arXiv:2303.04462v2 [math.CO] 5 Jul 2023

偏序集 Ramsey 数 $R(P,\ Q_n)$。III. 链组合与反链

Christian Winter*

2023年7月6日

摘要

偏序集 $(P_2,\ \leq_2)$ 的诱导子偏序集是偏序集 $(P_1,\ \leq_1)$ 的一个子集 P_1，满足对于任意两个 $X,\ Y \in P_2,\ X \leq_2 Y$，当且仅当 $X \leq_1 Y$。维数为 n 的布尔格 Q_n 是由 $\{1,\ldots,n\}$ 的所有子集组成、按包含关系排序的偏序集。

给定两个偏序集 P_1 和 P_2，偏序集 Ramsey 数 $R(P_1,\ P_2)$ 是满足以下条件的最小整数 N：对集合 Q_N 的元素进行任意蓝/红染色后，其中要么存在一个与 P_1 同构的单色蓝诱导子偏序集，要么存在一个与 P_2 同构的单色红诱导子偏序集。

我们为两类 P 的 $R(P,\ Q_n)$ 给出上界：链的并行组合，即由不相交的链构成且任意两条链中的元素两两不可比的偏序集；以及细分 Q_2，即通过在两条并行链上添加一个公共极小元和一个公共极大元得到的偏序集。这完成了对至多含有 4 个元素的偏序集 P 的 $R(P,\ Q_n)$ 的确定。若 P 是一个含有 t 个元素的反链 A_t，我们证明 $R(A_t,\ Q_n) = n+3$，其中 $3 \leq t \leq \log\log n$。此外，我们还简要综述了偏序集 Ramsey 问题设定 P 与 Q_n 中的证明技巧。

1 引言

1.1 基本设定与背景

偏序集，简称 poset，是由集合 P 及该集合上的偏序 $\leq_P$ 构成的二元组 $(P,\leq_P)$，即一种具有传递性、自反性和反对称性的二元关系。通常，我们将偏序集 $(P,\leq_P)$ 简称为 P。P 的元素通常称为顶点。若两个顶点 A 和 B 不可比，即若 $A \not\leq B$ 且 $A \not\geq B$，则记作 $A \parallel B$。当且仅当 $P_2 \subseteq P_1$，并且对于任意两个 X、$Y \in P_2$，有 $X \leq_{P_2} Y$ 当且仅当 $X \leq_{P_1} Y$ 时，偏序集 $(P_2,\leq_{P_2})$ 是偏序集 $(P_1,\leq_{P_1})$ 的一个（诱导）子偏序集。若这样的 P_2 与某个偏序集 P' 同构，则称 P_2 是 P_1 中 P' 的一个副本。等价地，若 P_2 是某个嵌入 $\phi\colon P' \to P_1$ 的像，即一个满足对任意两个 X、$Y \in P'$，$X \leq_{P'} Y$ 当且仅当 $\phi(X) \leq_{P_1} \phi(Y)$ 的单射，则 P_2 是 P_1 中 P' 的一个副本。

布尔格 Q_n 是一个偏序集，其顶点为一个含有 n 个元素的底集 的子集，并按包含关系排序。在本文中，我们研究偏序集顶点的着色。偏序集 P 的蓝/红染色是一个映射 $c\colon P \to \{$蓝色，红色$\}$。如果一个偏序集的所有顶点颜色相同，我们就称它是单色的。如果所有顶点都是蓝色，我们就称该偏序集为蓝色。同样，如果所有顶点都是红色，我们就称该偏序集为红色。

*卡尔斯鲁厄理工学院，德国卡尔斯鲁厄 电子邮箱：christian.winter@kit.edu

图和超图的 Ramsey 型问题已得到广泛研究，Ne$\check{s}$et$\check{r}$il 和 R¨odl [18] 将其以一般形式推广到了偏序集。其研究中的一个特例是：对于一个固定偏序集 P，寻找一个宿主偏序集 W，使得对 W 的每一种蓝红染色都包含 P 的一个单色副本。Kierstead 和 Trotter [15] 在这一问题设定下，旨在对所有具有固定 $p(P)$ 的偏序集 P，使 $p(W)$ 最小，其中 p 是诸如大小、高度或宽度这样的偏序集参数。Axenovich和Walzer [1] 提出了一种密切相关的 Ramsey 问题设定，近期吸引了多位研究者的关注。对于固定偏序集 P_1 和 P_2，P_1 对 P_2 的偏序集 Ramsey 数为

$$R(P_1,\ P_2) = \min\{N \in \mathbb{N}\colon \text{对 } Q_N \text{进行任意蓝/红染色，都包含 } P_1 \text{ 的蓝色副本或 } P_2\}\text{.的红色副本}$$

对于对角情形 $P_1 = P_2 = Q_n$，$R(Q_n,\ Q_n)$ 的界逐步改进至 $2n+1 \le R(Q_n,\ Q_n) \le n^2 - n + 2$，按时间顺序参见 Axenovich和Walzer [1],、Cox和Stolee [7], 、Lu和Thompson [16], ，以及 Bohman和Peng [4]。关于 n 的渐近行为仍是一个开放问题。注意，对于任意 P_1 和 P_2，偏序集 Ramsey 数都有定义：容易看出，当 n 足够大时，任意两个偏序集 P_1 和 P_2 都是Q_n 的诱导子偏序集，因此，$R(Q_n,\ Q_n)$ 的一个上界意味着 $R(P_1,\ P_2)$ 的存在。关于对角偏序集 Ramsey 数 $R(P,\ P)$ 的更多结果，参见 Chen、Chen、Cheng、Li 和 Liu [6] 以及 Walzer [21]。

另一个受到积极研究的偏序集 Ramsey 数问题是，在m 固定且 n 较大时考察 $R(Q_m,\ Q_n)$。显然，$R(Q_1,\ Q_n) = n+1$。在 $m = 2$ 的情形下，已证明 $R(Q_2,\ Q_n) = n + \Theta\left(\frac{n}{\log(n)}\right)$；上界由 Gr´osz、Methuku 和 Tompkins [12] 给出，下界则由 Axenovich 和本文作者 [2]给出。对于 $m \ge 3$，目前仅有粗略估计，见 Lu和Thompson [16]。这一开放的研究领域，以及关于偏序集的 Erd˝os-Hajnal 型问题，促使人们对非对角偏序集 Ramsey 数 $R(P,\ Q_n)$展开详细研究，其中 P 固定而 n 较大；相关研究成果发表于一系列论文[22], [3] 中，本文即为其中之一。

偏序集上的其他极值问题包括彩虹Ramsey问题，见 Chang、Gerb- ner、Li、Methuku、Nagy、Patk´os 和 Vizer [5]；图兰型问题，尤其值得一提的是 Methuku 和 P´alv¨olgyi [17]的工作；以及饱和型问题，Keszegh、Lemons、Martin、P´alv¨olgyi 和 Patk´os [14]在近期的一篇综述中讨论了这些问题。

1.2 结果概述

为了理解关于 $R(P,\ Q_n)$ 的一般界限框架，我们考察两个特殊偏序集。V形偏序集 $\mathcal{V}$有三个不同的顶点 $A,\ B,$ 和 C，其中 $C \le A$、$C \le B$ 和 $A \parallel B$。它的对称对应偏序集是偏序集 $\mathcal{V}$，它有三个不同的顶点 $A,\ B,$ 和 C，其中 $C \ge A$、$C \ge B$ 和 $A \parallel B$。若偏序集 P包含 $\mathcal{V}$ 或 $\mathcal{V}$ 的副本，我们称其为非平凡；否则称 P 为平凡。Axenovich 与作者 [2] 证明，固定的 P 是否平凡，会导致 $R(P,\ Q_n)$ 呈现两种不同的渐近行为。结合 Walzer [21]给出的一般下界，以及 Axenovich 和 Walzer [1] 给出的一般上界，现有以下结论：

定理1 （[1][2][21]）。设 P 是一个平凡偏序集。那么对每个 n,

$$n + h(P) - 1 \le R(P, Q_n) \le n + h(P) + \alpha(w(P)) + 1.$$

设 P 为非平凡偏序集。那么，当 n 充分大时,

$$n + \tfrac{1}{15}\tfrac{n}{\log n} \le R(P, Q_n) \le h(P)n + \dim_2(P).$$

本文中，“log”表示以 2 为底的对数。高度 $h(P)$ 是 P 中两两可比顶点的最大集合的大小，而宽度 $w(P)$ 表示 P 中两两不可比较顶点的最大集合的大小。2维数 $\dim_2(P)$ 是包含 P 的布尔格 Q_N 的最小维数 N。显然，这个偏序集参数是定义良好的。斯佩纳数 $\alpha(t)$ 是满足 $\binom{N}{\lfloor N/2 \rfloor} \geq t$ 的最小整数 N。Habib、Nourine、Raynaud 和 Thierry [13] 以显式形式几乎精确地确定了它，他们证明了

$$\alpha(t) \in \left\{ \left\lfloor \log t + \tfrac{\log\log t}{2} \right\rfloor + 1, \left\lfloor \log t + \tfrac{\log\log t}{2} \right\rfloor + 2 \right\}. \qquad (*)$$

