arXiv:2303.04459v1 [math-ph] 8 Mar 2023

子因子与数学物理

DAVID E EVANS 和 YASUYUKI KAWAHIGASHI

This paper is dedicated to the memory of Vaughan Jones

Abstract. 本文综述了 Vaughan Jones 的子因子理论与数学物理诸多领域之间长期以来的联系及其影响，具体包括统计力学、量子场论、量子信息和二维共形场论。

1. Subfactors and mathematical physics

子因子理论由 Vaughan Jones [69] 开创。这使他开始研究一种新型量子对称性。这一量子对称性概念带来了广泛的应用，包括琼斯多项式——一种全新的纽结理论不变量，并由此开创了量子拓扑这一新领域。他的新颖理论与数学物理的诸多主题有着深刻联系。这重新激发了人们对数学物理与算子代数之间已知联系的兴趣，并开辟了全新的研究前沿。本文综述这些相互关联的主题，重点讨论统计力学和量子场论，尤其是二维共形场论。

2. Subfactors and statistical mechanics

设 $N \subset M$ 是一个 II_1 型子因子，$[M:N]$ 是其琼斯指数，为正实数或无穷大。也就是说，N 和 M 是带有迹 tr 的无限维简单冯·诺伊曼代数。我们只考虑 $[M:N]$ 有限的情形。Vaughan [69] 构造了一列投影 e_j, $j = 1, 2, 3, \ldots$，称为琼斯投影，并发现了以下关系：

$$\begin{cases} e_j = e_j^2 = e_j^*, \\ e_j e_k = e_k e_j, \quad j \neq k, \\ e_j e_{j\pm1} e_j = [M:N]^{-1} e_j. \end{cases} \tag{2.1}$$

利用这些关系和迹，Vaughan 证明了 Jones 指数的可能取值集合恰好等于

$$\left\{ 4\cos^2 \frac{\pi}{n} \mid n = 3, 4, 5, \ldots \right\} \cup [4, \infty].$$

Date: xxx xxx, 2022年。2020 *Mathematics Subject Classification.* 主要分类 46L37；次要分类 17B69, 18D10, 81R10, 81T05, 81T40, 82B20, 82B23。*Key words and phrases.* 编织、共形场论、融合范畴、统计力学、子因子、Temperley-Lieb 代数、顶点算子代数。第二作者部分获得了 JST CREST计划 JPMJCR18T6 以及科学研究补助金 19H00640 和 19K21832 的资助。

Vaughan 作了如下代换

$$\sigma_j = te_j - (1 - e_j) \tag{2.2}$$

其中 $[M\colon N] = \lambda^{-1} = 2 + t + t^{-1}$ 从而得到辫群的阿廷关系，其中 σ_j 是交换第 j 条和第 $j+1$ 条辫的辫。Vaughan 的表示自带一个迹 tr，并满足概率意义上的马尔可夫迹性质 tr(xe_j) $= [M\colon N]^{-1}$tr(x)，其中 x 属于由 e_1、e_2、.....、e_{j-1}生成的代数。根据亚历山大的定理，任何链环都可表示为一个辫的闭合；根据马尔可夫的定理，当且仅当两个辫可通过一系列称为马尔可夫变换的两类变换相互关联时，它们给出相同的链环。迹性质 tr(xy) =tr(yx) 与上述马尔可夫迹性质保证，辫的某个经过调整的迹值在两种马尔可夫变换下保持不变。这就是以变量 t 表示的琼斯多项式 [70, 71]，它是链环的一个多项式不变量。

Evans 在 1983年 指出，这些关系式 (2.1) 与 Temperley-Lieb [116] 在可解统计力学中研究的一种形式体系相似。Yang-Baxter方程在子因子理论和量子群中发挥着重要作用。二维 Ising 模型在格子的各个顶点赋予两种可能的自旋值 $\pm$。重要的推广包括波茨模型（每个顶点有 Q 种状态），以及顶点模型或 IRF（面相互作用）模型，其中自由度赋予格子的边。由克拉默斯和瓦尼尔开创的转移矩阵方法，为一维行格子赋予一个由玻尔兹曼权重构成的矩阵。通常，矩形格子的配分函数由传递矩阵的矩阵乘积拼接而成。Baxter [6] 展示了如何通过满足 Yang-Baxter方程（YBE）的玻尔兹曼权重构造一族彼此对易的传递矩阵。YBE 是对 (2.2) 中辫关系的推广，因为在某个极限下它会化简为这些关系。这种交换性使同时对角化成为可能，其中最大的特征值对于计算自由能至关重要。转移矩阵方法将经典统计力学模型转化为一维量子模型。在临界状态下，统计力学格子模型的标度极限可以产生共形场论。Temperley 和 Lieb [116] 发现，波茨模型和冰型顶点模型的传递矩阵都可以通过满足与 Vaughan 的工作 (2.1) 中相同关系式的生成元来描述，并由此证明了这两种模型等价。尽管波茨模型的这些关系只在 $\lambda^{-1} = Q$ 为整数时才成立，但其配分函数是 Tutte-Whitney 二色多项式。其中一个变量为 Q，可以进行外推，而配分函数随后便与格子 [70, page 108]所关联的某些链环上的琼斯多项式相关。不过，冰型表示具有一个连续参数 λ。在这两种情况下，马尔可夫迹都没有显现出来。

Pimsner 和 Popa [102] 发现，指标的倒数，即 $[M : N]^{-1}$，是满足 $E_N(x^*x) \geq cx^*x$ 对所有 $x \in M$ 均成立的最佳常数 $c \geq 0$，他们将其称为概率指标。这里，E_N 是从 M 到 N 的条件期望，由此得到塔中的第一个 Jones 投影。Longo [91] 将统计维数与琼斯指数等同，Fredenhagen、Rehren 和 Schroer [45, 46], 则于 20 世纪 80 年代末建立了与 Doplicher-Haag-Roberts 理论的联系；这也为计算此后所有与子因子相关的熵量和不变量奠定了基础，其中包括计算

Jones 投影上移位的熵，以及不可约子因子的 Connes-Størmer 熵 [26], $H(M|N) = \ln([M:N])$ 的计算。

对于具有有限琼斯指数的子因子 $N \subset M$，我们有琼斯塔构造

$$N \subset M \subset M_1 \subset M_2 \subset \cdots,$$

其中，M_k 由 M 和 e_1、e_2、.....、e_k 生成。从 $N \subset M$ 到 $M \subset M_1$ 的基本构造及其迭代，给出了 II_1 因子的琼斯塔，在子因子理论及其数学物理应用中发挥着基础性作用。高阶相对交换子 $M_j' \cap M_k$、$j \leq k$ 构成一系列有限维 C^* 代数包含的交换方块，这些代数带有迹；该对象记作 $\mathcal{G}_{N\subset M}$，称为 $N \subset M$ 的标准不变量。这种极其丰富的数学结构编码了有关子因子的代数与组合信息，其中一个关键组成部分是一个连通的、可能无限的二分图 $\Gamma_{N\subset M}$，它属于凯莱型，称为 $N \subset M$ 的主图，并配有一个规范的权向量$\vec{v}$，其各分量是琼斯塔中不可约包含的指标的平方根。加权图（Γ，$\vec{v}$）满足 Perron–Frobenius 型条件$\Gamma^t\Gamma$（$\vec{v}$）$= [M:\ N]\vec{v}$，并且还满足 $\|\Gamma\|^2 \leq [M:\ N]$。

与数学物理特别相关的是，当 $N \subset M$ 具有有限深度时，这对应于图 Γ 是有限的；此时，权重 $\vec{v}$ 给出（唯一的）Perron-Frobenius 特征向量，因此有 $\|\Gamma\|^2 = [M:\ N]$。当指标 $[M:\ N]$ 小于 4 时，有限深度必然成立；此时所有二分图都是有限的，其范数的形式为 $2\cos^2(\pi/n)$，$n \geq 3$。

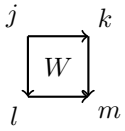
对象 $\mathcal{G}_{N\subset M}$ 已通过多种方式公理化：在有限深度情形下，Ocneanu 使用旁群和联络 [97]；在一般情形下，Popa 使用 λ-格子 [107]，Vaughan 则使用平面代数 [80]。

根据 Connes 的基本结果，[22], 中的超有限 II_1 因子 R（由有限维代数的归纳极限得到）是唯一的可 amen 性 II_1 因子，因此它的所有有限指数子因子都与 R 同构。在一系列论文中，[105, 106, 108, 109], Popa 以几种等价方式确定了 II_1 因子 $N \subset M$ 的包含以及对象 $\mathcal{G}_{N\subset M}$所适用的可 amen 性概念，其中一种方式是凯斯滕型条件 $\|\Gamma_{N\subset M}\|^2 = [M:\ N]$。他证明了一个重要结果：对于满足这一可 amen 性条件的超有限子因子 $N \subset M$，$\mathcal{G}_{N\subset M}$ 是完全不变量。换言之，只要 $M \simeq R$且 $\|\Gamma_{N\subset M}\|^2 = [M:\ N]$（特别是当 $N \subset M$具有有限深度时），就可以从 Jones 塔中交换方块序列所编码的数据恢复出 $N \subset M$。

有趣的交换方块的构造，通过 Yang-Baxter方程以及 IRF、顶点或自旋模型 [72] 与统计力学有关。（关于这类统计力学模型，请参阅 Baxter 的专著 [6] 。关于这类关系的一般综述，也请参阅 Vaughan 的著作 [75] 。）我们从四个包含关系对应的四个图中各选一条边，使它们构成一个闭合方块。这样，我们就可以为每个这样的方块赋予一个复数。Ocneanu [97] 以旁群和平坦联络之名，对这种复数赋值作了组合刻画。在 IRF 或顶点模型理论中，我们也会为有限图产生的每个方块赋予一个称为玻尔兹曼权重的复数，这两个概念有许多相似之处。最简单的例子对应于建立在 Coxeter-Dynkin图 A_3 上的 Ising模型，而更一般的情形对应于

与量子群 U_q（sl_2）相关的安德鲁斯-巴克斯特-福雷斯特模型 [1]，其中 $q = \exp(2\pi i/l)$ 是单位根。这些基本例子对应于仅由 Jones投影生成的子因子，这些情形下的图是 A_n 型 Coxeter-Dynkin 图。其他与量子群U_q（sl_n）相关的情形已在 [67, 28] 中得到研究。

