）。由于纳维–斯托克斯方程具有唯一的弱解，该统计解可构造为初始分布沿解算子推前所得的测度。因此，能量和涡量平方不等式等性质也随之成立。特别地，以下结论成立：

i) The mapping $t \mapsto \int_H \varphi(u)\,\mathrm{d}\mu_t^\varepsilon(u)$ is continuous for every $\varphi \in C_b(H)$.

ii) $\sup_{0\le t\le T}\int_H \|u\|_{L^2}^2\,\mathrm{d}\mu_t^\varepsilon(u) \le \int_H \|u_0\|_{L^2}^2\,\mathrm{d}\overline{\mu}(u_0) \le C\int_H \|u_0\|_{H^1}^2\,\mathrm{d}\overline{\mu}(u_0)$.

iii) $\int_0^T\int_H \|u\|_{H^1}^2\,\mathrm{d}\mu_t^\varepsilon(u)\,\mathrm{d}t \le T\int_H \|u_0\|_{H^1}^2\,\mathrm{d}\overline{\mu}(u_0)$.

iv) $\sup_{0\le t\le T}\int_{\{\|u\|_{L^2}>r\}} \|u\|_{L^2}^2\,\mathrm{d}\mu_t^\varepsilon(u) \le \int_{\{\|u_0\|_{L^2}>r\}} \|u_0\|_{L^2}^2\,\mathrm{d}\overline{\mu}(u_0)$.

v) $-\int_0^T\int_H \theta'(t)\Phi(u)+(u\otimes u,\theta(t)\nabla\Phi'(u))_{L^2}\,\mathrm{d}\mu_t^\varepsilon(u)\,\mathrm{d}t-\varepsilon\int_0^T\int_H (u,\theta(t)\Delta\Phi'(u))_{L^2}\,\mathrm{d}\mu_t^\varepsilon(u)\,\mathrm{d}t = \int_H \theta(0)\Phi(u_0)\,\mathrm{d}\overline{\mu}(u_0)$ for all $\Phi \in \mathcal{T}$ and $\theta \in C_c^1([0,T))$.

由于 ii)–iv) 是关于 ε 的一致估计，我们确实可以应用定理 16，得到一个博雷尔概率测度族 $\{\mu_t\}_{0\le t\le T}$，它表示 $L^1(0,T;\,C_2(H))'$ 中的一个弱-* 聚点。特别地，iv) 蕴含 (41)。注意，v) 中的所有项已经属于 $L^1(0,T;\,C_b(H))$ 或 $L^1(0,T;\,C_2(H))$。因此，可以由定理 16 得出，$\{\mu_t\}_{0\le t\le T}$ 满足 (30)。

能量不等式 (35) 可由以下论证得到：设 $\varphi \in L^1(0,T)$ 非负。根据定理 16 中的 ii)，对于任意 $\eta > 0$，存在 $\varepsilon > 0$ 使得

$$\int_0^T \varphi(t)\int_H \|u\|_{L^2}^2\,\mathrm{d}\mu_t(u)\,\mathrm{d}t = \int_0^T\int_H \varphi(t)\|u\|_{L^2}^2\,\mathrm{d}\mu_t(u)\,\mathrm{d}t \le \int_0^T\int_H \varphi(t)\|u\|_{L^2}^2\,\mathrm{d}\mu_t^\varepsilon(u)\,\mathrm{d}t+\eta$$
$$= \int_0^T \varphi(t)\int_H \|S_t^\varepsilon u_0\|_{L^2}^2\,\mathrm{d}\overline{\mu}(u_0)\,\mathrm{d}t+\eta \le \int_0^T \varphi(t)\int_H \|u_0\|_{L^2}^2\,\mathrm{d}\overline{\mu}(u_0)\,\mathrm{d}t+\eta. \tag{42}$$

■

在将二阶和三阶纵向结构函数联系起来的弱统计标度假设下，Fjordholm、Mishra 和 Weber 通过采用一个关于相关测度的紧性结果，研究了统计解的三维消失黏性极限，该结果首次发表于 [34] 中 [36]（另见 [66, 定理2。4]，

其中给出了一个类似的定理）。下文也将陈述这一紧性定理，并将其与定理 16 做大致比较。

我们使用空间 $\mathcal{H}^{k,2}(\mathbb{L}^2;\mathbb{B}^2)$ 和 $\mathcal{H}^{k,2\,1}(\mathbb{L}^2;\mathbb{B}^2)$，用于 $k\in\mathbb{N}$，其定义见定义 7 之前的介绍。

定理 17。 设 $(\boldsymbol{\nu}_n)_{n\in\mathbb{N}}\subset\mathcal{L}^2([0,T],\mathbb{L}^2;\mathbb{B}^2)$ 是一个满足以下条件的相关测度序列

$$C_1 \coloneqq \sup_{n\in\mathbb{N}}\operatorname*{ess\,sup}_{0\le t\le T}\int_{\mathbb{L}^2}\langle\nu^1_{n,t,x},|\xi|^2\rangle\,\mathrm{d}x<\infty, \tag{43}$$

$$\lim_{r\to 0}\limsup_{n\to\infty}\int_0^T\omega_r^p(\nu^2_{n,t})\,\mathrm{d}t=0 \tag{44}$$

其中被积函数 $\omega_r^p(\nu^2_{n,t})$ 按定义 *5* 定义。取一个子序列后，存在 $\boldsymbol{\nu}\in\mathcal{L}^2([0,T],\mathbb{L}^2;\mathbb{B}^2)$ 使得

i) 对每个 $k\in\mathbb{N}$，在 $\mathcal{H}_0^{k*}([0,T],\mathbb{L}^2;\mathbb{B}^2)$ 中，$\boldsymbol{\nu}_n\overset{*}{\rightharpoonup}\boldsymbol{\nu}\,(n\to\infty)$ 的弱-*收敛成立，

ii) $\boldsymbol{\nu}$ 也满足 (43)，

iii) 对每个 $r>0$，$\int_0^T\omega_r^p(\nu_t^2)\,\mathrm{d}t\le$的下极限$_{n\to\infty}\int_0^T\omega_r^p(\nu^2_{n,t})\,\mathrm{d}t$，

iv) 对每个 $k\in\mathbb{N}$，以及两个非负的 $\varphi\in L^1([0,T]\times(\mathbb{L}^2)^k)$ 和 $\kappa\in C((\mathbb{B}^2)^k)$，令 $g(t,x,\xi)\coloneqq\varphi(t,x)\kappa(\xi)$，则有

$$\langle\nu^k,g\rangle\le\liminf_{n\to\infty}\langle\nu_n^k,g\rangle.$$

v) 此外，若 $(\boldsymbol{\nu}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 具有一致有界支撑，即对于由定理 *12* 给出的相关博雷尔概率测度$(\{\mu_t^n\}_{0\le t\le T})^{n\in\mathbb{N}}$，存在某些 $M>0$, $\|u\|_{L^2}\le M$，使得对 μ_t^n-几乎处处的 $u\in L^2(\mathbb{L}^2;\mathbb{B}^2)$、每个 $n\in\mathbb{N}$ 以及几乎处处的 $0\le t\le T$，该条件均成立，则

$$\lim_{n\to\infty}\int_{(\mathbb{L}^2)^k}\left|\int_0^T\langle\nu^k_{n,t,x},g(t,x)\rangle-\langle\nu^k_{t,x},g(t,x)\rangle\,\mathrm{d}t\right|\mathrm{d}x=0$$

对每个 $g\in\mathcal{H}^{k,2\,1}([0,T],\mathbb{L}^2;\mathbb{B}^2)$。

我们指出，定理 16 中的基本假设 (38)、(39)，与定理 17 中的 (43) 和 (44) 一样，是为了能够以适当的初步方式取极限。然而，为了使两类李维尔方程 (30) 和 (19) 中的积分收敛，例如在考虑消失黏性极限时，需要获得关于沿某些可观测量收敛的更好结果。在定理 16 中，空间 $C_2(H)$ 专门针对二次项 $u\mapsto(u\otimes u,\nabla\Phi'(u))$，$\Phi\in\mathcal{T}$ 而设计，因此需要确保定理 16 中的 ii) 也得到满足。类似地，(19) 中的所有项都属于 $\mathcal{H}^{k,\,2\,1}$，而定理 17 中的 v) 在某种程度上至关重要。