我们指出，高度为 $h(P) = 1$的偏序集 P，即反链，是平凡的；然而，对于此类P，Axenovich和 Walzer [1]给出的一般上界 $R(P, Q_n) \leq h(P)\, n + \dim_2(P)$比定理1中给出的上界 $R(P, Q_n) \leq n + h(P) + \alpha(w(P)) + 1$更强。

Walzer [21] 在分析 $R(P, Q_n)$方面的另一项重要贡献，是为并行复合 P提供了一个上界。给定一个偏序集 $\mathcal{Q}$，两个子偏序集 P_1，$P_2 \subseteq \mathcal{Q}$若其中元素两两不可比，则称它们并行。我们用 $P_1 + P_2$ 表示两个偏序集 P_1 和 P_2的并行复合，即由 P_1 的一个副本和 P_2 的一个副本组成的偏序集，这两个副本互不相交且并行。文献中也将并行复合称为独立并。注意，这一运算是交换的且结合的。

定理 2 ([21])。设 $\ell \geq 2$，并令 P_1、P_2、…、P_ℓ 和 Q 为任意偏序集。令 $\mathcal{P} = P_1 + P_2 + \cdots + P_\ell$ 为 P_1、…、P_ℓ的并行复合。那么

$$R(\mathcal{P}, Q) \leq \max_{j \in [\ell]} \left\{ R(P_j, Q) \right\} + \alpha(\ell) \leq \max_{j \in [\ell]} \left\{ R(P_j, Q) \right\} + \log(\ell) + \tfrac{1}{2}\log\log(\ell) + 2.$$

本文汇集了已有结果并给出了若干新的界，从而得到 $R(P, Q_n)$ 的界；对于所有顶点数至多为 4 的偏序集 P（按对称性计共有 19 个），这些界在两个最高阶的加性项上渐近紧。此外，我们精确确定了所有顶点数至多为 4 的平凡 P 的 $R(P, Q_n)$。这些界的概览见表 1。表中每一行都通过哈斯图定义一个偏序集 P，并采用本文的记号为其标记。所有偏序集的正式定义见第 1.3 节和第 2.1 节。有些偏序集在文献中另有名称，表中也一并列出。

1.3 新结果

长度为 t 的链 C_t 是由 t 个顶点构成线性序的偏序集。对于 $s, t \in \mathbb{N}$，令 $\mathcal{SD}_{s,t}$表示 (s, t) 细分菱形，即由两条互不相交且元素两两不可比的链构成的偏序集，这两条链的长度分别为 s 和 t，再添加一个公共极小顶点和一个公共极大顶点；也就是说，添加一个小于所有其他顶点的顶点和一个大于所有其他顶点的顶点，见图1。注意，$\mathcal{SD}_{1,1} = Q_2$。我们的第一个结果表明，对于细分菱形，定理1得到的下界在强意义下是渐近紧的。

定理 3. 设 s 和 t 为固定的自然数。那么对于充分大的 n,

$$R(\mathcal{SD}_{s,t}, Q_n) \leq n + \frac{\big(2 + o(1)\big)n}{\log n}.$$

注意，表 1 倒数第二行中定义的偏序集 $\mathcal{J}$ 是 $\mathcal{SD}_{1,2}$ 的诱导子偏序集。因此，定理 3 推出：

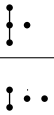
	偏序集 P	$R(P,\ Q_n)$	证明
	$C_1 = Q_0$	$n+0$	平凡
	$C_2 = Q_1$	$n+1$	定理 5
	$A_2 = 2C_1$	$n+2$	定理 5
	C_3	$n+2$	定理 5
	$\mathcal{C}_{2,1}$	$n+3$	定理 5
	$A_3 = 3C_1$	$n+3$	定理 8
	$\mathcal{V} = K_{1,2}$	$n+\frac{c(n)n}{\log(n)},\ \frac{1}{15} \le c(n) \le 1+o(1)$	[2]
	C_4	$n+3$	定理 5
	$\mathcal{C}_{2,2} = 2C_2$	$n+3$	定理 5
	$A_4 = 4C_1$	$n+3$	定理 8
	$\mathcal{C}_{3,1}$	$n+4$	定理 5
	$\mathcal{C}_{2,1,1}$	$n+4$	定理 6
	$\mathcal{V}+C_1$	$n+\frac{c(n)n}{\log(n)},\ \frac{1}{15} \le c(n) \le 1+o(1)$	下界：定理 1 ([2]), 上界： [2], 定理 2 ([21])
	$K_{1,3} = V_3$	$n+\frac{c(n)n}{\log(n)},\ \frac{1}{15} \le c(n) \le 1+o(1)$	下界：定理 1 ([2]), 上界： [22]
	$\mathcal{N}$	$n+\frac{c(n)n}{\log(n)},\ \frac{1}{15} \le c(n) \le 1+o(1)$	下界：定理 1 ([2]), 上界： [3]
	$Q_2 = K_{1,2,1}$	$n+\frac{c(n)n}{\log(n)},\ \frac{1}{15} \le c(n) \le 2+o(1)$	下界：定理 1 ([2]), 上界： [12]
	$K_{1,1,2} = Y$	$n+\frac{c(n)n}{\log(n)},\ \frac{1}{15} \le c(n) \le 2+o(1)$	下界：定理 1 ([2]), 上界： [22]
	$\mathcal{J} = Q_2^-$	$n+\frac{c(n)n}{\log(n)},\ \frac{1}{15} \le c(n) \le 2+o(1)$	下界：定理 1 ([2]), 上界：推论 4
	$K_{2,2} = \bowtie$	$n+\frac{c(n)n}{\log(n)},\ \frac{1}{15} \le c(n) \le 4+o(1)$	下界：定理 1（[2]）， 上界： [22]

表 1：小型 P 的偏对角偏序集 Ramsey 界，以及下界（LB）和上界（UB）证明的参考文献

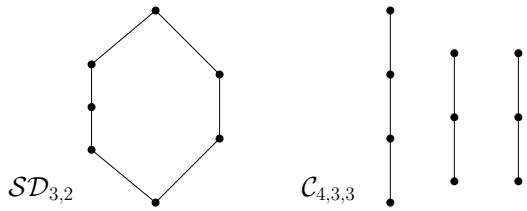


图1：以下集合的哈斯图$\mathcal{SD}_{3,\ 2}$和$\mathcal{C}_{4,\ 3,\ 3}$

推论4。当 n 充分大时，$R(\mathcal{J}, Q_n) \le R(\mathcal{SD}_{1,2}) \le n + \big(2 + o(1)\big)^{\ n_{\text{对数}\ n}}$。

我们指出，定理 3 可以推广，但论证相当技术化，因此此处略去。通过推广细分菱形，我们可以证明，对于每个宽度为 $w(P) = 2$ 且不包含 N形四元素偏序集 $\mathcal{N}$副本的偏序集 P，

$$R(P, Q_n) = n + O\left(\frac{n}{\log n}\right).$$

这个上界由本文的定理 3、[22] 的定理1和推论6，以及 Valdes [20] 给出的刻画得出：一个偏序集是 $\mathcal{N}$-自由的，当且仅当它是串并联的。

显然，一个偏序集是平凡的，当且仅当它是链 C_{t_1}、.....、C_{t_ℓ}的并行复合。我们称之为参数为 t_1、.....、t_ℓ的链复合，

$$\mathcal{C}_{t_1,t_2,\ldots,t_\ell} = C_{t_1} + C_{t_2} + \cdots + C_{t_\ell}.$$

全文中我们约定 $t_1 \ge t_2 \ge \cdots \ge t_\ell$。定理1给出 es $n + t_1 - 1 \le R(\mathcal{C}_{t_1,\ t_2,\ \ldots,\ t_\ell},\ Q_n) \le n + t_1 + \alpha(\ell) + 1$. 下面给出如下结果。

定理 5。设 n、t_1、$t_2 \in \mathbb{N}$ 满足 $t_1 \ge t_2$。则

$$R(C_{t_1}, Q_n) = n + t_1 - 1 \qquad and \qquad R(\mathcal{C}_{t_1,t_2}, Q_n) = n + t_1 + 1.$$

