arXiv:2303.04453v1 [math.CO] 8 Mar 2023

图参数、隐式表示与阶乘性质*

B. Alecu† V.E. Alekseev A. Atminas‡ V.Lozin§ V.Zamaraev¶

摘要

如何在计算机内存中高效表示一个图，是数据结构领域的一个基本问题。本文从组合学的角度探讨这一问题。若一种表示为一个含有 n个顶点的图 G 的每个顶点 G 分配一个长度为 $O(\log n)$的二进制编码，且两个顶点之间的邻接关系由其编码决定，则称该表示为隐式表示。遗传图类 $\mathcal{X}$ 存在隐式表示的必要条件是，其增长速度至多为阶乘级 $\mathcal{X}$ 。然而，正如近期 [Hatami & Hatami 在 FOCS 2022]中所示，这一条件并非充分条件。若干关于隐式表示存在性的充分条件涉及某些参数有界，例如退化度或团宽度。本文分析了更多图参数，并证明了若干与隐式表示和阶乘性质相关的新结果。

关键词：图参数；隐式表示；遗传类；阶乘级性质

1 引言

每个有 n 个顶点的简单图都可以用长度为 $\binom{n}{2}$ 的二进制字表示（每对顶点对应一位）；如果对该图没有任何先验信息，这种表示就是最优的。不过，对于属于某些类别的图，这种表示可以大幅缩短。例如，Pr¨ufer 编码可以用长度为 $n\log\ n$ 的二进制字表示一个有 n 个顶点的带标记树。对于带标记图的所有表示方法而言，这是最优的，因为仅表示每个顶点的标记就需要为其使用 $\log n$ 位。当然，描述顶点标记的这 $n\log\ n$ 位通常并不能描述

*本文介绍的部分结果曾发表于第33届组合算法国际研讨会（IWOCA 2022）论文集中的扩展摘要 [1] 。

†英国利兹大学计算学院。电子邮箱：B.Alecu@leeds.ac.uk

‡中国苏州仁爱路111号，邮编215123，西交利物浦大学数学科学系。电子邮箱：Aistis.Atminas@xjtlu.edu.cn。Aistis Atminas 获得西交利物浦大学研究发展基金 RDF-22-01-070 的资助§英国考文垂 CV4 7AL，华威大学数学研究所。电子邮箱：V.Lozin@warwick.ac.uk

¶英国利物浦利物浦街阿什顿街，邮编 L69 3BX，利物浦大学计算机科学系。电子邮箱：Viktor.Zamaraev@liverpool.ac.uk

图本身，因为这些位未必能让我们计算出邻接关系。不过，有时不仅标记，连边也可以表示出来，而且每个顶点只需使用 $O(\log n)$ 位。如果还能根据两个顶点的编码（即根据长度为 $O(\log n)$ 的标记）计算出它们之间的邻接关系，那么就称该图是隐式表示的。

隐式表示的概念最早于 [20] 中提出。其重要性源于以下原因。首先，它在阶上是最优的，即与最优表示相差一个常数因子。其次，它能够在本地存储有关图的信息，这对于分布式计算至关重要。最后，它适用于具有实际或理论重要性的各类图，例如有界顶点度图、有界团宽度图、平面图、区间图、排列图、线图等。

为了更好地描述隐式表示的适用范围，我们注意到，若某个图类 $\mathcal{X}$ 中的图允许隐式表示，那么 $\mathcal{X}$ 中 n 个顶点的带标记图的数量（也称为 $\mathcal{X}$ 的增长速度）必定为 $2^{O(n \log n)}$，因为图的数量不会超过表示它们的二进制字的数量。用 [7], 遗传类的术语来说，包含 $2^{\Theta(n \log n)} n$ 个顶点的带标记图的遗传类具有阶乘增长速度。阶乘类，即具有阶乘增长速度的遗传类，丰富多样。特别是，它涵盖了前面提到的所有图类，以及许多其他图类，例如单位圆盘图、有界森林度图类、有界功能度图类 [2], 等。 [20], 中提出隐式表示概念的作者曾提出疑问：每个增长速度为 $2^{O(n \log n)}$ 的遗传类是否都允许这种表示?

最近，Hatami 和 Hatami [19] 通过证明存在一个不允许隐式表示的二分图阶乘级类，对这个问题给出了否定回答。这一否定结果引出了一个自然的问题：如果增长速度并非隐式表示的决定因素，那么究竟是什么决定了它?

为了寻找这个问题的答案，我们注意到，大多数关于隐式表示的正面结果都涉及某些图参数有界的图类，例如退化度或孪生宽度 [8], 有界的图类。为了得到更多正面结果，本文分析了更多图参数。这些参数本身也值得关注，我们在第3节证明了若干与之相关的结果。其中一些结果提出了适合隐式表示的新候选图类，而在第4节，我们为这些图类构造了相应的表示。

最后，我们注意到，尽管有 [19], 中的否定结果，在遗传类 $\mathcal{X}$中，阶乘增长速度仍然是隐式表示的必要条件，而确定 $\mathcal{X}$ 的增长速度，是判断此类表示是否存在的首要自然步骤。第5节介绍了这一主题的一些结果。

所有相关的预备知识均可参见第2节。第6节以若干尚未解决的问题作为本文的结尾。

2 预备知识

本文中的所有图都是简单图，即无向图，且没有自环或重边。图 G 的顶点集和边集分别记为 $V(G)$ 和 $E(G)$。顶点 $x \in V(G)$ 的邻域记为 $N(x)$，它是与 x 相邻的顶点集； x 的度记为 $\deg(x)$，即其邻域的大小。 x 的余度是与 x 不相邻的顶点数。我们用 $[n]$ 表示从 1 到 n（含端点）的整数集合。

通常， K_n、 P_n 和 C_n 分别表示顶点数为 n 的完全图、无弦路径和无弦环。$S_{i,j,k}$ 是一棵恰有三片叶子的树，这三片叶子到唯一的 3 度顶点的距离分别为i、 j、 k。用 nG 表示 n 个G的不交并。

由集合 $U \subseteq V$（G）导出的 G 的子图记为 $G[U]$。如果 G 不含与图 H同构的诱导子图，就称 G 是 H-自由的，或称 G 排除H，也称 H 是 G的禁诱导子图。

在图中，团是由两两相邻的顶点组成的子集，独立集则是由两两不相邻的顶点组成的子集。齐次集是一个顶点子集，它要么是团，要么是独立集。

若图 $G =$ （V， E）的顶点集可以划分为两个独立集，则称其为二部图。给定二分划分为两个独立集 A和 B的二部图记为 $G =$（A， B， E）。二部图$\widetilde{}$图 $G =$（A， B， E）的二部补图是二部图 $G :=$（A， B， （$A \times B$） $- E$）。二部图 $G =$（A， B， E）中$\widetilde{}$顶点 x的二部余度是 x在 G中的度。用$K_{n,m}$表示两部分大小分别为 n 和 m的完全二部图。图$K_{1,n}$ （对于某个 n）称为星图。链图是这样一种二部图：其中一侧的顶点可以按照其邻域的包含关系线性排序。链图类恰好是 $2K_2$-自由二部图类。

给定两个二部图 $G_1 = (A_1, B_1, E_1)$ 和 $G_2 = (A_2, B_2, E_2)$，如果不存在满足 $A_2 \subseteq A_1$ 的 G_1 中的 G_2 诱导副本，或者不存在满足 $A_2 \subseteq B_1$ 的 G_1 中的 G_2 诱导副本，我们就称 G_1 不包含 G_2 的单侧副本。

如果图 G 是二部图的补图，我们称其为余二部图；如果 G 的顶点集可以划分为一个团和一个独立集，则称 G 为分裂图。

2.1 图类

如果一个图类对于取诱导子图运算是封闭的，则称其为遗传的。众所周知，图类 $\mathcal{X}$ 是遗传的，当且仅当 $\mathcal{X}$ 可以用一组极小禁诱导子图来描述。本节将介绍几个在本文中发挥重要作用的遗传类。

我们的多数结果涉及二部图的遗传类，这一研究方向受到 [19] 中负面结果的启发，也基于以下论证。将任意图转化为二部图的一种自然方法，是将其邻接矩阵视为一个二部图的邻接

矩阵。这可以推广为遗传类之间的一种变换：将遗传类中的每个图都转化为二部图，并对所得二部图集合取遗传闭包。正如 [18], 中所示，这种变换既保留了阶乘增长速度，也保留了隐式表示的存在性[1]。

二部图的单生成类。即使在二部图的单生成类中，也就是由单个禁诱导二部子图定义的二部图类中，判定哪些类是阶乘级的也并非易事。在[4], Allen 几乎确定了这一类中的所有阶乘级类，唯独未能确定 P_7-自由二部图。这一例外类在 [25], 中被证明是阶乘级的，由此得出了下文定理1中的二分结论。该定理可直接由[4] 和 [25] 中的结果以及引理 1 得出。引理中提到的图$F_{t,\ p}$ 见图1。

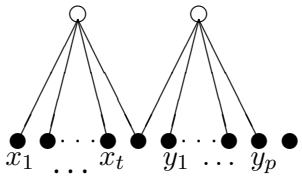


图1：图$F_{t,\ p}$

引理 1. 二部图 H 同时是森林，且其二部补图也是森林，当且仅当 H 是某个 P_7、某个$S_{1,\ 2,\ 3}$ 或某个图$F_{t,\ p}$的诱导子图。

证明。“若”部分显然。为证明“仅若”部分，假设二部图 $H = (A, B, E)$ 同时是森林和某个森林的二部补图。那么， H 中任意两个颜色相同的顶点至多有一个邻点，也至多有一个非邻点。因此，如果 H 的某一部分至多包含两个顶点，那么 H 是图 $F_{t,p}$ 的诱导子图，其中 t 且 p。从现在起，我们假设 H 的每一部分都至少包含三个顶点，分别记为 $a_1, a_2, a_3 \in A$ 和 $b_1, b_2, b_3 \in B$。

