arXiv:2303.04441v1 [math.DS] 8 Mar 2023

流行病与新闻传播过程相互作用的综合建模与分析

Madhu Dhiman、Chen Peng、Veeraruna Kavitha 和 Quanyan Zhu

摘要——**COVID-19大流行凸显了在线社交网络（OSN）在传染病传播中的作用。流行病严重程度的上升不仅增加了制定适当指导方针的必要性，也助长了虚假新闻条目的传播。新闻条目的受欢迎程度可能重塑公共卫生行为，并影响疫情过程。疫情过程与新闻条目的传播显然相互依存。本文构建了一个整合框架，以理解二者之间的相互作用。我们首先提出一种依赖人群的"饱和分枝过程"，持续追踪在线社交网络上热门新闻条目的传播。通过将新闻传播模型与SIRS流行病模型相结合，得到一个双时间尺度动力系统，用于分析整体系统。研究发现，在线性行为影响下会出现周期性感染模式，这解释了我们在大流行期间经历的感染与再感染浪潮。我们通过数值实验验证了研究结果，并利用Twitter和COVID-19数据集，借助整合模型重现历史感染曲线。**

I. 引言

随着在线社交网络（OSN）的兴起，假新闻变得日益普遍 [1], [2]。社交机器人常常出于营销或政治目的生成假新闻，以操纵公众意见和决策。假新闻的影响已经超越了对意见的影响，并进一步影响人们的行为。COVID-19便是这种影响的一个例子；例如，在大流行病期间，关于疫苗接种的假新闻在社交网络中广泛传播，对COVID-19感染的预防与缓解产生了不利影响。此外，大流行病的恶化反过来又加速了虚假新闻条目的创作与传播。

因此，假新闻的传播与流行病过程相互依存。有必要了解这两个过程之间的相互作用。已有一些研究讨论了信息与疫情传播之间的关系，包括 [3], [4], [5], [6]。这些研究重点考察了决策和认知对流行病传播的影响，并假设个体一旦接收到与疾病相关的信息，便会采取相同的预防措施。很少有研究明确对新闻传播动力学进行建模，以审视其与传染病传播之间的相互依赖关系。

我们提出一种整合模型，用于刻画和研究热门新闻条目的传播与流行病之间的相互作用

M. Dhiman 和 V. Kavitha 就职于印度理工学院孟买分校。电子邮箱：{214190003,vkavitha}@iitb.ac.in；C. Peng 和 Q. Zhu 就职于纽约大学电气与计算机工程系。电子邮箱：{cp3509, qz494}@nyu.edu。

（无论是虚假新闻还是真实新闻）。我们首先建立一种带饱和机制的种群依赖分枝过程，用于模拟新闻条目在在线社交网络上的传播及其被新话题取代的过程。这部分研究受到文献 [7], [8] 中关于总体种群规模依赖分枝过程的最新工作的启发。在线社交网络上的疫情相关帖子可能会病毒式传播（即大量副本被分享），也可能消亡。当某条新闻的传播达到饱和（即不再被转发）时，它便不再是热门新闻，随后会被同一主题的另一条新闻取代。我们采用基于随机逼近的方法，刻画新闻传播的动态生命周期。

其次，我们采用易感者—感染者—康复者—易感者SIRS仓室模型来研究传染病（例如， [9]）的传播。感染率取决于群体行为，而群体行为可能受到传播中的新闻的影响。我们将新闻传播模型整合到 SIRS 模型中，构建一个能够描述二者相互影响的整合框架。我们建立了一个双时间尺度动态过程，其中新闻条目的传播速度快于流行病；这是因为在线新闻的演变速度远快于现实人际接触。此外，在此情形下，较慢的过程取决于较快过程在一段时间内的演变，因此需要采用一种不同类型的双时间尺度过程。这个双时间尺度整合框架描述了新闻传播如何加剧流行病的蔓延（不采取干预措施时）。

我们分析新闻内容在不同作用下，对耦合系统动力系统性质的影响。具体而言，我们观察到在线性行为影响下会出现周期性感染模式，这是由动力系统中极限环的存在所致。这解释了我们在大流行病期间经历的感染与再感染浪潮。我们使用 Twitter 和 COVID-19 数据集验证所提出的模型。通过拟合并确定 COVID-19 感染两年期间新闻影响的时间，我们成功重现了历史感染曲线。

组织：在第II节中，我们介绍在线社交网络内容传播模型。第III节讨论 SIRS 模型。在第IV节中，我们探讨二者之间的相互作用，并分析不同V节下的动力系统。数值结果见第V节。

II. 新闻传播模型

假设在线社交网络上有M 条与流行病相关的推文、帖子或新闻条目。我们关注的是追踪它们

所产生的影响，这些影响可能会改变正在发生的流行病。当内容提供者设计好一条帖子后，她会将其分享给一组初始用户，这组用户称为**种子用户**。每位接收者会根据帖子引发的兴趣，将其分享给所有或部分好友。设 η_m 为第m条帖子的吸引力因子，即典型接收者将第m条帖子转发给每位好友的概率，且各好友之间相互独立。接收者的每位好友读到帖子后，也可以再次转发该帖子（概率为 η_m）。帖子会以这种方式持续传播。

在任意时刻，届时转发/分享的副本中，有些接收者可能尚未阅读帖子；我们将这类副本称为**活副本**，其余则称为**死副本**。用户一旦读过某条新闻条目，就不太可能再次对同一条新闻条目感兴趣。因此，只有持有活副本的用户才会负责分享帖子并继续传播。设在第k位用户转发帖子后，m号新闻条目的活副本数为$\Psi_{m,\,k}$。此外，设m号新闻条目的副本总数（包括活副本和死副本）为$\Theta_{m,\,k}$。那么，$m \le M$时，m号新闻条目的传播可表示如下：

$$\Psi_{m,k+1} = \Psi_{m,k} - 1 + \xi_{m,k+1} \text{ and } \Theta_{m,k+1} = \Theta_{m,k} + \xi_{m,k+1}. \quad (1)$$

在上述过程中，每个活副本都被视为一个父代，它可以生成多个额外的同一主题副本$\xi_{m,\,k+1}$，这类似于分枝过程中的随机数量后代。

在线社交网络用户很少会第二次阅读并转发同一条新闻条目。当用户将新闻条目转发给好友时，其中一些人可能过去已经收到过该帖子。因此，有效新闻转发的数量（即后代）取决于已经收到同一条新闻条目副本的人数，也就是副本总数。因此，我们需要采用依赖种群规模的分枝过程，才能准确地对新闻传播过程建模（如 [8], [7] 所示）。此外，与文献中研究的模型不同，我们需要采用后代数量取决于总人口的分枝过程。近期的 [8], [7] 研究了此类分枝过程，而我们考虑的是对其进行的一种更简单的改进。

我们分析与嵌入链相对应的离散时间动力学。嵌入链是指在转移时刻之后立即观测系统所得到的链。具体而言，我们研究（$\Psi_{m,\,k}$ 和$\Theta_{m,\,k}$）中给出的相关比值。我们将这些时刻称为**唤醒时刻**，因为此时用户会访问其时间线、阅读并转发新闻条目。前M个帖子（会影响正在进行的流行病）的影响通过以下比值来刻画：分别将活副本数与新闻条目被转发的次数之比，以及活副本数与副本总数之比记为：

$$\psi_{m,k} = \frac{\Psi_{m,k}}{k}, \quad \text{and} \quad \theta_{m,k} = \frac{\Theta_{m,k}}{k}, \text{ for any } k \ge 1.$$

回想一下，$\xi_{m,\,k+1}$ 是m条新闻条目由第k个用户转发给的好友有效数量。由（1）可知，

显然，上述量可以用 $\varepsilon_k := 1/k$ 按照以下迭代方式重写：

$$\begin{aligned} \psi_{m,k+1} &= \psi_{m,k} + \varepsilon_{k+1}\left(\xi_{m,k+1} - 1 - \psi_{m,k}\right) \\ \theta_{m,k+1} &= \theta_{m,k} + \varepsilon_{k+1}\left(\xi_{m,k+1} - \theta_{m,k}\right). \end{aligned} \quad (2)$$

它采用基于随机逼近的迭代格式（[10]）。这里需要注意，我们忽略新闻传播系统的时间尺度；在分析上述定义的（1）时，时间尺度不起作用。

下面我们构造一种恰当的随机迭代格式，通过（2）准确捕捉新闻传播动态——该格式必须捕捉常规新闻传播更新、以较新的新闻条目替代旧条目，以及持续跟踪新闻条目。

与 $\Psi_{m,\,k}$ 相关的更新有两种。第一种更新源于常规新闻传播，即由用户转发驱动。第二种更新发生在某条新闻条目停止传播、出现一条新的（主题相似的）新闻条目时。当旧新闻条目相关的有效转发减少、总副本数达到饱和水平时，就会出现这种情况；随着转发数 $\{\xi_{m,k}\}$ 减少，活跃副本数 $\{\Psi_{m,k}\}$ 随之减少（见（1））， 而总副本数 $\{\Theta_{m,k}\}$ 则趋于饱和。因此，若对于某个适当的 δ_θ，δ_ψ，$\Psi_{m,\,k} \le \delta_\psi$ 且 $\Theta_{m,\,k} \ge \delta_\theta$，则在第 k 个时期达到饱和；饱和点由下文给出的状态 $\mathscr{E}^2{}_{m,\,k}$ 表示。这里，$\mathscr{E}^1{}_{m,\,k}$ 表示第一个常规新闻条目更新状态。

$$\begin{aligned} \mathscr{E}^j_{m,k} &= \{(\psi_{m,k}, \theta_{m,k}) \in \mathscr{R}^j\}, \text{ for } j = 1, 2, \text{ where} \\ \mathscr{R}^2 &= \{(\psi, \theta) : 0 \le \psi \le \delta_\psi \text{ and } \theta \ge \delta_\theta\}, \quad \mathscr{R}^1 = (\mathscr{R}^2)^c. \end{aligned}$$