下面给出一个平坦联络的典型例子。选取一个 A_n、D_{2n}、E_6 或 E_8 型的 Coxeter-Dynkin 图，并将其用于这四个图。令 h 为其 Coxeter 数，并设 $\varepsilon = \sqrt{-1}\exp(\pi\sqrt{-1}/2h)$。我们用 μ_j 表示图的邻接矩阵对应的顶点 j 处的 Perron-Frobenius 特征向量分量。于是，平坦联络如图 1 所示，本质上是对辫子元素 (2.2) 的归一化：



$$= \delta_{kl}\varepsilon + \sqrt{\frac{\mu_k\mu_l}{\mu_j\mu_m}}\delta_{jm}\bar{\varepsilon}$$

FIGURE 1. Coxeter-Dynkin 图上的平坦联络

由此构造得到的指标值为 $4\cos^2(\pi/h)$。若图为 A_n，则顶点标记为 $j = 1$、2、.....、n，顶点 j 处的 Perron-Frobenius 特征向量分量为 $\sin(j\pi/(n+1))$。在这种情况下，图 1 中的取值本质上与安德鲁斯-巴克斯特-福雷斯特模型在极限值处给出的取值相同；它也可由单位根处量子 $6j$-符号针对 $U_q(sl_2)$ 的特化得到，其中两个“$6j$”被选为 $U_q(sl_2)$ 的基本表示。这些还与 Roche 在 [113] 中讨论的 IRF 模型有关。Dynkin 图 A_n 对应的这些子因子是 Vaughan[69] 构造的 $N = \langle e_2、\ e_3、\ \ldots\rangle$ 和 $M = \langle e_1、\ e_2、\ e_3、\ \ldots\rangle$，并满足上述关系 (2.1)，其中 $[M\colon\ N] = 4\cos^2(\pi/(n+1))$。

对于 Coxter-Dynkin 图 D_{2n+1} 和 E_7，使用与图 1 中相同的公式，几乎可以得到一个平坦联络，但平坦性公理并不成立。与之对应的子因子确实存在，但它们的主图分别为 A_{4n-1} 和 D_{10}。尽管如此，图 D_{2n+1} 和 E_7 在与共形网 $SU(2)_k$的非局域扩张相关的研究中有有趣的诠释，如下文所述。

Jones投影 e_j 的关系式 (2.1) 让人联想到 Hecke 代数 $H_n(q)$ 的定义关系。该代数属于类型 A，参数为复数 q；它是由 1、g_1、g_2、.....、g_{n-1} 生成的自由复代数，并满足

$$\begin{cases} g_jg_{j+1}g_j = g_{j+1}g_jg_{j+1}, \\ g_jg_k = g_kg_j, \quad \text{for } j \neq k, \\ g_j^2 = (q-1)g_j + q. \end{cases}$$

这种相似性被用于构造更多子因子例子，其指标值为 $\sin^2(k\pi/l)\sin^2(\pi/l)$，其中 $1 \leq k \leq l-1$；在子因子理论早期，Wenzl 在 Vaughan [127]指导下于宾夕法尼亚大学撰写的学位论文中进行了这项工作。他构造了 ρ 的表示，即 $H_\infty(q) = \bigcup_{n=1}^{\infty} H_n(q)$，其中单位根为 $q = \exp(2\pi i/l)$ 和$l = 4$、5、.....，使得 $\rho(H_n(q))$ 总是半单的，并给出了一个子因子，作为

$\rho(\langle g_2, g_3, \dots\rangle)'' \subset \rho(\langle g_1, g_2, \dots\rangle)''$，并使用适当的迹。指标值在 $l \to \infty$趋近于 k^2。当 $k = 2$时，这些子因子就是 Vaughan 为 Coxeter-Dynkin图 A_{l-1}构造的那些子因子。这一构造也可以在与 $SU(k)$相关的 IRF 模型 [28, 67] 背景下理解。Hecke 代数与量子群 $U_q(sl_n)$之间的关系，是经典 Weyl 对偶性的一个“量子”版本。这种对偶性也将基于统计力学和 II型$_1$ 因子的 Jones-Wenzl方法，与基于量子场论和 III型$_1$ 因子的 Jones-Wassermann方法联系起来，后者将在下文解释。

在可解格点模型中，玻尔兹曼权重满足 Yang-Baxter方程时，引入谱参数至关重要；但在子因子理论中，起初我们并没有这样的参数来描述平坦联络。通常，我们通过对玻尔兹曼权重的谱参数作某种特殊化来得到平坦联络。Vaughan 在 [73] 中提出了“Baxter化”，旨在反向引入一个参数，用于描述子因子理论中玻尔兹曼权重的类似物。这一思路是从子因子出发获得其物理对应物；本文末尾我们将讨论一种类似的方法，即从给定的子因子构造共形场论。值得注意的是，要在临界状态下严格构造共形场论，是一个公认的难题——即使对于 Ising模型也是如此，参见例如 [114]。

有限深度条件意味着，在这个与可解格点模型的类比中，我们拥有一个有限图。即使从一组类似于涉及无限图的可积格点模型的代数或组合数据出发，有时也能构造出相应的子因子。Popa [104] 的一项重大突破是证明了 Temperley-Lieb-Jones格确实是一个标准不变量，这首次表明，对于任意大于4的指标，都存在高阶相对交换子仅由Jones投影构成的子因子。随后，通过引入平凡的合并自由积，Popa [107] 能够在完全一般的情形下证明其存在性。这些论文 [104, 107] 促成了与自由概率论的重要联系，推动人们采用更复杂的自由随机模型来证明某些合并自由积是自由群因子；Ueda [122], 还对这些方法进行了改造，用以证明量子群作用的类似存在性/重构结论。Popa和Shlyakhtenko [110] 证明，任意 λ-格都作用于自由群因子 $L(\mathbb{F}_\infty)$上。这涉及一种从 λ-格构造子因子的新方法：从半有限冯·诺伊曼代数的一个交换方块出发，其中每个代数都是带半有限迹的I_∞型因子的直和，再利用自由概率技术证明，由此构造得到的因子是 $L(\mathbb{F}_\infty)$的 ∞-放大。这些构造所得到的冯·诺伊曼代数并非超有限。后来，Guionnet-Jones-Shlyakhtenko [59]又利用图形工具、概率方法和平面代数给出了新的证明。此外，他们与Zinn-Justin [61] 利用统计力学环模型和图平面代数中的矩阵模型计算，为随机图上的Potts模型构造了新颖的矩阵模型。这建立在 Vaughan [80] 发展出的平面代数工具之上，用于理解子因子的高阶相对交换子。在 [60] 中，Guionnet-Jones-Shlyakhtenko明确展示了，这与 Popa-Shlyakhtenko [110]论文中的构造是相同的。论文 [80] 直到最近才在 Vaughan Jones去世后出版于纪念专刊中，但其预印本版本早在1999年就已出现，并产生了深远影响。还应注意，Kauffman [82, 83] 曾发现一种与琼斯多项式直接相关的图解构造，该构造基于一种图解表示的Temperley-Lieb 代数，而后者在平面代数形式体系中拥有自然归宿。这种构造与波茨

模型有关，其基础是Temperley-Lieb 代数的图解表示；随后，该代数在平面代数形式体系中获得了自然的归宿。Reshetikhin-Turaev在 [112] 中从量子群 $U_q(sl_2)$ 的表示这一背景下理解了这个多项式 [33, 66]。

3. Subfactors and quantum field theory

Witten [128] 基于量子场论——Chern-Simons规范场论，对琼斯多项式作出了新的诠释，并将其推广为紧致三维流形中链环的不变量。然而，我们并不清楚为何这种方法会得到多项式不变量。取空链环，就会得到紧致三维流形的不变量。Witten采用了路径积分表述，但缺乏严格的数学基础。Reshetikhin和Turaev [112]基于组合论证，利用Dehn手术和Kirby演算给出了一个定义良好的数学版本。对于空链环，我们通过Dehn手术从带框架链环构造出一个三维流形，再利用某个单位根处量子群的表示，对该链环的不变量作加权求和，并证明这个加权和在Kirby变换下保持不变。两个带框架链环所对应的流形同胚，当且仅当它们可通过一系列Kirby变换相互关联。对于量子群 $U_q(sl_2)$，链环不变量就是彩色琼斯多项式。颜色是量子群的一个表示，用来标记链环的一个连通分支。这实际上给出了一个$(2+1)$维拓扑量子场论，符合Atiyah [5], 的定义；这是一种基于拓扑不变性的量子场论的数学公理化。粗略地说，我们为每个闭二维流形赋予一个有限维希尔伯特空间，并为每个配边赋予从一个这样的希尔伯特空间到另一个的线性映射，使这一赋值具有函子性。正如下文将要说明的，这种构造也很容易从量子群推广到一般的模张量范畴。

Turaev和Viro [121]提出了一种密切相关但有所不同的（$2+1$）维拓扑量子场论。在这种表述中，我们对一个三维流形进行三角剖分，考虑由依赖于该三角剖分的量子群所产生的量子 $6j$符号的加权和，并证明这个和在 Pachner 变换下保持不变。两个三角剖分流形彼此同胚，当且仅当其中一个可以由另一个经过一系列 Pachner 变换得到。Ocneanu 利用由子因子产生的量子 $6j$符号，将这一理论推广到另一种（$2+1$）维拓扑量子场论。（见 [42, 第 12]章。）这里我们只需要融合范畴结构，下面将对此作出解释，而不需要编织。这与上述 Reshetikhin-Turaev 情形不同。对于给定的融合范畴，我们应用 Drinfel′d 中心构造（一种“量子双”构造），得到一个具有非退化编织的模张量范畴。Ocneanu [97] 通过渐近包含、Popa [106] 通过对称包络代数、通过 Longo-Rehren子因子 [94] 和 Izumi [64, 65] ，以及 M¨uger [96]在范畴框架下，分别在子因子理论中发展了这一构造。随后，我们将 Reshetikhin-Turaev 构造应用于该量子双。我们也可以将 Turaev-Viro-Ocneanu 构造应用于原始融合范畴，而这两种方法给出相同的拓扑量子场论 [87]。特别地，如果我们从单位根处的 U_q（sl_2）出发，那么闭三维流形的 Turaev-Viro不变量等于同一三维流形的 Reshetikhin-Turaev不变量绝对值的平方。