首先假设 H 中没有度不小于 2 的顶点。那么， H （以及 H）的每个连通分支都是一条路径。 H 的分支都不是平凡分支（单点图），否则对侧部分的大小至多为二，这与我们的假设矛盾。此外，非平凡分支的数量至多为 2，因为 $3P_2 = C_6$。如果 H 连通，那么 $H = P_k$ ，且 $k \leq 7$，因为 P_8 包含一个 C_4。如果 H 由两个分支 P_k 和 P_t （$k \geq t \geq 2$）组成，那么 $k, t \leq 4$，否则就会出现一个诱导 $3P_2 = C_6$ 。此外，如果 $k = 4$，那么 $t = 2$，否则 H 会包含一个度至少为 3 的顶点。由此可得， H 是 P_7 的诱导子图。如果 $k \leq 3$，那么 H 又是 P_7 的诱导子图。

剩下的情形是 H 或 H 包含一个度至少为 3 的顶点。设该顶点为 a_1，且在 H 中与 b_1、b_2、b_3 相邻。则 a_2 和 a_3 各自在 $\{b_1, b_2, b_3\}$ 中恰有一个邻点，且这两个邻点不同，

[1]在 [18], 中，证明了该变换能够保留某种特定类型的隐式表示，但这一论证适用于任意隐式表示。

~否则就会导出一个 C_4 或一个 C_4。不失一般性，设 a_2 与 b_2 相邻，且 a_3 与 b_3 相邻。

假设 A 中至少还包含一个顶点，例如 a_4。那么根据相同的论证， a_4在 $\{b_1, b_2, b_3\}$ 中恰有一个邻点，且该邻点必定不同于 b_2 和 b_3，~ 也就是说， a_4 与 b_1相邻。但这样一来， a_2、 a_3、 a_4、 b_1、 b_2、 b_3 导出 $3P_2 = C_6$。这一矛盾表明 $A = \{a_1, a_2, a_3\}$。

假设 B 中至少还包含一个顶点，例如 b_4。那么 b_4 与 a_1不相邻，因为~否则会出现一个导出的 C_4 或一个导出的 C_4。此外， b_4 恰好与 a_2 和 a_3中的一个相邻，因为否则会出现一个导出的 C_6 或一个导出的 C_4。不失一般性，设 b_4 与 a_2相邻。如果 B 中还包含一个顶点，例如 b_5，那么根据相同的论证， b_5 恰好与 a_2 和 a_3中的一个相邻。如果 b_5 与 a_2相邻，~那么 a_1、 a_3、 b_4、 b_5 导出一个 C_4；如果 b_5 与 a_3相邻，那么 a_1、 a_2、 a_3、 b_1、 b_4、 b_5 导出~$3P_2 = C_6$。两种情况都导致矛盾，这表明 $B = \{b_1, b_2, b_3, b_4\}$，因此 H 是一个导出的S_1，2，3。

□

定理1。对于二部图 H， H-自由二部图类的增长速度至多为阶乘级，当且仅当 H 是以下某个图的诱导子图： P_7、$S_{1,\ 2,\ 3}$ 以及 $F_{p,\ q}$。

证明。$F_{t,\ p}$-自由二部图和 $S_{1,\ 2,\ 3}$-自由二部图的阶乘级增长速度已在 [4]，中证明，而 P_7-自由二部图的情形已在 [25] 中证明。若 H 不是 P_7、 $S_{1,\ 2,\ 3}$ 或 $F_{t,\ p}$ 的诱导子图，那么根据引理 1， H 或 H 含有一个环。因此， H-自由二部图类的增长速度是超阶乘级的（这是一个众所周知的事实，也可见于 [4]）。

□

关于二部图单生成类是否存在隐式表示，尚不清楚是否也存在类似的二分情形。增长速度至多为阶乘级是一个类存在隐式表示的必要条件，因此由定理1可直接推出：若一个 H-自由二部图类存在隐式表示，那么 H 是 P_7、 $S_{1,\ 2,\ 3}$ 或 $F_{p,\ q}$ 的诱导子图。已知 $S_{1,\ 2,\ 3}$-自由二部图类存在隐式表示，因为该类的团宽度有界 [21]，而团宽度有界的图类存在隐式表示 [28]。在本研究之前，另外两种情形仍未解决。在第 4.1 节中，我们通过证明任何此类图类都存在隐式表示，解决了 $F_{p,\ q}$-自由二部图的情形。

弦二部图。若一个二部图不含长度至少为 6 的无弦（诱导）环，则称其为弦二部图。C_4-自由弦二部图类恰好是森林类，它是阶乘级的，并且具有隐式表示。尽管它与森林类如此“接近”，弦二部图类却是超阶乘级的[27]，因此不具有隐式表示。这使得弦二部图类自然成为研究阶乘级且可隐式表示的图类的领域。

众所周知，$K_{p,\ q}$-自由弦二部图类的树宽有界[12], ，因此具有隐式表示。弦二部图的其他一些子类尚不确定是否具有隐式表示，但已知它们是阶乘级的。其中包括排除某个固定森林 [24] 的弦二部图类。本文揭示了若干新的弦二部图阶乘子类，并证明其中一些具有隐式表示。除此之外，我们还证明，$S_{2,\ 2,\ 2}$-自由弦二部图类，以及任何避开某个固定链图的弦二部图类，都具有隐式表示。

2.2 工具

文献 [6] 中介绍了若干用于构造隐式表示的实用工具。本节将介绍其中两种，并对其中一种进行推广。

第一个结果涉及局部有界覆盖的概念，其定义如下。设 G 是一个图。若一组图 H_1, ..., H_k 的并集恰好等于 G，则称它们是 G 的一个覆盖；也就是说，若 $V(G) = \bigcup_{i=1} V(H_i)$ 且 $E(G) = \bigcup_{i=1} E(H_i)$。

定理 2. [6] 设 $\mathcal{X}$ 是一个图类， c 是一个常数。若每个图 $G \in \mathcal{X}$ 都能由图类 $\mathcal{Y}$ 中的图覆盖，且该图类具有隐式表示，并且 G 的每个顶点至多被 c 个图覆盖，则 $\mathcal{X}$ 也具有隐式表示。

第二个结果涉及部分覆盖的概念，可表述如下。

定理 3. [6] 设 $\mathcal{X}$ 是一个遗传类。假设存在一个常数 d 和一个遗传类 $\mathcal{Y}$，后者具有隐式表示，使得每个图 $G \in \mathcal{X}$ 都包含一个非空子集 $A \subseteq V(G)$，满足以下性质： $G[A] \in \mathcal{Y}$ 且 A 的每个顶点在 $V(G) - A$中至多有 d 个邻点或至多有 d 个非邻点。则 $\mathcal{X}$具有隐式表示。

接下来，我们给出定理 3 的一个推广，它将在后文中发挥作用。

定理 4. 设 $\mathcal{X}$ 是一个遗传类。假设存在一个常数 d 和一个遗传类 $\mathcal{Y}$，后者具有隐式表示，使得每个图 $G \in \mathcal{X}$ 都包含一个非空子集 $A \subseteq V(G)$，满足以下性质：

(1) $G[A] \in \mathcal{Y}$; (2) $V(G) - A$ 可以分裂为两个子集 B_1 和 B_2，且它们之间没有边；
(3) A 的每个顶点在 B_1 中至多有 d个邻点或至多有 d 个非邻点，并且在 B_2中至多有 d 个邻点或至多有 d 个非邻点。

于是， $\mathcal{X}$ 具有一个隐式表示。

证明。设 G 是 $\mathcal{X}$ 中一个有 n 个顶点的图。我们递归地为 G 的顶点指定两两不同的索引，方法如下。设 $\{1,2,\ldots,n\}$ 为 G 的索引范围，且 A、B_1 和 B_2 为满足定理条件 (1)–(3) 的 $V(G)$ 的划分。我们以任意方式将区间 $\{|B_1|+1,|B_1|+2,\ldots,n-|B_2|\}$ 中的索引一一分配给 A 中的顶点。我们通过分解 $G[B_1]$，并将区间 $\{1,2,\ldots,|B_1|\}$ 用作其索引范围，递归地定义 B_1 中顶点的索引。同理，我们通过分解 $G[B_2]$，并将区间 $\{n-|B_2|+1,n-|B_2|+2,\ldots,n\}$ 用作其索引范围，定义 B_2 中顶点的索引。

现在，对于每个顶点 $v\in A$，其标签由六个部分组成：

1. v 在 $G[A]\in\mathcal{Y}$的隐式表示中的标签；2. v的索引；3. B_1的索引范围，我们称之为 v 的左索引范围；4. B_2的索引范围，我们称之为 v的右索引范围；5. 一个布尔标志，用于指示 v 在B_1 中至多有 d 个邻点或 d 个非邻点，以及这些至多为 d 个顶点的索引；6. 一个布尔标志，用于指示 v 在B_2 中至多有 d 个邻点或 d 个非邻点，以及这些至多为 d 个顶点的索引。

对于第三个和第四个部分，我们只存储范围的第一个和最后一个元素，因此标签总长度为 $O(\log n)$。B_1 和B_2 中的顶点标签以递归方式定义。

注意，只有在以下情况下，两个顶点才可能相邻：它们具有相同的左索引范围和右索引范围，或者其中一个顶点的索引包含在另一个顶点的左索引范围或右索引范围内。在前一种情况下，顶点的邻接关系由其标签的第一个部分中的标签决定。在后一种情况下，邻接关系则利用标签第 5 和第 6 个部分中存储的信息来确定。□

在二部图的背景下，定理 4 可以作如下调整。

定理 5. 设 $\mathcal{X}$ 是一个二部图遗传类。假设存在一个常数 d和一个遗传类 $\mathcal{Y}$，它具有隐式表示，使得每个图 $G\in\mathcal{X}$都包含一个非空子集 $A\subseteq V(G)$，并满足以下性质：

(1) $G[A]\in\mathcal{Y}$；(2) $V(G)-A$ 可以分裂为两个子集 B_1 和 B_2，它们之间没有边；以及 (3) A 中的每个顶点 v，在 A 中与包含 v 的部分相对的那一部分内，至多有 d 个邻点或至多有 d 个非邻点；在 B_2 中与包含v的部分相对的那一部分内，至多有 d 个邻点或至多有 d 个非邻点。

那么，$\mathcal{X}$ 具有隐式表示。

3 图参数

很容易看出，有界顶点度的图类具有隐式表示。更一般地，图类中的有界退化度为我们提供了一种隐式表示，其中图 G 的退化度是满足以下条件的最小 k：G 的每个诱导子图都包含一个度至多为 k的顶点。