我们关注跟踪性能，因此ε_k 必须替换为常数 $\varepsilon > 0$（2）中的（例如，[10]）。为了实现新闻条目的饱和替代，我们引入额外的或虚拟迭代项，用一个新的新闻条目[1]替换该新闻条目；一旦某个旧新闻条目达到饱和（例如 m），即 $1_{\mathscr{E}^2_{m,\,k}} = 1$，额外的迭代项（在下文的（ -3 ）中使用常数C）会继续降低相应的总人口，直至其接近零（即低于 δ_θ）。因此，总体更新方程如下（对每个m）：

$$\begin{aligned} \psi_{m,k+1} &= \psi_{m,k} + \varepsilon\left(\mathscr{J}_{m,k}\left(\xi_{m,k+1} - 1 - \psi_{m,k}\right) - \mathscr{J}'_{m,k}(\psi_{m,k})\right), \\ \theta_{m,k+1} &= \theta_{m,k} + \varepsilon\left(\mathscr{J}_{m,k}\left(\xi_{m,k+1} - \theta_{m,k}\right) - \mathscr{J}'_{m,k}(C\theta_{m,k})\right), \\ &\text{where } \mathscr{J}_{m,k} = 1_{\mathscr{E}^1_{m,k}} \text{ and } \mathscr{J}'_{m,k} = 1_{\mathscr{E}^2_{m,k}}. \end{aligned} \quad (3)$$

ODE approximation

与各种频道/热门话题相关的新闻条目动态彼此独立。因此，只需分别分析每个帖子的传播即可。任取m。令 $\mathscr{F}_k := \sigma((\psi_{m,\,s},\ \theta_{m,\,s}) :\ s \le k)$ 为由第m个帖子的动态截至时刻k所生成的σ代数。注意，相应的条件期望为：

$$E_k\left[\mathscr{J}_{m,k}\left(\xi_{m,k+1} - 1 - \psi_{m,k}\right) + \mathscr{J}'_{m,k}(-\psi_{m,k})\right] \quad (4)$$

$$= \mathscr{J}_{m,k}\left(\mathscr{M}(\theta_{m,k}) - 1 - \psi_{m,k}\right) + \mathscr{J}'_{m,k}(-\psi_{m,k}), \quad (5)$$

[1]我们假设社交网络支持同时发布多个帖子，并且总有一个更新的帖子可以替代刚刚饱和的帖子。

其中 $E_k[\xi_{m,k+1}] := \mathscr{M}(\theta_{m,\ k})$。在以下假设下，应用随机逼近理论，我们立即得到如下常微分方程近似结果：

A.1 对于任意 $\lambda \in [0.5,1]$，存在一个常数 ρ 使得$|\mathscr{M}(\theta) - \mathscr{M}(\theta')| \le \rho|\theta - \theta'|^{\lambda}$.

A.2 $P(\xi_{k+1} \le \rho|\theta_k) = 1$ 对于任意 θ_k 以及某个 $\rho < \infty$.

定理 1：假设 A.1-A.2。令 $\phi(\varepsilon)$ m,k :=$(\psi_{m,k},\theta_{m,k})$ 表示 ε 处的新闻传播轨线 (3)，并令$\phi(\tau)$:=$(\psi(\tau)\ \theta(\tau))$ 为以下常微分方程的解：

$$\begin{aligned}
\dot{\psi}_m(\tau) &= \mathscr{J}_m(\phi)\Big(\mathscr{M}(\theta_m) - 1 - \psi_m(\tau)\Big) + \mathscr{J}_m'(\phi)(-\psi_m(\tau)),\\
\dot{\theta}_m(\tau) &= \mathscr{J}_m(\phi)\Big(\mathscr{M}(\theta_m) - \theta_m(\tau)\Big) + \mathscr{J}_m'(\phi)(-C\theta_m(\tau)),\\
\mathscr{J}_m'(\phi) &= 1_{\{\theta>\delta_\theta,\ \psi<\delta_\psi\}},\ \text{and},\quad \mathscr{J}_m(\phi) = 1 - \mathscr{J}_m'(\phi). \qquad (6)
\end{aligned}$$

对于任意 m，当 $\varepsilon \to 0$时，轨线 (3) 按以下意义收敛到上述常微分方程的解：对于任意有限时间 T,

$$P\left(\sup_{k\le T/\varepsilon}\left|\phi_{m,k}^{(\varepsilon)} - \phi(\varepsilon k)\right| > \delta\right) \to 0 \text{ as } \varepsilon \to 0, \qquad (7)$$

当初始条件相等时，$\phi(0) = \phi_0^{(\varepsilon)}$.**证明**见附录。 □

为描述前文讨论的再次转发所导致的饱和效应，我们考虑以下线性模型：

$$\mathscr{M}(\theta) = \eta - a\eta\theta = \eta(1 - a\theta), \qquad (8)$$

其中 $(1 - a\theta)$ 表示有效转发预期数量的减少。转换因子 a 显然取决于在线社交网络，并且对所有帖子都相同。

常微分方程解与病毒式传播帖子的影响

由（6）不难得出 $\psi_m(t) \to 0$；也就是说，当 $\mathscr{M}(0) = \eta < 1$时，帖子会立即消失。只有当 $\mathscr{M}(0) > 1$时，帖子才会爆发式增长并实现病毒式传播（即副本数量显著增加）。下面我们推导常微分方程（6）的解，以捕捉其对流行病可能产生的影响。常微分方程（6）的右端分段连续（分为两个状态），因此其解是广义意义下的解（即对于几乎所有 τ，它都满足该常微分方程）。我们先分别推导各个状态下的解，再通过适当的初始条件将它们连接起来，最后推导该解的渐近行为。

假设常规更新阶段（当 $\mathscr{J}(\phi) = 1$）在 τ_1结束；当 ψ 低于 δ_ψ时，就会发生这种情况。因此，下一个（替代）阶段的初始条件为： $\psi(0) = \delta_\psi$且 $\theta(0) = \theta(\tau_1)$。现在，$\dot{\psi}(\tau) = -\psi(\tau)$，且 $\dot{\theta}(\tau) = -C\theta(\tau)$。因此，解为： $\psi(\tau) = \delta_\psi e^{-\tau}$，且 $\theta(\tau) = \theta(0)e^{-C\tau}$.

下一个状态以 $\theta(0) = \delta_\theta$和 $\psi(0) = \psi(\tau_2)$ 开始，因为当 θ 降至 δ_θ以下（例如在 τ_2时），替代阶段便告结束。由 (6) 和 (8) 可得，$\dot{\psi}(\tau) = \eta - a\eta\theta(\tau) - 1 - \psi(\tau)$，且 $\dot{\theta}(\tau) = \eta - a\eta\theta(\tau) - C\theta(\tau)$。通过求解这些方程，

$$\begin{aligned}
\psi(\tau) &= -\kappa_1 e^{-(a\eta+1)\tau} + \kappa_2 e^{-\tau} + \kappa_3,\ \kappa_1 = \eta - (a\eta+1)\delta_\theta,\\
\kappa_2 &= \psi(0) + a\eta^2 - (a\eta+1)\delta_\theta + 1,\ \text{and}\ \kappa_3 = \eta - 1 - a\eta^2,\\
\theta(\tau) &= \left(\delta_\theta - \frac{\eta}{a\eta+1}\right)e^{-(a\eta+1)\tau} + \frac{\eta}{a\eta+1}.
\end{aligned}$$

该解收敛到在两种状态之间交替的极限环（见图2）。通过求解适当的不动点方程，并将状态 1 的初始条件设为$(\delta_\psi, \theta(0))$，将状态 2 的初始条件设为$(\psi(0)\ \delta_\theta)$，我们可以求得该极限环的极限值（详见附录）。

我们假设流行病会在一段时间窗口内受到新闻传播的影响，并通过极限环上总人群比例达到的最大值来刻画这种影响，该最大值由26式给出，见附录：

$$\theta_\infty^*(\eta) := \lim_{k\to\infty}\max_{\tau'\in L_{C_k}}\theta(\tau') \approx \frac{\eta}{a\eta+1}, \qquad (9)$$

其中L_{C_k} 表示第k个周期。

III. 流行病模型：疾病传播

我们考虑一个由三类子人群组成的流行病人群：感染者（I）、康复者（R）和易感者（S）。易感者子人群中的人一旦接触任何感染者，就可能被感染；而从感染中康复并对疾病产生免疫力的人则属于康复者子人群（在失去免疫力之前一直保持康复状态）。

我们考虑一个 SIRS仓室模型，用以刻画相关亚种群的动态。令$i(t)$、$s(t)$和$r(t)$分别表示t时感染者、易感者和康复者占人群的归一化比例。注意，对所有$t \ge 0$，都有$i(t) + s(t) + r(t) = 1$。