定理 6。设 n、t、$t' \in \mathbb{N}$ 且满足 $t - 1 \ge t'$。则

$$R(\mathcal{C}_{t,t-1,t'}, Q_n) = n + t + 2.$$

定理 2 改进了平凡偏序集的一般下界。

推论 7。设 $n \in \mathbb{N}$。设 P为平凡偏序集。若 $w(P) = 1$，则 $R(P, Q_n) = n + h(P) - 1$。若 $w(P) \ge 2$，则 $R(P, Q_n) \ge n + h(P) + 1$。

注意，任何具有 $w(P) = 1$ 的偏序集都是平凡的。根据定理1，当 n 足够大时，$w(P) \ge 2$ 的界对非平凡偏序集也成立。然而，当 n 较小时，推论 7 并不适用于非平凡偏序集；例如，很容易验证 $R(\mathcal{V},\ Q_1) = 3 < 4$。

反链 A_t 是由 t 个单个顶点构成的并行复合 $C_{1,\ 1,\ \ldots,\ 1}$，即由 t 个两两不可比较的顶点组成的偏序集。由著名的 Sperner 定理可知，$h(A_t) = 1$ 且 $\dim_2(A_t) = \alpha(t)$，因此，[1] 和 $(*)$ 中的界意味着

$$n \le R(P, Q_n) \le n + \alpha(t) \le n + \log t + \tfrac{\log\log t}{2} + 2.$$

本文精确确定了 $R(A_t,\ Q_n)$，不仅适用于固定的 t，也适用于 t 相对于 n 至多以双对数级增长的情形。

定理 8。 对于任意两个整数 t 和 n，满足 $3 \le t \le$ 双对数 n，

$$R(A_t, Q_n) = n + 3.$$

事实上，我们的结果适用于 $n \ge 2^{2^{t-2}} - 2$，其前提条件比$t \le \log\log n$略弱。此外，我们证明，若 t 相对于 n足够大，则偏序集 Ramsey 数 $R(A_t,\ Q_n)$ 大于 $n + 3$。

定理 9. 设 $n, r, t \in \mathbb{N}$ 满足 $t > \binom{n+2r+1}{r}$。则 $R(A_t, Q_n) \ge n + 2r + 2$。特别地，若 $t \ge n + 4$，则 $R(A_t, Q_n) \ge n + 4$。

用 n 和 t明确表述，定理 1 和定理 9 以及（$*$）给出如下结论。

推论 10. 对于 $n,\ t \in \mathbb{N}$ 其中 $n \ge 3$ 且 $t \ge 2$,

$$n + \frac{2\log t}{3 + \log n} \le R(A_t, Q_n) \le n + \log t + \frac{\log\log t}{2} + 2.$$

本文结构如下。第 2 节介绍基本定义和符号，并讨论一些初步观察。第 3 节给出定理 3 的证明。第 4 节给出定理5和定理6的证明。第 5 节聚焦于反链，并证明定理 8、定理 9 以及推论 10。最后，第 6 节总结用于界定非对角偏序集 Ramsey 数的已知证明技巧，并列出一些开放问题。

本文在适当情况下省略下取整和上取整。前 n 个自然数构成的集合记为 $[n] = \{1, \dots, n\}$。

2 预备知识

2.1 偏序集记号与经典结果

上一节给出了布尔格 Q_n、 V形偏序集 $\mathcal{V}$、链 C_t、反链 A_t、(s,t)细分菱形$\mathcal{SD}_{s,t}$ 以及链复合$\mathcal{C}_{t_1,t_2,\dots,t_\ell}$的形式化定义。除此之外，我们还使用以下偏序集记号。表 1 给出了所有提及的偏序集的示例。

偏序集 $\mathcal{N}$由四个互不相同的顶点 A, B, C 和 D组成，满足 $A \le C$, $C \ge B$,$B \le D$, $A||B$, $A||D$ 和 $C||D$。钩形偏序集 $\mathcal{J}$ 有互不相同的顶点 A, B, C 和D，其中 $B \le C \le D$, $A \ge B$, $A||C$ 和 $A||D$。

完全 ℓ部偏序集$K_{t_1,\dots,t_\ell}$ 是一个有$\sum_{i=1}^{\ell} t_i$ 个顶点的偏序集，定义如下。对每个指标 $i \in [\ell]$，有一个由 t_i 个互不相同的顶点组成的集合，称为第 i层。同一层中的任意两个顶点都不可比。对于属于不同层 i_X 和 i_Y的任意两个顶点 X 和 Y，若 $i_X < i_Y$，则有 $X \le Y$。

本文通常考虑具有指定底集的布尔格 Q_n 。给定集合 $\mathcal{X}$，布尔格 $\mathcal{Q}(\mathcal{X})$是由 $\mathcal{X}$的所有子集构成、并以集合包含关系为序的偏序集。 $\mathcal{Q}(\mathcal{X})$的维数为 $|\mathcal{X}|$。设 $\mathcal{Q}$是一个维数为 N的布尔格。对于 $\ell \in \{0, \dots, N\}$，我们称 $\mathcal{Q}$的第 ℓ 层为元素 $\{Z \in \mathcal{Q}$ 的集合：$|Z| = \ell\}$。注意， $\mathcal{Q}$ 由 $N + 1$ 层组成，并且每层在 $\mathcal{Q}$中都诱导出一个反链。若在布尔格的蓝/红染色中，每层内的每个顶点都具有相同颜色，则称该染色为分层染色。若对偏序集 P 中的每个 $Z \in P$都有 $X \le Z$，则顶点 X 称为其最小元。同理，若对每个 $Z \in P$都有 $X \ge Z$，则顶点 $X \in P$ 称为其最大元。

以下经典结果称为Dilworth定理 [10]。

定理 11 (迪尔沃思 [10])。 如果偏序集 P 不包含大小为 t 的反链，那么 P 的所有顶点都可以由 $t-1$ 条链覆盖。

若一个 N 维布尔格中的一条链由顶点 $X_\ell \subset \cdots \subset X_{N-\ell}$ 构成，其中 $\ell \in \mathbb{N}$ 满足 $|X_i| = i$，且对所有 $i \in \{\ell, \ldots, N-\ell\}$ 均成立，则称该链为 对称的 。德布劳因、滕贝亨和克鲁伊斯韦克 [8] 给出了以下分解结果。

定理12 ([8])。 N 维布尔格的顶点可以分解为两两不交的对称链。

2.2 红色布尔格与蓝色链

本文中我们常考虑布尔格 $\mathcal{Q}(\mathcal{X} \cup \mathcal{Y})$，其中 $\mathcal{X}$ 和 $\mathcal{Y}$ 是两个不相交的集合，且 $\mathcal{Y} \neq \varnothing$。我们将 $\mathcal{Y}$ 的一个线性序 τ（其中 $y_1 <_\tau y_2 <_\tau \cdots <_\tau y_k$）记作序列 $\tau = (y_1, \ldots\ldots, y_k)$，这表示 $\mathcal{Y} = \{y_1, \ldots, y_k\}$。给定 $\mathcal{Y}$ 的一个线性序 $\tau = (y_1, \ldots\ldots, y_k)$，与 τ 对应的 $\mathcal{Y}$ 链是 $\mathcal{Q}(\mathcal{X} \cup \mathcal{Y})$ 中由顶点 C 构成的一个含 $(k+1)$ 个元素的链

$$C = \big\{X_0 \cup \varnothing, X_1 \cup \{y_1\}, X_2 \cup \{y_1, y_2\}, \ldots, X_k \cup \mathcal{Y}\big\},$$

其中 $X_0 \subseteq X_1 \subseteq \cdots \subseteq X_k \subseteq \mathcal{X}$。注意，对应于 $\mathcal{Y}$ 的不同线性序的 $\mathcal{Y}$-链彼此不同。以下链引理由 Gr´osz、Methuku 和 Tompkins [12] 隐式证明。由于它是确定 $R(P, Q_n)$ 的基本引理，我们沿用 Axenovich 和作者的思路，重述其自成一体的证明，参见 [2] 中的引理 8。

引理 13 ([12], 链引理)。 设 $\mathcal{X}$ 和 $\mathcal{Y}$ 是不相交的集合，且满足 $|\mathcal{X}| = n$ 和 $|\mathcal{Y}| = k$。设 $\mathcal{Q}(\mathcal{X} \cup \mathcal{Y})$ 是一个红蓝二染色的布尔格。固定 $\mathcal{Y}$ 的一个线性序 $\tau = (y_1, \ldots, y_k)$。那么在 $\mathcal{Q}(\mathcal{X} \cup \mathcal{Y})$ 中，要么存在 Q_n 的红色副本，要么存在一个对应于 τ 的蓝色 $\mathcal{Y}$-链。