Spinrad 在 [28] 中证明，有界团宽度也能导出隐式表示。最近引入的参数孪生宽度推广了团宽度：有界团宽度意味着有界孪生宽度，但反之不成立。 [8]中证明，有界孪生宽度也意味着隐式表示的存在。

[2], 中引入的图功能性概念，在以下意义上同时推广了退化度和孪生宽度：有界退化度或有界孪生宽度意味着有界功能性，但反之不成立。有界功能度的图，其增长速度至多为阶乘级 [6]。然而，它们是否具有隐式表示仍是一个悬而未决的问题。为探讨这一问题，我们在第3.1节分析一个介于孪生宽度与功能性之间的参数。随后，在第3.2节和第3.3节中，我们引入更多参数，并报告一些相关结果。

3.1 对称差

设 G 为一个图。给定两个顶点 x、y，我们将 x 与 y在 G中的对称差定义为 $V(G)$ 中与 x和 y恰有一个相邻的顶点数，并记为 sd(x,y)。我们将 G 的对称差 sd(G) 定义为满足以下条件的最小数： G 的任意诱导子图都包含一对对称差至多为 sd(G) 的顶点。

该参数在 [2], 中首次提出，文中证明了有界团宽度意味着有界对称差。论文 [2] 还指出了若干具有有界对称差的图类。下面我们将介绍更多该参数有界的图类。

第一个结果涉及具有有界连续度的图类。例如，二部置换图的连续度为 1 [11]。连续度这一概念在 [16] 中提出，其动机是需要在计算机内存中紧凑地表示图。实现这一目标的一种方法是为顶点寻找一种线性序，使得每个顶点的邻域构成一个区间。并非所有图都存在这样的排序；在这种情况下，可以放宽要求，寻找一种排序，使每个顶点的邻域至多可分成 k 个区间。使图 G 能以这种方式表示的 k 的最小值，就是图 G 的连续度，记作 cont(G)。

定理 6. 对于任意 $k \geq 1$，任何连续度为 k 的图，其对称差最多为 $2k$。

证明。只需证明，任意一个连续度为 k 的图 G ，都存在一对顶点，其对称差至多为 $2k$。设 $x_1,\ldots,x_n$ 是顶点的一个线性序，其中

每个顶点的邻域都由至多 k 个区间组成，并设

$$S := \sum_{i=1}^{n-1} \mathrm{sd}(x_i, x_{i+1}).$$

由于任意顶点 y 的邻域在线性序中至多由 k 个区间组成，因此至多有 $2k$ 对连续顶点 x_i, x_{i+1}，使得 y 与其中一个相邻，但与另一个不相邻。因此， y 对 S的贡献至多为 $2k$，从而 $S \leq 2kn$。由于求和中有 $n-1$ 项，其中必有一项至多为 $2k$（除非 $n \leq 2k+1$，此时结论显然成立）。

□

第二个结果讨论 $F_{t,\ p}$-自由二分图类（图1展示了 $F_{t,\ p}$的示例）。对于所有 $t, p \geq 2$, 这些类的团宽度均无界。为证明它们的对称差有界，不失一般性，我们假设$t = p$。

定理 7. 对每个 $t \geq 2$，每个 $F_{t,\ t}$-自由二分图 $G = (B, W, E)$ 的对称差至多为 $2t$。

证明。只需证明 G 中有一对对称差至多为$2t$的顶点。对于两个顶点 x、y，记 $\mathsf{dd}(x, y)$ 为度差 $|\deg(x) - \deg(y)|$；对于一个子集 $U \subseteq V(G)$，记 $\mathsf{dd}(U) := \max\{\mathsf{dd}(x, y) : x, y \in U\}$。不妨设 $\mathsf{dd}(W) \leq \mathsf{dd}(B)$，并令 x、y为 B中的两个顶点，满足 $\mathsf{dd}(x, y) = \mathsf{dd}(B)$, $\deg(x) \geq \deg(y)$。

记 $X := N(x) - N(y)$。显然，$\mathsf{dd}(B) \leq |X|$。若 $|X| \leq 2$，则 $\mathsf{sd}(x, y) \leq 4 \leq 2t$，从而结论成立。

现在假设 $|X| \geq 3$。首先注意到，$\mathsf{dd}(X) \leq \mathsf{dd}(W) \leq \mathsf{dd}(B) \leq |X|$。令$x_1$、$x_2$、.....、$x_{|X|}$为 X中的一列顶点，按度递减排列，即对所有 $i > j$均有 $\deg(x_i) \geq \deg(x_j)$。由于 $\sum_{i=1}^{|X|-1} (\deg(x_i) - \deg(x_{i+1})) = \mathsf{dd}(X) \leq |X|$，且每一项均非负，由抽屉原理可立即推出，对于某个 i，有 $d(x_i) - d(x_{i+1}) \leq 1$。因此， X 中含有两个顶点 p 和 q，满足 $\mathsf{dd}(p, q) \leq 1$。最后，我们得到 $\mathsf{sd}(p, q) \leq 2t$；否则， $P := N(p) - N(q)$ 和 $Q := N(q) - N(p)$ 的大小都至少为 t，此时， x、y、p、q连同从 P中取出的 t 个顶点以及从 Q中取出的 t 个顶点会导出禁图 F_t、$_t$。

□

对称差在$S_{1,2,3}$-free 图类中同样有界，因为这些图具有有界的团宽度 [21]。对于定理1中的剩余图类，即 P_7-free 二分图类，对称差是否有界仍是一个悬而未决的问题。

猜想 1。对称差在 P_7-free 二分图类中有界。

我们还猜想，每个有界对称差图类都存在隐式表示。

猜想 2. 每个有界对称差图类都存在隐式表示。

We w我将在第4节中验证关于$F_{t,p}$-自由二部图类的这个猜想 .

3.2 链划分数

设 G 是一个图，令 k 为将 $V(G)$划分为齐次集所需的最少子集数，并要求任意一对子集之间的边构成一个链图。我们称 k 为 G的链划分数。

这一概念从未在文献中被正式提出，但曾隐含地出现在 [5], 中；作者在那里证明了一个可表述如下的结果。

定理 8. [5] 在遗传类 $\mathcal{X}$ 中，链划分数无界，当且仅当 $\mathcal{X}$ 至少包含以下六个类之一：由顶点度至多为1的（部）$\widetilde{}$图构成的类 $\mathcal{M}$ ；由$\sim\mathcal{M}$中的图的二部补图构成的类$\mathcal{M}$ ；由 $\mathcal{M}$ 和 $\mathcal{M}$中的图的补图构成的类；以及两个相关的分裂图$\widetilde{}$子类，它们分别由 $\mathcal{M}$ 和 $\mathcal{M}$ 中的图通过在其二分划分的一部分中构造一个团而得到。

根据定理 2，以及链图具有隐式表示这一事实，有界链划分数意味着存在隐式表示。

3.3 双星划分数

第 [5] 节中的结果提出了另一个对链划分数进行推广的参数。为了定义这个参数，我们称一类 $\mathcal{X}$ 二部图为无双星的，如果存在一个常数 p，使得 $\mathcal{X}$ 中没有图 G 含有 $2K_{1,\,p}$ 的非平衡拷贝，也就是说，不存在 $2K_{1,\,p}$ 的诱导副本，其中两个星的中心属于 G 的二分划分的同一部分。特别地，每一类无双星图都是对某个 t、p 无 $F_{t,\,p}$ 的。我们称一类 $\mathcal{X}$ 图具有有界双星划分数，如果存在常数 k 和 p ，使得 $\mathcal{X}$ 中每个图的顶点都能划分为至多 k 个齐次子集，并且任意一对子集之间的边构成一个不含 $2K_{1,\,p}$ 非平衡拷贝的二部图。我们注意到，如果 $p=1$，那么就得到一类具有有界链划分数的图。

有界双星划分数的类已在上一段中通过两个常数 k 和 p 进行了定义。取二者中的最大值后，我们可以讨论一个单一的常数；该常数可视为一个图参数，用于定义有界双星划分数类的族。在第4节中，我们将证明，这一族中的任意类都具有隐式表示。

与定理 8 类似，有界双星划分数的类可通过参数无界的极小遗传类来刻画。在这种刻画中，顶点度至多为1的图类 $\mathcal{M}$ 被

替换为星森林类 $\mathcal{S}$，其中所有星图的中心都属于二分划分的同一部分。

通过在二分划分的两部分之间或各部分内部进行不同的补图操作，可以得到另外七个图类。加上图类 $\mathcal{S}$ 本身，共有八个不同的二部图、余二部图和分裂图图类（注意，对包含星图中心的部分和包含星图叶子的部分进行补图操作，会产生不同的图类）。我们将它们统称为“与 $\mathcal{S}$ 相关的图类”。

定理 9. [5] 遗传类 $\mathcal{X}$ 的双星划分数无界，当且仅当 $\mathcal{X}$ 至少包含以下十个图类之一：P_3-自由图类（团的不交并）、$\overline{P}_3$-自由图类（完全多部图）、图类 $\mathcal{S}$，以及与 $\mathcal{S}$ 相关的七个图类。

3.4 h-指数

我们此前观察到，有界链划分数的图类构成有界双星划分数图类的一个子族。后者中另一个有趣的限制是由有界 h-指数的图类构成的。图 G 的 h-指数 $h(G)$ 是满足以下条件的最大 $k \geq 0$：G 至少有 k 个度不小于 k 的顶点。这个参数在动态算法 [13] 的研究中很重要。

为了说明有界 h-指数确实意味着有界双星划分数，我们注意到，定理 9 中除星森林外的所有图类都包含所有完全图或所有完全二部图。因此，由于完全图、完全二部图和星森林的 h-指数都无界（这给出了逆否命题），上述蕴含关系便成立。

事实上，正如我们将在下文的定理 10 中证明的，这三类是仅有的 h-指数无界的极小类。我们注意到，这一刻画的“原型”曾在 [3],中出现，其中在余图类内确定了 h-指数无界的极小类集合。 [3]中还曾猜想，这一刻画适用于所有图构成的全集；而这正是我们现在要证明的。

定理 10. 星森林、完全二部图和完全图这三类，是仅有的三种 h-指数无界的图的极小遗传类。

证明. 容易验证，这三类中的 h-指数均无界。因此，接下来只需证明，任意一个 X 类，只要其 h-指数无界，就包含这三类之一。为此，只需证明：对于每个 n，都存在 $d = d(n)$，使得任何 h-指数为 d 或更大的图，都含有一个作为诱导子图的团 K_n、完全二部图$K_{n,\ n}$ 或星森林$nK_{1,\ n}$。我们先给出以下观察：