传染病以速率 β 传播，而感染者以速率 α 康复。此外，我们还考虑康复者中有比例p_r 获得免疫，而康复者（以及已获得免疫的亚种群）会以l_i的速率失去免疫力。因此，动态过程描述如下：

$$\frac{di}{dt} = i\big(\bar{\beta}(1 - i - r) - \alpha\big), \qquad \frac{dr}{dt} = (i\alpha p_r - r l_i). \qquad (10)$$

接下来，我们将求出上述动态过程在任意初始条件（初始条件）$(i_0,r_0) \in B^{(2)} := \{(i,r) \in [0,1]^2 : i + r \le 1\}$下的渐近行为（证明见附录）。

定理 2：子人群规模 $(i(t),r(t))$ 由（10）给出，对于任意初始条件，均收敛到唯一极限，该极限属于$B^{(2)}$：

(i) 当 $\beta < \alpha$ 时，流行病最终会被消灭，即，$(i(t),r(t)) \to (0,0)$ 当 $t \to \infty$;

(ii) 当 $\beta > \alpha$ 时，流行病不会被消灭，即，$(i(t),$ $r(t</style)) (i^*,r^*)$，其中

$$i^* = \frac{\bar{\beta} - \alpha}{\bar{\beta}c_i^r} \text{ and } r^* = \frac{\alpha p_r}{l_i}i^*, \text{ where, } c_i^r := 1 + \frac{\alpha p_r}{l_i}. \qquad (11)$$

□

因此，当动力学仅由流行病驱动时，子人群规模会收敛到一个唯一向量（若极限为 (0,0)，则为无病状态）。然而，在传播中的新闻条目的影响下，情况并非总是如此。我们将看到极限环、多重极限等现象的存在。

IV. 综合双时间尺度系统

感染率 β （10）表示单位时间内被一名感染者传染的易感者数量（例如， [11]）。在经典的易感-感染-康复-易感模型中，该比率被视为常数。但在现实中，该比率

会随时间变化，并且高度依赖人类活动。例如，它取决于接触频率以及人们采取的预防措施。此外，$\beta(t)$（时间t时的比率）在很大程度上取决于时间t时可获得的信息。例如，传播有关预防措施的错误信息的病毒式传播的新闻条目（例如关于社交距离、佩戴口罩，或淡化疾病严重性的新闻条目）可能会导致$\beta(t)$升高（因为这些新闻条目会助长鲁莽行为）。同样，政府机构制定的卫生政策（例如建议居家）可以让人们更加谨慎，并降低$\beta(t)$。

另一方面，感染水平的上升可能会引发人群恐慌。因此，人们会更加积极地寻找相关的新闻和信息。因此，显然，式η（8）中的吸引力因子$i(t)$可以取决于感染者子群体的规模，或时间t时的感染水平。本文的主要目的是研究这些相互作用，并分析由此产生的渐近结果。

新闻条目的生命周期通常显著短于传染病的生命周期。随着时间推移，流行病更容易受到人们在在线社交网络上寻求新闻和信息这一行为的影响。为对此类相互作用建模，我们通过常微分方程连接这两个动力过程，考虑一种不同类型的双时间尺度系统；如下文所述，（慢速）流行病常微分方程受到（快速）新闻传播常微分方程的极限环（9）的影响。令τ表示新闻传播快速时间尺度的时间指标，t表示流行病的时间指标。

我们假设，任意时刻对流行病的影响取决于刚刚结束的热门话题（例如病毒式传播的新闻条目）的结果。由于新闻条目的传播速度更快，可以用最新热门话题在极限环上的总人口比例最大值来刻画上述影响，$\theta^*_\infty(\eta)$如式（9）所示。请注意，我们允许这一快速时间极限通过t时刻的流行病状态η而变化。

对新闻条目的兴趣程度各不相同，可以通过建模η_m来刻画，因此，预期有效转发量取决于i（见式（8）），$\mathscr{M}_m(\theta;i)=\eta_m(i)-a\eta_m(i)\theta$.

人群的响应显然取决于新闻的内容。此外，也取决于该地区当前的感染水平。这一因素通过敏感性参数$\{w_m(i)\}$来刻画；总的来说，由于第$w_m(i)\theta^*_\infty(\eta(i))$条新闻的传播，感染率会增加相应的量。对于传播错误信息的帖子，$w_m(i)$为正值；对于真实内容，则为负值。时刻t的总体感染率为（见式（9））：

$$\begin{aligned}\beta(t)=\beta(i(t)) &= \bar\beta+\sum_{k=1}^{M} w_m(i(t))\theta^*_\infty(\eta(i(t))),\\ &= \bar\beta+\sum_{m=1}^{M} w_m(i(t))\frac{\eta_m(i(t))}{a\eta_m(i(t))+1}. \quad (12)\end{aligned}$$

如上所示，$\beta(t)$仅通过$i(t)$依赖于时间，因此此后我们将其称为$\beta(i)$。我们假设新闻条目的吸引因子分为两个等级，即对任意m，$\eta_m\in\{\eta,\bar\eta\}$。特定新闻条目要么引发大量关注并实现病毒式传播（即当$\eta_m=\bar\eta$时），要么消亡而不会产生影响（即当$\eta_m=\eta$时）。因此，某个 ost 的影响非零时，由（9）捕获，且仅当p y $\eta_m=\bar\eta$. So,

$$\bar w(t):=\sum_{m=1,\eta_m=\bar\eta}^{M} w_m(i(t))=\bar w(i(t)), \quad (13)$$

表示某一时刻所有病毒式传播帖子的综合影响（取决于感染水平）。我们假设该因子是确定性的[2]，，且仅取决于i。虚假新闻条目和真实新闻条目可能在同一时刻共存并共同传播，前者会对疾病传播产生不利影响，而 $\bar w(i)$是（13）中的总体影响。

将上述因素纳入（10），可得到一个刻画这两个过程相互作用的合并常微分方程：

$$\begin{aligned}\frac{di}{dt} &= i(\beta(i)(1-i-r)-\alpha) \quad (14)\\ \frac{dr}{dt} &= (i\alpha p_r-rl_i),\ \text{with, } \beta(i)=\bar\beta+\bar w(i)\frac{\eta(i)}{a\eta(i)+1}.\end{aligned}$$

该合并常微分方程有助于分析各种情景。下面将介绍若干重要情景。首先考虑这样一种情形：人群对新闻条目的兴趣随感染水平上升。在此之前，我们先给出几个定义。

渐近行为：我们将利用二维常微分方程的结果分析合并常微分方程（14），以理解其时间极限行为。当动力学从$B^{(2)}$开始时，即对于任意初始条件（i.c.），$(i_0,r_0)\in B^{(2)}$:

局部吸引子（LA）：若存在一个邻域$\mathscr{N}$，使得对于所有初始条件$(i_0,r_0)\in\mathscr{N}$，(i^*,r^*)是局部吸引子，则称该点为局部吸引子。

全局点吸引子（GPA）在此状态下，当$t\to\infty$时，常微分方程$(i(t),r(t))$的解收敛到$B^{(2)}$中的一个平衡点，具体取决于初始条件；最多存在两个平衡点，其中一个是(0,0)。

闭轨或点极限（CoP）在此，$(i(t),r(t))$会根据初始条件收敛到两个点极限之一（其中一个是无病鞍点；另一个是局部吸引子），或者收敛到一个闭轨（极限环）。

主要闭轨（PCo）：对于某些初始条件集合，$(i(t),r(t))$会收敛到无病状态(0,0)，该状态是一个鞍点。对于其余情况，动力学要么收敛到不稳定平衡点周围的闭轨，要么收敛到[3]不稳定平衡点本身。

A. 新闻兴趣增加（*I3N*）

对相关新闻或信息的阅读和转发兴趣会随着感染水平的提高而增加，$i_\circ$在这种情况下，$\eta(i)$随着i增加，因此我们令吸引力因子采用线性形式，即$\eta(i)=\bar\eta(pi+q)$，其中p、$q\geq 0_\circ$我们令对新闻的响应与i无关；即$w(i)\equiv\bar w_\circ$该情形的综合模型（14）为：

[2]热门话题的数量M很大，可以利用大数定律来证明这一假设的合理性。

[3]我们坚信它不会收敛到不稳定点（这一点在文献中也已有充分认识，例如[12]），但要完成这一证明还需要满足某些技术条件，我们正在努力证明这一结论。

$$\frac{di}{dt} = i\left(\left(\bar{\beta} + \bar{w}\frac{\bar{\eta}(pi+q)}{a\bar{\eta}(pi+q)+1}\right)(1-i-r) - \alpha\right). \qquad (15)$$

令 $\beta_0 := \beta(0) = \beta + \bar{w}\bar{\eta}q/(a\bar{\eta}q+1)$ 表示$i=0$时的感染率。该情形的渐近分析取决于 β_0，如下所示（证明见附录）：

定理 3：考虑式 (15) 给出的 I3N 情形。(i) 当 $\beta_0 < \alpha$ 时，无病状态 (0,0) 是一个局部吸引子。若此外满足 $\bar{}$，并且 $\bar{w} < 0$ 或 $\beta a + \bar{w} - \alpha a < 0$，则系统动态将趋于无病 GPA 状态，且 (0, 0) 是唯一的极限。(ii) 当 $\beta_0 > \alpha$ 时，系统动态将趋于 CoP 状态，(0, 0) 和 (i^*, r^*) 是两个可能的极限，其中

$$i^* = \frac{c_b + \sqrt{c_b^2 - 4c_a c_c}}{-2c_a}, \; r^* = \frac{\alpha p_r}{l_i} i^* \text{ with,}$$