子因子与量子场论的另一种联系来自代数量子场论，它是量子场论的一种有界算子代数表述。描述量子场论通常需要以下要素。

(1) 一个时空，例如四维闵可夫斯基空间。(2) 一个时空对称群，例如庞加莱群。(3) 一个包含真空在内的态的希尔伯特空间。(4) 时空对称群在态的希尔伯特空间上的射影酉表示。(5) 一组量子场，即定义在时空上并作用于态的希尔伯特空间的算子值分布。

普通分布为每个试验函数赋予一个数。算子值分布为每个试验函数赋予一个（可能无界的）算子。外曼公理利用这些概念给出了一套直接的公理化体系，相关研究历史悠久；但算子值分布在技术处理上颇为困难，因此我们采用另一种基于有界线性算子、用于描述可观测量的方法。令 O 为时空中的一个区域。取一个量子场 φ 和一个支撑于 O上的试验函数 f。$\langle \varphi, f \rangle$ 的自伴部分是 O中的一个可观测量，它可能是无界的。令 $A(O)$表示由这类自伴算子的谱投影生成的冯·诺伊曼代数。Carpi-Kawahigashi-Longo-Weiner[20] 在从顶点算子代数构造共形网时也采用了从算子值分布到冯·诺伊曼代数的这一转换，我们将在下文解释。请注意，冯·诺伊曼代数只包含有界算子。

局域性是源自爱因斯坦因果律的一条重要公理。爱因斯坦因果律指出，若两个区域类空分离，则这些区域中的可观测量之间没有相互作用，因此相应的算子彼此交换。用冯·诺伊曼代数 $A(O)$ 表示时，我们要求 $[A(O_1)\ A(O_2)] = 0$，只要 O_1 和 O_2 类空分离，其中李括号表示交换子。以时空区域为参数的这族冯·诺伊曼代数称为算子代数网。代数量子场论为算子代数网提供了一套公理化描述，同时还包括时空对称群在包含真空的态希尔伯特空间上的一个射影酉表示。其核心思想是，量子场论的物理内容并不在于各个冯·诺伊曼代数本身，而在于这些冯·诺伊曼代数之间的相对关系。二维共形场论是量子场论的一个特例，其中每个冯·诺伊曼代数 $A(O)$ 都是超有限 III型$_1$ 因子，该因子在同构意义下唯一，即 Araki-Woods III型$_1$ 因子。因此，单个冯·诺伊曼代数的同构类不包含任何物理信息。根据 [58, Proposition 1.2]，共形网的每个局部代数都是 III型$_1$ 因子。它也是超有限的，因为它有一个稠密子代数，该子代数是 I 型代数递增并集的闭包；这一点可由 [95, Theorem 5.4] 中证明的分裂性质推出。

固定一个冯·诺伊曼代数网 $\{A(O)\}$。我们自然可以定义它在另一个不含真空向量的希尔伯特空间上的表示。这些冯·诺伊曼代数在原希尔伯特空间上的作用本身就是一种表示，称为真空表示。我们也自然可以定义表示的酉等价和不可约性。酉等价

网 $\{A(O)\}$ 的不可约表示的酉等价类称为超选择扇区。我们也可以对表示取直和并进行不可约分解。对于群的两个表示，定义它们的张量积表示非常容易，但对于同一个算子代数网的两个表示，如何定义张量积表示则完全不明了。
Doplicher-Haag-Roberts 为两个表示 [30, 31]的张量积给出了恰当的定义。在一个自然假设下，每个表示都有一个代表，它由作用在某个固定 O对应的真空希尔伯特空间上的单个代数的端同态给出 $A(O)$。这个端同态包含了原表示的全部信息。对于两个这样的端同态 ρ 和σ，它们的复合端同态 $\rho\sigma$ 也对应于该网的一个表示 $\{A(O)\}$。这就给出了两个表示的张量积的正确概念。此外，事实证明，端同态的两种复合 $\rho\sigma$ 和 $\sigma\rho$ 给出酉等价的表示。如果时空维数高于 2，这种张量积的交换性类似于同一群的两个表示 π_1 和 π_2 的$\pi_1 \otimes \pi_2$ 和 $\pi_2 \otimes \pi_1$ 的酉等价。现在，这些表示构成一个对称幺半 C^*-范畴，其中表示对应一个对象，交织算子对应一个态射，而上述端同态的复合给出张量积结构。根据 Doplicher-Roberts 的新对偶性 [32]，这个范畴产生一个紧群。在这里，范畴中的对象是端同态，而 Hom(ρ, σ)中的态射是交织算子，也就是说，是一个元素，属于

$$\{T \in A(O) \mid T\rho(x) = \sigma(x)T \text{ for all } x \in A(O)\}.$$

换言之，Doplicher-Roberts 对偶为一般张量范畴中的紧群表示范畴提供了一种抽象刻画。真空表示扮演着群的平凡表示的角色，而算子代数网的对偶表示则对应于紧群的对偶表示。这种对偶与经典 Tannaka 对偶有关，但它将对偶关系推广到了抽象张量范畴。

利用对称幺半 C^*-范畴的结构，我们为每个表示定义统计维数，结果表明它是一个正整数或无穷大 [30, 31]。琼斯指数的指标值在 4 以下仅取离散值，这令人联想到统计维数只能取整数这一事实。Longo [91, 92] 证明，与 $A(O)$ 的一个端同态 ρ 相对应的表示的统计维数，等于琼斯指数 $[A(O) : \rho(A(O))]$的平方根。这为子因子理论与代数量子场论之间开辟了广泛的新交汇领域。

Longo [91, 92] 推广了超选择扇区的概念，提出了扇区这一概念，即 III型因子上的端同态的酉等价类。这一想法受到 Connes对应理论的启发，该理论基于希尔伯特双模、端同态以及双重 [23] [24, VB], [25] 上的正定函数之间的等价关系；相关进展可参见 Popa [103] 等人的工作。他利用典范端同态定义了对偶扇区，而这一典范端同态是他基于 Tomita-Takesaki 理论中的模共轭作用引入的。注意，在子因子 $N \subset M$的典型情形中，这些冯·诺伊曼代数是同构的，因此我们有一个从 M 到 N上的端同态 ρ 。于是得到对偶端同态 $\bar{\rho}$，而 $\rho\bar{\rho}\rho\bar{\rho}\cdots\bar{\rho}$的不可约分解给出张量范畴中的对象；其中态射是端同态之间的交织算子，张量积

运算是端同态的复合。如果以这种方式得到的不可约端同态只有有限多个，这等价于有限深度条件，那么我们的张量范畴就是融合范畴，其中每个对象都有一个对偶对象，并且在同构意义下只有有限多个不可约对象。高阶相对交换子 $M' \cap M_k$ 可表示为交织算子空间，例如 End($\rho\bar{\rho}\rho\bar{\rho}\cdots\bar{\rho}$) 或 End($\rho\bar{\rho}\rho\bar{\rho}\cdots\rho$)。

在我们的设定中，对于因子 M，我们在希尔伯特空间 $L^2(M)$ 上有 M 的标准表示；该空间是 M 关于某个内积的完备化。根据 Tomita-Takesaki 理论，这个 $L^2(M)$ 也具有由 M 给出的右乘作用。对于 M 的一个端同态 ρ，通过用 ρ 扭曲 M 的右作用，我们在 $L^2(M)$ 上得到新的 M-M 双模结构。在这种设定下，所有 M-M 双模都以这种方式得到，并且我们可以用双模来描述上述张量范畴。这里，张量积运算由 M 上的双模相对张量积给出。对于 II_1 型因子，我们需要使用这种双模描述，才能得到正确的张量范畴结构。在统计力学中，使用 II_1 型因子更为自然；在量子场论中，使用 III_1 型因子更为自然，但它们所产生的张量范畴是等价的。因此，如果我们关注的是张量范畴结构，包括编织，那么 II_1 型与 III_1 型之间的差异并不重要。

4. Subfactors and conformal field theory

二维共形场论是量子场论的一个特例，但它是与子因子理论深入交互的丰富源泉，因此我们将其作为一个独立章节来讨论。

我们从（$1+1$）维闵可夫斯基空间出发，考察具有共形对称性的量子场论。我们将量子场论限制到两条光线上 $x = \pm t$，并通过添加无穷远点将一条光线紧化。由此得到的 S^1 就是现在的“时空”，尽管空间和时间混合成了一个维度；而我们针对 S^1 的对称群现在是 Diff(S^1)，即 S^1上的保定向微分同胚群。现在，我们的时空区域是一个区间 I，即 S^1的非空、非稠密开连通子集。对于每个这样的区间 I，我们都有一个相应的冯·诺伊曼代数 $A(I)$，它作用在希尔伯特空间 H上；该空间由包含真空向量的状态构成。单调性意味着，如果 $I_1 \subset I_2$，那么 $A(I_1) \subset A(I_2)$。局域性现在意味着，如果 $I_1 \cap I_2 = \emptyset$，那么 $[A(I_1)\ A(I_2)] = 0$。请注意，类空分离给出了这种非常简单的不相交关系。现在，我们的时空对称群是 Diff(S^1)，并且有一个在 H上的射影酉表示U 。共形协变性要求对 $g \in$ Diff(S^1)，有 $U_g A(I)$ $U_g^* = A(gI)$。能量正性意味着，将 U 限制到 S^1 的旋转子群后，会得到一个单参数酉群，且其生成元为正。在这一框架下，满足这些公理的一族冯·诺伊曼代数 $\{A(I)\}$ 称为共形网。

按照 Doplicher-Haag-Roberts 的思路，共形网的表示论如今会因“时空” S^1的低维性而产生编织。这是端同态在模去内自同构意义下具有非平凡交换性的一种形式。也就是说，两个表示给出单个冯·诺伊曼代数 $A(I_0)$ 的两个端同态 λ, μ，其中取某个固定区间 I_0；并且存在一个酉算子$\varepsilon(\lambda,\mu) \in A(I)$，满足 Ad($\varepsilon(\lambda,\mu)$)$\lambda\mu = \mu\lambda$。这个酉算子 $\varepsilon(\lambda,\mu)$ 有时称为统计算子，它源自将一个区间在 S^1 中移动时产生的单值化