(*) 对于任意一对正整数 n、m，存在一个整数 $z_{n,\ m}$ 使得任何二部图，只要其二分划分一侧有 $z_{n,\ m}$ 个度至少为 $z_{n,\ m}$ 的顶点，就包含一个 $K_{n,\ n}$，或一个诱导星森林 $mK_{1,\ n}$。

我们对 m 使用归纳法证明这一观察。当 $m = 1$ 时，该命题成立，因为对于任意 n，我们只需取 $z_{n,\ 1} := n$。现在令 $m > 1$。记 $R^b(i, j)$ 为二部拉姆齐数，即满足以下条件的最小整数：任何每侧各有 $R^b(i, j)$ 个顶点的二部图，要么包含 $K_{i,\ i}$，要么其二部补图包含 $K_{j,\ j}$。令 $z_{n,\ m} := R^b(n, z_{n,\ m-1})$，并令 $G = (A, B, E)$ 为一个二部图，其中含有一个集合 $S \subseteq A$，该集合有 $z_{n,\ m}$ 个度至少为 $z_{n,\ m}$的顶点。

选取一个度最小的顶点 $s \in S$，并考虑由集合 S 和 $N(s)$ 导出的二部图 G'。根据构造，$|S| \geq z_{n,\ m}$ 和 $|N(s)| \geq z_{n,\ m}$，G' 中包含的要么是一个 $K_{n,\ n}$，要么是两个大小为 $z_{n,\ m-1}$ 且彼此之间没有边的集合 $S' \subseteq S$、$T \subseteq N(s)$。前一种情形下结论成立，因此考虑后一种情形。注意，由于 s 的度最小，且 S' 中的每个顶点在 $N(s)$ 中至少有 $|T| = z_{n,\ m-1}$ 个非邻点，因此 S' 中的每个顶点在 $N(s)$ 之外都至少有 $z_{n,\ m-1}$ 个邻点。令 G'' 为由 S' 中的顶点及其在 $N(s)$ 之外的邻域所导出的图。对 G'' 应用归纳假设，可知 G'' 中包含一个 $K_{n,\ n}$，或一个导出的 $(m-1)K_{1,\ n}$。前一种情形下结论再次成立；后一种情形下，注意将顶点 s 与从 T 中任取的 n 个顶点一同加入 $(m-1)K_{1,\ n}$，即可得到一个 $mK_{1,\ n}$，从而证明了该观察。

第二个要素如下：

(**) 对任意正整数 n，都存在一个整数 $m = m(n)$，具有如下性质：若 G 是一个图，其顶点集可划分为 m 个大小为 n的独立集，则 G 包含一个 $K_{n,\ n}$、一个导出的 $K_{n,\ n}$，或一个大小为 n^2的独立集，而该独立集是原有 n 个独立集的并集。

为证明这一点，记 $R_c(i)$ 为多色拉姆齐数——满足如下条件的最小整数：对于一个有 $R_c(i)$ 个顶点的完全图，无论如何用 c 种颜色对边着色，都存在一个由 i 个顶点组成的单色团。令 $m := R_{2^{n^2}}(2n)$。

现在设 G 是一个图，其顶点集为 $V(G) = V_1 \cup V_2 \cup \ldots \cup V_m$（这些 V_i 两两不相交），并且对所有 i，V_i 都是独立集，且 $|V_i| = n$。对于每个 i，固定 V_i中顶点的一个排序，即一个双射 $\varphi_i : V_i \to [n]$。对于每个满足 $1 \leq i < j \leq m$ 的 i, j，令$E_{ij} := \{(\varphi_i(x), \varphi_j(y)) : x \in V_i, y \in V_j$，且 $\{x, y\} \in E(G)\}$。直观地说，$E_{ij} \subseteq [n] \times [n]$就是 V_i 与 V_j之间的边集；我们将边从较低索引指向较高索引，并通过各自的排序将这两个集合分别对应到 $[n]$ 的副本。

考虑一个顶点集为 $[m]$ 的辅助完全图；对于每个 $i < j$，我们用集合 E_{ij} 为边 $\{i, j\}$ 着色。注意到有 2^{n^2} 种可能的颜色，分别对应于 $[n] \times [n]$ 的子集；我们在 $2n$ 个顶点 $i_1 < i_2 < \cdots < i_{2n}$ 上找到一个单色团。注意，对于所有 $1 \leq k < l \leq 2n$，都有 $E_{i_1 i_2} = E_{i_k i_l}$。如果 $E_{i_1 i_2}$ 为空，那么 $V_{i_1} \cup V_{i_2} \cup \cdots \cup V_{i_n}$ 导出一个大小为 n^2 的独立集。如果存在 $1 \leq t \leq n$ 使得 $E_{i_1 i_2}$ 包含 (t, t)，那么 $\{\varphi_{i_r}^{-1}(t) : 1 \leq r \leq n\}$ 是一个 K_n。最后，如果对于某个 $s \neq t$，$E_{i_1 i_2}$ 包含 (s, t)，但不包含 (s, s)，也不包含 (t, t)，那么 $\{\varphi_{i_r}^{-1}(s) : 1 \leq r \leq n\} \cup \{\varphi_{i_r}^{-1}(t) : n + 1 \leq r \leq 2n\}$ 在 G 中导出一个 $K_{n,\ n}$。

现在，我们可以结合这两个事实，得出主要结果。

(***) 对任意整数 n，都存在一个整数 $d = d(n)$，使得任何 h-指标至少为 d 的图都包含一个 K_n、一个 $K_{n,\ n}$，或一个 $nK_{1,\ n}$。

用 $R(p,q)$ 表示通常意义上的拉姆齐数——使得一个有 $R(p,q)$ 个顶点的图必然包含一个大小为 p 的团，或一个大小为 q 的独立集的最小数。令$N := R(n,n)$，并设 $d := R(n,z_N,m(n))$，其中 z 和 m 分别如 **(*)** 和 **(**)** 中所定义。假设图 G 包含一个由 d 个顶点组成的集合 S，且这些顶点的度至少为 d。那么，$G[S]$ 要么包含一个 K_n，此时结论成立；要么包含一个大小为 $z = z_N$ 的独立集 $S' \subseteq S$，$m(n)$。注意，S' 中的每个顶点在 S之外的度至少为 $z_N,m(n)$。用 G' 表示二部图，其两部分为 S' 和 $T' := V(G) \setminus S'$，并且$E(G') := \{\{x,y\} \in E(G) : x \in S', y \in T'\}$（也就是说，从 G' 中删除两端都在 T' 中的所有边，即得到 G）。根据 z 的定义，G'包含一个 $K_{N,N}$，或一个诱导星森林 $m(n)K_{1,N}$。这个二部图中的一个 $K_{N,N}$，对应于 G 中的一个诱导$K_{n,n}$，或 G 中的一个 K_n；事实上，考察属于 T' 的 K_N 的 N 个顶点：按构造，它们在 G 中导出的图必然包含一个大小为n 的独立集，或一个大小为 n 的团。

剩下需要考虑的情形是，G' 包含一个诱导星森林 $m(n)K_{1、N}$。注意，每个 $K_{1、N}$ 在 G' 中都是诱导的，但在 G中则不一定如此。然而，通过采用与上述情形类似的论证，要么 G 包含一个 K_n（于是结论得证），要么我们可以找到一个在 G' 中诱导、但在 G中不一定诱导的 $m(n)K_1$、n，并且每个独立的 K_1、n 在 G 中也都是诱导的。特别地，每个独立的 K_1、n 的叶子在G中构成一个独立集。考虑由这些 $m(n)$ $K_{1、n}$的叶子导出的图 $H \subseteq G$。根据$m(n)$的定义，H 要么包含一个 K_n（于是结论得证），要么包含一个诱导$K_{n、n}$（于是结论得证），要么 n 个 $K_{1、n}$的 n^2 叶子导出一个独立集。在最后一种情形下，G 包含一个诱导 $nK_{1、n}$，定理得证。

□

4 隐式表示

本节确定了一些新的具有隐式表示的遗传图类。

4.1 $F_{t,\ p}$-无二部图

本节将证明，对于任意 t 和 p，$F_{t,\ p}$-无二部图都具有隐式表示。结合定理 7，这就验证了这些图类的猜想 2。

不失一般性，假设 $t = p$，并将分析分为若干中间步骤。第一步处理无双星二分图的情形。

引理 2. 设 $G = (A, B, E)$ 是一个不含 $2K_{1,t}$ 的非平衡诱导副本的二部图。那么，G 有一个顶点的度至多为 $t-1$，或二部余度至多为 $(t-1)(t^2-4t+5)$。

证明。设 $x \in A$ 是一个最大度顶点。记 Y 为 x 的邻点集，记 Z 为它在 B 中的非邻点集（因此 $B = Y \cup Z$）。不妨设 $|Y| \geq t$ 和 $|Z| \geq (t-1)(t^2-4t+5)+1$，否则结论成立。

注意，$w \in A$ 在 Z中相邻的顶点少于 t 个。事实上，如果 $w \in A$在 Z中有 t 个邻点，那么它必定与 Y 中除至多 $t-1$ 个顶点外的所有顶点相邻（否则就会出现一个$2K_{1,\,t}$），因此它的度大于 x的度，矛盾。

现在证明 Z 有一个度至多为 $t-1$的顶点。选取成员 z_1、……、 $z_{t-1} \in Z$，并按其度数非递增排列，记 W_i 为 z_i的邻域。由于G 不包含$2K_1$的非平衡诱导副本，t，且对所有

$i1 \leq i \leq t-2$、 $|W_{i+1} - W_i| \leq t-1$。不难看出，事实上， $|W_{i+1} - \bigcap_{s=1}^{t-2} W_s| \leq (t-1)\,i$，特别是，$|W_{t-1} - \bigcap_{i=1} W_i| \leq (t-1)\,(t-2)$。

由此，我们可以计算出 Z 中拥有$t-2$邻点的顶点数量上界：根据上文给出的度条件，$W_{t-1} \cap \bigcap W_i$ 中的每个顶点都仅与 Z中的 z_1、……、 z_{t-1}相邻。$W_{t-1} - \bigcap W_i$中至多有$(t-1)(t-2)^{t-2}$个顶点，每个顶点除 z_{t-1}外，在 Z中至多有 $t-2$ 个邻点。因此，拥有 W_{t-1}中邻点的顶点总数至多为$(t-1) + (t-1)(t-2)^2 = (t-1)(t^2-4t+5)$，其中包括 z_{t-1} 本身。根据对 Z大小的假设，必定存在一个顶点 $z \in Z$，它与 z_{t-1}没有公共邻居。由于$2K_{1,t}$ 是禁用的，z 和 z_{t-1} 中必有一个的度至多为 $t-1$，断言得证。

□

结合定理 5（应用于 $B_2 = \emptyset$），可立即由此结果推出，无双星二分图具有隐式表示。

推论 1. 排除 $2K_{1,\,t}$ 的二部图类，对于任意固定的 t，都具有隐式表示。

结合定理 2，这条推论还可以得出另一个有趣的结论。

推论 2. 有界双星划分数的图类，尤其是有界 h-指标的图类，都具有隐式表示。

为了进一步研究 $F_{t,\,t}$-自由二部图的隐式表示，我们接下来考察 $F^1_{t,\,t}$-自由二部图的情形，其中 $F^1_{t,\,t}$ 是从 $F_{t,\,t}$ 中删除孤立顶点后得到的图。

Le定理 3. $F^1_{t,\,t}$-自由二部图类具有隐式表示 .