更具体地说：关于第二 $\|\cdot\|_{L^2}$相关矩有限性的假设 (38) 和 (43) 是等价的。

定理 16 中的第二个假设 (39) 比 (44) 更强。事实上，(39) 蕴含 (44)，如下列计算所示。设 $(\boldsymbol{\nu}_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{L}^2([0,T];\mathbb{L}^2;\mathbb{B}^2)$ 是满足 (43) 的相关测度序列，其对应的博雷尔概率测度族 $(\{\mu_t^n\}_{0\le t\le T})^{n\in\mathbb{N}}$ 满足 (37) 和 (38)。假设 $(\{\mu_t^n\}_{0\le t\le T})_{n\in\mathbb{N}}$ 也满足 (39)，即 $C_2 := \sup_{n\in\mathbb{N}} \int_0^T \int_H \|u\|_{H^1}^2 \,\mathrm{d}\mu_t^n(u)\,\mathrm{d}t < \infty$。在 $L^2(\mathbb{L}^2;\mathbb{B}^2)$ 上，我们对 $u \in H$ 和 $x \in \mathbb{L}^2$ 使用傅里叶表示 $u(x) = \sum_{k\neq 0} \hat{u}_k e^{ik\cdot x}$。于是，经过一些计算，利用恒等式 (25)、帕ɪśɪʊ瓦尔定理以及对每个 $\beta \in \mathbb{B}$ 和某个常数 $\tilde{C} > 0$ 都成立的估计 $|1-e^{i\beta}| \le \tilde{C}|\beta|$，可得

$$
\begin{aligned}
\int_0^T \omega_r^p(\nu_{n,t}^2)\,\mathrm{d}t &= \int_0^T \int_{\mathbb{L}^2} \fint_{B_r(x)} \langle \nu_{n,t,x,y}^2, |\xi_1-\xi_2|^2\rangle \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^T \int_{L^2} \int_{\mathbb{L}^2} \fint_{B_r(0)} |u(x)-u(x+h)|^2 \,\mathrm{d}h\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\mu_t^n(u)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^T \int_{L^2} \int_{\mathbb{L}^2} \fint_{B_r(0)} \left|\sum_{k\neq 0} \hat{u}_k e^{ik\cdot x}(1-e^{ik\cdot h})\right|^2 \mathrm{d}h\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\mu_t^n(u)\,\mathrm{d}t \\
&\le \int_0^T \int_{L^2} \fint_{B_r(0)} \sum_{k\neq 0} |\hat{u}_k|^2 |1-e^{ik\cdot h}|^2 \,\mathrm{d}h\,\mathrm{d}\mu_t^n(u)\,\mathrm{d}t \\
&\le \int_0^T \int_{L^2} \sum_{k\neq 0} |\hat{u}_k|^2 (\tilde{C}|k|r)^2 \,\mathrm{d}\mu_t^n(u)\,\mathrm{d}t \\
&\le \tilde{C}^2 r^2 C_2,
\end{aligned}
\tag{45}
$$

其在 n 中一致收敛于 0（当 $r\to 0$ 时），因此（44）成立。然而，逆命题并不成立，因为（44）并不一定对均值 H^1 范数产生任何影响。例如，若考虑 $L^2(\mathbb{L}^2;\mathbb{B}^2)$ 中的有界序列 $(u_n)^{n\in\mathbb{N}}$，则可以证明，与之关联的（时间上为常数的）原子相关测度满足（44），当且仅当 $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 在 $L^2(\mathbb{L}^2;\mathbb{B}^2)$ 中是相对紧的。

然而，分别比较定理 16 中的第三个假设（41）与定理 17 中的 v)，可以再次看到，基于矩的统计解在定义 7 中已经需要的更强可积性假设也再次出现。事实上，在 [34], 中给出的定理 17 的证明里，似乎不可能将 $L^2(\mathbb{L}^2;\mathbb{B}^2)$ 中的一致有界支撑这一假设替换为诸如（41）这样弱得多的条件。

3.2.2 基于克莱因–米尔曼定理的离散近似

在推广 Chae 的存在性结果后， [9], 两位作者中的 [85] 第二位作者最近将本文接下来要讨论的第二种方法应用于构造统计解：基于克莱因–米尔曼定理，利用离散近似。这种方法

似乎最初是在 [40] 针对纳维–斯托克斯方程提出的，后来在 [6]被提升到更一般、更抽象的框架中。对于我们所研究的二维不可压缩欧拉方程，可以将主要的存在性结果表述如下，其中包含了使近似方法奏效所需的恰当假设。随后我们将概述相关论证。

定理 18. 令 X 为 H 的一个可测子集，且令 $\mathcal{U} \subset C([0,T];\ H_w)$ 由欧拉方程的弱解组成。令 $\overline{\mu}$ 为 H上的一个博雷尔概率测度，该测度集中于 X，并假设

A) $\Pi_0\mathcal{U} = X$,

存在 X 的一个紧子集族 $\mathcal{K}'(X)$，使得

B) $\overline{\mu}$ 关于 $\mathcal{K}'(X)$是紧的，即

$$\forall A \in \mathcal{B}(H) : \overline{\mu}(A) = \sup_{\substack{K \in \mathcal{K}'(X) \\ K \subset A}} \overline{\mu}(K),$$

C) 对于每个 $K \in \mathcal{K}'(X)$，$(K) \cap \mathcal{U}$在 $C([0,T];\ H_w)$中是紧的。

那么，存在一个欧拉方程的轨道统计解 μ，其初始分布为 $\Pi_{0\sharp}\mu = \overline{\mu}$。

条件 A) 的意思是，对于每个初始数据 $u_0 \in X$，在 $\mathcal{U}$ 中都存在一个弱解，满足相应的柯西问题。条件 B) 和 C) 的意思是，对于足够大的初始数据紧集族，$\mathcal{U}$ 中初始数据属于其中某个集合的弱解轨迹是紧的。

这个定理大致可按如下方式证明（参见 [40, 41, 6]）：

- 假设 B）使得证明可以归结为考虑 $\overline{\mu}$ 由某个 $K \in \mathcal{K}'(X)$承载的情形。于是，我们可以将 $\overline{\mu}$ 视为定义在 K上的测度。
- 空间 $C(K)'$ 配上弱-*拓扑后是一个豪斯多夫局部凸空间，且单位球 $\mathbb{B} \ni \overline{\mu}$ 是紧的、凸的。
- 因此，根据克莱因–米尔曼定理，$\mathbb{B}$ 等于其极值点的凸包的闭合，而这些极值点恰好是定义在 K上的狄拉克测度。换言之，对于每个 $N \in \mathbb{N}$，存在 $n_N \in \mathbb{N}$ λ_1^N、...、$\lambda_{n_N}^N \geq 0$ 以及 $u_{0,1}^N$、...、$u_{0,n_N}^N \in K$，使得

$$\sum_{i=1}^{n_N} \lambda_i^N = 1 \text{ and } \mu_{0,N} \coloneqq \sum_{i=1}^{n_N} \lambda_i^N \delta_{u_{0,i}^N} \overset{*}{\rightharpoonup} \overline{\mu} \quad (N \to \infty).$$

- 现在，对每个 $N \in \mathbb{N}$，我们定义

$$\mu_N \coloneqq \sum_{i=1}^{n_N} \lambda_i^N \delta_{u_i^N}$$

作为定义在 κ 上的博雷尔概率测度：$= \Pi_0^{-1}(K) \cap \mathcal{U}$，其中对每个 $N \in \mathbb{N}$ 和 $i = 1, ..., n_N$，我们令 $u_i^N \in \kappa$使得 $u_i^N(0) = u_{0,i}^N$。这可由 A) 得出。

- 由于 κ 是紧的， $C(\kappa)$ 是可分的。根据巴拿赫-阿劳格鲁定理，经过选取一个子序列，$(\mu_N)_{N\in\mathbb{N}}$ 可视为在 $C(\kappa)'$ 中弱-* 收敛到某个 μ；将其扩展为定义在 $C([0,T];\, H_w)$ 上的测度后，可以证明它是一个轨道统计解，且 $\Pi_{0\sharp}\mu = \overline{\mu}$。