移至一个不相交的区间再移回，并满足各种相容条件，例如 [45, 52, 92] 中交织算子的编织-融合方程。交换两个张量分量相当于交换辫中的两条线。对于两条线，有上交叉和下交叉。它们分别对应 $\varepsilon(\lambda,\mu)$ 和 $\varepsilon(\mu,\lambda)^*$。特别是，如果我们固定一个不可约端同态，并将其同时用于 λ 和 μ，那么对于每个 n，都有辫群 B_n 的酉表示。在更高维的闵可夫斯基空间中，$\varepsilon(\lambda,\mu)$ 给出所谓的退化编织；这类似于群表示的情形，对于两个表示 π 和 σ，我们容易得到 $\pi\otimes\sigma$ 和 $\sigma\otimes\pi$ 的酉等价，但现在我们在 S^1 上以一种更非平凡的方式拥有编织。
Kawahigashi-Longo-M¨uger 在[86] 中证明，如果共形网的表示论满足某种称为完全有理性的有限性条件，那么其表示范畴的编织是非退化的，因此按定义可由此得到一个模张量范畴。Freedman-Kitaev-Larsen-Wang [48] 的研究还指出，模张量范畴有望用于拓扑量子计算。这是量子信息论中的一个热门课题，许多研究者利用琼斯多项式及其各种推广研究拓扑量子信息。

构造共形网的例子是一项极具挑战性的任务。Vaughan 和 Wassermann 最初在一个合作项目中尝试从环群的正能量表示构造子因子。随后，Wassermann [125] 构造了由 $SU(N)$的环群的正能量表示导出的共形网，这些表示对应于 Wess-Zumino-Witten 模型 $SU(N)_k$，其中 k是一个称为层的正整数。Xu 在 [132]中证明，这些例子满足完全有理性。与$SU(2)_k$ 对应的共形网给出了辫群 B_n 的酉表示，与 Vaughan 从琼斯投影 e_j得到的表示相同。Wassermann 的构造已由 Loke、Toledano Laredo 和 Verrill 在其导师指导下的论文中推广至其他李群，[90, 120, 124], 另见 [126]。Loke 研究了 Diff(S^1)的射影酉表示，并得到了 Virasoro 网。

文献 [94] 给出了区间 $I\subset S^1$ 上共形网 $\{A(I)\subset B(I)\}$ 的相对版本，称为子因子网。假设 $\{A(I)\}$ 是完全有理的。若已知 $\{A(I)\}$ 的表示范畴，我们希望了解 $\{B(I)\}$ 的表示范畴。其情形类似于群包含 $H\subset G$：我们已知 H 的表示论，希望了解 G 的表示论。在 $H\subset G$ 的群表示情形中，我们将 G 的一个表示限制到 H，并将 H 的一个表示诱导到 G。对于子因子网，$\{B(I)\}$ 的表示限制到 $\{A(I)\}$ 很容易定义，但诱导过程则更为微妙。如今，我们的诱导过程称为 α-诱导，由 Longo-Rehren 于 [94] 首次定义，并由 Xu [129]、B¨ockenhauer-Evans [8, 9, 10, 11]，以及 B¨ockenhauer-Evans-Kawahigashi [12, 13], 进行研究；后两篇论文还将其与 Ocneanu 在 Coxeter-Dynkin 图上的图示演算联系起来。（这两篇论文在端同态抽象模张量范畴这一比共形场论更一般的背景下研究了这种 α-诱导。对于一个 A-A 双模 X，若利用编织让 B 从左侧作用，则张量积 $X\otimes B$ 可视为一个 B-B 模。）取 λ 的一个 $\{A(I)\}$ 表示，该表示由某个固定区间 I_0 上的 $A(I_0)$ 端同态给出。然后利用 $\{A(I)\}$ 的表示范畴上的编织，我们定义 $B(I_0)$ 的一个端同态 $\alpha^{\pm}_{\lambda}$，其中 $\pm$ 表示选择正

或负编织 $\varepsilon^{\pm}(\lambda,\theta)$，其中 θ 表示子因子 $A(I)\subset B(I)$ 的对偶典范端同态。这几乎给出了 $\{B(I)\}$ 的一个表示，但并不完全如此。结果表明，正诱导和负诱导产生的不可约端同态，恰好对应于由 $\{B(I)\}$ 的不可约表示产生的那些端同态。$\{A(I)\}$ 的表示范畴中的编织通过所谓的 S-矩阵和 T-矩阵给出 $SL(2,\mathbb{Z})$ 的一个有限维酉表示。B¨ockenhauer-Evans-Kawahigashi [12] 证明矩阵 $Z_{\lambda,\ \mu}=\langle\alpha_\lambda^+,\alpha_\mu^-\rangle$ 满足以下性质：其中 λ,μ 标记 $\{A(I)\}$ 的不可约表示，而符号 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 统计共同的不可约端同态数量（包括重数）：

(1) 我们有 $Z_{\lambda,\ \mu}\in\{0,1,2,\dots\}$。(2) 我们有 $Z_{0,\ 0}=1$，其中标记 0 表示真空表示。(3) 矩阵 Z 与表示 $SL(2,\mathbb{Z})$ 的像相交换。

这样的矩阵 Z 称为模不变量，因为 $PSL(2,\mathbb{Z})$ 称为模群。对于给定的完全有理共形网（或更一般地，给定的模张量范畴），模不变量只有有限多个。模不变量自然地作为二维共形场论中的配分函数出现。自 Cappelli-Itzykson-Zuber [17] 对 $SU(2)_k$ 模型以及满足$c<1$的 Virasoro 网进行分类以来，人们已对若干具体例子进行了分类；其中 c 是一个称为中心荷的数值不变量。它取正实数值；若 $c<1$，则根据 Friedan-Qiu-Shenker [51] 和 Goddard-Kent-Olive [55]，它的形式为 $1-6/m(m+1)$、$m=3$、4、5，.....。这个数值源自 Diff(S^1) 的一个射影酉表示，以及与之对应的 Virasoro 代数的酉表示；Virasoro 代数是由 Diff(S^1) 导出的李代数复化后的一个中心扩张。请注意，根据上述三个性质定义的一些模不变量，不一定对应于共形场论中作为配分函数出现的物理对象。从α-诱导得到的模不变量在此意义下是物理的。

A-A 系统对 A-B 扇区的作用（通过将 $\{\iota\lambda=\alpha_\lambda^{\pm}\iota:\ \lambda\in A\text{-}A\}$ 分解为不可约表示而得到，其中 $\iota:\ A\to B$ 是包含映射）自然给出了 Verlinde 环 $G_\lambda G_\mu=\sum N_{\lambda\mu}^{\nu}G_\nu$的融合规则的一个表示，其矩阵为 $G_\lambda=[G_{\lambda a}^{b}:\ a、b\in A\text{-}B$扇区]。因此，矩阵 G_λ 将由相同的特征值描述，但重数可能不同。B¨ockenhauer-Evans-Kawahigashi [13] 证明，这些重数恰好由模不变量的对角部分给出：谱$(G_\lambda)=\{S_{\lambda\kappa}/S_{0\kappa}:$ 重数为 $Z_{\kappa\kappa}\}$。这称为 nimrep——非负整数矩阵表示。因此，物理模不变量自动带有一个相容的 nimrep，其谱由模不变量的对角部分描述。$SU(2)$的情形正是 Cappelli-Itzykson-Zuber [17] 的 A-D-E分类，其中 A-B 系统给出相应的（未扩张）Coxeter-Dynkin 图。由于存在范数小于 2 的矩阵的 A-D-E 分类，我们可以独立于 Cappelli-Itzykson-Zuber [17]，恢复出与三个例外 E 图相对应的模不变量各自唯一这一结论。

对于给定的模张量范畴，如果我们只使用正向 α诱导，仍会得到一个端同态融合范畴，但通常没有编织结构。这是模范畴的一个例子。对于有限群 G 的表示所构成的张量范畴 $Rep(G)$，所有模范畴都具有 $Rep(H,\chi)$ 的形式，对应于子群的射影

表示，其 2-余循环为 χ，该子群为 H [98]。因此，模范畴也被称为量子子群。Ostrik 在 [100] 中从更一般的范畴角度研究了这类范畴。然而，Carpi、Gaudio、Giorgetti 和 Hillier [19]，已证明，对于酉融合范畴（例如子因子理论中出现的范畴或由环群导出的范畴），所有模范畴都等价于酉模范畴。对于对应于 $SU(2)_k$ 的共形网，模范畴或量子子群由所有 Coxeter-Dynkin 图 A_n、D_n 和 $E_{6,\ 7,\ 8}$ 标记。这里恰好与有限子群的仿射 A-D-E 分类相吻合。Di Francesco 和 Zuber[28] 受到启发，尝试将 $SU(3)$ 模不变量与 $SU(3)$ 的子群联系起来。两者部分吻合，但这并无助益。一般而言，尽管 $SU(n)$ 的有限子群数量随 n 增长，但除了显而易见的无限系列之外，例外模不变量的数量并不会增加。

若我们有一个子因子网 $\{A(I) \subset B(I)\}$，其中 $\{A(I)\}$ 是完全有理共形网，那么将 $\{B(I)\}$ 的真空表示限制到 $\{A(I)\}$，便会得到 Longo [93] 意义下的局部 Q-系统。这个概念本质上与交换 Frobenius 代数相同；后者是代数或范畴文献中张量范畴内代数的一种特殊情形。这个 Q-系统是由一个对象和两个交织算子组成的三元组。粗略地说，该对象将 $B(I)$ 描述为一个 $A(I)$-$A(I)$ 双模，而这些交织算子则赋予 $B(I)$ 乘法结构。我们关于 α-诱导的一般理论表明，表示 $\{A(I)\}$ 的模张量范畴所对应的模不变量 Z 可还原出这个对象。由于给定的模张量范畴只有有限多个模不变量，因此局部 Q-系统只有有限多个对象。已知每个对象只有有限多个局部 Q-系统结构，因此局部 Q-系统也只有有限多个；这意味着对于给定的 $\{A(I)\}$，扩张 $\{B(I)\}$ 只有有限种可能。