证明。只需证明连通图的情形即可（例如，这可由定理 2 推出）。设 G 是一个 $F^1_{t,\,t}$-free 二部图，并设 v 是 G 中度最大的一个顶点。我们将距离 i 为 v 的顶点集合记为 V_i。

首先，我们证明子图 $G[\{v\} \cup V_1 \cup V_2]$ 具有隐式表示。为此，记 u 为 V_1 中度最大的一个顶点，记 U 为 V_2 中 u 的邻域，$W := V_2 - U$，以及 $V_1' := V_1 - \{u\}$。

设 V_1' 中的一个顶点为 x，并假设它在 W 中有 t 个邻点。那么，由于 u 的极大性，U 中至少有 t 个非邻点；此时，x 在 W 中的 t 个邻点、x 在 U 中的 t 个非邻点，以及 x、u 和 v 导出一个 $F_{t,\,t}^1$。这一矛盾表明，V_1' 的每个顶点在 W 中至多有 $t-1$ 个邻点，因此，根据定理 5（应用于 $B_2 = \emptyset$），图 $G[V_1' \cup W]$ 有隐式表示。

为证明 $G[V_1' \cup U]$ 有隐式表示，我们注意到该图不含 $2K_{1,\,t}$ 的非平衡诱导副本。事实上，如果这两个星图的中心属于 V_1'，那么它们与顶点 v 一起导出一个 $F_{t,\,t}^1$；如果这两个星图的中心属于 U，那么它们与顶点 u 一起导出一个 $F_{t,\,t}^1$。因此，图 $G[\{v\} \cup V_1 \cup V_2]$ 可由至多四个图覆盖（其中两个是以 v 和 u 为中心的星图），且每个图都有隐式表示；由定理 2 可知，该图有隐式表示。

为完成证明，我们注意到，V_2 中的每个顶点在 V_3 中至多有 $t-1$ 个邻点（注意，根据集合 V_i的定义，V_2 的任何邻点要么在 V_1 中，要么在 V_3中）。事实上，如果某个顶点 $x \in V_2$ 在 V_3中有 t 个邻点，那么 x 在 V_1中至少有 t 个非邻点（由于 v的极大性）；在这种情况下，x 在 V_3中的 t 个邻点、x 在 V_1 中的 t 个非邻点，连同 x、v以及 x在 V_1 中的任意一个邻点（根据定义，该邻点必然存在）导出一个$F_{t,\,t}^1$。

现在我们将定理 3应用于 $A = \{v\} \cup V_1 \cup V_2$，从而得出 G 具有隐式表示，因为 A 中的每个顶点在 A之外至多有 $t-1$ 个邻点。 □

关于$F_{t,\,t}$-自由二分图的隐式表示，最后一步与引理 3类似，但需要进行一些修改。

定理 11. $F_{t,\,t}$-自由二部图类具有隐式表示 .

证明。类比引理 3，我们考虑一个连通的 $F_{t,\,t}$-自由二部图 G，将 G 中度最大的顶点记为 v，并将与其距离为 i 的顶点集合记为 V_i。此外，我们将 V_1 中度最大的顶点记为 u，将 u 在 V_2 中的邻域记为 U，$W := V_2 - U$，以及 $V_1' := V_1 - \{u\}$。

设 V_1' 中的一个顶点为 x，并假设它有 t 个邻点，以及在 W 中有一个非邻点 y。则由于 u 的极大性，x 在 U 中至少有 t 个非邻点；在这种情况下，x 在 W 中的 t 个邻点、x 在 U 中的 t 个非邻点，连同 x、y、u 和 v，导出一个 $F_{t,\,t}$。这一矛盾表明，V_1' 的每个顶点在 W 中要么至多有 $t-1$ 个邻点，要么至多有 0 个非邻点。因此，根据定理 5（应用于 $B_2 = \emptyset$），图 $G[V_1' \cup W]$ 具有隐式表示。

为证明 $G[V_1' \cup U]$ 具有隐式表示，我们证明该图不含$\widetilde{F}_{t,t}^1$（需要强调的是，在$\widetilde{F}_{t,t}^1$中，孤立顶点属于二分划分的一部分，而星图的中心属于另一部分）。事实上，如果 $\widetilde{F}_{t,t}^1$的两个星图的中心属于 V_1'，那么 $\widetilde{F}_{t,t}^1$与顶点 v将导出一个 $F_{t,t}$；如果 $\widetilde{F}_{t,t}^1$的两个星图的中心属于 U，那么 $\widetilde{F}_{t,t}^1$与顶点 u将导出一个 $F_{t,t}$。因此，

图 $G[\{v\} \cup V_1 \cup V_2]$ 至多可由四个图覆盖（其中两个是以 v 和 u为中心的星图），且这四个图各自都具有隐式表示，因此根据定理 2，该图具有隐式表示。

为完成证明，我们注意到， V_2 的每个顶点要么至多有 $t-1$个邻点，要么在 V_3中没有非邻点。事实上，若顶点 $x \in V_2$ 有 t 个邻点，并且在 V_3中有一个非邻点 y，那么 x 在 V_1 中至少有 t 个非邻点（这是由 v的极大性导致的）。此时， x 在 V_3中的 t 个邻点、 x 在 V_1 中的 t 个非邻点，连同 x、y、 v以及 x 在 V_1 中的任意一个邻点，会导出一个$F_{t,t}$。

最后，我们注意到，若顶点 $x \in V_2$ 在 V_3中有 t 个邻点，那么 V_5（因而对于任意 $i \geq 5$， V_i 也成立）为空；否则，就会像上一段那样导出一个$F_{t,t}$，其中顶点 y 可以取自 V_5。现在我们应用定理 5（取 $B_2 = \emptyset$），令 $A = \{v\} \cup V_1 \cup V_2$，从而得出 G 有一个隐式表示。事实上，若 V_2 的每个顶点在 V_3中至多有 $t-1$ 个邻点，那么 A 的每个顶点在 A之外至多有$t-1$ 个邻点；而若 V_2 的某个顶点在 V_3中至少有 t 个邻点，那么对于 $i \geq 5$，$V_i = \emptyset$ 成立，因此 A 的每个顶点在对侧部分中、 A之外，要么至多有 $t-1$ 个邻点，要么至多有 0 个非邻点。

□

4.2 单侧禁诱导二部子图

在二部图的背景下，有些遗传类是通过禁止二部图的单侧副本来定义的。例如，考虑星森林类，其顶点划分为黑色顶点构成的独立集和白色顶点构成的独立集。如果所有星的中心颜色相同，例如都是黑色，那么该类可通过禁止一个白色中心的 P_3 来定义。对于由单侧禁诱导二部子图定义的类，其隐式表示目前鲜有研究。例如，已知不含单侧 P_5 的二部图具有隐式表示。这一点不难证明，也可由以下事实推出： P_6-自由二部图的团宽度有界，因此具有隐式表示（注意，交换二分划分后，P_6 具有对称性）。下文将把单侧禁 P_5 的结果推广到单侧禁$F_{t,\,1}$。我们先讨论单侧禁$F^1_{t,\,1}$的情形，其中$F^1_{t,\,1}$仍表示从$F_{t,\,1}$中删除孤立顶点后得到的图。

引理4. 不含 $F^1_{t,1}$ 单侧副本的二部图类具有隐式表示。

证明. 设 $G = (U, V, E)$ 是一个不含 $F^1_{t,1}$ 副本的二部图，且最大度顶点位于 U 中。为证明该引理，我们应用定理 5。

若 G 是无边图，则结论可由定理 5 和 $A = V(G)$ 直接得出。否则，令 u 为 U 中度最大的顶点。我们将 V 的顶点分为两组：V_1，即 u 的邻点集合；以及 V_0，即 u 的非邻点集合。假设存在一个顶点 $x \in U$，它既有邻点属于 V_1，也有邻点属于 V_0。我们将 V_{10} 记作 x 在 V_1 中的非邻点集合，将 V_{01} 记作 x 在 V_0 中的邻点集合。注意，$|V_{01}| \leq |V_{10}|$，因为 $\deg(x) \leq \deg(u)$。此外， $|V_{10}| < t$，否则 V_{10} 中的 t 个顶点、 V_{01} 中的一个顶点，以及 u 和 x 的一个公共邻居（根据假设，这些顶点确实存在）与 u

和 x 导出一个禁用的 $F_{t,\,1}^{1}$ 副本。因此， x 在 V_1 中至多有 $t-1$ 个非邻点，在 V_0 中至多有 $t-1$ 个邻点。现在我们定义三个子集 A、 B_1、 B_2 如下：