- 根据定理 10 可以得到相应的相空间统计解。

从这段草图可以明显看出，在定理 15 所设定的条件更好的情形下，该定理同样成立，只需将 H_w 替换为 H 或 H^1。

定理 *15* 的证明（草图 *2*）。在定理 18 的设定下，令 $X = H^1$ and$\mathcal{U}$ 为命题 1 中所述的所有弱解的集合，因此 A) 立即成立。对于性质 B) 和 C)，令 $\mathcal{K}'(X)$ 为 H^1 的所有子集构成的集合，这些子集关于 $\|\cdot\|_{H^1}$ 是紧的。

由 (34) 可知，$\overline{\mu}$ 集中于 H^1。此外， $\|\cdot\|_{H^1}$ 和 $\|\cdot\|_{L^2}$ 在 H^1 上生成相同的博雷尔-σ-代数，因此我们可以将 $\overline{\mu}$ 视为定义在 H^1上的测度。随后， B) 根据波兰空间上的博雷尔概率测度是紧致的这一一般事实即可得出 [77,定理3.2]。

接下来讨论 C)，对于每个 $K \in \mathcal{K}'(X)$， $\kappa := \Pi_0^{-1}(K) \cap \mathcal{U}$ 实际上已经在 $C([0,T];\, H^1)$ 中是紧的： K 在 H^1 中有界，这使得命题 1 中 i) - iii) 涉及的量一致有界，进而意味着 κ 在 H^1 中一致有界。然后，由 iii) 和 Aubin-Lions引理可知，$C([0,T];\, H)$ 中的预紧性成立。

$C([0,T];\, H)$ 中的收敛足以得出结论： $\mathcal{U}$ 中速度序列的子序列极限仍然是欧拉方程的弱解，且 i) 在极限中也成立。同样，由 iii) 左端的弱下半连续性以及右端的强收敛可知， κ 中此类序列的极限也满足 iii)。

至于性质 ii)，由于 K 在 H^1 中的紧性，我们可以假设初始涡量在 κ 中强紧。我们还可由 ii) 得到， κ 的涡量在 $L^\infty(0,T;\, L^2(\mathbb{T}^2))$ 中弱-*紧；结合速度在 $C([0,T];\, H)$ 中的紧性，这足以证明，该极限在 κ 中的涡量是欧拉方程涡量形式 (36) 的弱解。现在只需注意， $L^2(\mathbb{T}^2)$ 中的弱涡量解自动满足重整化；事实上，在无黏极限下，涡量在 $C([0,T];\, L^2(\mathbb{T}^2))$ 中强收敛，参见 [68, 16, 76]。注意，通过Calderón-Zygmund论证，涡量在 $L^2(\mathbb{T}^2)$ 中的连续性和紧性足以得到全梯度在 $L^2(\mathbb{T}^2)$.

总之， κ 在 $C([0,T];\, H^1)$ 中是紧的，因此可应用定理 18，从而得到一个定义在 $\mathcal{U} \subset C([0,T];\, H^1)$ 上、初始分布为 $\overline{\mu}$ 的轨道统计解 μ。结合定理10，可得到初始分布为 $\overline{\mu}$ 的相空间统计解 $\{\mu_t\}_{0\le t\le T} = \{\Pi_{t\sharp}\mu\}_{0\le t\le T}$。特别地，由于.....，能量不等式成立

$$\int_{H^1} \|u\|_{L^2}^2 \,\mathrm{d}\mu_t(u) = \int_{C([0,T];H^1)} \|u(t)\|_{L^2}^2 \,\mathrm{d}\mu(u)$$

$$\leq \int_{C([0,T];H^1)} \|u(0)\|_{L^2}^2 \,\mathrm{d}\mu(u) = \int_{C([0,T];H^1)} \|u_0\|_{L^2}^2 \,\mathrm{d}\overline{\mu}(u_0).$$

■

注 4. 草图 *2* 中用于证明能量不等式的相同论证，也可用于证明涡量平方积分守恒，即相空间统计解满足

$$\int_{H^1} \|\omega(u)(t)\|_{L^2} \,\mathrm{d}\mu_t(u) = \int_{H^1} \|\omega(u_0)\|_{L^2} \,\mathrm{d}\overline{\mu}(u_0). \tag{46}$$

3.2.3 可测选择与推前构造

这里简要回顾的第三种方法，是沿着可能不唯一的弱解的可测选择算子，将初始分布推前，从而构造推前测度。这或许是构造统计解最直接的方法，也与统计解这一概念的推导相联系。正如引言中所讨论的，我们当时也假设解算子的存在。

Ladyzhenskaya 和 Vershik 在 [82] 中采用了这种方法，以坐标形式求解 Hopf统计方程。
更准确地说，他们将现已成为经典的 Kuratowski–Ryll-Nardzewski 选择原理的一个版本应用于三维Navier–Stokes方程。这里，我们想陈述 Cardona 和 Kapitanski 关于半流选择的一项较新且更精细的结果，见 [8], ，其中也讨论了 Navier–Stokes 方程这一例子。他们的工作也启发了 Breit、Feireisl 和 Hofmanová 最近发表的文章，这些文章研究了等熵完全Euler系统的半流选择 [3, 4] ； Fanelli 和 Feireisl 随后也运用这一选择与推前原理，证明了斜压 Navier–Stokes系统中一种新近提出的统计解概念的存在性 [27]。

对于每个 $s \geq 0$，定义在 $[0,\infty)$ 上的两个函数 v、w 在时间 s 处的拼接，且满足 $w(s) = v(0)$，定义如下

$$(w \bowtie_s v)(t) = \begin{cases} w(t), & 0 \leq t \leq s \\ v(t-s), & t \geq s \end{cases}.$$

我们还定义时间平移 θ_s，对每个 $s \geq 0$，使得对于定义在 $[0,\infty)$ 上的每个函数 w 以及每个 $t \in [0,\infty)$，都有 $\theta_s w(t) = w(t+s)$。

定理19。 设 X 是一个波兰空间， $C_{loc}([0,\infty);X)$ 是赋予紧开拓扑的连续函数空间；对于 $x \in X$，记 Ω_x为 $C_{loc}([0,\infty);X)$ 中从 x 出发的轨道子集。假设 Ψ 是一个从 X 映射到 $C_{loc}([0,\infty);X)$ 非空子集的映射，并满足以下性质：

a) 对于每个 $x \in X$， $\Psi(x)$ 都是 $\Omega(x)$ 中的紧子集。

b) Ψ 是可测的，即对于每个闭集 $A \subset \Omega$，$\{x \in X : \Psi(x) \cap A \neq \emptyset\}$ 是 X 的博雷尔可测子集。

c) Ψ 与半群 θ_s 相容，具体而言，对每个 $s \geq 0$，$x \in X$，我们有

$$w \in \Psi(x) \Rightarrow \theta_s(w) \in \Psi(w(s)).$$

d) Ψ 满足粘合性质，具体而言，对于 $w \in \Psi(x)$ 和 $v \in \Psi(w(s))$，若存在某个 $s \in [0, \infty)$，则也有 $w \bowtie_s v \in \Psi(x)$。

那么存在一个 Ψ的可测半流选择 ψ，即 ψ 是从 X 到 $C_{loc}([0,\infty); X)$ 的 ***Borel*** 可测映射，使得对于每个 $x \in X$，都有 $\psi(x) \in \Psi(x)$，并且它满足半流性质$(x, t+s) = \psi(\psi(x, t)\ s)$，对所有 t，$s \geq 0$均成立。

定理 *15* 的证明（思路 *3*）。我们考虑 $X = H^1$，并对任意 $u_0 \in H^1$，令$\Psi(u_0) \subset C_{loc}([0,\infty); H^1)$为满足命题 1 中性质 i)–iii) 且初始数据为 u_0的所有弱解的集合。

定理19中的假设 a)–d) 的成立理由与我们在定理 15 证明的第二个草图中所述的理由相似或相同，更确切地说：

根据命题 1，对于每个 $u_0 \in H^1$，$\Psi(u_0)$ 都非空。此外，$\Psi(u_0)$ 在 $C_{loc}([0,\infty); H^1)$ 中是紧的；这一点我们在草图 2 中已针对有限时间区间说明，而全局情形则可通过对角线论证得到。

对于 b)，对任意闭集 $A \subset C_{loc}([0,\infty); H^1)$，也可以用相同的论证证明$\{u_0 \in H^1 : \Psi(u_0) \cap A \neq \emptyset\}$ 在 H^1 中是闭的。