$\bar{}$接触率$_b$ = (β易感者 + $\bar{}$转为 − α感染者)η̄患病率 − 接触率$_i^r$(β易感者 + $\bar{}$转为)η̄康复率 − 接触率$_i^r$β,

$c_a = -c_i^r(\bar{\beta}a + \bar{w})\bar{\eta}p$，并且，$c_c = (\bar{\beta}a + \bar{w} - \alpha a)\bar{\eta}q + \bar{\beta} - \alpha$. □

备注： 当真实帖子实现病毒式传播（$\bar{w} < 0$）时，疾病更容易得到遏制：考虑到 $\beta_0 < \alpha$，但 $\alpha < \beta$；根据定理 2，在 SIRS 动力学下疾病无法被治愈；然而，正如 (i) 部分所证实的，有真实新闻时疾病会受到遏制。

同样，虚假帖子传播误导性信息时，疾病可能会进一步延长（例如，若 $\beta_0 > \alpha > \beta$）。

考虑和不考虑内容影响时，极限感染水平有所不同。

在第 (ii) 部分，动力学趋于 CoP 状态，此时 (i^*, r^*) 是一个局部吸引子。从技术上讲，系统也可能收敛到极限环或 (0,0)（这是一个鞍点）；不过，通过若干数值示例（见图 1），我们发现动力学总是收敛到 (i^*, r^*)。我们没有观察到 I3N 场景下的周期行为。

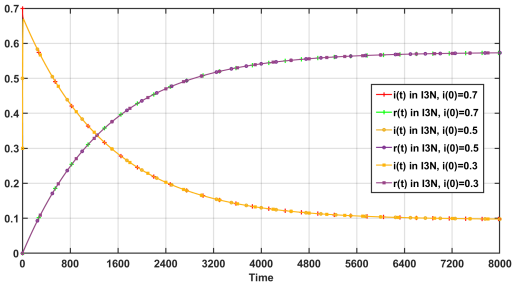


图 1。轨线趋于(i^*, r^*)

B. 新闻增强行为影响（*IBIN*）

当个体阅读有关流行病的新闻时，其反应可能取决于感染水平。例如，当感染水平$i(t)$较高时，宣传佩戴口罩的帖子可以通过鼓励个体佩戴口罩来产生积极影响。感染水平较低时，同一个体可能不会遵循这一建议。类似地，个体对假新闻的反应也可能有所不同。因此，个体的行为可能取决于感染水平。这里，我们考虑这样一种情景：人们对新闻条目的兴趣保持不变，但其行为会受到新闻的影响。这类情景可以通过令 $\eta(i) \equiv 1$ (以及 $a = 0$)，并令 $\bar{w}(i) = ui$ （线性

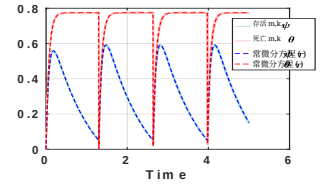


图 2。极限环：新闻传播过程

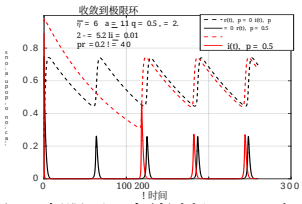


图 3。极限环：合并过程。IBIN 和 I3N&BIN，$\bar{u}(1 - i^* - c_i^r i^*) > \beta + l_i/i^*$

影响）。当新闻条目主要为真实内容时，常数 u 为负；否则为正。该情景下的合并常微分方程（14）如下：

$$\frac{di}{dt} = i\left((\bar{\beta} + ui)(1-i-r) - \alpha\right), \text{ and } \frac{dr}{dt} = (i\alpha p_r - rl_i). \qquad (16)$$

我们在附录中给出以下结果及其证明。

定理4： **[极限环与再感染]** 考虑 IBIN 情景下的合并常微分方程（16）。$\bar{}$ (i) 当 $\beta < \alpha$时，(0，0) 是一个局部吸引子。此外，若 $u < \alpha c_i^r$，则系统处于无病 GPA 状态，且 (0，0) 是唯一的极限。$\bar{}$ (ii) 当 $\beta > \alpha$时，疾病未必会被根除，并且，

(a) $\bar{}$若$u(1 - i^* - c_i^r i^*) \le \beta + l_i/i^*$，则系统处于 CoP 状态，可能的极限为 $\{(0, 0)、(i^*, r^*)\}$ 其中：

$$i^* = \frac{(u - \bar{\beta}c_i^r) + \sqrt{(\bar{\beta}c_i^r - u)^2 + 4uc_i^r(\bar{\beta} - \alpha)}}{2uc_i^r} \text{ and } r^* = \frac{i^*\alpha p_r}{l_i},$$

$\bar{}$ (b) 若$u(1 - i^* - c_i^r i^*) > \beta + l_i/i^*$，则系统处于 PCo 状态，其中 $(i(t), r(t))$ 最终会沿周期轨道演化，或趋于 (0，0) 或 (i^*, r^*)。□

备注： 在 CoP 状态下，利用著名的 Bendixson 判据，可以证明当另外满足 $\max\{u/2, \alpha\} < \bar{\beta} < \alpha + l_i$. 时不存在极限环。事实上，与 I3N 情形一样，在我们所有的数值研究中都未观察到极限环，动力学仅收敛于局部吸引子（i^*, r^*）。

当人们对新闻的兴趣不随感染水平变化时，根除疾病的可能性保持不变（见定理2 和4）。无病状态$(0,0)$$\bar{}$是局部吸引子的充要条件是 $\beta < \alpha$，无论$u < 0$ （即真实新闻占主导）还是$u > 0$ （即假新闻占主导）。

然而，如果疾病持续存在，当人群活动显著受到$\bar{}$新闻影响时，极限环便会出现（参见定理 4 以及 $u(1 - i^* - c_i^r i^*) > \beta + l_i/i^*$）。这一结果解释了感染波（另见图 3）：a）当人们变得鲁莽，且在假新闻条目的影响下，这种鲁莽行为随着感染水平上升而加剧时 $(u > 0)$，感染会急剧上升至高水平，易感亚群很快变得微不足道；b）随后感染开始减少，部分康复人群也开始失去免疫力；然而，c）一旦易感亚群达到适当规模，感染便会再次急剧上升，这同样是由于流传的假新闻条目诱发了人们鲁莽的活动。

C. 兴趣增加与行为影响（*IBIN&I3N*）

现在我们考虑这样一种情形：人群更积极地寻求新闻，并且当感染水平上升时，其行为也会受到新闻影响。此情形的合并常微分方程（14）形式如下：

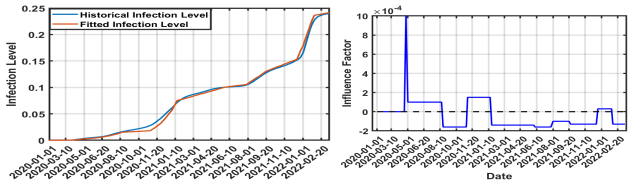
$$\frac{di}{dt} = i\left(\left(\bar{\beta} + (\bar{w} + ui)\frac{\bar{\eta}(pi+q)}{a\bar{\eta}(pi+q)+1}\right)(1-i-r) - \alpha\right).$$

与 IBIN 情景类似，IBIN 情景中既可能出现极限点，也可能出现极限环。图3展示了一个这样的例子，进一步说明 IBIN（$p = 0$）与 IBIN&I3N（$p = 0.5$）情景之间的差异：当 $\bar{\eta}_{IBIN\&I3N} = \bar{\eta}_{IBIN} q = \bar{\eta}$ 且当 $\bar{w}_{IBIN\&I3N} = \bar{w}\,\bar{\eta}/(a\bar{\eta}+1)$ 时。其他参数相同时，两个模型都会收敛到同一个极限环。换言之，只要参数适当平衡，渐近结果就不取决于人们是否以更高的兴趣消费内容。

V. 数值实验

本节使用 COVID-19 的历史 Twitter 数据和感染数据集，验证新闻与疫情传播之间的关系。现实中的新冠疫情会随时间变化，具有非平稳性。基于所提出的框架，我们首先利用 I3N 情景的动力学，模拟 2020 年 1 月 1 日至 2022 年 3 月 15 日的新冠肺炎感染水平轨线。我们在离散时刻注入具有不同影响因素的真实或虚假新闻条目，并获得影响因素的轨线 $\{\bar{w}\}$。令 $\bar{\eta} = 10, p = 0.7, q = 0.2, a = 1.2, \beta = 0.0002, \alpha = 0.0001, i(0) = 0.00001, p_r = 0.2, l$图4(a) 表明我们成功模拟了历史感染水平。图4(b) 展示了不同时间注入的新闻所对应的影响因素。

从图4(a)可以看出，2020年1月15日至3月10日，新冠疫情的传播起步缓慢。随后，新冠疫情迅速暴发，感染水平上升得更快，并催生了大量疫情相关新闻。由于疫情突然传播，加之恐慌人群的特点，许多新闻条目都是假新闻，并在图4(b)所示的2020年3月10日至5月1日期间对疫情产生了重大影响。当感染水平上升到显著程度时，公共卫生机构会努力传播真实新闻，包括宣传预防措施和报道疫情状况。真实新闻有助于降低流行病的增长率，并对疫情产生负面影响因素。假新闻与真实新闻之间的竞争持续了多个周期，如图4(b)所示，时间范围为2020年5月1日至2021年1月10日。在图4(b)所示的2021年1月10日至11月10日期间，真实新闻占据主导地位后，公众逐渐习惯疫情并忽视防护措施，致使疫情再次广泛传播，并在随后2021年11月10日至2022年1月1日期间催生更多假新闻。图4(b)所示影响的阶梯式变化也这也意味着流行病动态与新闻传播之间存在时间尺度分离。