A由顶点 u、 U 中同时在 V_1 和 V_0中有邻点的顶点，以及 U 中既不在 V_1 也不在 V_0中有邻点的顶点组成，

B_1 由 V_1 和 U 中仅在 V_1中有邻点的顶点组成，

B_2 由 V_0 和 U 中仅在 V_0中有邻点的顶点组成。

采用这一记号，结论由定理 5 得出。 □

定理12。不含 $F_{t,1}$ 的二部图类具有隐式表示。

证明。设 $G=(U,V,E)$ 是一个不含 $F_{t,1}$ 的连通二分图，且最大度顶点属于 U。令 v 为 V 中的一个顶点，并令 V_i 为距 v距离为 i的顶点集合。则图 $G_1:=G[V_1\cup V_2]$ 不含最大度顶点属于 V_1的 $\widetilde{F}_{t,1}^{1}$ 单侧副本（注意，在 $\widetilde{F}_{t,1}^{1}$ 中，孤立顶点属于二分划分的一侧，而度为 t 的顶点属于另一侧）。事实上，若 $\widetilde{F}_{t,1}^{1}$ 的单侧副本中最大度顶点属于 V_1，那么它与 v一起将导出一个最大度顶点属于 U的 $F_{t,1}$ 单侧副本。因此，根据引理4，图 G_1 具有隐式表示。

对于任意 $i>1$， $G_i:=G[V_i\cup V_{i+1}]$ 不包含$F_{t,\,1}^{1}$ 的单侧副本，其中最大度顶点位于 V_i 中（当 i为奇数时），或最大度顶点位于 V_{i+1}中（当 i为偶数时）；否则，与 v 一起，该副本将导出$F_{t,\,1}$ 的一个单侧副本，且其最大度顶点位于 U中。因此，根据引理4，图 G_i 对所有 $i>1$都存在隐式表示。结合定理 2，可得 G的隐式表示。

□

对于一般的单侧禁用$F_{t,\,p}$，这个问题仍未解决。此外，即使对于单侧禁用 $2P_3$，问题也仍未解决。值得注意的是，如果我们禁用具有黑色中心的 $2P_3$，并且所有黑色顶点的邻域两两不可比，那么该图具有有界团宽度 [10]，因而存在隐式表示。然而，一般而言，$2P_3$-自由二部图的团宽度无界，而对于单侧禁用 $2P_3$ 的图是否存在隐式表示，仍是一个开放问题。

4.3 弦二部图的子类

正如 [24] 中所示，排除某个森林的任意弦二部图子类都是阶乘级的。然而，这类子类通常没有隐式表示。下面我们为 $S_{2,2,2}$-自由弦二部图类给出一种隐式表示；这一类图最近在另一种背景下引起了关注 [26]。我们强调，不受弦二部图限制的 $S_{2,2,2}$-自由二部图类是超阶乘级的，因此不具有隐式表示。

定理 13. $S_{2,2,2}$-自由弦二部图类具有隐式表示。

证明。类似于引理 3，我们考虑类 G 中的一个连通图，以及 G 中度最大的一个顶点 v。我们还将距离 i 的顶点记为 V_i，并证明对于任意 i，二部图 $G_i := G[V_i \cup V_{i+1}]$ 属于一个允许隐式表示的类。首先，我们注意到 G（因而每个 G_i）都是 C_6-自由的（因为 $\widetilde{\ }$ 是弦图），并且 $C_6 \in \mathcal{M}$ 也是如此，因为 C_6 的二部补图是 $3K_2$。剩下要证明的是，每个 G_i 对某个常数 p 都是 pK_2-自由的，这意味着 G_i 具有有界链划分数（定理 8），因而允许隐式表示（定理 2）。

G_1 是 $3K_2$-自由的这一事实显而易见，因为否则很容易找到一个诱导的 S_2,2,2。现在我们证明，对于所有 i，G_i 都是 $3K_2$-自由的。反设不然：存在一个最小的 $i > 1$，使得 G_i 包含一个由顶点 a_1、a_2、$a_3 \in V_i$ 和 b_1、b_2、$b_3 \in V_{i+1}$ 导出的 $3K_2$，且对所有 j 都有 $a_j b_j \in E(G)$。由于否则将在 G_{i-1} 中出现一个诱导的 $3K_2$，从而与 i 的极小性矛盾，因此 a_1、a_2、a_3 中至少有两个在 V_{i-1} 中具有公共邻居。不失一般性，假设 a_1 和 a_2 与某个顶点 $c \in V_{i-1}$ 相邻。为避免出现诱导的 S_2,2,2，顶点 c 不与 a_3 和 $i \leq 2$ 相邻（否则我们可以考虑 c 的一个邻点 $d \in V_{i-2}$ 以及 d 的一个邻点 $e \in V_{i-3}$）。因此必有 $i = 2$。

现在考虑 a_3 的一个邻点 $d \in V_1$。如果 d 在 $\{a_1, a_2\}$ 中有 2 个或 0 个邻点，那么很容易找到一个导出的 S_2,2,2（中心分别为 d 或 c）。因此，假设 d 与 a_2 相邻，而与 a_1 不相邻。于是 v 有一个邻点 e 与 a_2 不相邻，因为否则 a_2 的度将大于 v 的度。如果 e 与 a_1 不相邻，就会出现一个以 c 为中心的导出 S_2,2,2。同理，如果它与 a_3 不相邻，就会出现一个以 d 为中心的导出 S_2,2,2。然而，如果 e 同时与 a_1 和 a_3 相邻，那么顶点 a_1, a_2, a_3, c, d, e 将导出一个 C_6，这是被禁止的。所有情况下都会导致矛盾，这说明对于所有 i，G_i 都是 $3K_2$-无的，从而完成证明。 □

我们注意到，$S_{2,2,2}$-自由弦二部图类扩展了二部置换图类，而根据定理 6，后者的对称差有界。我们可以问，这一结果能否推广到 $S_{2,2,2}$-自由弦二部图；答案是否定的：可以构造出对称差任意大的 $S_{2,2,2}$-自由弦二部图。为简洁起见，我们省略完整的构造过程。不过，我们指出，所举的例子具有 $G = (A, B \cup C, E)$ 这种形式，其中 $G[A \cup B]$ 和 $G[A \cup C]$ 是链图。我们称这类图为链接链图（并且可以证明，链接链图是 $S_{2,2,2}$-自由弦二部图）。

文献 [12] 中已经发现了若干通过禁止某个单圈图（即包含一个环的图）定义的弦二部图阶乘子类。特别是，研究表明，对于 Q-自由弦二部图和 A-自由弦二部图存在阶乘上界（这些图见图 2 中的 Q 和 A）。

下面我们从两个方面强化这些结果。首先，我们将这两项结果都推广到 D_k-自由弦二部图这一类，其中 D_k 是由一个环$C_4 = (v_1, v_2, v_3, v_4)$构成的图，再分别向 v_1添加一条悬挂边、向 v_2 添加一条悬挂边，并向 v_4添加 k条悬挂边。其次，我们证明 D_k-自由弦二部图具有一种

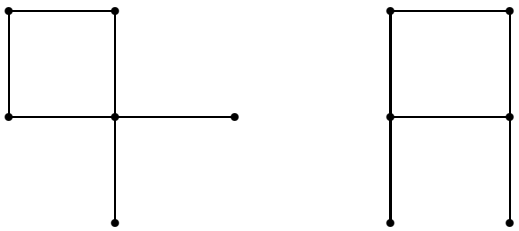


图 2：图 Q （左）和图 A （右）

隐式表示，这一结论比该类图的规模具有阶乘上界更强。我们注意到， D_k-自由二部图这一类（不要求是弦二部图）是超阶乘级的，因此不具有隐式表示。在证明中，我们利用了这样一个事实：任意弦二部图都存在一个顶点，它不是某个 P_5 [15]的中心。

定理14. D_k-自由弦二部图类具有隐式表示。

证明。我们考虑类 G 中的一个连通图，以及 G 中不是 P_5 中心的顶点 v 。我们将距离 i 为 v 的顶点记为 V_i ，并证明对于任意 i， 二部图 $G_i := G[V_i \cup V_{i+1}]$ 属于一个具有隐式表示的类。

由于 v 不是 P_5 的中心，图 G_1 是一个链图，因此具有隐式表示。对于 $i > 1$，我们证明图 G_i 不包含 $F^1_{1,\ k}$ 的单侧副本，其中大度顶点位于 V_i 中。事实上，假设 G_i 包含 $F^1_{1,\ k}$ 的一个单侧副本，其中大度顶点位于 V_i 中，并将 V_i 中该副本的两个顶点记为 a 和 b。根据定义， a 和 b 在 V_{i-1} 中都有邻点。如果它们在 V_{i-1} 中有公共邻居 c ，那么该副本 $F^1_{1,\ k}$ 与 c 以及 c 在 V_{i-2} 中的任意邻点一起导出一个 D_k （其中 $V_0 = \{v\}$）。如果 a 和 b 在 V_{i-1} 中没有公共邻居，那么很容易找到一个长度至少为 6 的诱导圈，而这对于弦二部图是禁止的。两种情况下均导致矛盾，因此 G_i 不包含 $F^1_{1,\ k}$ 的单侧副本，并且根据引理4具有隐式表示。因此，根据定理 2， G 也具有隐式表示。

□

注意到 Q 和 A 是链图，接下来我们通过证明不含某个链图的弦二部图类具有隐式表示，给出这些结果的另一种推广。链图有一个广为人知的通用构造[23]。更具体地说，任意一个有 n 个顶点的链图都是具有 $2n$ 个顶点的通用链图Z_n 的诱导子图；该通用链图的两部分分别为 a_1，.....， a_n 和 b_1，.....， b_n，且当且仅当$j \geq i$ 时， a_i 与 b_j 相邻（示意见图3）。因此，只需证明对于固定的 k， Z_k-自由弦二部图类具有隐式表示。