对于 c) 和 d)，具有上述性质的弱解的所有性质在时间平移和拼接下均得以保持，这一点显而易见；不过，欧拉方程的弱速度形式和重整化涡量形式或许是例外。最后这一点可以通过适当逼近给定的测试函数来证明，例如纳维–斯托克斯方程的情形可参见 [8, 第 4 节。3]

总之，定理19适用，因此我们可以考虑 Ψ 的一个可测选择 S。由于其可测性，我们可以考虑 $C_{loc}([0,\infty); H^1)$ 上的推前测度$\mu := S_\sharp \overline{\mu}$，使得 μ 是一个初始分布为 $\overline{\mu}$ 的轨道统计解。利用定理10，可以得到定理 15 所要求的相空间统计解，该解还处处满足能量不等式 (35)，如同我们第二种概述中所示。■

注记 5. 与注 *4* 类似，此处构造的统计解也满足涡量平方积分平衡式 (46)。

3.2.4 结论

我们以如下评论结束本小节：这里介绍的三种方法有一个共同点，即它们实际上都在某种程度上依赖于弱确定性解的紧性和/或其近似。例如，在二维情形下，考虑涡量属于 L^2 的初始数据的消失黏性极限时，定理 16 中的一致有界性 (38) 和 (39) 相当于

确定性情形中允许取极限的一致估计，因此沿二维纳维–斯托克斯解算子得到的推前近似也满足这些估计。

在小节 3.2.2 中，初始数据属于某些紧集的弱解的紧性，正是定理 18 中的假设 C）。类似地，定理 19 也假设具有共同初始数据的解轨道具有紧性；不过这里要指出，对于经典的 Kuratowski–Ryll-Nardzewski 选择定理，闭性就足够了。

总的来说，这与弱确定性解的存在性和紧性密切相关，至少可以保证所构造的统计解通常具有类似性质。

对于任意 $u_0 \in H$，都可以构造出无穷多个不可压缩欧拉方程的弱解，它们甚至可能满足能量不等式 [19, 86],；然而，由于这些凸积分解缺乏紧性，目前使用本文介绍的方法，无法为任意初始分布 $\overline{\mu}$ （定义在 H 上）构造不可压缩欧拉方程的统计解，除非作出诸如假设 (34) 之类的额外假设。

3.3 与测度值解的比较

3.3.1 奇异极限的统计

用相关测度来表述统计解，可以得到一种替代性的、稍微简单一些的理解：考察所有无穷多个多点相关，而非无限维空间上的单个分布。相比之下，测度值解只能描述系统的单点统计。

人们或许会希望，通过将（所有）多点相关“添加”到杨测度和测度值解中，更容易获得关于唯一性和稳定性的结果。然而，这与 DiPerna 和 Majda 在 [25] 中引入测度值解这一概念的背景不同；他们引入该概念是为了解决无黏极限问题，参见第 2 节。第 3.1 节定义的相关测度似乎是过于强大的概念，不适合研究振荡极限。

作为一个简单的例子，考虑函数 $u\colon \mathbb{L} \to \mathbb{B}$，定义如下

$$u(x) = \begin{cases} 0, & 0 < x \le \frac{1}{2} \\ 1, & \frac{1}{2} < x \le 1 \end{cases}$$

并作周期延拓。然后，对所有 $x \in \mathbb{L}$ 和 $n \in \mathbb{N}$，我们定义 $u_n(x) := u(nx)$。极限中 $(u_n)^{n\in\mathbb{N}}$ 的两点相关性由 Young 测度 $\{\nu^2_{x,y}\}_{(x,y)\in\mathbb{L}^2}$ 描述，该测度由 $v_n(x,y) := (u_n(x)\ u_n(y))n \in \mathbb{N}, (x,y) \in \mathbb{L}^2$生成。不难看出，在 $(x,y) \in$ 中，该测度恒定，

$$\nu^2_{x,y} \equiv \frac{1}{4}\delta_{(0,0)} + \frac{1}{4}\delta_{(0,1)} + \frac{1}{4}\delta_{(1,0)} + \frac{1}{4}\delta_{(1,1)}.$$

然而，这个常值杨测度不能成为相关测度的一部分，因为它违反了对角连续性 (15)，因为对于 $r > 0$，我们有

$$\int_{\mathbb{L}^2} \fint_{B_r(x)} \langle \nu^2_{x,y}, |\xi_1 - \xi_2|^2 \rangle \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2} > 0.$$

另外值得一提的是，可以将博雷尔概率测度与（广义）杨测度联系起来，也可以推广Young测度基本定理，从而得到由博雷尔概率测度序列生成Young测度的概念，参见 [10]。

3.3.2 弱强唯一性

我们此前提到，相较于测度值解，人们希望统计解能获得更好的稳定性与唯一性结果。在这方面，仍有许多工作有待开展。

如果初始分布支撑集中的初始数据对应于某个特定类别中的唯一解，通常很容易证明轨道统计解的唯一性，例如，参见 [85, 定理2。6]，其中讨论的是初始数据和解均属于尤多维奇类的二维欧拉方程；更一般的情形见 [84,第四章§6]。

对于相空间统计解，要得到类似的唯一性结果则困难得多。关于二维纳维–斯托克斯方程的情形，参见 [40]第五章中的定理1.2。在 [66], 中，作者基于欧拉方程测度值解的弱强唯一性，证明了一种较弱形式的弱强唯一性，参见定理5。鉴于这一结果与本文内容十分契合，也为方便读者，我们在此介绍该结果，但仅简述主要结论的证明。以下结论在 $d = 2$ 维和 $d = 3$ 维情形下均成立。

在弱强唯一性的语境中，强 是指我们考虑这样的统计解：其初始分布集中在一组（稍大的）初始数据上，而这组初始数据在所考虑的时间区间内能产生经典解。

更确切地说，我们考虑初始数据集合 $\mathcal{C} \subset C^1(\mathbb{L}^d; \mathbb{R}^d) \cap H$，其中的初始数据 $\overline{v}$能产生欧拉方程的经典解 $v \in C^1(\mathbb{L}^2 \times [0,T]; \mathbb{R}^2)$，使得 $C(\overline{v}) := \sup_{t\in[0,T]} \|\nabla v(t)\|_\infty < \infty$。现在，对每个 $n \in \mathbb{N}$，令

$$\mathcal{G}_n = \bigcup_{\overline{v}\in\mathcal{C}} B^H_{e^{-C(\overline{v})T}/n}(\overline{v}) \text{ and define } \mathcal{G} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{G}_n.$$

为了能够利用测度值解的弱强唯一性，我们需要使用耗散统计解这一概念。在给出精确定义之前，先引入以下记号：对于定理 12 中的博雷尔概率测度μ on H，我们将与 μ相关的相关测度所包含的 Young测度层级中的第一个Young测度记作 $\nu^1(\mu) = \{\nu^1_x(\mu)\}_{x\in\mathbb{L}^d}$。此外，对于这样的测度 μ和 $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_N) \in [0,1]$ such that $\sum_{i=1}^N \alpha_i = 1$，我们考虑集合 $\Lambda(\alpha, \mu) := \{(\mu_1, ..., \mu_N) : \mu = \sum_{i=1}^N \alpha_i \mu_i\}$，其中包含 N 元博雷尔概率测度组，其定义在 H 上。注意，始终有 $(\mu, ..., \mu) \in \Lambda(\alpha, \mu)$，因此该集合永不为空。

定义 8. 在欧拉方程的相空间中，具有初始分布 $\overline{\mu}$ 的统计解 $\{\mu_t\}_{0\le t<T}$，若对每个满足 和 (,,) (,) 的 $N \in \quad \alpha \in [0,1]^N \quad \sum_{i=1}^N \alpha_i = 1 \quad \overline{\mu}_1 \ldots \overline{\mu}_N \in \Lambda\ \alpha\ \overline{\mu} \quad \mu_{1\,t} \ldots \mu_{N\,t} \in \Lambda\ \alpha\ \mu_t \quad 0 \le t \le T$ $\mathbb{N}$，存在 (ˆ,,,ˆ,) (,)，使得对几乎所有 满足：对于每个 $i = 1, \ldots, N$，$\{\nu^1(\hat{}\mu_{i,t})\}_{0\le t\le T}$都是不可压缩欧拉方程的振荡测度值解，其初始杨测度为 $\nu^1(\overline{\mu}_i)$，则称其为欧拉方程的耗散统计解 。