(a) 历史感染水平与拟合感染水平 (b) 通过拟合得到的影响因素 图 4. 病例总数随时间的变化：对历史 COVID 数据集进行拟合

我们分析了 2020 年 9 月 1 日至 2021 年 2 月 1 日的 COVID 相关 Twitter 数据集，并采用基于BERT的方法计算假新闻的占比，以印证关于流行病与假新闻相互作用的研究结果。图5 显示，Twitter 上假新闻的占比与历史感染率呈正相关。红色星号表示各离散时间点上 Twitter 假新闻的占比。蓝线表示历史感染率。流行病加剧时，会引发公众恐慌并推动假新闻传播，因此 Twitter 上假新闻的占比会上升。然而，当流行病的势头减弱时，假新闻的占比也会下降。

尽管长期来看存在非平稳性，对综合动力学的理解仍能支持短期预测。

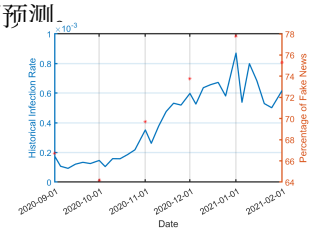


图 5. 历史感染率与 Twitter 上假新闻占比之间的关系。红色星号表示 Twitter 上假新闻的占比，蓝线表示历史感染率。

VI. 结论

在本研究中，我们提出了一种双时间尺度综合流行病模型，将在线社交网络（OSN）中新闻条目的传播整合到分舱流行病模型中，旨在研究假新闻对传染病传播的影响。我们分析了在针对假新闻采取不同应对行为时，耦合动态系统的平衡行为。我们发现，当行为响应与感染水平呈线性相关时，流行病会呈现周期性模式。我们的模型解释了 COVID-19大流行期间出现的多波感染与再感染现象。我们使用 Twitter 和 COVID-19 数据集验证了所提出的模型。发布适当的真实信息有助于遏制疾病的严重传播。错误信息会延长流行病持续时间。所提出的模型与历史 COVID-19 数据集成功拟合，表明将人类行为纳入流行病模型，为预测疫情过程的发展趋势和评估公共卫生政策提供了一种颇具前景的方法。受这一观察结果启发，我们未来的工作将聚焦于干预机制和政策的优化

设计，以减轻大流行病的影响。

过去我们见证了许多大流行病（包括 COVID-19），由于新突变体的特征随时间变化，这些疾病呈现出自然的周期性行为。然而，在当前大流行病中，在线社交网络的存在促进了信息在全球范围内的快速传播，产生了不同的影响；本文旨在捕捉这一方面。更确切地说，本文证明，即使突变体的特征没有变化，感染和再感染仍然会发生，而这主要受到流通信息的影响。

参考文献

[1] Y. Benkler、R. Faris 和 H. Roberts，网络宣传：美国政治中的操纵、虚假信息与激进化，2018。[2] S. Kapsikar、I. Saha、K. Agarwal、V. Kavitha 和 Q. Zhu，“通过集体标记遏制假新闻：分枝过程分析”，*IEEE Control Systems Letters*，第 5 卷，第 6 期，页 2108–2113，2020。[3] C. Granell、S. G´omez 和 A. Arenas，“多层网络上的竞争性传播过程：认知与流行病”，*Physical review E*，第 90 卷，第 1 期，页 012808，2014。[4] S. Liu、Y. Zhao 和 Q. Zhu，“流行病中的从众行为：一种动力学耦合演化博弈方法”，*Dynamic Games and Applications*，页 1–31，2022。[5] Y. Huang 和 Q. Zhu，“流行病传播与人类决策的博弈论框架：综述”，*Dynamic Games and Applications*，页 1–42，2022。[6] Q. Zhu、E. Gubar 和 E. Altman，“流行病建模与控制的动态博弈专题导言”，*Dynamic Games and Applications*，页 1–6，2022。[7] K. Agarwal 和 V. Kavitha，“利用随机逼近研究分枝过程的新结果”，*arXiv preprint arXiv:2111.14527*，2021。[8] A. Khushboo 和 V. Kavitha，“ 饱和总人群依赖型分枝过程与病毒市场 ”，*CDC*，2022。[9] A. Lahrouz、L. Omari 和 D. Kiouach，“确定性与随机非线性 SIRS 流行病模型的全局分析”，*Nonlinear Analysis: Modelling and Control*，第 16 卷，第 1 期，页 59–76，2011。[10] A. Benveniste、M. M´etivier 和 P. Priouret，自适应算法与随机逼近。Springer Science & Business Media，2012。[11] V. Singh、K. Agarwal、V. Kavitha 等，“采用早期疫苗应对持续肆虐的致命大流行病的演化疫苗接种博弈”，载于*EAI* 国际性能评估方法与工具会议。Springer，2021，页 185–206。[12] F. Verhulst，非线性微分方程与动力系统。Springer Science & Business Media，2006。[13] K. Ghorbal 和 A. Sogokon，“正向不变集的刻画：归纳方法与拓扑方法”，*Journal ofSymbolic Computation*。[14] J. J. Palis 和 W. De Melo，动力系统几何理论：导论。Springer Science & Business Media，2012。

附录

定理 1的证明： 考虑一般系统 (3)，其中假设 **A.1** 和 **A.2** 均成立。我们证明，由 (3) 给出的方程可以用常微分方程 (6) 的解来近似。我们使用 [10,定理 9，第 232]。

定理 9，第 [10, 页所需的假设。 232] 为此，我们需要证明相关假设均成立，下面用我们的记号将其重述为**B.1**-**B.4**。考虑如下类型的随机迭代格式：

$$\phi_{k+1} = \phi_k + \varepsilon H(\xi_{k+1}, \phi_k). \tag{17}$$

如果上述方案满足**B.1**-**B.4**，则 [10, 定理 9，第 232]页适用。

B.1 存在一个$P\phi$ 转移概率$P\phi(\xi, A)$族，使得对于任意博雷尔子集A，有

$$P[\xi_{n+1} \in A \mid \mathscr{F}_n] = P_{\phi_n}(\xi_n, A), \tag{18}$$

其中，$\mathscr{F}_n = \sigma(\phi_0, \xi_0, \xi_1, \ldots\ldots, \xi_n)$ 是一个 σ-代数。由此可知，元组 (ξ_k, ϕ_k) 构成一个马尔可夫链。

B.2 对于D的任意紧子集Q，存在常数C_1, q_1，使得对于所有 $\phi \in Q$，均有

$$\|H(\xi, \phi)\| \le C_1(1 + |\xi|^{q_1}). \tag{19}$$

B.3 存在一个定义在D上的函数 h_1，并且对每个 $\phi \in D$，存在一个函数 $\nu_\phi(\cdot)$，使得

a) h_1 在D上局部利普希茨。

b) $(\mathrm{I} - \mathrm{P}\phi)\nu_\phi(\xi) = \mathrm{H}(\xi, \phi) - \mathrm{h}_1(\phi)$，其中 I 是与 $\mathrm{P}\phi$ 同阶的单位矩阵。c) 对于 D 的所有紧子集 Q，存在常数 C_2，$\mathrm{C}_3, \mathrm{q}_2, \mathrm{q}_3$ 和 $\lambda \in [0.5, 1]$，使得对所有 $\phi, \phi' \in \mathrm{Q}$，以下条件成立：i. $\|\nu_\phi(\xi)\| \le \mathrm{C}_2(1 + |\xi|^{q_2})$，ii. $\|\mathrm{P}\phi\, \nu_\phi(\xi) - \mathrm{P}'_\phi \nu'_\phi(\xi)\| \le \mathrm{C}_3(1 + |\xi|^{q_3})\|\phi - \phi'\|^\lambda$.