证明。 对于每个 $i \in [k]$，我们将相对于 τ 的 $\mathcal{Y}$ 的前 i 个元素记为 $\mathcal{Y}[0] = \varnothing$ 和 $\mathcal{Y}[i] = \{y_1, \ldots, y_i\}$。假设不存在对应于 τ 的蓝色 $\mathcal{Y}$-链。我们证明存在 Q_n 的红色副本。回想一下，Q 中 P 的一个副本是嵌入 $\phi\colon P \to Q$ 的像。下面，对于每个 $X \subseteq \mathcal{X}$，我们递归地定义一个标签 $\ell_X \in \{0, \ldots, k\}$，使得函数

$$\phi\colon \mathcal{Q}(\mathcal{X}) \to \mathcal{Q}(\mathcal{X} \cup \mathcal{Y}),\ \phi(X) = X \cup \mathcal{Y}[\ell_X]$$

这是一个嵌入，其像是单色红色的。该嵌入的像是 Q_n 的一个红色副本，正如所要求的。我们选择标签 ℓ_X、$X \subseteq \mathcal{X}$，使其满足以下性质：

(i) 对任意 $U \subseteq X$，$\ell_U \leq \ell_X$。

(ii) 顶点 $X \cup \mathcal{Y}[\ell_X]$“下方”有一条长度为 ℓ_X 的蓝色链 C^X，也就是说，在布尔格 $Q^X := \mathcal{Q}(X \cup \mathcal{Y}[\ell_X])$ 中，有一条蓝色 $\mathcal{Y}[\ell_X]$-链对应于线性序 $(y_1, \ldots\ldots, y_{\ell_X})$。

(iii) 顶点 $X \cup \mathcal{Y}[\ell_X]$ 被染成红色。

首先，考虑子集 $\varnothing \subseteq \mathcal{X}$。令 $\ell_\varnothing$ 为最小指标 ℓ, $0 \leq \ell \leq k$，使得顶点 $\varnothing \cup \mathcal{Y}[\ell]$ 为红色。若不存在这样的 ℓ，则顶点 $\varnothing \cup \mathcal{Y}[0], \ldots, \varnothing \cup \mathcal{Y}[k]$构成一条蓝色 $\mathcal{Y}$-链，对应于 τ，这与假设矛盾。显然，性质 (i) 和 (iii) 对于 $\ell_\varnothing$成立。若 $\ell_\varnothing = 0$，则 (ii) 显然成立。若 $\ell_\varnothing \geq 1$，则顶点

$\varnothing \cup \mathcal{Y}[0], \ldots, \varnothing \cup \mathcal{Y}[\ell_\varnothing - 1]$ 构成一条长度为 $\ell_\varnothing$ 的蓝色链，满足 (ii) 的要求。

现在考虑任意一个非空的 $X \subseteq \mathcal{X}$，并假设对于每个 $U \subset X$，我们已经定义了具有性质 (i)-(iii) 的 ℓ_U。令 $\ell'_X = \max_{\{U \subset X\}} \ell_U$，并固定某个满足 $\ell_W = \ell'_X$ 的 $W \subset X$。令 C^W 为根据性质 (ii) 针对 W 得到的蓝色链。我们将 ℓ_X 定义为满足 $\ell'_X \le \ell \le k$ 且顶点 $X \cup \mathcal{Y}[\ell]$ 在 $\mathcal{Q}(\mathcal{X} \cup \mathcal{Y})$ 的染色中为红色的最小整数 ℓ。如果不存在这样的 ℓ，也就是说，如果没有红色的 $X \cup \mathcal{Y}[\ell]$，那么顶点$X \cup \mathcal{Y}[\ell'_X]$、.....、$X \cup \mathcal{Y}[k]$ 构成一条长度为 $k - \ell'_X + 1$ 的蓝色链。链 C^W 是一条位于 $W \cup \mathcal{Y}[\ell_W]$“下方”的蓝色链。注意到 $W \cup \mathcal{Y}[\ell_W] \subset X \cup \mathcal{Y}[\ell'_X]$，因此两条链合起来构成一条长度为 $k+1$ 的链 C^X。容易看出，C^X 是一条与 τ 对应的 $\mathcal{Y}$-链，因此得到矛盾。于是，ℓ_X 有良好定义。

显然，性质 (iii) 对于 ℓ_X 成立。此外，对于 $U \subset X \subseteq \mathcal{X}$，我们有 $\ell_U \le \ell'_X \le \ell_X$，因此 (i) 成立。还需验证 ℓ_X 的性质 (ii)。回忆 $W \subset X$，使得 $\ell_W = \ell'_X$。若 $\ell_X = \ell'_X$，则链 $C^X := C^W$ 符合要求。若 $\ell_X \ne \ell'_X$，则链 C^W 与顶点 $X \cup \mathcal{Y}[\ell'_X]$，....., $X \cup \mathcal{Y}[\ell_X - 1]$ 构成一条长度为 ℓ_X 的蓝色链，由此验证了性质 (ii)。

我们使用标签 ℓ_X、$X \subseteq \mathcal{X}$，来定义布尔格 Q_n 到 $\mathcal{Q}(\mathcal{X} \cup \mathcal{Y})$ 中的一个嵌入。令 $\phi\colon \mathcal{Q}(\mathcal{X}) \to \mathcal{Q}(\mathcal{X} \cup \mathcal{Y})$，其中 $\phi(X) = X \cup \mathcal{Y}[\ell_X]$。性质 (iii) 意味着 ϕ 的像被染成单色红。我们证明，对于任意两个 $X_1, X_2 \subseteq \mathcal{X}$，当且仅当 $\phi(X_1) \subseteq \phi(X_2)$ 时，$X_1 \subseteq X_2$ 成立。事实上，若 $\phi(X_1) \subseteq \phi(X_2)$，显然 $X_1 = \phi(X_1) \cap \mathcal{X} \subseteq \phi(X_2) \cap \mathcal{X} = X_2$。反过来，若 $X_1 \subseteq X_2$，则由性质 (i) 可知 $\ell_{X_1} \le \ell_{X_2}$。因此 $X_1 \cup \mathcal{Y}[\ell_{X_1}] \subseteq X_2 \cup \mathcal{Y}[\ell_{X_2}]$。所以，$\phi$ 是 $\mathcal{Q}(\mathcal{X})$ 的一个嵌入，且其像为红色；特别地，$\mathcal{Q}(\mathcal{X} \cup \mathcal{Y})$ 包含 Q_n 的一个红色副本。 □

本引理中得到的红色副本 Q_n 对 $\mathcal{X}$ 具有一项很强的额外性质，不过这里并不需要用到。更多细节请参阅 [2] 的引理 8。下述推论是链引理的一个简化版本。

推论 14. 设 n 和 k 为正整数。设 $\mathcal{Q}$ 是维数为 $n+k$ 的蓝/红双色布尔格。那么，$\mathcal{Q}$ 中包含 Q_n 的红色副本，或一条长度为 $k+1$ 的蓝色链。

注意，推论 14 立即推出了定理 5 中的第一个上界。

2.3 布尔格的嵌入

Axenovich 和 Walzer [1] 证明，将一个小型布尔格嵌入大型 r
布尔格具有如下优良性质，见 [1] 的定理 8。

引理 15 ([1])。设 $n \in \mathbb{N}$，并令 $\mathcal{Z}$ 为满足 $|\mathcal{Z}| > n$ 的集合。若存在嵌入 $\phi\colon Q_n \to \mathcal{Q}(\mathcal{Z})$，则存在子集 $\mathcal{X} \subset \mathcal{Z}$，满足 $|\mathcal{X}| = n$，以及嵌入 $\phi'\colon \mathcal{Q}(\mathcal{X}) \to \mathcal{Q}(\mathcal{Z})$，其像与 相同，且对所有，都有 $(X) \cap \mathcal{X} = X$。

换言之，对于宿主格 $\mathcal{Q}(\mathcal{Z})$ 中 Q_n 的任意副本 Q'，存在某个 $\mathcal{X} \subset \mathcal{Z}$，使得将 Q' 逐顶点限制到 $\mathcal{X}$ 后，结果等于 $\mathcal{Q}(\mathcal{X})$。

3 $R(\mathcal{SD}_{s,\ t},\ Q_n)$ 的上界

3.1 计算排列数

在本小节中，我们将界定具有某种特殊性质的排列数量，为证明定理 3 做准备。若对每个

$j \in [k]$, $|\{\ell \le j\colon \pi(\ell) \ge j-1\}| \le r$。若从上下文中可以清楚看出 r，我们通常会省略该参数。例如，由 $(\hat{\pi}(1)\dots,\hat{\pi}(k)) = (k,1,3,4,5,\dots,k-1,2)$ 给出的排列 $\hat{\pi}$，见图2，不是1-proper，因为在 $j=3$, $\{\ell \le 3 : \hat{\pi}(\ell) \ge 2\} = \{1,3\}$。不过，$\hat{\pi}$ 是2-proper。