定理20 ([66])**.** 设 $\overline{\mu}$ 是 H 上的博雷尔概率测度，集中于 $\mathcal{G}$，并且在 B_M^H 中具有有界支撑，其中某个 $M > 0$。那么，存在唯一的不可压缩欧拉方程耗散统计解，其初始分布为 $\overline{\mu}$。

注6。 *i) [66]* 中耗散统计解的定义还包含一项（弱）时间正则性条件。不过，定理*20*并不要求这一条件，因此定义*8*中省略了该条件。

ii) 定理*20*特别地给出了二维情形下耗散统计解的存在性与唯一性：对于集中于 $C^{1,\beta}(\mathbb{L}^2;\mathbb{B}^2) \cap H$ 的初始分布，其中某个 $\beta \in (0,1)$，且具有有界支撑。

定理*20*的证明（概要）。划分与近似：我们首先引入 $\mathcal{G}$的划分。

由于 H 是可分的，对每个$n \in \mathbb{N}$，定义 $\mathcal{G}_n$ 时只需使用可数多个开球即可覆盖 $\mathcal{G}_n$。考虑对$n \in \mathbb{N}$ 取并集，其中包含覆盖 $\mathcal{G}_n$的可数多个球的中心，我们得到一个可数集 $\{\overline{u}_i\}_{i\in I}$（为简单起见，假设 $I = \mathbb{N}$），使得对每个$n \in \mathbb{N}$，都有 $\mathcal{G}_n = \bigcup_{i=1}^\infty B_{r_i/n}(\overline{u}_i)$；其中$r_i := e^{-C(\overline{u}_i)T}$ 对每个$i \in \mathbb{N}$均成立。接着，我们按如下方式划分 $\mathcal{G}$：令

$$\begin{cases} S_1^{(n)} = B_{r_i/n}(\overline{u}_i) \cap \mathcal{G} \\ \Sigma_1^{(n)} = S_1^{(n)} \\ \alpha_i^{(n)} = \overline{\mu}(S_1^{(n)}) \end{cases} \qquad \begin{cases} S_{i+1}^{(n)} = B_{r_{i+1}/n}(\overline{u}_{i+1}) \setminus \Sigma_i^{(n)} \\ \Sigma_{i+1}^{(n)} = \Sigma_i^{(n)} \cup S_{i+1}^{(n)} \\ \alpha_{i+1}^{(n)} = \overline{\mu}(S_{i+1}^{(n)}). \end{cases}$$

那么$(S_i^{(n)})_{i=1}^\infty$ 是 $\mathcal{G}$ 和 $\sum_{i=1}^\infty \alpha_i^{(n)} = 1$的不相交划分。

存在性：对所有 i,$n \in \mathbb{N}$，定义 $\overline{\mu}_i^{(n)} := \overline{\mu}_i(\cdot \cap S_i^{(n)})$，使得对每个$n \in \mathbb{N}$，都有 $\overline{\mu} = \sum_{i=1}^\infty \alpha_i^{(n)} \overline{\mu}_i^{(n)}$。由于当 n较大时 $\overline{\mu}_i^{(n)} \approx \delta_{\overline{u}_i}$，我们考虑离散近似

$$\overline{\mu}^{(n)} := \sum_{i=1}^\infty \alpha_i^{(n)} \delta_{\overline{u}_i}, n \in \mathbb{N},$$

的 $\overline{\mu}$。

对于每个 $i \in \mathbb{N}$，令 $u_i \in C^1(\mathbb{L}^2 \times [0,T];\mathbb{B}^2)$ 为初始数据为 $\overline{u}_i$ 的经典解。然后我们考虑时间参数化测度

$$\mu_t^{(n)} := \sum_{i=1}^\infty \alpha_i^{(n)} \delta_{u_i(t)}, n \in \mathbb{N}, t \in [0,T].$$

那么，对于每个 $n \in \mathbb{N}$，$\{\mu_t^{(n)}\}_{0\le t\le T}$ 可视为初始分布为 $\overline{\mu}^{(n)}$ 的耗散统计解.

基于经典解的稳定性（这也启发了半径 $r_i, i \in \mathbb{N}$ 的具体选取），可以证明 $(\{\mu_t^{(n)}\}_{0\le t\le T})^{n\in\mathbb{N}}$ 关于瓦瑟斯坦距离 d_2 一致地构成柯西列。由于瓦瑟斯坦空间的完备性，可得一致极限中的测度 $\{\mu_t\}_{0\le t\le T}$，它们也构成初始分布为 $\overline{\mu}$ 的耗散统计解。

唯一性：为证明唯一性，假设 $\{\tilde{\mu}_t\}_{0\le t\le T}$ 也是初始分布为 $\overline{\mu}$ 的耗散统计解。根据步骤 2，只需证明对所有 $0 \le t \le T$，$\lim_{n\to\infty} d_2(\tilde{\mu}_t, \mu_t^{(n)}) = 0$。

现在固定 $n \in \mathbb{N}$。当 $N \in \mathbb{N}$ 足够大时，将 $\mu_t^{(n)}$ 近似为

$$\tilde{\mu}_t^{(N,n)} := \sum_{i=1}^{N} \alpha_i^{(n)} \delta_{u_i(t)} + \alpha_0^{(N,n)} \delta_{\mathcal{O}(t)},$$

其中 $\mathcal{O}$ 表示恒零函数，且 $\alpha_0^{(N,n)} := \sum_{i>N} \alpha_i^{(n)}$，从而 $\tilde{\mu}_t^{(N,n)}$ 是概率测度。若 $\alpha_0^{(N,n)}$ 为 0，则在下文中可以省略零阶项。于是有 $\alpha_0^{(N,n)} + \sum_{i=1}^{N} \alpha_i^{(n)} = 1$，令 $\overline{\mu}_0^{(N,n)} := \frac{1}{\alpha_0^{(N,n)}} \sum_{i>N} \alpha_i^{(n)} \overline{\mu}_i^{(n)}$，可得

$$(\overline{\mu}_0^{(N,n)}, \overline{\mu}_1^{(n)}, ..., \overline{\mu}_N^{(n)}) \in \Lambda(\alpha, \overline{\mu}).$$

耗散统计解的定义蕴含存在划分

$$(\hat{\mu}_{0,t}, ..., \hat{\mu}_{N,t}) \in \Lambda(\alpha, \tilde{\mu}_t)$$

属于 $\tilde{\mu}_t$，使得对于每个 $i = 1, ..., N$，$\{\nu^1(\hat{\mu}_{i,t})\}_{0\le t<T}$，它都是一个以 $\nu^1(\overline{\mu}_i^{(n)})$ 为初始值的测度值解。然后，不可压缩情形下定理5的类似结果给出

$$\begin{aligned} &\int_H \|u - u_i(t)\|_{L^2}^2 \, \mathrm{d}\hat{\mu}_{i,t}(u) = \int_{\mathbb{L}^2} \langle \nu_x^1(\hat{\mu}_{i,t}), |\xi - u_i(t)|^2 \rangle \, \mathrm{d}x \\ \le & e^{C(\overline{u}_i)T} \int_{\mathbb{L}^2} \langle \nu_x^1(\overline{\mu}_i), |\xi - \overline{u}_i|^2 \rangle \, \mathrm{d}x = \frac{1}{r_i} \int_H \|u - \overline{u}_i\|_{L^2}^2 \, \mathrm{d}\overline{\mu}_i(u) \end{aligned} \tag{47}$$

对于几乎处处的 $t \in [0, T]$ 和 $i = 1, ..., N$。

利用传输计划 $\pi_t := \hat{\mu}_{i,t} \otimes \delta_{u_i(t)}$，左边可以改写为 $\int_{H\times H} |\xi_1 - \xi_2|^2 \, \mathrm{d}\pi_t(\xi_1, \xi_2)$，因此根据 d_2 的定义，对于每个 $i = 1, ..., N$

$$d_2^2(\hat{\mu}_{i,t}, \delta_{u_i(t)}) \le \frac{1}{r_i} \int_H \|u - \overline{u}_i\|_{L^2}^2 \, \mathrm{d}\overline{\mu}_i(u) \le \frac{1}{r_i} \left(\frac{r_i}{n}\right)^2 \le \frac{1}{n^2}, \tag{48}$$