对于 $\{A(I)\}$ 的一些具体例子，我们可以对所有可能的扩张进行分类。对于 $SU(2)_k$ 网，这类扩张是在 [12] 中的 α-诱导背景下由 B¨ockenhauer-Evans-Kawahigashi 研究的；Kawahigashi-Longo 在 [84] 中证明，它们涵盖了所有可能的扩张。（基于量子群的类似分类最早见于 [88]。）它们对应于 Coxeter-Dynkin 图 A_n、D_{2n}、E_6 和 E_8。A_n 情形就是 $SU(2)_k$ 网本身；D_{2n} 情形由阶为 2 的简单流扩张给出；而 E_6 和 E_8 情形则分别由共形嵌入 $SU(2)_{10} \subset SO(5)_1$ 和 $SU(2)_{28} \subset (G_2)_1$，给出。这些对应于 Itzykson-Zuber [17]，B¨ockenhauer-Evans [11] 中的 I 型扩张。与 D_{2n+1} 和 E_7 对应的 II 型扩张，源自不具局域性的 $SU(2)_k$ 网扩张。一般而言，[11] 对于一个物理模不变量 Z，B¨ockenhauer-Evans 构造了局域手征扩张 $N(I) \subset M_+(I)$ 和 $N(I) \subset M_-(I)$，它们分别与真空列 $\{Z_{\lambda,0}\}$ 和真空行 $\{Z_{0,\lambda}\}$ 自然关联，并带有局域的 Q-系统。这些扩张确实是极大的，应视为手征代数左、右极大扩张的子因子版本。由此可确定 $M_\pm$ 的表示论或模张量范畴。例如，E_7 共形网或模范畴，便是左、右局域 D_{10} 扩张上的一个扭曲或自等价；这些扩张构成 I 型母理论。这样一来，分析就归结为先理解局域扩张，再对自等价进行分类，从而确定左、右两个局域扩张。对于 $SU(2)$，只有三个

例外模不变量 $E_{6,\ 7,\ 8}$，一般而言，人们预期，例如对于一个 WZW 模型，除平凡情形、轨形及其共轭所构成的无限序列之外，只有有限多个例外情形。Schopieray [115] 利用 α-诱导，找到了秩 2 李群例外不变量层数的界；Gannon [57] 将这一结果推广到更高秩，并利用伽罗瓦变换这一额外工具改进了下界。Edie-Michell 对自等价开展了广泛研究 [34]。Evans-Pugh [43] 将 SU(3)-模不变量实现为完整 CFT 的工作（于 [97], 宣布），建立在 Gannon 对 SU(3) 模不变量的分类 [53] 之上；Evans-Pugh 对完整 SO(3) 理论或 SO(3) 模范畴的分类见 [44]。

对于一般的共形网，我们总能得到一个由 Diff(S^1) 的射影酉表示生成的子网，称为 Virasoro 网，因此共形网总是 Virasoro 网的扩张。通过 Virasoro 代数的酉表示，共形网具有一个数值不变量 c，即中心荷。若 $c < 1$，Virasoro 网便是完全有理的，因此上述分类方案适用于这种情形。Kawahigashi-Longo 在 [84], 中给出了具有 $c < 1$ 的共形网的完整分类，证明它们与 Cappelli-Itzykson-Zuber 在 [17]中的 I 型模不变量一一对应。涉及 Dynkin 图 E_6 和E_8 的四个例外模不变量给出了例外共形网。其中三个由余集构造给出，另一个则提供了一个新例子。自子因子理论早期以来，人们就指出，低于 4 的琼斯指数值的离散性与低于 1 的中心荷值的离散性相似 [74], 。正如 Popa [105] 所示（另见[97, 42]），我们得到了指标低于 4 的子因子的一个 A-D-E 分类；此外，还有 Capelli-Itzykson-Zuber [17] 对 Virasoro 最小模型模不变量的一个 A-D-E 分类。在此背景下，我们便能自然地理解具有 $c < 1$ 的共形网分类。

K理论在建立子因子理论与统计力学及共形场论之间的联系方面发挥了作用。二维伊辛模型中的相变，是通过分析由传递矩阵产生的一维量子系统的基态来研究的。Araki-Evans通过Fredholm算子的Atiyah-Singer 模 2 指数发生跳变，揭示了这一现象[3]。在这里，Kramers-Wannier 高温对偶是通过相应琼斯投影 $e_j \to e_{j+1}$ 上的移位端同态 ρ 实现的；这引出了Evans[35], 所述的伊辛融合规则 $\rho^2 = 1 + \sigma$，其中 σ 是通过互换 $+$ 态与 $-$ 态形成的对称性，另见 Evans-Gannon [41]。紧李群的Verlinde环张量范畴，或有限群的双范畴，已由 Freed-Hopkins-Teleman [47] 通过群在自身上按共轭作用的扭曲等变 K理论加以描述。这使子因子方法与共形场论的 K理论方法得以交流思想；Evans-Gannon [37, 38, 41]将 α诱导和模不变量用作双变Kasparov KK元。在类似的思路下，从投射模的角度看待 K理论时，Aaserud-Evans [2] 可将有限生成模张量范畴实现为 C^*-Hilbert模。这适用于与量子 SU(2)相关的 Temperley-Lieb-Jones模张量范畴，或更一般的环群模张量范畴——以及量子双，例如Haagerup子因子的量子双；我们将在最后一节重点讨论后者。这也提供了一种

框架，使编织张量范畴能够作用于某些 C^*代数，成为量子对称性。

5. Vertex operator algebras

对于手征共形场论，我们还有另一种更偏代数的数学公理化形式，即顶点算子代数。由于共形网和顶点算子代数都是同一物理理论的数学表述，因此二者自然有着密切的联系。下面我们来说明这些联系。

定义在“时空” S^1 上的量子场是 S^1上的算子值分布，因此它具有算子系数的傅里叶展开。在这种公理化体系中，我们有一个 $\mathbb{C}$-向量空间 V，它是由有限能量向量构成的空间，并且预期经完备化后成为态的希尔伯特空间。对于每个向量 $u \in V$，我们都有一个形式级数 $Y(u,z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} u_n z^{-n-1}$，其中含有一个形式变量 z 以及作用在 V上的线性算子 u_n；它对应于量子场作用在 V的完备化空间上的傅里叶展开。从向量到形式级数的这种对应称为态场对应。我们有两个特殊向量：真空向量和维拉索罗向量。后者的傅里叶系数给出 Virasoro 代数。在这一框架下，局域性公理指出，对于 u、$v \in V$，存在一个足够大的正整数 N，满足 $(z-w)^N[Y(u,z)Y(v,w)] = 0$。粗略地说，这意味着对于 $z \neq w$，$Y(u,z)Y(v,w) = Y(v,w)Y(u,z)$。

顶点算子代数这一概念的起源如下。一个经典的椭圆模函数

$$j(\tau) = 1728\frac{g_2(\tau)^3}{g_2(\tau)^3 - 27g_3(\tau)^2},$$

其中 Im $\tau > 0$ and $g_2(\tau)$ 和 $g_3(\tau)$ 由艾森斯坦级数定义，其傅里叶展开如下，且 $q = \exp(2\pi i\tau)$。

$$j(\tau) = q^{-1} + 744 + 196884q + 21493760q^2 + \cdots .$$

McKay 注意到，系数 196884 与 196883 非常接近，而 196883 是魔群最小非平凡不可约表示的维数。回想一下，按群的阶数计算，魔群是 26 个散在有限单群中最大的，其群阶约为 8×10^{53}。结果发现，我们有类似的关系 $21493760 = 1 + 196883 + 21296876$，其中 21296876 是魔群次小不可约表示的维数。基于这一点以及关于模函数的许多其他信息，Conway-Norton [27] 提出了月光猜想。

(1) 存在一个分次的 $\mathbb{C}$-向量空间 $V = \bigoplus_{n=0}^{\infty} V_n$，带有某种代数结构，其自同构群同构于怪兽群。(2) 对于怪兽群中的任意元素 g，$\sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{Tr}(g|_{V_n})q^{n-1}$ 是 $SL(2,\mathbb{R})$ 的一个零亏格子群的 Hauptmodul，其中 $g|_{V_n}$ 是自同构 g 在 V_n 上的线性作用。

Frenkel-Lepowsky-Meurman [49] 将某种代数结构精确定义为顶点算子代数，构造了月光顶点算子代数 $V^\natural$，并证明其自同构群恰好是怪兽群。他们首先从 Leech 格构造了一个顶点算子代数；Leech 格是一个特殊的 24 维格子，能在 24 维空间中实现最密的球堆积。随后，他们对该顶点算子代数中由 [49] 在 Leech 格上的乘法所产生的二阶自同构应用了扭曲轨形构造

，从而得到 $V^\natural$。Borcherds [14] 随后证明了月光猜想剩余的部分。Dong-Xu [29] 给出了偶格顶点算子代数构造的算子代数对应版本，即共形网。
Kawahigashi-Longo [85] 将月光顶点算子代数的算子代数对应版本构造为月光网。Frenkel-Zhu 在 [50], 中给出了由仿射 Kac-Moody 代数和 Virasoro 代数构造顶点算子代数的方法；这对应于 Wassermann [125], 、Loke、Toledano Laredo 和 Verrill 构造共形网的方法。

我们可以从已知的顶点算子代数或共形网构造出新的例子，方法如下。

(1) 张量积 (2) 余集构造 (3) 轨形构
造 (4) 使用 Q-系统进行扩张

在算子代数框架下，对于无穷指数的共形网包含 $\{A(I) \subset B(I)\}$，余集构造给出相对交换子$A(I)' \cap B(I)$。轨形构造则通过有限群的自同构作用给出不动点共形子网。Xu 分别在 [130] 和 [131], 研究了共形网的这些构造。Kawahigashi-Longo 首先在 [84] 研究了使用 Q-系统扩张局部共形网，以构造例外共形网；Xu 随后在 [133]将其推广。Huang-Kirillov-Lepowsky 在 [63]研究了相应的顶点算子代数构造。Xu 已证明，即使对于顶点算子代数中的纯代数问题，各种子因子技术也相当有力。