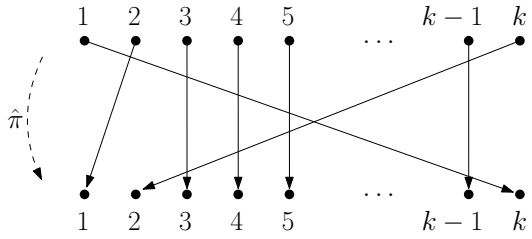


图2：排列 $\hat{\pi}\colon\ [k] \to [k]$。

引理 16. 设 $r, k \in \mathbb{N}$。至多有 $2^{(r+\log r)k}$ 个不同的 r-适当排列$\pi\colon\ [k] \to [k]$。

证明。对于一个 r-适当排列 π，如果 $\pi(i) \ge i$，我们称指标 $i \in [k]$ 为坏 指标；如果 $\pi(i) \le i-1$，则称其为好 指标。令 $\mathcal{B}_\pi$ 和 $\mathcal{G}_\pi$ 分别表示坏指标和好指标的集合，也就是说，这些集合将 $[k]$划分为两部分。再次考虑例子 $(\hat{\pi}(1)\dots,\hat{\pi}(k)) = (k,1,3,4,5,\dots,k-1,2)$，可得 $\mathcal{B}_{\hat{\pi}} = \{1\} \cup \{3,4,\dots,k-1\}$ 和 $\mathcal{G}_{\hat{\pi}} = \{2,k\}$。

给定一个适当排列 π，π 的适当限制 ρ 是 π 在其坏指标上的限制，即 $\rho\colon\ \mathcal{B}_\pi \to [k]$，其中对每个 i，$\rho(i) = \pi(i)$。注意，ρ 不依赖于 r。例如，$\hat{\pi}$ 的适当限制是$\hat{\rho}\colon$ $[k-1]\setminus\{2\} \to [k]$，其中$\hat{\rho}(1) = k$，且对 $3 \le i \le k-1$，$\hat{\rho}(i) = i$。请注意，一个函数 ρ 可以是多个不同适当排列的适当限制。令 Π 为所有适当排列 π的集合：$[k] \to [k]$。如果某个函数 ρ 是某个 $\pi \in \Pi$的适当限制，我们就称 ρ 为 Π-限制。为避免歧义，我们用 $\mathcal{B}_\rho$表示 ρ 的定义域。继承适当排列的性质，ρ 是单射，并且

$$\big|\{\ell \in \mathcal{B}_\rho : \ell \le j,\ \rho(\ell) \ge j-1\}\big| \le r.$$

接下来，我们先通过估计 $|\{\rho$ 来界定 $|\Pi|\colon\ \ \rho$ 是 Π-限制$\}|$，然后再界定 $|\{\pi \in \Pi\colon$ 对于每个固定的 ρ，ρ 都是 $\pi\}|$ 的适当限制。

断言1：</style}至多有 2^{rk} 个不同的 Π-限制。
断言*1*的证明：我们证明，每个 Π-限制都有一种不同的表示，即由 r 个向量 $V_1,\dots,$ $V_r \in \{0,1\}^k$组成的集合，这意味着至多有 2^{rk} Π- 个限制。设 ρ 是定义域为 $\mathcal{B}_\rho$的一个 Π-限制。对于每个 $i \in \mathcal{B}_\rho$，我们定义一个整数区间 $I_i = [i, \rho(i)+1]$。考虑由区间 I_i给出的区间图 G，也就是顶点集为 $\mathcal{B}_\rho$的图，其中 $\{i,j\}$ 是边，当且仅当 $i \ne j$和 $I_i \cap I_j \ne \varnothing$。下文将使用图论中的常用术语；有关正式介绍，请参阅Diestel [9]。

接下来，我们给出 G 中团的最大大小的上界。假设顶点 $i_1,\dots,i_m$ 在 G 中构成一个团，那么区间 $I_{i_1},\dots,I_{i_m}$ 两两相交。因此，存在一个整数$j \in [k]$ 使得 $j \in I_{i_1} \cap \dots \cap I_{i_m}$。现在

$$m = \big|\{\ell \in \mathcal{B}_\rho :\ j \in I_\ell\}\big| = \big|\{\ell \in \mathcal{B}_\rho :\ \ell \le j,\ \rho(\ell)+1 \ge j\}\big| \le r,$$

其中，最后一个不等式成立是因为 ρ 是一个适当限制。因此，G中不存在大小为$r+1$ 的团。众所周知，区间图是完美图，因此存在一个适当的

顶点着色，用不超过 r 种颜色对 G 进行着色。固定这样一种对 G 的着色 c，其颜色集合为 $[r]$。注意，对于每个颜色类，相应的区间两两不相交。

对于每个固定的 $s \in [r]$，颜色为 s 的指标集合为 $\mathcal{B}_s = \{i \in \mathcal{B}_\rho : \ c(I_i) = s\}$。我们定义向量 $V_s \in \{0,1\}^k$ 如下。令

$$V_s(i) = \cdots = V_s(\rho(i)) = 1 \text{ for any } i \in \mathcal{B}_s \quad \text{and} \quad V_s(j) = 0 \text{ for all other } j \in [k].$$

由于区间 I_i、$i \in \mathcal{B}_s$ 两两不相交，V_s 定义良好。此外，对于每个 $i \in \mathcal{B}_s$，我们得到 $V_s(\rho(i)+1) = 0$。这意味着，如果 $V_s(i-1) = 0$ 有定义，那么对于 $i \in \mathcal{B}_s$，它成立。注意，向量 V_s 编码了 $\mathcal{B}_s$ 中的所有指标及其对应的函数值$\rho(i)$、$i \in \mathcal{B}_s$：若存在某个 $j \in [k]$，使得 $V_s(j) = 1$ 且 $V_s(j-1) = 0$，则 $j \in \mathcal{B}_s$，并且 $\rho(j)$ 由满足 $V_s(j) = \cdots = V_s(j') = 1$ 的最大指标 j' 给出。

我们得到 ρ 的向量表示 V_1，……，V_r。容易看出，不同的 Π-限制具有不同的表示。此类向量表示至多有 $(2^k)^r$ 个，这就证明了该断言。

断言 2： 给定一个固定的 Π-限制 ρ，具有适当限制 ρ 的适当排列 π 数量至多为 r^k。

断言 2 的证明：设 ρ 是一个固定的 Π-限制，并令 $\mathcal{G} = [k] \setminus \mathcal{B}_\rho$。在已知对于每个 $\ell \in \mathcal{B}_\rho$ 都有 $\pi(\ell) = \rho(\ell)$ 的条件下，我们统计适当排列中好指标 $i \in \mathcal{G}$ 的可能赋值。为此，我们按递增顺序遍历所有好指标 $i \in \mathcal{G}$，同时统计每个 $\pi(i)$ 的选择数。注意，由于对于任意排列 π 都有 $\pi(1) \geq 1$，因此 $1 \notin \mathcal{G}$。固定一个 $i \in \mathcal{G}$，即 $i \geq 2$。假设所有指标 $\ell \in \mathcal{G} \cap [i-1]$ 都已经被赋予整数 $\pi(\ell) \leq \ell - 1$，并且所有 $\ell \in \mathcal{B}_\rho$ 都被赋予 $\pi(\ell) = \rho(\ell)$。对于 $\pi(i)$ 的选择有两个条件：一方面，i 是一个好指标，因此要求 $\pi(i) \in [i-1]$。另一方面，π 是单射，因此对于所有 $\ell < i$，都有 $\pi(i) \neq \pi(\ell)$。因此$\pi(i) \in [i-1] \setminus \{\pi(\ell) \in [i-1] : \ \ell < i\}$。利用 $|\{\ell < i$ 这一事实，我们计算该集合的大小：$\pi(\ell) \geq i-1\}| \leq r$：

$$\begin{aligned}\Big|\{\pi(\ell) \in [i-1] : \ell < i\}\Big| &= \Big|\{\ell < i : \pi(\ell) \leq i-1\}\Big| = \Big|[i-1] \setminus \{\ell < i : \pi(\ell) > i-1\}\Big| \\ &\geq \Big|[i-1] \setminus \{\ell < i : \pi(\ell) \geq i-1\}\Big| \geq (i-1) - r.\end{aligned}$$

因此也

$$\Big|[i-1] \setminus \{\pi(\ell) \in [i-1] : \ell < i\}\Big| \leq (i-1) - (i-1-r) = r.$$

因此，对于每个 $i \in \mathcal{G}$，选择 $\pi(i)$至多有 r 种方式。注意到 $|\mathcal{G}| \leq k$，所以适当限制为 ρ 的适当排列数量至多为 r^k。