定理15。避开固定链图的弦二部图类具有隐式表示。

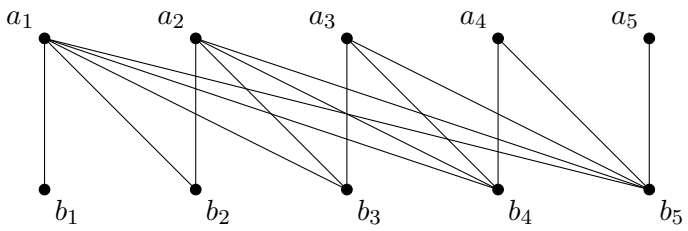


图3：图 Z_5

证明。如上所述，只需证明该断言对无 Z_k 的弦二部图成立。我们对 k 进行归纳证明。当 $k = 1$ 时，结论显然成立，因为这些图是无边图；当 $k = 2$ 时，结论也显然成立，因为这些图是余图，因此团宽度有界。一般而言，假设命题对某个 $k \geq 2$ 成立，并考虑无 Z_{k+1} 的弦二部图类。与定理14的证明一样，我们找到一个不是 P_5 中心的顶点，并以相同方式定义图 G_i 。同样， G_1 是链图。对于 $i > 1$，我们证明图 G_i 不含 Z_k 的诱导副本。反设存在这样的副本，并按图3标记，其中 a 个顶点位于 V_i 中，而 b 个顶点位于 V_{i+1} 中。接着注意到，由于弦性，由 a 个顶点及其在 V_{i-1} 中的邻点导出的图是链图（否则，一个 $2K_2$ 与 b_k，以及一条经过具有 $j < i - 1$ 的 V_j 、连接 $2K_2$ 的最短路径，将导出一个大圈）。由于每个 a 顶点在 V_{i-1} 中都有一个邻点，因此必定存在一个 b_{k+1} 顶点，位于 V_{i-1} 中且与所有 a 个顶点相邻。再取一个来自 V_{i-2} 、与 b_{k+1} 相邻的 a_{k+1} 顶点，便得到一个诱导 Z_{k+1}，这与所需矛盾一致。与之前一样，由定理 2 及归纳假设即可得证。

□

5 阶乘性质

正如我们在引言中提到的，阶乘增长速度是遗传类能够具有隐式表示的必要条件，因此，确定其增长速度是识别能够具有此类表示的新遗传类的首要步骤。本节中，我们证明了若干关于某些二部图遗传类增长速度的结果。

5.1 超立方体

我们再次指出，有界功能度意味着增长速度至多为阶乘级。反向蕴含是否也成立，在 [2] 中仍是一个开放问题。事实证明，这个问题的答案是否定的。 $\mathcal{Q}$ 这一超立方体诱导子图类便是一个例子。事实上， [2] 已证明 $\mathcal{Q}$ 的功能度无界。另一方面， [17] 已证明该类具有隐式表示，因此尤其是阶乘级的；事实上，更一般地说，笛卡尔积的遗传闭包

具有隐式表示，其中图来自任意有限图集 [18] ，甚至来自任意具有隐式表示的图类[14], 。然而，这些结果都是非构造性的，既没有给出明确的标记方案，也没有给出图数量的具体阶乘上界。下文将给出 $\mathcal{Q}$ 增长速度的一个具体上界。

定理16。 n^{2n} n中至多有 n^{2n} n 个顶点的图。

证明。设 Q_n 表示 n 维超立方体，即顶点集为 $\{0,1\}^n$ 的图，其中两个顶点相邻当且仅当它们恰好在一个坐标上不同。为了得到所需的界，我们将为 $\mathcal{Q}$ 中每个带标号的 n 顶点图生成一个由 $2n$ 个介于 1 和 n 之间的数组成的序列，使我们能够唯一地还原该图。

作为预备，设 $G \in \mathcal{Q}$ 是一个有 n 个顶点的连通图。根据 $\mathcal{Q}$ 的定义，对于某个 m， G 可嵌入 Q_m。我们断言，事实上， G 可嵌入 Q_{n-1}。若 $m < n$，结论显然。否则，利用嵌入到 Q_m 中的映射， G 的每个顶点都对应一个 m 位二进制序列。对于两个相邻顶点，其序列恰好有一个位置不同。由此归纳可得， G 的 n 个顶点在至少 $m-(n-1)$ 个位置上都相同。只需删除它们相同的坐标，即可得到 G 到 Q_{n-1} 的一个嵌入。此外，利用对称性，如果 G 有一个指定顶点 r，我们指出，可以找到一个嵌入将 r 映射到 $(0, 0, \ldots, 0)$。

现在我们可以描述我们的编码了。设 $G \in \mathcal{Q}$ 为顶点集为 $\{x_1, \ldots, x_n\}$的任意带标记图。我们首先为 G的每个连通分支 C选择:

- C的一棵生成树 T_C；
- T_C的一个根 r_C；
- 将 r_C映到 $(0,0, \ldots, 0)$ 的 T_C到 Q_{n-1}中的一个嵌入 φ_C。

记 C_i 为 x_i的连通分支。我们按如下方式定义两个函数 $p, d\colon V(G) \to [n]$：

$$p(x_i) = \begin{cases} i, & \text{if } x_i = r_{C_i}; \\ j, & \text{if } x_i \neq r_{C_i}, \text{ and } x_j \text{ is the parent of } x_i \text{ in } T_{C_i}. \end{cases}$$

$$d(x_i) = \begin{cases} 1, & \text{if } x_i = r_{C_i}; \\ j, & \text{if } x_i \neq r_{C_i}, \text{ and } \varphi_{C_i}(x_i) \text{ and } \varphi_{C_i}(x_{p(x_i)}) \text{ differ in coordinate } j. \end{cases}$$

容易验证，上述映射是良定义的；特别地，当 x_i 不是根时， x_i 及其父节点的嵌入确实恰好在一个坐标上不同。读者还应知道， d 在根上的取值实际上无关紧要——将其设为 1 只是任意的选择。

我们现在断言，可以从序列 $p(x_1)\ d(x_1) \ldots, p(x_n)\ d(x_n)$ 中恢复 G。为此，我们首先注意到，该序列使我们能够轻松确定 G 到连通分支的划分。此外，对于每个连通分支 C，我们可以进一步确定它到 Q_{n-1} 中的嵌入 φ_C：根据假设， $\varphi_C(r_C)$ 为 $(0, 0, \ldots, 0)$；然后我们可以

利用 p 识别其子节点，再利用 d 计算它们的嵌入；随后我们可以进行归纳。正如所断言的，这些信息使我们能够确定 G 中的邻接关系，而该编码按要求使用介于 1 和 n 之间的 $2n$ 个整数。

□

我们猜想存在一个更强的界。

猜想 3. 存在一个常数 c，使得 $\mathcal{Q}$ 中的 n顶点图的数量至多为 $c^n n!$，也就是说，类 $\mathcal{Q}$ 是一个小类，

如果猜想 3 成立，那么类 $\mathcal{Q}$ 将是小类猜想 [8], 的一个显式反例。该猜想认为，每个小类的孪生宽度都有界。已知这一猜想是错误的 [9], ，但据我们所知，目前还没有已知的显式反例。

5.2 弦二部图的子类

文献 [27]给出了带标号的 n顶点弦二部图数量的一个超阶乘下界。文献 [12] 通过证明，对于 $(2C_4, 2C_4^+)$-自由弦二部图这一类，增长速度仍为超阶乘级，改进了这一结果。其中，$2C_4^+$是由 $2C_4$ 的两个副本之间添加一条边得到的图。在本节中，我们证明，对于 $2C_4$ 或 $2C_4^+$ 的每个真诱导子图 H， H- 自由弦二部图的增长速度都是阶乘级。这样的极大子图恰有三个，我们将它们记为 X、 Y 和 Z （见图 4）。

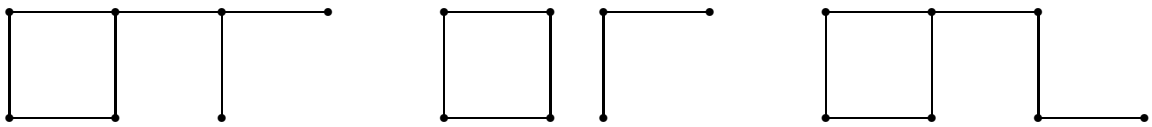


图 4：图 X （左）、 Y （中）和 Z （右）

在证明中，我们使用以下在 [22]中证明的定理 2 的类似结论。

定理 17。 [22] 设 $\mathcal{X}$ 为一个图类， c 为一个常数。如果每个图 $G \in \mathcal{X}$ 都可以用来自某个图类 $\mathcal{Y}$ 的图覆盖，且该图类的增长速度至多为阶乘级，并且 G 的每个顶点至多被 c 个图覆盖，那么 $\mathcal{X}$ 的增长速度也至多为阶乘级。

我们还将使用以下结果。

定理 18. [24] 对于任意森林 F，排除 F 的弦二部图类至多具有阶乘增长速度。

我们注意到，目前尚不清楚能否将上一个结果中的“至多具有阶乘增长速度”加强为“隐式表示”。尤其是，接下来的三个定理针对弦二部图的三个子类给出了阶乘上界，但能否将其加强为隐式表示仍是一个开放问题。

定理19。 X-自由弦二部图类是阶乘级的。

证明。设 G 是一个连通的 X-自由弦二部图，设 v 是 G的一个顶点，并设V_i 是 G 中与 v距离为 i 的顶点集合。假设 $G[V_i \cup V_{i+1}]$ （$i \geq 1$）包含一个诱导 $P_{12} = (x_1, \ldots, x_{12})$，其中偶数下标的顶点属于 V_i，奇数下标的顶点属于V_{i+1}。为避免出现长度至少为6的诱导圈，顶点 x_2 和 x_4 必须有一个公共邻居 $a \in V_{i-1}$。类似地，顶点 x_8 和 x_{10} 必须有一个公共邻居 $b \in V_{i-1}$。若 b 与 x_2相邻，则顶点 $x_1, x_2, x_3, x_8, x_9, x_{10}, b$ 在 G中导出一个 X。类似地，若 b 与 x_4相邻，或 a 与 x_8 或 x_{10}相邻，也会导出一个 X。因此， b 既不与 x_2 相邻，也不与 x_4相邻； a 既不与 x_8 相邻，也不与 x_{10}相邻，故 $a \neq b$。此外，若 a 或 b 不与 x_6相邻，则很容易找到一个长度至少为6的诱导圈。最后，若 a 和 b 都与 x_6相邻，则顶点 $x_2, x_3, x_4, x_6, x_7, a, b$在 G中导出一个 X。综合所有可能情况得到矛盾，故对于所有 $i \geq 1$， V_i 和 V_{i+1} 导出一个P_{12}-自由弦二部图。由定理17和18可知， X-自由弦二部图的增长速度至多为阶乘级。由于该类包含所有链图，其增长速度至少为阶乘级。

□

定理20。 Y-自由弦二部图的类是阶乘级的。

证明。该类包含所有链图，因此其增长速度至少为阶乘级。为证明其增长速度至多为阶乘级，我们将证明该类中的每个图 G 都有一个度有界的顶点，或一对对称差有界的顶点。若 G 有一个度有界的顶点 x，我们就记录 x 的邻点并删除 x。若两个顶点 x 和 y 的对称差有界，我们就创建一条记录，其中包含顶点 y 以及 x 和 y 的对称差中的顶点，并删除 x。递归应用此过程，我们会创建一条长度为 $O(n \log n)$ 的记录（其中 $n = |V(G)|$），由此可以还原该图，并证明该类的增长速度至多为阶乘级。