从上述结果可以清楚地看出，共形网与顶点算子代数之间存在密切联系，这正如预期；但更理想的做法是从其中一个直接构造出另一个。二者之间的关系应当类似于李群与李代数之间的关系，即前者应由后者通过“取指数”得到。Carpi-Kawahigashi-Longo-Weiner [20]首次给出了这样的构造。也就是说，我们可以从具有强局域性的顶点算子代数构造出共形网，并且还能从这个共形网恢复原来的顶点算子代数。（请注意，这种构造显然要求顶点算子代数具有幺正性，因为我们需要在 V上有一个良好的正定内积。幺正性是强局域性假设的一部分。许多顶点算子代数并不具有幺正性，它们可能通过平面代数等不同途径与算子代数相关联。）除了对强局域性的抽象定义之外， [20]中还给出了具体的充分条件。近期，Gui[57], 、Raymond-Tanimoto-Tener [111] 和Tener [117, 118, 119] 大幅推广了顶点算子代数与共形网之间的这种对应关系，其中包括对二者表示范畴的识别；如今这是一个十分活跃的研究领域。他们中的一些人是从由Vaughan指导的博士论文研究起步的。

6. Other directions in conformal field theory

指标小于 4 的子因子分类呈现出 A-D-E 模式。也就是说，图 1 中给出的平坦联络完整列出了指标小于 4 的超有限 II_1子因子；参见综述 [81]。这自然与数学和物理学中的许多其他主题相关，在这些主题中也会出现

A-D-E 模式。当指标值等于 4 时，我们仍有一种类似的 A-D-E 分类，它基于 Popa [105]提出的扩展 Dynkin 图。这些子因子对应于 $SU(2)$ 的子群，而扩展 Coxeter-Dynkin 图则通过 McKay 对应出现。这些子因子是 $SU(2)$ 的某个子群作用下同时得到的不动点代数，作用于

$$\mathbb{C} \otimes M_2(\mathbb{C}) \otimes M_2(\mathbb{C}) \otimes \cdots \subset M_2(\mathbb{C}) \otimes M_2(\mathbb{C}) \otimes M_2(\mathbb{C}) \otimes \cdots$$

通过伴随作用的无限张量积，可能还会加入额外的上同调扭曲，正如 Connes 对周期作用的分类 [21] 以及 Vaughan 在其关于超有限 II_1 因子的学位论文 [68] 中对有限群作用的分类所示。指标小于 4 的子因子可以视为这一构造的“量子”版本。

当指标值大于 4 时，情况就大不相同了。Haagerup 寻找指标值大于 4 的有限深度子因子，并发现了若干候选主图。其中最小的指标值是 $(5+\sqrt{13})/2$，他证明这一指标值确实由一个子因子达到，该子因子如今称为 Haagerup 子因子 [4]。类似的方法也在 [4]中构造出了 Asaeda-Haagerup 子因子。Izumi[65] 和 Peters [101]提出了 Haagerup 子因子的新构造。后者基于平面代数工具，并已扩展用于构造扩展 Haagerup 子因子。如今，我们已完整分类指标值介于 4 与 5 之间的有限深度子因子，相关综述见 [81], ；这类子因子共有五个（将 $N \subset M$ 和 $M \subset M_1$ 视为同一者之后）：Haagerup 子因子、Asaeda-Haagerup 子因子、扩展 Haagerup 子因子、Goodman-de la Harpe-Jones [56]子因子以及 Izumi-Xu 子因子。后两者如今被理解为源自共形嵌入 $SU(2) \to E_6$ 和 $G_2 \to E_6$。若某个子因子源自有限图 Γ上的连接，它可能并不具有基于 Γ 的主图或标准不变量，正如 D_{2n+1} 或 E_7的情形。任何范数平方落在区间 (4, 5) 内、但不属于这五个允许值之一的图，都只能以 A_∞ 作为主图；Ocneanu、Haagerup 和 Schou 未发表的研究中， E_{10} 也出现了类似情况。

由 Haagerup 子因子产生的融合范畴没有编织，但其 Drinfel′d 中心始终给出一个模张量范畴。Izumi 提出了一种构造 Haagerup 子因子的新方法，并在 [64, 65], 中利用 Cuntz 代数的端同态计算了其 Drinfel′d 中心的 S 矩阵和 T 矩阵。任意模张量范畴能否实现为某个共形网的表示范畴，是一个重要问题；而 Haagerup 融合范畴的 Drinfel′d 中心这一特例也备受关注。需要注意的是，目前已知的 Haagerup 子因子构造 [4, 65, 101] 都基于代数或组合计算。人们对这个子因子及其双重几乎没有概念层面的理解，也完全不清楚它们是否与统计力学或共形场论有关。Evans-Gannon 在 [36, 41]中提供了支持肯定答案的证据。他们找到了由编织产生的模群 $SL(2,\mathbb{Z})$ 表示的特征标，并表明这些模数据——其 S 矩阵、 T 矩阵及融合规则——可以用二面体群双重的嫁接 S_3 以及 $SO(13)_2$, 来简洁地表示；事实上，也可以用两个波茨模型的轨形，或分别基于 $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$ 和 $\mathbb{Z}_{13}$ 的二次（ Tambara-Yamagami ）系统来表示。

从统计力学模型的标度极限获得的共形场论信息，或许可以从底层统计力学系统中探测到。Cardy [18] 根据临界统计系统的共形不变性提出，中心荷 c 可以通过周期矩形格点上的配分函数和传递矩阵的渐近行为计算出来。这方面对 ABF、Q态 Potts 模型（Q=2、3、4）以及某些冰型模型已有深入研究；参见 [42, 第453–454]页。本着这一思路，人们利用由 Haagerup 系统的结合子或某些 $6j$ 符号构造的传递矩阵进行了数值计算，但没有研究其双重。计算结果给出 $c = 2$（或约为2）的值 [62, 123, 89]。然而，文中展示的结果及这些方法并不能证明：如果在 $c = 2$（或约为2）处存在共形场论，它不是一个已知理论；也不能证明，若存在共形场论，其表示论就与 Haagerup 双的表示论有关。回想前一段所述，由图构造的子因子，其不变量未必能再现该图。

Evans-Gannon 首次成功重构了有限群的扭曲双和 Potts 模型的轨形共形场论 [40, 41]。虽然冯·诺伊曼代数和子因子本质上是酉的，但 Evans-Gannon 根据子因子衍生出的思想分析了非酉理论。其中包括用 Leavitt 路径代数取代 Cuntz 代数，以构造不一定保持 $*$-运算 [39]的代数端同态的非酉张量范畴。这些方法以及非酉平面代数也可能有助于理解非半单和对数共形场论。

在尝试构造一个能够实现给定模张量范畴的共形网时，一个自然的想法是通过有限维近似构造某种极限代数。于是，我们对圆 S^1进行格点近似，但在这种有限维近似中，微分同胚对称性会丧失，因此如何恢复微分同胚对称性是一个重大问题。Vaughan 研究了这个问题，使用 Thompson 群来近似 Diff(S^1)，并得到了 Richard Thompson 群的各种有趣表示 [15, 76, 77]。尽管他在 [77] 中证明，由 n 链的平移取极限所得到的平移算子无法扩展为一个在原点强连续的平移群，但这些表示本身就很有趣。他的形式体系和分析清晰明了，因此得以简洁而优雅地证明此前难以证明的结果：Thompson 群不具有 Kazhdan性质T；他还与伯克利的学生 Arnaud Brothier 合作证明了 [16] Thompson群T 不具有 Haagerup性质。由此还得到了新结果：某些群的 wreath积具有 Haagerup性质，这可以通过取群标记森林的分式群来实现。通过构造一个从二叉森林到 Conway缠结的函子，并将一个分叉替换为一个初等缠结，Vaughan 得以证明，每个链环都能以这种方式由一对森林的分式得到，正如辫子通过取闭包可以生成所有链环一样——这为结与链环领域带来了另一座出人意料的桥梁[79]。他还进一步研究了量子自旋链上传递矩阵尺度不变性的相关问题，提出了尺度不变性和弱尺度不变性这两个概念，并给出了传递矩阵和最近邻哈密顿量具有尺度不变性或弱尺度不变性的条件 [78]。

Acknowledgement. 我们谨向 Sorin Popa 致谢，感谢他就本文提出的讨论和意见，并感谢 George Elliott 和 Andrew Schopieray 极其认真地校对稿件。