B.4 对于 D 中的任意紧集Q 以及任意 $q > 0$，存在一个 $\mu_q(Q) < \infty$，使得对于所有 n 和 $\xi, \phi \in R^d$，以下结论成立：

$$E_{\xi,\phi}\{I(\phi_k, \xi_k \in Q, k \le n)(1 + \|\xi_{n+1}\|^q)\} \le \mu_q(Q)(1 + \|\xi_n\|^q), \tag{20}$$

其中$E_{\xi,\phi}$ 表示在初始条件 $(\xi_0, \phi_0) = (\xi, \phi)$ 下取的期望。

假设： 现在我们证明上述假设由 (3) 满足。首先注意到 (3) 与 (17) 具有相同形式，其中 $\phi = [\psi, \theta]^T$且，

$$H(\xi, \phi) = \begin{bmatrix} \mathscr{J}_\phi(\xi - \theta) + (1 - \mathscr{J}_\phi)(-C\theta) \\ \mathscr{J}_\phi(\xi - \psi - 1) + (1 - \mathscr{J}_\phi)(-\psi) \end{bmatrix}. \tag{21}$$

现在我们逐一证明所需的假设。(i) 后代 ξ_{k+1} 仅取决于总人口 θ_k，因此假设 **B.1** 得到满足，其中

$$\begin{aligned} P_{\phi_n}(\xi_n, A) &= Q_{\theta_n}(A), \text{ where,} \\ Q_{\theta_n}(A) &:= P(\xi_{n+1} \in A | \theta_n). \end{aligned}$$

(ii) 由 (21) 可直接得出，对于任意紧集 Q

$$\|H(\xi, \phi)\| \le \sup_{\phi \in Q} \|\phi\|(1 + |\xi|) \tag{22}$$

B.2 得到满足，其中 $q_1 = 1$ 以及 $C_1 = \sup_{\phi \in Q} ||\phi||$。(iii) 我们将通过令 $\nu_\phi(\xi) := H(\xi, \phi)$ 来证明假设 **B.3** 成立，并且

$$\begin{aligned} h_1(\phi) &:= (P_\phi)\nu_\phi(\xi), \text{ where} \\ (P_\phi)\nu_\phi(\xi) &= \int H(y, \phi)(Q_\phi)dy, \end{aligned}$$

注意，根据**A.1**-2，我们有：

$$h_1(\phi) = \begin{bmatrix} \mathscr{J}_\phi(\mathscr{M}(\theta) - \theta) + (1 - \mathscr{J}_\phi)(-C\theta) \\ \mathscr{J}_\phi(\mathscr{M}(\theta) - 1 - \psi) + (1 - \mathscr{J}_\phi)(-\psi) \end{bmatrix}. \tag{23}$$

下面我们将证明所有子假设**B**.3.a-c:

a. 由方程（23），根据 **A**.2，得:

$$\begin{aligned}&|h_1(\phi)-h_1(\phi')|\\&\quad\le (C+1)|\theta-\theta'|+2|\psi-\psi'|+|\mathscr{M}(\theta)-\mathscr{M}(\theta')|\\&\quad\overset{a}{\le}(C+1+2\rho)|\theta-\theta'|+2|\psi-\psi'| \qquad (24)\\&\quad\le D|\phi-\phi'|,\ \text{with } D:=\max\{C+1+2\rho,2\},\end{aligned}$$

其中，'a'在 $\lambda\le 1$ 条件下成立。因此，h_1 是局部利普希茨的。

b. $h_1(\phi)$ 和 $H(\xi,\ \phi)$ 的定义显而易见。

c. i.) 结合 **B**.2 可证明如下:

$$v_\phi(\xi)=H(\xi,\phi).$$

ii.) 由（24）及 $h_1(\phi)$ 的定义可知，该假设成立。

(iv) 为证明 **B**.4，任取紧集 Q，则可将（20）的左端上界估计如下:

$$\begin{aligned}&E_{\xi,\phi}\{I(\phi_k,\xi_k\in Q,k\le n)(1+\|\xi_{n+1}\|^q)\}\\&\quad\le E_{\xi,\phi}\{I(\phi_n,\xi_n\in Q)(1+\|\xi_{n+1}\|^q)\}\\&\quad\le \sup_{\phi\in Q}\int(1+y^q)Q(\phi,dy)\\&\quad=\sup_{\phi\in Q}E[1+\xi_{n+1}^q|\theta_n=\theta]\\&\quad\overset{a}{\le}1+\rho^q\\&\quad\le(1+\rho^q)(1+||\xi_n||^q)\end{aligned}$$

对于任意$q>0$，其中等式'a'由假设 tion **A**.2 得出。于是，**B**.4 对 $\mu_q(Q):=1+\rho^q$ 成立。

现在，利用 [10, 定理 9，pp. 232], 即可证明该结果。□

常微分方程解及(9)的推导: 我们考虑系统 (3)，相应的常微分方程见 (6)。

假设我们从**状态** $\mathscr{R}^1$开始，并且令 $\psi(0)=\delta_\psi$ 及某个 $\theta($ $0>\delta_\theta$。那么，解可表示为

$$\psi(\tau)=\delta_\psi e^{-\tau}\ \text{and}\ \theta(\tau)=\theta(0)e^{-C\tau}.$$

然后，存在一个时刻（例如 $\tau_1=v_1$），使得

$$\theta(v_1)=\delta_\theta\ \ (\text{say }\theta_{01})\ \text{and let}\ \psi(v_1):=\psi_{01}.$$

状态 $\mathscr{R}^2$**:** 令 $\Delta=a\eta+1$。在时刻τ_1之后，初始条件为 $\phi(\tau_1)=(\psi_{01},\ \delta_\theta)$ 时的解为:

$$\begin{aligned}&\psi(\tau+\tau_1)=\Delta\theta(\tau+\tau_1)+(\psi_{01}-\delta_\theta\Delta+a\eta^2+1)e^{-\tau}-a\eta^2-1,\\&\theta(\tau+\tau_1)=\left(\delta_\theta-\frac{\eta}{\Delta}\right)e^{-\Delta\tau}+\frac{\eta}{\Delta}.\end{aligned}$$

于是，存在时刻 $\tau_2=v_2+\tau_1$，满足 $v_2>0$，使得

$$\begin{aligned}\psi(\tau_2)&=\delta_\psi=:\psi_{02}\ \text{and}\\\theta(\tau_2)&=\left(\delta_\theta-\frac{\eta}{\Delta}\right)e^{-\Delta v_2}+\frac{\eta}{\Delta}=:\theta_{02}.\end{aligned}$$

这就完成了第 1 个周期，即 LC_1。现在它返回状态 1，初始条件为 $\phi(\tau_2)=(\psi_{02},\theta_{02})$，并继续这一模式。我们可以构造一系列时刻$\tau_i$，其初始条件由前一状态的终端条件构造得出。

这一过程持续进行，最终得到一个周期渐近解。如果能够通过求解以下不动点方程来确定初始/终端条件，就可以明确指定这个极限（回想一下 $\Delta=a\eta+1$）:

$$\begin{aligned}\theta_{02}^*=\theta(v_2^*)&=\left(\delta_\theta-\frac{\eta}{\Delta}\right)e^{-\Delta v_2^*}+\frac{\eta}{\Delta},\\\psi_{01}^*=\psi(v_1^*)&=\delta_\psi e^{-v_1^*},\ \text{where,}\ \theta_{02}^*e^{-Cv_1^*}=\delta_\theta\ \text{and}\\&\Delta\theta_{02}^*+(\psi_{01}^*-\delta_\theta\Delta+a\eta^2+1)e^{-v_2^*}-a\eta^2-1=\delta_\psi.\end{aligned}$$

在极限情况下且处于状态 2时，对于任意 $\tau\le v_2^*$，有

$$\theta(\tau+\tau_\infty)=\left(\delta_\theta-\frac{\eta}{\Delta}\right)e^{-\Delta\tau}+\frac{\eta}{\Delta}.$$

当 v_2^* 足够大时，可以近似为 $\theta_{02}^*\approx\eta/\Delta$.在此近似下，不动点方程由 b 求解:

$$\theta_{02}^*\approx\frac{\eta}{\Delta},\quad v_1^*=\frac{-1}{C}\ln\left(\frac{\Delta\delta_\theta}{\eta}\right),\ \psi_{01}^*=\delta_\psi e^{-v_1^*}\approx\delta_\psi\left(\frac{\Delta\delta_\theta}{\eta}\right)^{1/C}.$$

因此，(9)中的极限等于

$$\theta_\infty^*(\eta):=\lim_{k\to\infty}\max_{\tau'\in L_{C_k}}\theta(\tau')=\theta_{02}^*\approx\frac{\eta}{a\eta+1}. \qquad (25)$$

附录：流行病常微分方程相关证明

很容易验证，所考虑的所有常微分方程都存在全局唯一解，因为其右端项均为利普希茨连续。我们首先证明，对于$B^{(2)}$中的任意初始条件，解始终保持在$B^{(2)}$内:

引理*1*: 考虑式（14）中定义的二维常微分方程。任取初始条件 $(i_0,r_0)\in B^{(2)}$，则唯一解 $(i(t),\ r(t))\in B^{(2)}$对所有 t均成立。

证明: 我们将证明，常微分方程在 $B^{(2)}$ 边界上的流要么指向内部，要么沿着边界（见图6）。根据 Nagumo 定理，这便可得到所需结论 [13]，: 从区域 $B^{(2)}$ 内部出发的任何轨线都将始终留在$B^{(2)}$内。

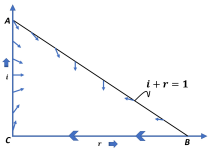


图 6. 常微分方程轨线

任取当(边界点为 (0,i)（即位于图中所示的 r轴上）时，由常微分方程 (14) 可知，di/dt $=0$ 而 dr/dt <0，因此流指向 (0, 0)，并沿边界线 BC 运动。现在，考虑边界 AC 上的任意一点 (0, i)，同样由常微分方程 (14) 可得，dr/dt >0，且根据 β(i)，常微分方程的流要么向右上方，要么向右下方（如图 6 所示）；无论哪种情况，流都进入 B$^{(2)}$。在角点 A 处，流的斜率为 didr $=-^{\alpha}$iiαpr $=-^{1}$pr ，，其大小大于 1（因为 p$_r$ 是获得免疫的康复者比例，因此 p$_r$ <1），故 di/dr 小于 AB 的斜率（因为直线 i $+$r $=1$ 的斜率为 -1）。所以，A 点处的流也进入 B$^{(2)}$。现在考虑直线 AB 上的任意一点 (r, i)；此处 i $+$r $=1$，因此流的斜率 didr $=$ $-^{\alpha}$i i(αpr+li)–li ，，且该斜率递增