设 G 是一个 Y-自由弦二部图， v 是 G 中一个不是 P_5 中心的顶点， V_i 是 G 中与 v 距离为 i 的顶点集合。则 V_1 和 V_2 导出一个 $2K_2$- 自由二部图，即一个链图。若 V_1 中的两个顶点 a_i、a_j 具有相同的邻域，则 $\mathrm{sd}(a_i, a_j) = 0$，结论成立。因此，我们假设 V_1 中所有顶点的邻域两两不同。采用图3中的记号，我们将 V_1 的顶点记为 a_1、.....、a_k。此外，对于 $i = 1$、.....、$k-1$，令 $B_i := N(a_i) - N(a_{i+1})$。注意，对于每个 i，集合 B_i 都非空。

若 $\deg(v) \leq 4$，则结论成立，因此不妨设 $k \geq 5$。令 b 为 B_{k-4} 中的一个顶点，并假设 b 在 V_3 中至少有 3 个邻点： c_1、c_2、c_3。令 b' 为 B_{k-2}中的一个顶点。则 b'在 c_1、c_2、c_3中要么有两个邻点，要么有两个非邻点。若 b' 与 c_1和 c_2相邻，则 b、b'、c_1、c_2、v、a_{k-1}、a_k导出一个 Y。若 b'与 c_1 和 c_2不相邻，则

b、b'、c_1、c_2、v、a_{k-3}、a_{k-2}导出一个 Y。两种情况下均会产生矛盾，这表明 b 在 V_3 中至多有 2 个邻点，因此 $\mathrm{sd}(v,b) \leq 6$。 □

定理 21。 Z-自由弦二部图类是阶乘级的。

证明。设 G 是一个连通的 Z-自由弦二部图，并给定其顶点的二分划分，其中白色顶点和黑色顶点各自构成一个独立集。我们将证明， G 要么不含 P_{14}，要么有两个顶点的对称差至多为 2。若 G 是 P_{14}-自由的，那么根据定理 18， G 属于一个阶乘级的图类。利用这一点，便可通过迭代移除对称差较小的顶点，直到剩下一个 P_{14}-自由图，从而常规地构造出 G 的一个（不一定是隐式的）表示，所需位数为 $O(n\log\ n)$。

为了证明 G 要么不含 P_{14}，要么有两个顶点的对称差至多为 2，我们假设 G 含有一个 P_{14}，并将其扩展为一棵极大诱导树，记为 T。我们断言， T 中的顶点不会被 $G-T$ 中的顶点区分。由此立即可得两个对称差较小的顶点：若 T 至少有三片叶子，那么其中有两片位于二分划分的同一侧，而可能区分它们的顶点只有它们在 T 中的邻点。若 T 只有两片叶子，那么它就是一条路径，我们可以轻易地在路径上找到两个对称差至多为 2（甚至至多为 1）的顶点。因此，只需证明以下断言。

断言。设 T 如上所述，并设 $x \in G-T$。那么 $N_T(x)$ 要么为空，要么由 T 中位于二分划分同一部分的所有顶点组成。

断言的证明。设 x 不失一般性地在 T 中有一个白色邻点，并令 D 为 x 在 T 中的所有白色邻点所组成的集合。我们分几个步骤证明该断言。

i. $|D| \geq 2$，否则树 T 不是极大的。

ii. 如果 w、$w' \in D$，那么对于位于 T 中连接 w 和 w' 的路径上的每个白色顶点 w''，$w'' \in D$，否则将出现一个长度至少为 6 的诱导圈。

由上述内容，我们立即得到：

iii. D 的每个顶点都属于 $T \cup \{x\}$ 中的一个 C_4。

接下来注意：

iv. $T-D$ 中的任何顶点与 D的距离都不超过 3，否则会导出一个 Z。

特别地，任何白色顶点与 D的距离至多为 2。由于 T 包含一个 P_{14}（因此有两个距离为 12 的白色顶点），由三角不等式可知：

v. D 中存在两个距离至少为 8 的顶点。

结合 ii.，这又意味着：

vi. 存在一条诱导路径 $P = (v_1, \ldots, v_9)$，位于 T 中（边为 $v_i v_{i+1}$），使得 $v_1, v_3, v_5, v_7, v_9 \in D$。

设 w_0 是 $T - D$ 中距离 P 最近的白色顶点，并设 $Q = (w_0, w_1, \ldots, w_k)$ 是 T 中从 w_0 到 P 的唯一的路径（其中有 $w_k \in V(P)$）。若 $k = 1$，不妨设 $w_k = v_4$，则 $w_0, w_1, v_5, x, v_7, v_8, v_9$ 导出一个 Z。若 $k \geq 2$，则 x 与 w_2 相邻（由 w_0 的选取可知）；再不妨设 w_2 与 v_7 和 v_9 均不同，由此可知 $w_0, w_1, w_2, x, v_7, v_8, v_9$ 导出一个 Z。两种情形均导致矛盾，这说明 $T - D$ 不含白色顶点，从而证明了该断言和定理。

□

6 结论

本文证明了若干关于图参数、隐式表示和阶乘性质的结果，并提出了许多开放问题。具体而言，我们以猜想的形式提出：有界对称差是否意味着存在隐式表示，以及在无 P_7 的二部图类中，对称差是否有界。关于隐式表示，一个尚未解决这一问题的极小类是无 P_7 的弦二部图类。第 5.2 节介绍的三个弦二部图子类、排除非平衡 $2P_3$ 的单侧禁用副本的二部图类，也都存在这一开放问题。此外，如何明确描述一种标记方案，使其为超立方体的诱导子图提供隐式表示，仍是一个开放问题。

致谢。我们感谢匿名审稿人提出的许多有益建议，这些建议改善了本文的呈现。

参考文献

[1] B. Alecu、V.E. Alekseev、A. Atminas、V. Lozin、V. Zamaraev，《图参数、隐式表示与阶乘性质》。《计算机科学讲义》，13270（2022），60–72。[2] B. Alecu、A. Atminas、V. Lozin，《图功能性》。《组合理论杂志B辑》，147（2021），139–158。[3] B. Alecu、V. Lozin、D. de Werra，《余图的微观世界》。《离散应用数学》，312（2022），3–14。[4] P. Allen，《禁用诱导二部图》。《图论杂志》60（2009），219–241。

[5] A. Atminas, 《不含星森林及相关图的图类》。《离散数学》，345（2022），113089。[6] A. Atminas、A. Collins、V. Lozin 和 V. Zamaraev, 《图的隐式表示与阶乘性质》。《离散数学》，338（2015），164–179。[7] J. Balogh、B. Bollob´as、D. Weinreich, 《图遗传性质的增长速度》。《组合理论杂志B辑》79（2000），131–156。[8] ´E. Bonnet、C. Geniet、E. J. Kim、S. Thomass´e、R. Watrigant, 《孪生宽度 II：小类》。《组合理论》，2（2）（2022），第10号论文，共42页。[9] ´E. Bonnet、C. Geniet、R. Tessera、S. Thomass´e, 《孪生宽度 VII：群》。《arXiv》预印本 arXiv:2204.12330（2022）。[10] E. Boros、V. Gurvich、M. Milanic, 《通过 1-Sperner 超图刻画并分解阈值图、分裂图和二部图的图类》。《图论杂志》94（2020），364–397。[11] A. Brandst¨adt、V. B. Le、J. Spinrad, 《图类：综述》。《SIAM 离散数学与应用专著》（1999），xii+304 页。[12] K. Dabrowski、V.V. Lozin 和 V. Zamaraev, 《弦二部图的阶乘性质》。《离散数学》，312（2012），2457–2465。[13] D. Eppstein、E.S. Spiro, 《图的 h-指数及其在动态图子图统计中的应用》。《图算法与应用杂志》16（2012），543–567。[14] L. Esperet、N. Harms 和 V. Zamaraev, 《笛卡尔积子图的最优邻接标签》。《arXiv》预印本 arXiv:2206.02872（2022）。[15] M. Farber, 《强弦图的刻画》。《离散数学》，43（1983），173–189。[16] P. Goldberg、M. Golumbic、H. Kaplan、R. Shamir, 《反对 DNA 物理图谱构建的四个理由》。《计算生物学杂志》2（1）（1995），139–152。[17] N. Harms, 《通用通信、通用图与图标记》。第 11 届理论计算机科学创新会议（ITCS 2020）论文集（2020）。[18] N. Harms、S. Wild、V. Zamaraev, 《随机化通信与隐式图表示》。第 54 届 ACM SIGACT 年度计算理论研讨会（STOC 2022）论文集（2022），1220–1233。[19] H. Hatami、P. Hatami, 《隐式图猜想是错误的》。IEEE 第 63 届年度计算机科学基础研讨会（FOCS 2022）（2022），1134–1137。

[20] S. Kannan、M. Naor、S. Rudich，《图的隐式表示》。《SIAM 离散数学杂志》，5（1992）596–603。[21] V. Lozin，《不含斜星的二分图》。《离散数学》，257（2002）83–100。[22] V. Lozin、C. Mayhill、V. Zamaraev，《局部有界覆盖与图的阶乘性质》。《欧洲组合学杂志》，33（2012）534–543。[23] V. Lozin、G. Rudolf，《极小通用二分图》。《组合学》，84（2007）345–356。[24] V. Lozin 和 V. Zamaraev，《图的阶乘类的边界性质》。《图论杂志》，78（2015）207–218。[25] V. Lozin 和 V. Zamaraev，《 P_7-自由二分图的结构与数量》。《欧洲组合学杂志》，65（2017）143–153。[26] I. Ponomarenko、G. Ryabov，《不含二分爪的弦二部图的 Weisfeiler-Leman 维数》。《图与组合》，37（2021），1089–1102。[27] J.P. Spinrad，《 Γ-自由矩阵中的非冗余 1》。《SIAM 离散数学杂志》，8（1995）251–257。[28] J.P. Spinrad，《高效图表示》。菲尔兹研究所专著，19。美国数学学会，普罗维登斯，罗得岛，2003。xiii+342 页。