References

1. G. E. Andrews、R. J. Baxter 和 P. J. Forrester, *Eight-vertex SOS model and generalized Rogers-Ramanujan-type identities* **35** 1984 193 266 , 《统计物理学杂志》 () , –。2. A. Aaserud 和 D. E. Evans, *Realising the braided Temperley-Lieb-Jones C*-tensor categories as Hilbert C*-modules* **380** 2020 103 130 。《数学物理通讯》 () –。3. H. Araki 和 D. E. Evans。 *A C*-algebra approach to phase transition in the two–dimensional Ising model.*《数学物理通讯》91（1983年） , 489–503。4. M. Asaeda 和 U. Haagerup, *Exotic subfactors of finite depth with Jones indices* $5+\sqrt{13}$ /2 () () , 《数学物理通讯》 () , –。5. M. Atiyah, *Topological quantum field theories*, 法国高等科学研究所数学出版物 68（1988年） , 175–186。6. R. J. Baxter, *Exactly solved models in statistical mechanics*, Academic Press, Inc., 伦敦, 1982年。xii+486 页。7. S. Bigelow、E. Peters、S. Morrison 和 N. Snyder, *Constructing the extended Haagerup planar algebra* **209** 2012 29 82 , 《数学学报》 () , –。8. J. B¨ockenhauer 和 D. E. Evans, *Modular invariants, graphs and α-induction for nets of subfactors I*, 《数学物理通讯》197（1998年） , 361–386。9. J. B¨ockenhauer 和 D. E. Evans, *Modular invariants, graphs and α-induction for nets ofsubfactors II*, 《数学物理通讯》200（1999年） , 57–103。10. J. B¨ockenhauer 和 D. E. Evans, , , *Modular invariants graphs and α-induction for nets of subfactors III* **205** 1999 183 228 《数学物理通讯》 () , –。11. J. B¨ockenhauer 和 D. E. Evans, *Modular invariants from subfactors: Type I couplingmatrices and intermediate subfactors.*《数学物理通讯》213（2000年） , 267–289。12. J. B¨ockenhauer、D. E. Evans 和 Y. Kawahigashi, , , *On α-induction chiral projectors and modular invariants for subfactors* **208** 1999 429 487 《数学物理通讯》 () , –。13. J. B¨ockenhauer、D. E. Evans 和 Y. Kawahigashi, *Chiral structure of modular invariantsfor subfactors*, 《数学物理通讯》210（2000年） , 733–784。14. R. E. Borcherds, *Monstrous moonshine and monstrous Lie superalgebras*, 《数学发明》 109（1992年） , 405–444。15. A. Brothier 和 V. F. R. Jones, *Pythagorean representations of Thompson's groups*, 《函数分析杂志》277（2019年） , 2442–2469。16. A. Brothier 和 V. F. R. Jones, *On the Haagerup and Kazhdan properties of R. Thompson'sgroups*, 《群论杂志》22（2019年） , 795–807。17. A. Cappelli、C. Itzykson 和 J.-B. Zuber, *The A-D-E classification of minimal and* $A_1^{(1)}$ *conformal invariant theories* **113** 1987 1 26 , 《数学物理通讯》 () , –。18. J. L. Cardy, *Operator content of two dimensional conformally invariant theories*。《核物理 B》270（1986年） , 186–204。19. S. Carpi、T. Gaudio、L. Giorgetti 和 R. Hillier, *Haploid algebras in C*-tensor categories and the Schellekens list* 2211 12790 [ ] , 20 arXiv: . math.QA。S. Carpi、Y. Kawahigashi、R. Longo 和 M. Weiner, *From vertex operator algebras to conformal nets and back* **254** 2018 1213, +85 , 《美国数学会回忆录》 () , 第 vi 页。21. A. Connes, *Outer conjugacy classes of automorphisms of factors.*《高等师范学校科学年刊》8（1975年）383–419。22. A. Connes, *Classification of injective factors cases* II_1, II_∞, III_λ, $\lambda \neq 1$.《数学年刊》104（1976年）73–115。23. A. Connes *Property T, correspondences and factors* , 算子代数与应用暑期研究所讲座, 女王大学, 金斯顿, 1980年7月14日–8月2日。24. A. Connes, *Noncommutative geometry.* , Academic Press, Inc., 加利福尼亚州圣迭戈, 1994年。25. A. Connes 和 V. F. R. Jones, *Property T for von Neumann algebras.* , 《伦敦数学会通报》17（1985年） 57–62。26. A. Connes 和 E. Stormer。 *Entropy for automorphisms of* II_1 *von Neumann algebras.*《数学学报》134（1975年）289–306。27. J. H. Conway 和 S. P. Norton, *Monstrous moonshine*, 《伦敦数学会通报》 11（1979年） , 308–339。

28. P. Di Francesco 和 J.-B. Zuber, *SU（N） lattice integrable models associated with graphs*, 《核物理》B338（1990年），602–646。29. C. Dong 和 F. Xu, *Conformal nets associated with lattices and their orbifolds*, 《数学进展》206（2006年），279–306。30. S. Doplicher、R. Haag 和 J. E. Roberts, *Local observables and particle statistics, I*, 《数学物理通讯》23（1971年），199–230。31. S. Doplicher、R. Haag 和 J. E. Roberts, *Local observables and particle statistics, II*, 《数学物理通讯》35（1974年），49–85。32. S. Doplicher 和 J. E. Roberts, *A new duality theory for compact groups*, 《数学发明》98（1989年），157–218。33. V. G. Drinfel′d, *Quantum groups*, 《国际数学家大会论文集》第1、2卷（美国加利福尼亚州伯克利，1986年），798–820，美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，1987年。34. C. Edie-Michell, *Auto-equivalences of the modular tensor categories of type A, B, C and G*, 《数学进展》，即将出版。35. D. E. Evans。 *Modular invariant partition functions in statistical mechanics conformal field theory and their realisation by subfactors.*, 《国际数学物理学会大会论文集》，里斯本（2003年），编者 J-C Zambrini，第464–475页，World Sci. Press，新加坡，2005年。36. D. E. Evans 和 T. Gannon, *The exoticness and realisability of twisted Haagerup-Izumi modular data*, 《数学物理通讯》307（2011年），463–512。37. D. E. Evans 和 T. Gannon, *Modular Invariants and twisted K-theory*, 《数论与物理通讯》3（2009年），209–296。38. D. E. Evans 和 T. Gannon, *Modular Invariants and twisted K-theory: II. Dynkin diagram symmetries.* **12** 2013 273 ，《K 理论杂志》（）–330。39. D. E. Evans 和 T. Gannon, *Non-unitary fusion categories and their doubles via endomorphisms* **310** 2017 1 43 ，《数学进展》（），-。40. D. E. Evans 和 T. Gannon, *Reconstruction and local extensions for twisted group doubles, and permutation orbifolds* **375** 2022 2789 2826, ，《美国数学会会刊》（）-。41 *Tambara–Yamagami tori* D. E. Evans 和 T. Gannon, , , *loop groups and KK-theory*, arXiv:2003.09672v1。42. D. E. Evans 和 Y. Kawahigashi, *Quantum Symmetries on Operator Algebras*, 牛津大学出版社，牛津，1998年。43. D. E. Evans 和 M. Pugh。 *SU* 3 *Goodman-de la Harpe-Jones subfactors and the realisation of SU* 3 *modular invariants* （）（）。《数学物理评论》（），第–期。44. D. E. Evans 和 M. Pugh。 *Classification of Module Categories for* $SO(3)_{2m}$, 《数学进展》384（2021年）107713。45. K. Fredenhagen、K.-H. Rehren 和 B. Schroer, *Superselection sectors with braid group statistics and exchange algebras I* **21** 2009 7, 877 928 **125** 1989 201 226 ，，《数学物理通讯》（），–；46. K. Fredenhagen、K.-H. Rehren 和 B. Schroer, *Superselection sectors with braid group sta-tistics and exchange algebras, II*, 《数学物理评论》特刊（1992年），113–157。47. D. S. Freed、M. J. Hopkins 和 C. Teleman *Loop groups and twisted K-theory I* **4**（2011年），737–798。48. M. H. Freedman、A. Kitaev、M. J. Larsen 和 Z. Wang, *Topological quantum computation*, 《美国数学会通报》（新系列）40（2003年），31–38。49. I. Frenkel、J. Lepowsky 和 A. Meurman, *Vertex operator algebras and the Monster*, Academic Press（1988年）。50. I. Frenkel 和 Y. Zhu, *Vertex operator algebras associated to representations of affine and Virasoro algebras*, 《杜克数学杂志》66（1992年），123–168。51. D. Friedan、Z. Qiu 和 S. Shenker, *Details of the non-unitarity proof for highest weight representations of the Virasoro algebra* **107** 1986 535 542 ，《数学物理通讯》（），–。52. J. Fr¨ohlich 和 F. Gabbiani, *Braid statistics in local quantum theory*, 《数学物理评论》2（1990年），251–353。53. T. Gannon, *The classification of affine SU*(3) *modular invariant partition functions.*《数学物理通讯》161（1994年），233–264。54. T. Gannon, *Exotic quantum subgroups and extensions of affine Lie algebra VOA – part I*, arXiv: 2301 07287 [ ] . math.QA。P. Goddard、A. Kent 和 D. Olive, *Unitary representations of the Virasoro and super-Virasoro algebras* **103** 1986 105 119 ，《数学物理通讯》（），–。55

56. P. de la Harpe 和 F. Goodman 以及 V. F. R. Jones, *Coxeter Graphs and Towers of Algebras*. 第 288 页。（1989年）MSRI 出版物 14。施普林格（纽约）57. B. Gui, *Categorical extensions of conformal nets*, 《数学物理通讯》383（2021年），763–839。58. D. Guido 和 R. Longo,
The conformal spin and statistics theorem, 《数学物理通讯》181（1996年），11–35。59. A. Guionnet、V. F. R. Jones 和 D. Shlyakhtenko, *Random matrices*、 *free probability*、 *planaralgebras and subfactors*, 《数学量子》，201–239，克雷数学会议录，11，美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，2010年。60. A. Guionnet、V. F. R. Jones 和 D. Shlyakhtenko, *A semi-finite algebra associated to a planar algebra.* **261** 2011 1345 1360 , 《泛函分析杂志》，（）–。61. A. Guionnet、V. F. R. Jones、D. Shlyakhenko 和 P. Zinn-Justin, *Loop models*、 *randommatrices and planar algebras*, 《数学物理通讯》316（2012年）45–97。62. T.-C. Huang、Y.-H. Lin、K. Ohmori、Y. Tachikawa 和 M. Tezuka, *Numerical evidence for a Haagerup conformal field theory* 2110 03008 , arXiv：。。
63. Y.-Z. Huang、A. Kirillov, Jr. 和 J. Lepowsky, *Braided tensor categories and extensions of vertex operator algebras* **337** 2015 1143 1159 , 《数学物理通讯》（），–。64. M. Izumi,
The structure of sectors associated with Longo-Rehren inclusions. I. Generaltheory, 《数学物理通讯》213（2000年），127–179。65. M. Izumi,
The structure of sectors associated with Longo-Rehren inclusions. II. Examples, 《数学物理评论》13（2001年），603–674。66. M. Jimbo, *A q-difference analogue of U（g） and the Yang-Baxter equation*, 《数学物理通讯》10（1985年），63–69。67. M. Jimbo、T, Miwa 和 M. Okado,
Solvable lattice models whose states are dominant integralweights of $A^{(1)}_{n-1}$, 《数学物理通讯》14（1987年），123–131。68. V. F. R. Jones, *Actions of finite groups on the hyperfinite type* II_1 *factor.* 《美国数学会回忆录》28（1980年），第 237 号，v+70 页。69. V. F. R. Jones, *Index for subfactors*, 《数学发明》72（1983年），1–25。70. V. F. R. Jones, *A polynomial invariant for knots via von Neumann algebras*, 《美国数学会通报》12（1985年），103–111。71. V. F. R. Jones,
Hecke algebra representations of braid groups and link polynomials, 《数学年刊》（第 2 辑）126（1987年），335–388。72. V. F. R. Jones, *On knot invariants related to some statistical mechanical models*, 《太平洋数学杂志》137（1989年），311–334。73. V. F. R. Jones, *Baxterization*, 《国际现代物理学杂志 B》4（1990年），701–713。74. V. F. R. Jones, *Subfactors and knots*, CBMS 数学区域会议系列，80，美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，1991年。x+113 页。75. V. F. R. Jones,
In and around the origin of quantum groups, 《数学物理展望》，101–126，《当代数学》437，美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，2007年。76. V. F. R. Jones,
Some unitary representations of Tompson's groups F and T, 《组合代数杂志》1（2017年），1–44。77. V. F. R. Jones, *A no-go theorem for the continuum limit of a periodic quantum spin chain*, 《数学物理通讯》357（2018年），295–317。78. V. F. R. Jones, *Scale invariant transfer matrices and Hamiltonians*, 《物理学杂志 A》51（2018年），104001，27 页。79. V. F. R. Jones,
On the construction of knots and links from Thompson's groups, 《结、低维拓扑及其应用》，43–66，施普林格数学与统计学会议录 284，施普林格，2019年。80. V. F. R. Jones, *Planar algebras*、 *I*, 《新西兰数学杂志》52（2021年），1–107。81. V. F. R. Jones、S. Morrison 和 N. Snyder, *The classification of subfactors of index at most 5* **51** 2014 277 327 , 《美国数学会通报》（新系列）（），–。82. L.H. Kauffman, *State models and the Jones polynomial*, 《拓扑》26（1987年），395–407。83. L.H. Kauffman, *Combinatorial Knot Theory and the Jones Polynomial*, 《美国数学会通报》即将出版，arXiv： 2204 12104 [ ] 。数学.GT。Y. Kawahigashi 和 R. Longo, *Classification of local conformal nets. Case* $c < 1$, 《数学年刊》160（2004年），493–522。85. Y. Kawahigashi 和 R. Longo, *Local conformal nets arising from framed vertex operator algebras* **206** 2006 729 751 , 《数学进展》（），–。