结合两个断言，适当排列的数量至多为

$$\sum_{\rho \text{ is } \Pi\text{-restriction}} \Big|\{\pi \in \Pi : \ \rho \text{ is proper restriction of } \pi\}\Big| \leq 2^{rk} r^k = 2^{(r+\log r)k}.$$

□

这里给出的界并非最优。采用更仔细的方法，数量 $N(k, r)$个 r-适当排列 π：$[k] \to [k]$ 可以被夹在以下两者之间 er

$$r^k \leq N(k,r) \leq (2r)^{2k}.$$

研究这个极值函数本身可能也很有意义。

3.2 定理 3 的证明

在给出定理 3 的证明之前，我们先给出一个纯计算性的引理 al
并遵循 Gr´osz、Methuku 和 Tompkins 的类似断言 [12] 的思路。

引理 17。 设 $n \in \mathbb{N}$，并设 $c \in \mathbb{R}$ 为一个正常数。设 $k = (2+\epsilon)n \log n$，其中~~$\epsilon =$~~ $3(\log\log n + \log e + c + 2)(\log n)^{-1}$。则当 n充分大时，

$$k! > 2^{ck} \cdot 2^{2(n+k)}.$$

证明。由斯特林公式，$k! > \left(\frac{k}{e}\right)^k = 2^{k(\log k - \log e)}$。我们将证明 $k(\log k - \log e) > ck + 2(n+k)$。利用 $k = (2+\epsilon)n \log n$ 这一事实，得到

$$\begin{aligned}
&k\big(\log k - \log e - c - 2\big) - 2n \\
&\geq \frac{(2+\epsilon)n}{\log n}\big(\log(2+\epsilon) + \log n - \log\log n - \log e - c - 2\big) - 2n \\
&\geq \epsilon n - \frac{n}{\log n}(2+\epsilon)\big(\log\log n + \log e + c + 2\big) > 0,
\end{aligned}$$

其中最后一个不等式对充分大的 n成立。 □

定理 3 的证明。 对任意 $s \leq t$，注意到 $\mathcal{SD}_{s,t}$ 是 $\mathcal{SD}_{t,t}$的一个诱导子偏序集，因此只需证明 $s = t$的 Ramsey 界。设 $k = (2+\epsilon)n \log n$，其中 $\epsilon = 3(\log\log n + \log e + c + 2)(\log n)^{-1}$ 且 $c = 2t + 2 + \log(2t+2)$。设 $\mathcal{X}$和 $\mathcal{Y}$为不相交的集合，且 $|\mathcal{X}| = n$,$|\mathcal{Y}| = k$。考虑 $\mathcal{Q}(\mathcal{X} \cup \mathcal{Y})$ 的任意蓝/红染色，且其中不含 Q_n的红色副本。我们将证明，在此染色中存在 $\mathcal{SD}_{t,t}$ 的蓝色副本。

$k!$ 共有 $\mathcal{Y}$的线性序。对于 $\mathcal{Y}$的每一种线性序 τ，引理 13 都会给出 $\mathcal{Q}(\mathcal{X} \cup \mathcal{Y})$中的一条蓝色 $\mathcal{Y}$-链 C^τ，与 τ相对应，假设其顶点为 $Z_0^\tau \subset Z_1^\tau \subset \ldots \subset Z_k^\tau$。考虑最小顶点 Z_0^τ和最大顶点 Z_k^τ。这两个顶点都是 $\mathcal{X} \cup \mathcal{Y}$的子集，因此共有 $2^{2(n+k)}$ 个不同的有序对（Z_0^τ，Z_k^τ）。由抽屉原理可知，存在 $m = \frac{k!}{}$个不同的 $\mathcal{Y}$线性序，构成集合 τ_1、……、τ_m，使得所有相应的 $\mathcal{Y}$-链C^{τ_i} 都共有 $Z_0^{\tau_i}$和 $Z_k^{\tau_i}$。引理 17 表明 $m > 2^{ck}$。

任取一个 $\sigma \in \{\tau_1, \ldots, \tau_m\}$。通过重新标记 $\mathcal{Y}$，可以假设 $\sigma = (1, \ldots, k)$，即 $1 <_\sigma \cdots <_\sigma k$。考虑线性序$\tau_j$, $j \in [m]$（允许$\tau_j = \sigma$），并令$\tau_j = (y_1, \ldots, y_k)$。那么，如果对每个$i \in [k-t]$，都有 $[i] \subseteq \{y_1, \ldots, y_{i+t}\}$或 $\{y_1, \ldots, y_i\} \subseteq [i+t]$，我们就称$\tau_j$对某个 $t \in \mathbb{N}$而言与 σ是 t-近的。例如，线性序$(4, 5, \ldots, k, 1, 2, 3)$与 σ是 3-近的，因为对于任意 $i \in [k-3]$，该线性序的前 i个元素都包含于 $[i+3]$。然而，我们的例子与 σ并非 2-近，因为 $\{1\} \subseteq \{4, 5, 6\}$ 和 $\{4\} \subseteq [3]$都不成立。在剩余的证明中，我们区分两种情况。如果存在一个线性序τ_j，它与 σ并非 t-近，那么我们就从分别对应于 σ和τ_j的$\mathcal{Y}$-链中构造出$\mathcal{SD}_t$的一个副本$_t$。如果每个线性序 τ_1、……、τ_m都与 σ是 t-近的，那么我们就能找到$m > 2^{ck}$ 个满足引理 16 所述性质的排列，从而得到矛盾。

情况 1： 存在一个线性序 $\tau \in \{\tau_1, \ldots, \tau_m\}$，它与 σ 并不 t-接近。
假设与 σ 和 τ 对应的 $\mathcal{Y}$-链分别为 Z_0^σ、……、Z_k^σ 和 Z_0^τ、……、Z_k^τ。回想一下，$Z_0^\sigma = Z_0^\tau$ 和 $Z_k^\sigma = Z_k^\tau$。由于 τ 与 σ 并非 t-接近，因此存在一个指标$i \in [k-t]$，使得 $[i] \subseteq \{y_1, \ldots, y_{i+t}\}$ 和 $\{y_1, \ldots, y_i\} \subseteq [i+t]$均不成立。注意，$i < k-t$，因为对于 $i = k-t$，我们有 $[k-t] \subseteq [k] = \mathcal{Y} = \{y_1, \ldots, y_k\}$。根据 $\mathcal{Y}$-链的定义，$Z_i^\sigma \cap \mathcal{Y} = [i]$ 且 $Z_{i+t}^\tau \cap \mathcal{Y} = \{y_1, \ldots, y_{i+t}\}$，因此 $Z_i^\sigma \not\subseteq Z_{i+t}^\tau$。由传递性，

对于任意两个 j、$j' \in \{i,\dots,i+t\}$，都有 $Z_j^\sigma \not\subseteq Z_{j'}^\tau$。类似地， $Z_i^\tau \not\subseteq Z_{i+t}^\sigma$，因此 $Z_j^\tau \not\subseteq Z_{j'}^\sigma$。这意味着集合

$$\mathcal{P} = \left\{Z_j^\sigma, Z_j^\tau : \ j \in \{0,k\} \cup \{i,\dots,i+t\}\right\}$$

形成了一个$\mathcal{SD}_{t,\ t}$的副本。此外， $\mathcal{P}$ 中的每个顶点都包含在一条蓝色 $\mathcal{Y}$-链中，因此被染成蓝色。这就完成了情况 1 的证明。

情况 2： 每个线性序 $\tau \in \{\tau_1,\dots,\tau_m\}$ 都是 t-接近的。

这里我们利用这样一个事实：每个线性序$\tau_j,\ j \in [m]$都是通过对线性序 σ进行排列得到的。固定一个任意的 $\tau \in \{\tau_1,\dots,\tau_m\}$，并令 $\tau = (y_1,\ \dots,\ y_k)$。我们称与 τ 相对应的排列 为 π：$[k] \to [k]$ 与 $\pi(\ell) = y_\ell$。我们证明 π 具有以下性质。

Claim: For every $j \in [k]$, $|\{\ell \le j : \ \pi(\ell) > j+t\}| \le t$.