这里用到了 $\overline{\mu}_i^{(n)}$ 集中于 $S_i^{(n)} \subset B_{r_i/n}(\overline{u}_i)$。此外，

$$d_2^2(\hat{\mu}_{0,t}, \delta_{\mathcal{O}(t)}) \le \int_H \|u\|_{L^2}^2 \, \mathrm{d}\hat{\mu}_{0,t}(u) \le \int_H \|u\|_{L^2}^2 \, \mathrm{d}\overline{\mu}_0^{(N,n)}(u) \le M^2.$$

现在，设 $\varepsilon > 0$。由于 (48) 和 $\lim_{n\to\infty} d_2(\mu_t^{(n)}, \mu_t) = 0$ 在 N和 t中均一致，因此我们可以选取足够大的 $n \in \mathbb{N}$，使得对于每个 $N \in \mathbb{N}$ 以及 $i = 1, ..., N$, $0 \le t \le T$ ，

$$d_2^2(\hat{\mu}_{i,t}, \delta_{u_i(t)}) \le \frac{\varepsilon^2}{18} \text{ and } d_2(\mu_t, \mu_t^{(n)}) \le \frac{\varepsilon}{3}.$$

然后选择足够大的 N，使得

$$\alpha_0^{(N,n)} = \sum_{i>N} \alpha_i^{(n)} < \frac{\varepsilon^2}{18M^2}.$$

因此,

$$\begin{aligned} d_2^2(\tilde{\mu}_t, \tilde{\mu}_t^{(N,n)}) &\le \alpha_0^{(N,n)} d_2^2(\hat{\mu}_{0,t}, \delta_{\mathcal{O}(t)}) + \sum_{i=1}^{N} \alpha_i^{(n)} d_2^2(\hat{\mu}_{i,t}, \delta_{u_i(t)}) \\ &\le \frac{\varepsilon^2}{18M^2} M^2 + \frac{\varepsilon^2}{18} \sum_{i=1}^{N} \alpha_i^{(n)} \le \frac{\varepsilon^2}{9} \end{aligned}$$

同样地

$$d_2^2(\tilde{\mu}_t^{(N,n)}, \mu_t^{(n)}) \le \sum_{i>N} \alpha_i^{(n)} d_2^2(\delta_{\mathcal{O}(t)}, \delta_{u_i(t)}) \le M^2 \sum_{i>N} \alpha_i^{(n)} = M^2 \alpha_0^{(N,n)} \le \frac{\varepsilon^2}{9}.$$

最后

$$d_2(\tilde{\mu}_t, \mu_t) \le d_2(\tilde{\mu}_t, \tilde{\mu}_t^{(N,n)}) + d_2(\tilde{\mu}_t^{(N,n)}, \mu_t^{(n)}) + d_2(\mu_t^{(n)}, \mu_t) \le \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

■

4 讨论与开放问题

我们在此列出的以下问题并非专门针对不可压缩欧拉方程或纳维–斯托克斯方程。相反，这些问题处于更一般的层面；对它们进行更深入的探讨并提供更多实例，将有助于推动该领域的发展。

独立于确定性问题的存在性

弱解的狄拉克测度满足 Foiaş-Liouville方程 (4)。对于具有相同初始数据的非唯一解，相应解的凸组合也满足 (4)。这样，统计解的概念允许确定性初始数据“分裂”为非确定性分布，因此，统计解比弱解这一解的概念更加灵活。

然而，正如我们在第3.2节的结论中所提到的，目前获得统计解存在性的方法通常依赖于底层确定性解的存在性，甚至还要求这类解具有某种紧性。若能进一步探索主要基于 Foiaş-Liouville方程的方法，将会很有意义；这类方法或许还可用于那些尚不清楚是否存在弱确定性解的方程和/或数据。

相空间统计解与轨道统计解之间的联系

我们在定理10中看到，在不可压缩欧拉方程的每个时间点对轨道统计解进行投影，就能得到相空间统计解。这一点在非常一般的情形下也成立 [6, 定理3.3]。

一般而言，尚不清楚逆命题是否也成立。例如，对于二维纳维-斯托克斯方程（其初始分布具有有界支撑），该命题是已知成立的，因为轨道统计解和相空间统计解分别都是通过轨道空间或相空间中的解算子将初始分布推前所得的推前测度。或许更有意义的是，对于三维纳维-斯托克斯方程的时间平均平稳统计解，这一点也成立 [43, 定理5。5]迄今为止，文献中尚未发现任何方程的反例，即无法作为轨道统计解投影获得的相空间统计解。这与前一个问题相关，因为它需要进一步研究Foiaş-Liouville方程及其与确定性表述之间的联系。

杨测度与相关测度之间的联系

考虑映射 $F\colon\ \mathcal{L}^2(\mathbb{L}^2;\mathbb{R}^2) \to L^\infty_{\mathrm{w}}(\mathbb{L}^2,\mathcal{P}(\mathbb{R}^2))$，其中 F投影到构成 $\mathcal{L}^2(\mathbb{L}^2;\mathbb{R}^2)$中一个相关测度的Young测度层级里具有有限动能的第一个Young测度。

那么，我们不清楚 F 是否是单射或满射。满射意味着，每个具有有限动能的杨测度 $\{\nu_x\}_{x\in\mathbb{L}^2}$，都是某个定义在 $\mathcal{L}^2(\mathbb{L}^2;\mathbb{R}^2)$ 上的相关测度的第一个相关边缘。根据定理 12，这等价于存在一个定义在 $L^2(\mathbb{L}^2;\mathbb{R}^2)$ 上、具有有限二阶矩的博雷尔概率测度 μ，使得对于每个 $h\in\mathcal{H}^1_0(\mathbb{L}^2;\mathbb{R}^2)$

$$\int_{L^2}\int_{\mathbb{L}^2} h(x,u(x))\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\mu(u) = \int_{\mathbb{L}^2}\langle \nu_x, h(x,\xi)\rangle\,\mathrm{d}x.$$

F 是单射意味着，这样的 μ（如果存在）是唯一的。

直观而言， F 是满射但不是单射似乎是合理的。后者，也就是单射，意味着第一个相关边缘能够确定所有更高阶的多点相关。

然而，由于相关测度所需满足的性质，尤其是对角连续性，限制相当严格，因此这一点并非显而易见；若能给出证明或明确的例子，将会很有帮助。在这一背景下，唯一明确的例子仍是单个狄拉克杨测度。由于对角连续性，它只能以唯一的方式“扩展”为一个完整的相关测度，即原子相关测度。

最后，我们想在此指出统计解缺乏较为显式的例子这一普遍问题。除非系统适定，且所有相空间统计解都能表示为初始分布沿解半群演化所得的推前测度，否则目前似乎只有与弱解对应的狄拉克测度的凸组合作为显式例子。即使在

适定的情形下，在相关测度和基于矩的统计解的框架中处理起来也并不方便。例如，考虑一个可测半群 $\{S_t\}_{t\geq 0}$ 以及相空间 $L^2(\mathbb{L}^2;\mathbb{B}^2)$ 上具有有限二阶矩的博雷尔概率测度 μ_0，从而我们可以对每个 $t\geq 0$ 定义 $\rho_t := S_{t\sharp}\mu_0$。对于任意 $h\in \mathcal{H}_0^k(\mathbb{L}^2;\mathbb{B}^2)$，式 (25) 右端为

$$\int_{L^2}\int_{(\mathbb{L}^2)^k} h(x,u(x))\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\rho_t(u) = \int_{L^2}\int_{(\mathbb{L}^2)^k} h(x,(S_t u_0)(x))\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\mu_0(u_0).$$

因此，它可以用初始分布和给定的半群$\{S_t\}_{t\geq 0}$来表示。

然而，不能像前面那样，仅根据对应于 μ_0 and $\{S_t\}_{t\geq 0}$ 的初始相关测度来理解式 (25) 的左端。注意，对于给定的 $x\in(\mathbb{L}^2)^k$ 和 $t\geq 0$, $h(x,\cdot)\colon(\mathbb{B}^2)^k\to\mathbb{B}$，而 $S_t\colon L^2(\mathbb{L}^2;\mathbb{B}^2)\to L^2(\mathbb{L}^2;\mathbb{B}^2)$，因此复合 $\xi\mapsto h(x,S_t\xi)$ 没有意义。