86. Y. Kawahigashi、R. Longo 和 M. M
¨ *Multi-interval subfactors and modularity of rep-* uger，，《数学 *resentations in conformal field theory* **219** 2001 631 669 物理通讯》（），–。87. Y. Kawahigashi、N. Sato 和 M. Wakui，（ $2+1$ *-dimensional topological quantum field theory*），《数学进展》 *from subfactors and Dehn surgery formula for* 3*-manifold invariants* **195** 2005 （），165–204。88. A. Kirillov, Jr. 和 V. Ostrik，

On a q-analogue of the McKay correspondence and the ADEclassification of $\mathfrak{sl}_2$ *conformal field theories*，《数学进展》171（2002年），183–227。89. Y. Liu、Y. Zou 和 S. Ryu， *Operator fusion from wavefunction overlaps: Universal finite-size corrections and application to Haagerup model* 2203 ，arXiv：。

14992 90. T. Loke， *Operator algebras and conformal field theory of the discrete series representationsof* Diff(S^1)。剑桥博士学位论文（1994年）91. R. Longo， *Index of subfactors and statistics of quantum fields*、 *I*，《数学物理通讯》126（1989年），217–247。92. R. Longo，

Index of subfactors and statistics of quantum fields *braid*、 *group statistics and Jones polynomial* **130** 1990 285 309

II. Correspondences，《数学物理通讯》（），–。93. R. Longo，

A duality for Hopf algebras and for subfactors. I，《数学物理通讯》159（1994年），133–150。94. R. Longo 和 K.-H. Rehren， *Nets of subfactors*，《数学物理评论》7（1995年），567–597。95. V. Morinelli、Y. Tanimoto 和 M. Weiner， *Conformal covariance and the split property*，《数学物理通讯》357（2018年），379–406。96. M. M¨uger。 *From subfactors to categories and topology. II. The quantum double of tensor categories and subfactors*，《纯粹与应用代数杂志》180（2003年），159–219。97. A. Ocneanu，

Quantized group、 *string algebras and Galois theory for algebras*，载于《算子代数与应用》第 2 卷，（编者：D. E. Evans 和 M. Takesaki），伦敦数学学会讲义系列 36，剑桥大学出版社，剑桥，（1988年），119–172。

98 2000, 7 140 。A.

99 N

Ocneanu，MSRI 讲座，https://www.msri.org/workshops/ /schedules/。A. Ocneanu，

The classification of subgroups of quantum SU ， *Quantum Symmetries*（）载于（编者：*in Theoretical Physics and Mathematics* **294**，R. Coquereaux 等），《当代数学》，美国数学会，（2002年）133–159。100. V. Ostrik， *Module categories*、 *weak Hopf algebras and modular invariants*，《变换群》8（2003年），177–206。101. E. Peters，

A planar algebra construction of the Haagerup subfactor，《国际数学杂志》21（2010年），987–1045。102. M. Pimsner 和 S, Popa， *Entropy and index for subfactors.*，《高等师范学校科学年刊》19（1991年）57–106。103. S. Popa，《对应》，INCREST 预印本，https://www.math.ucla.edu/ popa/popa-correspondences.pdf（1986年）104. S. Popa，

Markov traces on Universal Jones algebras and subfactors of finite index，《数学发明》111（1993年），375–405。105. S. Popa， *Classification of amenable subfactors of type II*，《数学学报》172（1994年），163–255。106. S. Popa， *Symmetric enveloping algebras*、 *amenability and AFD properties for subfactors*，《数学研究通讯》1，4（1994年）409–425。107. S. Popa， *An axiomatization of the lattice of higher relative commutants of a subfactor*，《数学发明》120（1995年），427–445。108. S. Popa， *Amenability in the theory of subfactors*，载于《算子代数与量子场论》，罗马，1996年，国际出版社，1997年，编者：S. Doplicher、R. Longo、J. Roberts、L. Zsido。109. S. Popa， *Some properties of the symmetric enveloping algebras with applications to amenabil- ity and property T* **4** 1999 665 744 ，《数学文献》（），–。110. S. Popa 和 D. Shlyakhtenko， *Universal properties of* $L(F_\infty)$ *in subfactor theory*，《数学学报》191（2003年），225–257。111. C. Raymond、Y. Tanimoto 和 J. E. Tener，

Unitary vertex algebras and Wightman conformal field theories **395** 2022 299 330，《数学物理通讯》（），–。N. Reshetikhin 112 和 V. G. Turaev， *Invariants of* 3*-manifolds via link polynomials and quantum groups* **103** 1991 547 597 ，《数学发明》（），–。113. Ph. Roche， *Ocneanu cell calculus and integrable lattice models*，《数学物理通讯》127（1990年），395–424。

114. M. Sato、T. Miwa 和 M. Jimbo, *Holonomic quantum fields I-V*，京都大学数理科学研究所出版物, 14 (1978) 223–267，15 (1979) 201–278，15 (1979) 577–629，15 (1979) 871–972，16 (1979) 531–584。115. A. Schopieray, *Level bounds for exceptional quantum subgroups in rank two* 《国际数学杂志》29.05 (2018年)，1850034。116. H. N. V. Temperley 和 E. H. Lieb, *Relations between the "percolation" and "colouring" problem and other graph-theoretical problems associated with regular planar lattices: some exact results for the "percolation" problem* **322** 1971 ，《伦敦皇家学会会刊》A辑（），第1549期，251–280。117. J. Tener, *Geometric realization of algebraic conformal field theories*, 《数学进展》349 (2019年)，488–563。118. J. Tener, *Representation theory in chiral conformal field theory: from fields to observables*, Selecta Math. (N.S.) 25 (2019年)，第76号论文，82页。119. J. Tener, *Fusion and positivity in chiral conformal field theory*, arXiv:1910.08257。120. V. Toledano Laredo, *Fusion of Positive Energy Representations of LSpin*（$2n$），博士学位论文，剑桥（1997）arXiv:math/0409044 [math.OA]。121. V. G. Turaev 和 O. Ya. Viro, *State sum invariants of* 3*-manifolds and quantum* $6j$*-symbols*, 《拓扑》31 (1992年)，865–902。122. Y. Ueda, *A minimal action of the compact quantum group* SU_q（n） *on a full factor.* J. Math. Soc. Japan 51 (1999年)，449–461。123. R. Vanhove、L. Lootens、M. Van Damme、R. Wolf、T. Osborne、J. Haegeman 和 F. Verstraete, *A critical lattice model for a Haagerup conformal field theory*, arXiv:2110.03532。124. R.W. Verrill, *Positive energy representations of* $L^{\sigma}SU$（$2r$） *and orbifold fusions*，博士学位论文，剑桥（2002）。125. A. Wassermann, *Operator algebras and conformal field theory III. Fusion of positive energy representations of SU N using bounded operators* **133** 1998 467 538 （），《数学发明》（），–。126. A. Wassermann, *Subfactors and Connes fusion for twisted loop groups*, arXiv:1003.2292 127. H. Wenzl, *Hecke algebras of type* A_n *and subfactors*, 《数学发明》92 (1988年)，349–383。128. E. Witten, *Quantum field theory and the Jones polynomial*, 《数学物理通讯》121 (1989年)，351–399。129. F. Xu, *New braided endomorphisms from conformal inclusions*, 《数学物理通讯》192 (1998年)，349–403。130. F. Xu, *Algebraic coset conformal field theories*, 《数学物理通讯》211 (2000年)，1–43。131. F. Xu, *Algebraic orbifold conformal field theories*, 《美国国家科学院院刊》97 (2000年)，14069–14073。132. F. Xu, *Jones-Wassermann subfactors for disconnected intervals*, 《当代数学通讯》2 (2000年)，307–347。133. F. Xu, *Mirror extensions of local nets*, 《数学物理通讯》270 (2007年)，835–847。

School of Mathematics, Cardiff University, Senghennydd Road, Cardiff CF24 4AG, Wales, United Kingdom
Email address: EvansDE@cardiff.ac.uk

Department of Mathematical Sciences, The University of Tokyo, 3-8-1 Komaba, Tokyo, 153-8914, Japan
Email address: yasuyuki@ms.u-tokyo.ac.jp