若 $j + t > k$，该命题显然成立。现在固定某个 $j \in [k-t]$。根据 τ的 t-接近性，要么 $\{\pi(1)\dots,\ \pi(j)\} = \{y_1,\dots,y_j\} \subseteq [j+t]$，要么 $[j] \subseteq \{y_1,\dots,y_{j+t}\} = \{\pi(1)\dots,\ \pi(j+t)\}$。

如果 $\{\pi(1)\dots,\pi(j)\} \subseteq [j+t]$，那么对每个 $\ell \le j$，都有 $\pi(\ell) \le j+t$。因此$\{\ell \le j : \ \pi(\ell) > j+t\} = \varnothing$，结论成立。

如果 $[j] \subseteq \{\pi(1)\dots,\pi(j+t)\}$，那么令 $I = \{\pi(1)\dots,\pi(j+t)\} \setminus [j]$，注意到 $|I| = t$。观察可知，对每个满足 $\pi(\ell) > j+t$ 的 $\ell \le j$，特别有 $\pi(\ell) \notin [j]$，因此$\pi(\ell) \in I$。由于 π 是双射，

$$\left|\{\ell \le j : \ \pi(\ell) > j+t\}\right| = \left|\{\pi(\ell) : \ \ell \le j,\ \pi(\ell) > j+t\}\right| \le |I| = t.$$

这就证明了该断言。

特别地， π 具有如下性质：对每个$j \in [k]$，都有 $|\{\ell \le j : \ \pi(\ell) \ge j-1\}| \le 2t+2$，即 π 是 $(2t+2)$-适当的。注意，不同的线性序 τ_i、$i \in [m]$ 对应不同的排列 π_i：$[k] \to [k]$。引理 16 给出，$(2t+2)$-适当排列 π_i 的数量至多为

$$m \le 2^{(2t+2+\log(2t+2))k} = 2^{ck}.$$

回想一下，根据引理 17， $m > 2^{ck}$，因此我们得出矛盾。 □

4 定理 5 和 6 的证明

定理 5 的证明。 首先我们确定 $R(C_{t_1},\ Q_n)$。下界由定理 1 得出，因此我们只需证明 $R(C_{t_1},\ Q_n) \le n + t_1 - 1$。假设在一个蓝色/红色染色的布尔格 $\mathcal{Q}^1 := \mathcal{Q}([n+t_1-1])$ 中，不存在 C_{t_1} 的蓝色副本。那么根据推论 14，在 $\mathcal{Q}^1$ 中存在 Q_n 的红色副本。

接下来我们考虑偏序集 Ramsey 数 $R(\mathcal{C}_{t_1,\ t_2},\ Q_n)$。设 $N = n + t_1 + 1$。为了证明 $R(\mathcal{C}_{t_1,\ t_2},\ Q_n) \le N$，我们考虑一个任意染成蓝色/红色的布尔格$\mathcal{Q}^2 := \mathcal{Q}([N])$。我们证明，在这种染色中，要么存在 Q_n 的红色副本，要么存在 $\mathcal{C}_{t_1,\ t_2}$ 的蓝色副本。推论 14 表明，要么存在 Q_n 的红色副本，要么存在长度为t_1+2的蓝色链。若前者成立，证明便已完成，因此不妨设存在一条蓝色链 C，其顶点为 $Z_0 \subset Z_1 \subset \cdots \subset Z_{t_1+1}$。考虑由顶点$Z_1$，.....，$Z_{t_1}$构成的 C 的子偏序集 C'，即删去 C 的最小元和最大元后得到的子偏序集。偏序集C' 是一条长度为 t_1 的链。注意， $Z_1 \neq \varnothing$，因为它有一个真子集 $Z_0 \subset Z_1$，因此

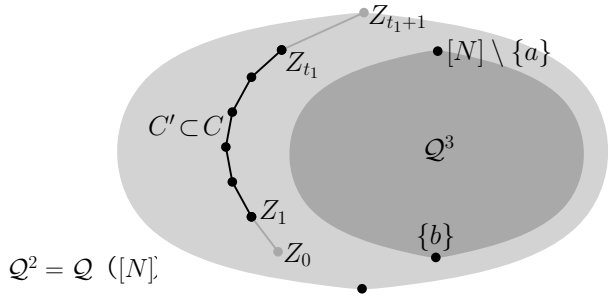


图3： C' 和 $\mathcal{Q}^3$ 是并行的

存在一个元素 $a\in Z_1$。类似地， $Z_{t_1}\neq[N]$，因此我们找到一个 $b\in[N]\setminus Z_{t_1}$。由此可得 $\{a\}\subseteq Z_1\subseteq\cdots\subseteq Z_{t_1}\subseteq[N]\setminus\{b\}$。

我们考虑子偏序集 $\mathcal{Q}^3:=\{Z\in\mathcal{Q}^2:\ b\in Z,\ \ a\notin Z\}$，见图3。注意， $\mathcal{Q}^3$ 是维数为 $N-2=n+t_1-1$ 的布尔格，其蓝/红染色由 $\mathcal{Q}^2$的染色诱导而来。偏序集 $\mathcal{Q}^3$ 和 C' 是并行的，即对于任意两个 $Z\in\mathcal{Q}^3$ 和 $U\in C'$，都有 $Z||U$，因为 $a\in U$、 $a\notin Z$以及 $b\in Z$、 $b\notin U$。应用本证明中给出的第一个上界，我们得到 $R(C_{t_2},\ Q_n)=n+t_2-1\leq n+t_1-1$。由于 $\mathcal{Q}^3$ 的维数为$n+t_1-1$，因此在 $\mathcal{Q}^3$中要么存在 Q_n 的红色副本，要么存在 D 的蓝色副本 C_{t_2}。在第一种情况下，证明即告完成；在第二种情况下， C' 和 D 的顶点构成$\mathcal{C}_{t_1,\ t_2}$的蓝色副本，这同样完成了证明。因此， $R(\mathcal{C}_{t_1,\ t_2},\ Q_n)\leq N$。

接下来要证明 $R(\mathcal{C}_{t_1,\ t_2},\ Q_n)\geq N=n+t_1+1$。我们通过引入 Q_{N-1} 的一种分层染色来验证这个下界：该染色既不包含 $\mathcal{C}_{t_1,\ t_2}$ 的蓝色副本，也不包含 Q_n 的红色副本。考虑布尔格 $\mathcal{Q}^4:=\mathcal{Q}([N-1])$，对其进行如下染色：第 0 层和第 $N-1$ 层（即两个单元素层）均为单色蓝，任意另外 t_1-1 层染成蓝色，其余所有 $N-(t_1+1)=n$ 层均染成红色。

由于 Q_n 的高度为 $n+1$，这种染色中不存在 Q_n 的单色红色副本。假设 $\mathcal{Q}^4$ 中存在 $\mathcal{C}_{t_1,\ t_2}$ 的蓝色副本 $\mathcal{P}$。注意， $\varnothing\notin\mathcal{P}$ 和 $[N-1]\notin\mathcal{P}$，因为这两个顶点都与 $\mathcal{Q}^4$ 的所有其他顶点可比，而在 $\mathcal{P}$ 中，没有顶点与 $\mathcal{P}$ 的所有其他顶点都可比。除 $\varnothing$ 和 $[N-1]$外， $\mathcal{Q}^4$ 只有 t_1-1 层含有蓝色顶点，但 $h(\mathcal{P})=h(\mathcal{C}_{t_1,\ t_2})=t_1$，因此不可能存在 $\mathcal{P}$ $\mathcal{C}_{t_1,\ t_2}$ 的蓝色副本。 □

定理 6 的证明。令 $N=n+t+2$。为了证明 $R(\mathcal{C}_{t,\ t-1,\ t'},\ Q_n)$的上界，任取 $\mathcal{Q}^1:=\mathcal{Q}([N])$ 的蓝/红染色。我们将找到 $\mathcal{Q}^1$ 中的红色 Q_n 副本或蓝色 $\mathcal{C}_{t,\ t-1,\ t'}$ 副本。由推论 14，我们可以找到红色 Q_n 副本或长度为 $t+2$ 的蓝色链 C。若为第一种情况，证明即告完成，因此假设为第二种情况。设 C 的顶点为 $Z_0\subset\cdots\subset Z_{t+1}$。考虑由顶点 Z_1，……， Z_t 构成的 C 的子偏序集 C'，它是一条长度为 t 的链。注意到 $Z_1\neq\varnothing$ 和 $Z_t\neq[N]$，因此我们可以找到某个 a，$b\in[N]$，使得 $\{a\}\subseteq Z_1\subseteq\cdots\subseteq Z_t\subseteq[N]\setminus\{b\}$。

现在考虑子偏序集 $\mathcal{Q}^2:=\{Z\in\mathcal{Q}^1:\ b\in Z,\ \ a\notin Z\}$，它是一个维数为 $N-2=n+t$ 的布尔格，其蓝/红染色由 $\mathcal{Q}^1$ 诱导。定理 5 表明，$\mathcal{Q}^2$ 包含 Q_n 的红色副本或 $\mathcal{C}_{t-1,\ t'}$的蓝色副本 $\mathcal{P}$。在第一种情况下，我们在 $\mathcal{Q}^1$ 中找到了 Q_n 的红色副本。在第二种情况下，我们知道，对于任意两个 $Z\in\mathcal{P}$ 和 $U\in C'$，都有$a\in U$、 $a\notin Z$、 $b\notin U$ 和 $b\in Z$，因此 $Z||U$。因此， $\mathcal{P}$ 和 C' 的顶点诱导出 $\mathcal{C}_{t,\ t-1,\ t'}$ 的蓝色副本。