参考文献

[1] J. M. Ball 和 R. D. James。精细相混合物作为能量极小化子。《理性力学与分析档案》，100(1)：13–52，1987年。[2]C. Bardos、E. S. Titi 和 E. Wiedemann。作为欧拉方程选择原理的消失黏性：三维剪切流情形。《巴黎科学院综合报告：数学》，350(15–16)：757–760，2012年。[3] D. Breit、E. Feireisl 和 M. Hofmanová。等熵欧拉系统的解半流。《理性力学与分析档案》，235(1)：167–194，2019年。[4] D. Breit、E. Feireisl 和 M. Hofmanová。完全Euler系统的耗散解与半流选择。《数学物理通讯》，376(2)：1471–1497，2020年。[5] Y. Brenier、C. De Lellis 和 L. Székelyhidi, Jr.。测度值解的弱强唯一性。《数学物理通讯》，305(2)：351–361，2011年。[6] A. C. Bronzi、C. F. Mondaini 和 R. M. S. Rosa。统计解理论的抽象框架。《微分方程杂志》，260(12)：8428–8484，2016年。[7] T. Buckmaster、C. De Lellis、L. Székelyhidi, Jr. 和 V. Vicol。可容许弱解的昂萨格猜想。《纯粹与应用数学通讯》72(2)：229–274，2019年。[8] J. E. Cardona 和 L. Kapitanski。半流选择与马尔可夫选择定理。《拓扑方法与非线性分析》，56(1)：197–227，2020年。[9] D. Chae。纳维–斯托克斯方程统计解的消失黏性极限。I. 二维周期情形。《数学分析与应用杂志》，155(2)：437–459，1991年。

[10] D. Chae。纳维–斯托克斯方程统计解的消失黏性极限。II. 一般情形。《数学分析与应用杂志》，155(2)：460–484，1991年。[11] R. M. Chen、A. F. Vasseur 和 C. Yu。等熵气体动力学系统对初始数据稠密集的整体适定性问题。《数学进展》，393：论文编号108057，2021年。[12] E. Chiodaroli。可压缩欧拉系统熵解适定性的一个反例。《双曲微分方程杂志》，11(3)：493–519，2014年。[13] E. Chiodaroli、C. De Lellis 和 O. Kreml。等熵气体动力学系统的整体适定性问题。《纯粹与应用数学通讯》，68(7)：1157–1190，2015年。[14] E. Chiodaroli、E. Feireisl、O. Kreml 和 E. Wiedemann。 $\mathcal{A}$-自由刚性及其在可压缩欧拉系统中的应用。《纯粹与应用数学年刊》（第*4*辑），196(4)：1557–1572，2017年。[15] E. Chiodaroli、O. Kreml、V. Mácha 和 S. Schwarzacher。具有光滑初始数据的可压缩欧拉方程可容许弱解的非唯一性。《美国数学学会汇刊》，374(4)：2269–2295，2021年。[16] G. Ciampa、G. Crippa 和 S. Spirito。无黏极限下二维欧拉方程涡量的强收敛。《理性力学与分析档案》，240(1)：295–326，2021年。[17] P. Constantin、W. E 和 E. S. Titi。关于欧拉方程解能量守恒的昂萨格猜想。《数学物理通讯》，165(1)：207–209，1994年。[18]S. Daneri、E. Runa 和 L. Székelyhidi, Jr.。欧拉方程直至昂萨格临界指数的非唯一性。《偏微分方程年刊》，7(1)：论文编号8，2021年。[19] C. De Lellis 和 L. Székelyhidi, Jr.。关于欧拉方程弱解的可容许性判据。《理性力学与分析档案》，195(1)：225–260，2010年。[20] T. Dębiec、J. Skipper 和 E. Wiedemann。等熵可压缩欧拉方程的整体凸积分方案。即将发表于《双曲微分方程杂志》。预印本：*arXiv:2107.10618*，2021年。[21]S. Demoulini、D. M. Stuart 和 A. E. Tzavaras。多凸弹性动力学中耗散测度值解的弱强唯一性。《理性力学与分析档案》，205(3)：927–961，2012年。[22] R. J. DiPerna 和 P. L. Lions。常微分方程、输运理论与索伯列夫空间。《数学发明》，98(3)：511–547，1989年。[23] R. J. DiPerna。守恒律的测度值解。《理性力学与分析档案》，88：223–270，1985年。

[24] R. J. DiPerna 和 A. J. Majda。二维不可压流正则化中的集中现象。《纯粹与应用数学通讯》，40(3)：301–345，1987年。[25] R. J. DiPerna 和 A. J. Majda。不可压流体方程弱解中的振荡与集中现象。《数学物理通讯》，108(4)：667–689，1987年。[26] G. L. Eyink。理想流体力学中的无黏性能量耗散。I. 傅里叶分析与局部能量传递。《物理学 *D*》，78(3-4)：222–240，1994年。[27] F. Fanelli 和 E. Feireisl。斜压Navier–Stokes系统的统计解。统计物理学杂志，181(1)：212–245，2020年。[28] E. Feireisl、P. Gwiazda、A. Świerczewska-Gwiazda 和 E. Wiedemann。可压缩纳维–斯托克斯系统的耗散测度值解。变分法与偏微分方程，55(6)：文章141，2016年。[29] E. Feireisl 和 M. Lukáčová-Medvidóvá。通过耗散测度值解研究等熵纳维–斯托克斯系统混合有限元–有限体积格式的收敛性。《计算数学基础》，18(3)：703–730，2018年。[30] E. Feireisl、C. Klingenberg 和 S. Markfelder。关于可压缩欧拉系统的低马赫数极限。工业与应用数学学会数学分析杂志，51(2)：1496–1513，2019年。[31] E. Feireisl、A. Novotný 和 H. Petzeltová。关于纳维–斯托克斯方程整体定义弱解的存在性。《数学与流体力学》，3(4)：358–392，2001年。[32] U. S. Fjordholm、R. Käppeli、S. Mishra 和 E. Tadmor。双曲系统守恒律近似熵测度值解的构造。《计算数学基础》，17(3)：763–827，2017年。[33] U. S. Fjordholm、S. Lanthaler 和 S. Mishra。双曲守恒律的统计解：基础。《理性力学与分析档案》，226(2)：809–849，2017年。[34] U. S. Fjordholm、K. Lye、S. Mishra 和 F. Weber。双曲系统守恒律的统计解：数值近似。《数学模型与应用科学方法》，30(3)：539–609，2020年。[35] U. S. Fjordholm、S. Mishra 和 E. Tadmor。关于测度值解的计算。《数值数学学报》，25：567–679，2016年。[36] U. S. Fjordholm、S. Mishra 和 F. Weber。不可压缩纳维–斯托克斯方程统计解的消失黏性极限。预印本：*arXiv:2110.04674*，2022年。[37] U.S. Fjordholm 和 E. Wiedemann。统计解与 Onsager 猜想。《物理学 *D*》，376/377：259–265，2018年。

[38] C. Foiaş。纳维–斯托克斯方程的统计研究。I。帕多瓦大学数学研讨会报告，48：219–348，1972年。[39] C. Foiaş。纳维–斯托克斯方程的统计研究。II。帕多瓦大学数学研讨会报告，49：9–123，1973年。[40] C. Foiaş、O. P. Manley、R. M. S. Rosa 和 R. M. Temam。纳维–斯托克斯方程与湍流。数学及其应用百科全书，第83卷。剑桥大学出版社，剑桥（英国），2001年。[41] C. Foiaş、R. M. S. Rosa 和 R. M. Temam。三维纳维–斯托克斯方程时变统计解的性质。格勒诺布尔傅里叶研究所年刊，63(6)：2515–2573，2013年。[42] C. Foiaş、R. M. S. Rosa 和 R. M. Temam。三维纳维–斯托克斯方程弱解时间平均的收敛性。统计物理学杂志，160(3)：519–531，2015年。[43] C. Foiaş、R. M. S. Rosa 和 R. M. Temam。三维纳维–斯托克斯方程平稳统计解的性质。动力学与微分方程杂志，31(3)：1689–1741，2019年。[44] I. Fonseca 和 S. Müller。 $\mathcal{A}$-拟凸性、下半连续性与杨测度。工业与应用数学学会数学分析杂志，30(6)：1355–1390，1999年。[45] U. Frisch。湍流：A. N. Kolmogorov 的遗产。剑桥大学出版社，剑桥（英国），1995年。[46] A. V. Fursikov。关于对应于三维纳维–斯托克斯系统的矩方程链解的唯一性。数学文集（新辑），134(176)(4)：472–495，1987年。[47] A. V. Fursikov。大雷诺数情况下矩方程链闭合问题。非经典方程与混合型方程，231–250，苏联科学院西伯利亚分院数学研究所，新西伯利亚，1990年。[48] A. V. Fursikov。大雷诺数情况下对应于三维纳维–斯托克斯系统的矩方程链闭合问题。苏联科学院通报，319(1)：83–87，1991年。[49] A. V. Fursikov 和 O. Y. Emanuilov。大雷诺数情况下弗里德曼–凯勒链闭合中近似的收敛速度。数学文集，185(2)：115–143，1994年。[50] D. Gallenmüller。理想流体的测度值低马赫数极限。即将发表于工业与应用数学学会数学分析杂志。预印本：*arXiv:2112.12715*，2021年。[51] D. Gallenmüller。具有一阶或二阶势的一般线性约束的 Müller–Zhang 截断。变分法与偏微分方程，60(3)：论文第118号，2021年。