随着 i 增大，因此对于 AB 上的任意点 (r,i)，di/dr 小于其在A点处的值，即 $di/dr < -1/p_r$。因此，流在AB上也向内流动。由 Nagumo 定理 [13]可证。□

定理2的证明： 对于常微分方程（10），(0,0) 是一个平衡点，我们还有另一个平衡点 (i^*,r^*)，

$$i^* = \frac{\bar{\beta}-\alpha}{\bar{\beta}(1+\frac{\alpha p_r}{l_i})} \quad \text{and } r^* = \frac{i^*\alpha p_r}{l_i}. \tag{26}$$

此外，任意 (i,r) 处的雅可比矩阵为：

$$J(i,r) = \begin{bmatrix} \bar{\beta}(1-i-r)-\alpha-\bar{\beta}i & -i\bar{\beta} \\ \alpha p_r & -l_i \end{bmatrix}.$$

¯矩阵 $J(0,0)$ 为负定，且当且仅当 $\beta<\alpha$ 时，(0,0) 是局部吸引子。

¯当 $\beta<\alpha$ 时的情形：在此情形下，由（26）式可知，非零平衡点满足 $i^*<0$。因此，$B^{(2)}$ 中仅有一个平衡点，即 (0, 0)。此外，$B^{(2)}$ 内不可能存在极限环，因为它必须围绕 (0,0)（且不能与其相接触），见 [14], ；并且，根据引理1，任何初始条件位于 $B^{(2)}$ 内的轨线均被困在 $B^{(2)}$ 内。因此，根据 Poincar´e–Bendixson 定理（例如，[14]），任何起始于 $B^{(2)}$ 内的轨线的极限集为 {(0,0)}，这意味着 (0,0) 是一个全局吸引子（因为它是一个局部吸引子）。

情形 $\bar{\beta}>\alpha$： 雅可比矩阵，$J(i^*,r^*) = \begin{bmatrix} -\bar{\beta}_i & * \\ \alpha & -\bar{\beta}*ip_r \end{bmatrix}$，$-l_i$，为负定矩阵（使用主子式判定）。因此，$(i^*,r^*)$ 是一个局部吸引子。

在引理 3中，我们构造了一个有界区域（例如图 7左侧子图中的 ABCD），记作 $\mathscr{R}$，其流向内或位于边界上。应用 Nagumo 定理 [13],后，任何从区域内部出发的轨线 $\mathscr{R}$ 都将保持在 $\mathscr{R}$内。此外，利用本迪克森判据（例如，[12]），该区域内不存在极限环 $\mathscr{R}$，这是因为引理 30中的式（3）。

于是，根据庞加莱–本迪克森（PB）定理（例如，[14, 定理 1.8]），从 $\mathscr{R}$ 出发的常微分方程轨线有唯一的极限点；由于该极限点是一个局部吸引子，轨线将收敛到 (i^*,r^*)。现在，根据临界点判据（[14]），任何闭轨内部都有一个临界点（且该点不是鞍点）。这意味着$B^{(2)}/\mathscr{R}$ 不包含任何极限环，因为任何这样的极限环都应与区域 $\mathscr{R}$ 相交[4]，因为它必须包围 (i^*,r^*)；这与所有位于 $\mathscr{R}$ 上或内部的点都会被吸引至 (i^*,r^*) 这一事实矛盾。至此，证明完成。□

定理3的证明： 对于常微分方程（15），同样，(0,0) 是一个平衡点，其他平衡点[5] 为：

$$i^* = \frac{-c_b \pm \sqrt{(c_b)^2-4c_ac_c}}{2c_a},\ r^* = \frac{\alpha p_r}{l_i} i^*. \tag{27}$$

现在，我们找出位于$B^{(2)}$（等价于$i^* \in [0,1/c_i^r]$，对于c_i^r: $=1+\alpha p_r/l_i$）中的点，并进一步判断它们是否为吸引子。考虑相应的雅可比矩阵：

$$J(i^*,r^*) = \begin{bmatrix} i^*(2i^*c_a+c_b) & -i^*\bar{\beta} \\ \alpha p_r & -l_i \end{bmatrix},\ J(0,0) = \begin{bmatrix} \beta_0-\alpha & 0 \\ \alpha p_r & -l_i \end{bmatrix}.$$

[4]若不触及 $\mathscr{R}$则无法做到（如图7所示，区域 $\mathscr{R}$触及边界线 $\{i+r=1\}$ 处的 A 点）。

[5] $\beta(i)(1-i-r)-\alpha$的分子是二次函数，$ca i^2+c_bi+cc$，其中$r=\alpha p_r/l_i$。

情形I，当 $\beta_0-\alpha<0$： 从子情形 ¯$w<0$开始，并定义，$L(i)=\eta(pi+q)$。如果 $\bar{\beta}+$ ¯$wL(i)aL(i)+1 \le 0$，那么根据常微分方程（15），显然有：

$$\frac{di}{dt} < -i\alpha < -i\min\{\alpha,\alpha-\beta_0\}.$$

另一方面，当 $\bar{\beta}+$ ¯$wL(i)aL(i)+1 \ge 0$ 时，我们有

$$\begin{aligned} \frac{di}{dt} &\le i\left(\bar{\beta}+\bar{w}\frac{L(i)}{aL(i)+1}-\alpha\right) \\ &\overset{a}{\le} i(\beta_0-\alpha) < -i\min\{\alpha,\alpha-\beta_0\}. \end{aligned}$$

并且不等式“a”成立，因为函数$i \mapsto L(i)/(aL(i)+1)$是递增的，且 ¯$w<0$。因此综上，当¯$w<0$时，我们有

$$\frac{di}{dt} \le -i\min\{\alpha,\alpha-\beta_0\}.$$

根据常微分方程的标准结果，我们有（也记作[7,引理 6]），$i(t) \le i_0\exp(-\min\{\alpha,\alpha-\beta_0\}t) \to 0$。此外，由引理1可知 $i(t)\ge 0$。因此，$i(t)\to 0$，并且很容易证明，当 ¯$w<0$时，(0,0) 是 $B^{(2)}$ 上的全局吸引子（参见式（14）中的 r常微分方程）。

现在，考虑满足 $\beta_0<\alpha$ 且 ¯$w>0$，但$a+$ ¯$w-\alpha a<0$ 的子情形；此时可以对i常微分方程作如下上界估计：

$$\frac{di}{dt} \le i\left(\beta+\frac{\bar{w}}{a}-\alpha\right) = \frac{i}{a}(\beta a+\bar{w}-\alpha a) < 0,$$

因此，对于任意初始条件，都有 $(i(t),r(t)) \to (0,0)$，与前面相同。

情形II，满足 $\beta_0-\alpha>0$： 定义函数

$$p_1(i) = c_ai^2+c_bi+c_c,\ \text{for } i\in[0,1/c_i^r].$$

于是，$p_1(0)=(\beta_0-\alpha)(a\ \bar{\eta}q+1)>0$，并且 $p_1(1/c_i^r)=-\alpha<0$。因此，根据连续性，$p_1(i)\in$在$(0,1/c_i^r]$内有唯一的零点，且该零点是（27）中的两个值之一。

当c_a 为正或负时，平方根项分别为 $\sqrt{c_b^2-4cac_c} >$ 或 $< |c_b|$。在这两种情况下，无论$c_b>0$ 还是$c_b<0$，平方根项前的负号都会得到所需的根。因此，

$$i^* = \frac{-c_b-\sqrt{(c_b)^2-4c_ac_c}}{2c_a},\ r^* = \frac{\alpha p_r}{l_i}i^*.$$

相应的雅可比矩阵$J(i^*,r^*)$为负定，因此(i^*,r^*)是一个局部吸引子，因为

$$2i^*c_a+c_b = -\left(c_b+\sqrt{c_b^2-4c_ac_c}\right)+c_b = -\sqrt{c_b^2-4c_ac_c} < 0.$$

现在，根据引理1 和PB定理即可完成证明。□

定理4的证明： 对于常微分方程（16），利用雅可比矩阵，(0,0) 是一个局部吸引子，当且仅当 $\beta<\alpha$。可能的非零平衡点如下：

$$i^* = \frac{(u-\bar{\beta}c_i^r) \pm \sqrt{(\bar{\beta}c_i^r-u)^2+4uc_i^r(\bar{\beta}-\alpha)}}{2uc_i^r},\ r^* = \frac{i^*\alpha p_r}{l_i}. \tag{28}$$

当 $\bar{\beta}<\alpha$ 和$u<\alpha c_i^r$时，利用简单的代数运算[6] 可以证明，这些非零平衡点不会位于

[6]当$u<\bar{\beta}c_i^r$时，两个根均为负数。当 $\bar{\beta}c_i^r<u<\alpha c_i^r$时，判别式 $=(\bar{\beta}c_i^r+u)^2-4u\alpha c_i^r<0$，因此根不是实数。

在区间 $[0,1/c_i^r]$内。因此，根据PB定理，对于任意初始条件，B^2, 内的极限集为 {(0,0)}。此外，由于{(0,0)} 是一个局部吸引子，极限点成为极限，因此也是全局吸引子。

当 $\beta > \alpha$ 时，定义函数

$$p_2(i) = (\bar{\beta} + ui)(1 - c_i^r i) - \alpha, \text{ for } i \in [0, 1/c_i^r].$$