[52] D. Gallenmüller 和 E. Wiedemann. 等熵欧拉系统测度值解的选取. 《微分方程杂志》, 271:979–1006, 2021年.[53]D. Gallenmüller 和 E. Wiedemann. 单原子气体方程的哪些测度值解由弱解生成？预印本：*arXiv:2109.09513*, 2021年.[54] S. S. Ghoshal, A. Jana 和 E. Wiedemann. 可能存在真空时等熵欧拉方程的弱强唯一性. 《偏微分方程及其应用》, 3(4): 第54号论文, 2022年.[55]P. Gwiazda, A. Świeczewska-Gwiazda 和 E. Wiedemann. 某些可压缩流体模型的测度值解的弱强唯一性.《非线性》, 28(11):3873–3890, 2015年.[56] E. Hopf. 关于流体力学基本方程的初值问题. 《数学通讯》, 4:213–231, 1951年.[57] E. Hopf. 统计流体力学与泛函演算. 《理性力学与分析杂志》, 1:87–123, 1952年.[58] J. Hounie, M. C. Lopes Filho, H. J. Nussenzveig Lopes 和 S. Schochet. 二维不可压无黏流流函数的先验时间正则性. 《非线性分析》, 35(7):871–884, 1999年.[59] P. Isett. 昂萨格猜想的证明. 《数学年刊》 *(第2辑)*, 188(3):871–963, 2018年.[60] S. Janson. 高斯希尔伯特空间. 剑桥数学丛书, 129. 剑桥大学出版社, 1997年.[61] L. V. Keller 和 A. A. Friedmann. 可压缩流体湍流运动的微分方程. 第一届国际应用力学大会论文集，代尔夫特, 395–405, 1924年.[62] D. Kinderlehrer 和 P. Pedregal. 梯度生成的杨测度的刻画. 《理性力学与分析档案》, 115(4):329–365, 1991 年 .[63] D. Kinderlehrer 和 P. Pedregal. 索伯列夫空间中序列生成的梯度杨测度. 《几何分析杂志》, 4(1):59–90, 1994年.[64] A. A. Kiselev 和 O. A. Ladyzhenskaya. 黏性不可压流体非定常问题解的存在性与唯一性.《苏联科学院学报：数学辑》, 21:655–680, 1957年.[65] A. N. Kolmogorov. 极大雷诺数下不可压黏性流体湍流的局部结构. 《苏联科学院通报》(新辑) 30:301–305, 1941年。

[66] S. Lanthaler, S. Mishra 和 C. Parés-Pulido. 不可压缩欧拉方程的统计解. 《数学模型与应用科学方法》, 31(2):223–292, 2021年.[67] J. Leray. 关于充满空间的黏性液体的运动. 数学学报, 63(1):193–248, 1934年.[68] M. C. Lopes Filho, A. L. Mazzucato 和 H. J. Nussenzveig Lopes. 二维湍流中的弱解、重整化解与涡量平方缺陷. 《理性力学与分析档案》, 179(3):353–387, 2005年.[69] G. Łukaszewicz. 二维纳维–斯托克斯方程的拉回吸引子与统计解. 离散与连续动力系统*B*辑, 9(3-4):643–659, 2008年.[70] G. Łukaszewicz 和 P. Kalita. 纳维–斯托克斯方程：导论及其应用. 力学与数学进展. 施普林格国际出版公司, 2016年.[71] G. Łukaszewicz, J. Real 和 J. C. Robinson. 耗散系统的不变测度与广义巴拿赫极限. 动力学与微分方程杂志, 23(2):225–250, 2011年.[72] G. Łukaszewicz 和 J. C. Robinson. 非自治耗散动力系统的不变测度. 离散与连续动力系统, 34(10):4211–4222, 2014年.[73] A. J. Majda 和 A. L. Bertozzi. 涡量与不可压缩流. 剑桥应用数学教材 , 27. 剑桥大学出版社 , 2001 年 .[74] S. Müller. 微观结构与相变的变分模型. 变分法与几何演化问题（切特拉罗，*1996*），数学讲义，*1713:85–210.*施普林格，柏林，1999年.[75] J. Neustupa. 可压缩正压流体的欧拉方程与纳维–斯托克斯方程的测度值解. 《数学通讯》, 163:217–227, 1993年.[76] H. J. Nussenzveig Lopes, C. Seis 和 E. Wiedemann. 关于无界涡量二维不可压缩流的零黏性极限. 《非线性》, 34(5):3112–3121, 2021年.[77] K. R. Parthasarathy. 度量空间上的概率测度. 学术出版社，纽约，1967年.[78] V. Scheffer. 一种时空紧支集无黏流. 《几何分析杂志》, 3(4):343–401, 1993年.[79] L. Székelyhidi, Jr. 和 E. Wiedemann. 理想不可压缩流体流动生成的杨测度. 《理性力学与分析档案》, 206(1):333–366, 2012年。

[80] L. Tartar. 补偿紧性及其在偏微分方程中的应用。非线性分析与力学：赫瑞-瓦特研讨会，第 *IV* 卷，数学研究札记，*39*：*136–212*，Pitman，波士顿（马萨诸塞州）、伦敦，1979年。[81] A. Y. Veretennikov 和 E. V. Veretennikova. 关于多元 Bernstein 多项式的偏导数。*Mat. Tr.*，18(2)：22–38，2015年。[82] A. M. Vershik 和 O. A. Ladyzhenskaya. 由纳维–斯托克斯方程定义的测度的演化，以及 E. Hopf 统计方程柯西问题的可解性。数学物理边值问题及函数论相关问题，第 9 卷。*Zap. Naučn.Sem. Leningrad. Otdel Mat. Inst. Steklov. (LOMI)*，59：3–24，1976年。[83] M. I. Vishik 和 A. V. Fursikov. 纳维–斯托克斯方程组的平移齐次统计解及无限能量个别解。*Sibirsk. Math. Zh.*，19(5)：1005–1031，1978年。[84] M. I. Vishik 和 A. V. Fursikov. 统计流体力学的数学问题。数学及其应用（苏联系列），9。Kluwer Academic Publishers，多德雷赫特，1988年。[85] R. Wagner 和 E. Wiedemann. 无界涡量空间中二维不可压缩欧拉方程的统计解。*J. Funct.Anal.*，284(4)：论文编号 109777，2023年。[86] E. Wiedemann. 不可压缩欧拉方程弱解的存在性。*Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*，28(5)：727–730，2011年。[87] E. Wiedemann. 流体动力学中的弱强唯一性。流体力学中的偏微分方程，伦敦数学学会讲义丛书，452：289–326，剑桥大学出版社，剑桥（英国），2018年。[88] L. C. Young. 广义曲线与变分法中可达到的绝对极小值的存在性。华沙科学与文学学会纪要，30：212–234，1937年。[89] C. Zhao、Y. Li 和 T. Caraballo. 演化方程的轨道统计解与李维尔型方程：抽象结果及应用。《微分方程杂志》，269(1)：467–494，2020年。[90]C. Zhao、Y. Li 和 Z. Song. 三维纳维–斯托克斯方程的轨道统计解：轨道吸引子方法。《非线性分析：现实世界应用》，53：论文编号 103077，2020年。[91] C. Zhao、Z. Song 和 T. Caraballo. 耗散欧拉方程的强轨道统计解与李维尔型方程。*Appl. Math. Lett.*，99：论文编号 105981，2020年。