$p_2(0) = (\beta - \alpha) > 0$ 以及$p_2(1/c_i^r) = -\alpha < 0$。因此，根据连续性，只有一个非零根（28）位于$[0,1/c_i^r]$中。

沿用前面的类似论证，$\sqrt{(\bar{\beta}c_i^r - u)^2 + 4uc_i^r(\bar{\beta} - \alpha)} >$ 或者 $< |u - \bar{\beta}c_i^r|$，分别对应 u 为正或为负的情况。因此，无论 $(u - \beta c_i^r)$ 的符号如何，只有平方根取正号时的根才成立。

因此，在这两种情况下，

$$i^* = \frac{(u - \bar{\beta}c_i^r) + \sqrt{(\bar{\beta}c_i^r - u)^2 + 4uc_i^r(\bar{\beta} - \alpha)}}{2uc_i^r}, \; r^* = \frac{i^* \alpha p_r}{l_i}.$$

位于 $B^{(2)}$ 中。现在，在 (i^*, r^*) 处，雅可比矩阵为：

$$J(i^*, r^*) = \begin{bmatrix} i^*(u(1 - i^* - r^*) - \bar{\beta} - ui^*) & -i^*(\bar{\beta} + ui^*) \\ \alpha p_r & -l_i \end{bmatrix}. \quad (29)$$

根据引理 2，（29）的特征值之积大于零，因此 (i^*, r^*) 要么是源，要么是汇。因此，当且仅当 $u(1 - c_i^r i^*) \le \beta + ui^* + l_i/i^*$ 时，它是负定的；否则，(i^*, r^*) 将是一个源。因此，根据 PB定理，(i^*, r^*) 现在是一个局部吸引子，故（ii）.a 得证。

对于第 (ii).b 部分，(i^*, r^*) 不稳定。根据临界点判据（例如，[14]），不存在仅包围 (0，0) 的闭轨（或极限环），因为 (0，0) 是一个鞍点。此外，从 $B^{(2)}$ 中的 $(r, 0)$ 出发的轨线将收敛到 (0，0)。我们需要弄清其余轨线的行为。定理的其余部分可由 PB定理得出，因为 (i^*, r^*) 是唯一的另一个平衡点，且它不是鞍点；因此，$B^{(2)}$ 中的轨线会趋近于一个包围 (i^*, r^*) 的极限环，或趋近于两个平衡点之一。 □

引理2：雅可比矩阵 (29) 的乘积项为正。

证明： 乘积项为

$$i^* \left(-\left(\frac{u\alpha}{K} - K \right) l_i + K\alpha p_r \right) = \frac{i^* l_i}{K} \left(c_i^r K^2 - u\alpha \right),$$

其中 $K := \beta + ui^*$。现在，由于 $K = 1 - \frac{\alpha}{i^* - r_*} > 0$，我们只需检查 $(c_i^r K^2 - u\alpha)$ 项的符号。因此，考虑

$$4c_i^r(c_i^r K^2 - u\alpha)$$
$$= \left(2\bar{\beta}c_i^r + (u - \bar{\beta}c_i^r) + \sqrt{(u + \bar{\beta}c_i^r)^2 - 4\alpha uc_i^r} \right)^2 - 4\alpha uc_i^r$$
$$= 2(u + \bar{\beta}c_i^r)^2 - 8\alpha uc_i^r + 2(u + \bar{\beta}c_i^r)\sqrt{(u + \bar{\beta}c_i^r)^2 - 4\alpha uc_i^r},$$

由于用于定义 (i^*, r^*) 的平方根项 $(u + \bar{\beta}c_i^r)^2 - 4\alpha uc_i^r > 0$，因此其为正，即 $(u + \bar{\beta}c_i^r)^2 > 4\alpha uc_i^r$ 为正。现在，由于 c_i^r 为正，乘积项也为正。至此，证明完成。□

引理 3：在定理 2.(ii) 的假设下，可以构造一个闭有界区域 $\mathscr{R} \subset B^{(2)}$，在 $A = (b_*, 1 - b_*) \in \partial\mathscr{R}$ 处与边界 $\{i + r = 1\} \subset \partial(B^{(2)})$ 相切，其中 $b_* = l_i/(l_i + \alpha p_r)$，使得

$$\frac{\partial f}{\partial i} + \frac{\partial g}{\partial r} = -(\bar{\beta}(2i + r - i^* - r^*) + l_i) \neq 0, \text{ where}$$
$$f(i,r) = i\left(\bar{\beta}(1 - i - r) - \alpha\right), \text{ and, } g(i,r) = i\alpha p_r - l_i r, \quad (30)$$

并且使得向量场(f, g)表示常微分方程 (10) 在边界 $\partial\mathscr{R}$ 处指向边界内部或边界上 $\partial\mathscr{R}$。**引理3的证明：** 这里，我们将构造一个有界区域，使得常微分方程在其边界上的向量场指向该有界区域内部或边界上。接下来将采用与引理1类似的论证。此外，可以这样构造该区域，使得由下式给出的直线

$$\bar{\beta}(2i + r - i^* - r^*) + l_i = 0, \quad (31)$$

位于区域 $\mathscr{R}$ 之外（见图7）。我们将考虑以下三种情况：

A. **考虑 $\alpha + l_i < \bar{\beta}$ 且 $\bar{\beta} < 1 + li\alpha pr$**
在角点 $A = \left({}^{\alpha}_{\alpha} \text{prpr} + \underline{\text{li}}, \underline{\text{li}\alpha\text{pr}} + \underline{\text{li}} \right)$ 处，流向下（沿直线 AB），因为 $dr/dt = 0$ 且 $di/dt < 0$。类似地，在角点 B，流向左（沿直线 BC），因为在直线 $i + r = i^* + r^*$ 上，$di/dt = 0$ 且 $dr/dt < 0$ 正在减小（因为 $i\alpha p_r < rl_i$）。角点 C 和 D 的论证类似。现在，考虑 AB 上任意一点 (r,i)，由于 $di/dt < 0$ 且 $dr/dt < 0$ 均在减小（因为 (r,i) $\in$ {(r,i); $i + r > i^* + r^*$ 且 $i\alpha p_r < rl_i$}），流将指向内侧。类似地，对于边界线 BC 上的任意一点 (r, i)，由于在直线 ($i + r = i^* + r^*$) 下方 i 增大，且在直线 ($i\alpha p_r = rl_i$) 下方 r 减小，因此流向上。边界线 CD 和 DA 上的论证类似。

此外请注意，上述论证只要求 AB 垂直（A 接触直线 $i + r = 1$ and$\alpha p_r i = l_i r$），AD 和 BC 均为水平线，而 CD 则连接两点。因此，如有需要，可以将直线 BC 向上平移，以确保 C 不接触式（31）中的直线（注意，只有在 $\beta < 0$ 时才有 $2i + l_i/\beta = i$，而这里并非如此，因此直线 $i + r = i^* + r^*$ 与式（31）中的直线之间存在间隙）。

B. **考虑以下情形：** $\alpha + l_i < \bar{\beta}$ **和** $\bar{\beta} > 1 + li\alpha pr$
按照上述类似的论证，可以证明，从该区域内任意一点出发，轨线都会被限制在*ABCDE* 区域内。此外，由于 $\beta > 0.$，直线 $2i + l_i/\beta + r = i^* + r^*$ 和 $i + r = i^* + r^*$ 之间存在间隙。

C. **考虑 $\alpha + l_i > \beta$ 的情况**
在这种情况下，根据 Bendixson 判据，我们在$B^{(2)}$ 区域内不存在任何极限环。此外，还可以像前面的情况一样构造一个有界区域，
应用 Nagumo 定理[13]即可完成证明。□

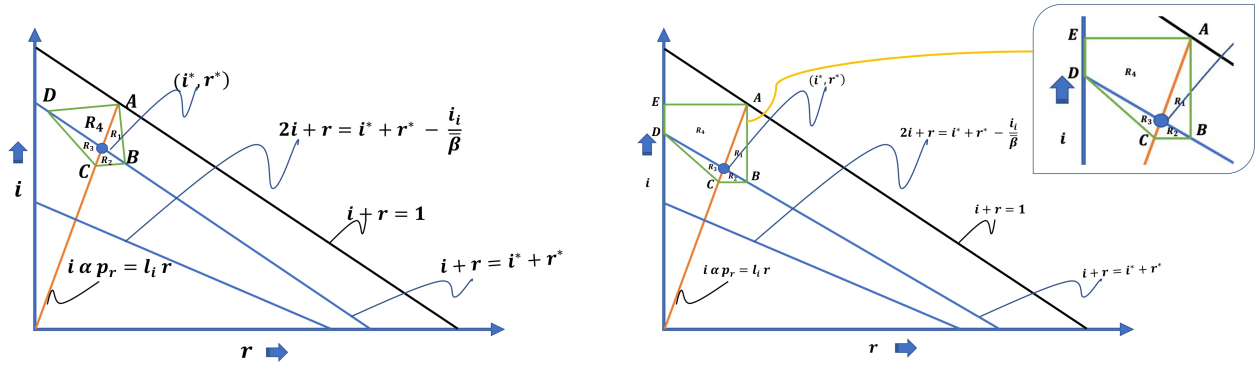


图 7。左侧： $\alpha + l_i < \tilde{\beta}$, $\tilde{\beta} < 1 + li\alpha pr$, 右侧： $\alpha + l_i < \tilde{\beta}$, $\tilde{\beta} > 1 + li\alpha pr$