接下来需要验证下界。为此，我们将构造 $\mathcal{Q}^3 := \mathcal{Q}([N-1])$ 的一种蓝/红染色，其中既不含 Q_n 的红色副本，也不含 $\mathcal{C}_{t,\ t-1,\ t'}$ 的蓝色副本。注意， $t \geq t'+1 \geq 2$。将四层 $\ell \in \{0, 1, N-2, N-1\}$ 中的所有顶点都染成蓝色。再任意选取 $t-2$ 层染成蓝色，并将其余所有N –$(4+t-2)$ $= n$ 层染成红色。显然，这种染色不含 Q_n 的红色副本，因为$h(Q_n)$ $= n+1$。反设在 $\mathcal{Q}^3$ 中存在 $\mathcal{C}_{t,\ t-1,\ t'}$ 的蓝色副本 $\mathcal{P}$。在 $\mathcal{P}$ 中，记长度为 t 的蓝色链为 C，见图 4。此外， $\mathcal{P}$ 中有一条长度为 $t-1$ 的链 D，它与 C 并行。设 $\mathcal{P}$ 中有一个顶点 F，它既不属于 C，也不属于 D，也就是说， F 与 C 或 D 中的每个顶点都不可比。

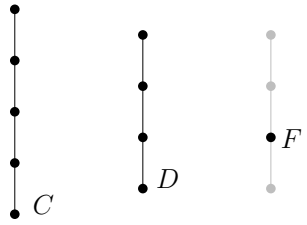


图 4：链 C 和 D 以及顶点 F 在 $\mathcal{C}_{t\ 的一个副本中，\ t-1,t'}$

显然， $\varnothing$ 和 $[N-1]$ 都不在 $\mathcal{P}$中，因为这两个顶点都与 $\mathcal{Q}^3$ 中的每个其他顶点可比，而这些顶点并不出现在 $\mathcal{P}$中。排除两个顶点 $\varnothing$ 和 $[N-1]$后，恰好有 t 层包含蓝色顶点，其中包括第 1 层和第 $N-2$层。

回忆一下， C 是一条长度为 t的蓝色链，因此 C 的最小顶点 Z_1 位于第 1 层，而 C 的最大顶点 Z_t 位于第 $N-2$层。因此，我们找到 $a,\ b \in [N-1]$，使得 $Z_1 = \{a\}$ 和 $Z_t = [N-1]\backslash\{b\}$。令 $\mathcal{Q}^4$: $= \{Z \in \mathcal{Q}^3 \colon\ b \in Z,\ \ a \notin Z\}$，该偏序集是一个布尔格。由于 F 与 C中的每个顶点都不可比，我们得到 $a \notin F$ 和$b \in F$。因此 $F \in \mathcal{Q}^4$，特别是 $F \supseteq \{b\}$ 和 $F \subseteq [N-1]\backslash\{a\}$。类似地， $D \subseteq \mathcal{Q}^4$。

$\mathcal{Q}^3$ 的染色在 $\mathcal{Q}^4$ 上诱导出一种分层染色，其中恰有 t 层为蓝色。 $\mathcal{Q}^4$ 中的这两层蓝色层，是由 $\{b\}$ 和 $[N-1] \setminus \{a\}$给出的单元素层。由于链 D 的高度为 $h(D) = t-1$，因此 $\{b\} \in D$ 或 $[N-1]\backslash\{a\} \in D$。这产生矛盾，因为 F与 D 中的每个顶点都不可比，但 $\{b\}$ 和 $[N-1]\backslash\{a\}$都与 F可比。 □

5 关于 $R(A_t,\ Q_n)$ 的界

5.1 Erd˝os-Szekeres 变体

为证明定理 8 做准备，我们将 Erd˝os 和 Szekeres [11]的以下著名结果重新表述如下。

定理 18 (Erd˝os-Szekeres [11])。 设 $m \in \mathbb{N}$。对于一个 (m^2+1) 元集合 $\mathcal{Z}$，设 $S = (a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_{m^2+1})$ 是由 $\mathcal{Z}$中的互不相同元素构成的序列。设 τ是 $\mathcal{Z} = \{a_1, \ldots, a_{m^2+1}\}$的任意线性序。则存在$S$ 的一个长度为 $m+1$ 的子序列 $(a_{i_1},\ \ldots,\ a_{i_{m+1}})$，使得$a_{i_1} <_\tau \cdots <_\tau a_{i_{m+1}}$ 或$a_{i_{m+1}} <_\tau \cdots <_\tau a_{i_1}$.

下文中，我们将由互不相同的元素组成的有限序列称为这些元素集合上的排列序列。我们称序列 $(b_1,\ b_2,\ \ldots\ldots,\ b_\ell)$ 是某个序列 S 的无向子序列，如果 $(b_1,\ b_2,\ \ldots\ldots,\ b_\ell)$ 或 $(b_\ell,\ b_{\ell-1},\ \ldots\ldots,\ b_1)$ 是其子序列

S 的子序列。设 S^1、……、S^m, $m \in \mathbb{N}$ 是同一集合上的排列序列的集合。如果 $(b_1,\ b_2,$ ……, $b_\ell)$ 是每个 S^i 的无向子序列，则称其为 S^1、……、S^m 的公共无向子序列。

推论 19. 设 S 和 T 是定义在一个含有(m^2+1)个元素的集合 $\mathcal{Z}$上的两个排列序列。那么， S 和 T存在一个长度为 $m+1$的公共无向子序列。

证明. 设 $S=(a_1, a_2, \ldots, a_{m^2+1})$，即 $\mathcal{Z}=\{a_1, \ldots, a_{m^2+1}\}$。对于 $\ell \in [m^2+1]$，取指标 j_ℓ，使得 $T=(a_{j_1}, \ldots, {}^{a_{j_{m^2+1}}})$。考虑由 $a_{j_1} <_\tau \cdots <_\tau {}^{a_{j_{m^2+1}}}$给出的线性序 τ。那么，Erd˝os-Szekeres 定理（定理 18）给出了 S的一个子序列 $(a_{i_1}, \ldots, {}^{a_{i_{m+1}}})$，它也是 T的一个无向子序列。特别地，$(a_{i_1}, \ldots, {}^{a_{i_{m+1}}})$ 是 S 和 T的一个公共无向子序列。 □

反复应用推论 19，我们得到一个稍后需要用到的引理。

引理 20. 设 $d \in \mathbb{N}$和 $N \geq 2^{2^{d-1}}+1$。设 $\mathcal{Z}$为一个含 N 个元素的集合。设 $\tau_1, \ldots, \tau_d$为 $\mathcal{Z}$的任意线性序。则存在两两不同的 $x, y, z \in \mathcal{Z}$，使得对每个 $i \in [d]$,

$$x <_{\tau_i} y <_{\tau_i} z \qquad or \qquad z <_{\tau_i} y <_{\tau_i} x.$$

证明. 对每个 $i \in [d]$，称 τ_i由 $a_1^i <_{\tau_i} a_2^i <_{\tau_i} \cdots <_{\tau_i} a_N^i$给出。接着令 $S(\tau_i)$ 为序列 $(a_1^i, a_2^i, \ldots, a_N^i)$。注意， $S(\tau_i)$ 是 $\mathcal{Z}$ 上的一个排列序列。我们证明 $S(\tau_1) \ldots, S(\tau_d)$ 存在一个长度为 3 的公共无向子序列，因为对于这样的子序列 (x, y, z)，对每个 $i \in [d]$，要么 $x <_{\tau_i} y <_{\tau_i} z$，要么 $z <_{\tau_i} y <_{\tau_i} x$。我们采用迭代论证。

令 $T^1 = S(\tau_1)$；注意到 $|T^1| \geq 2^{2^{d-1}}+1$。对于 $i \in [d-1]$，假设 T^i 是所有 $S(\tau_j)$、 $j \in [i]$的公共无向子序列，且其长度至少为 $2^{2^{d-i}}+1$。令 $\mathcal{Z}^i$ 为 T^i的底层集合，并令 S^i 为 $S(\tau_{i+1})$在 $\mathcal{Z}^i$上的限制。那么 T^i 和 S^i 都是 $\mathcal{Z}^i$上的排列序列。根据推论 19， T^i 和 S^i 存在一个长度至少为 $(2^{2^{d-i}})^{\frac{1}{2}}+1 = 2^{2^{d-(i+1)}}+1$的公共无向子序列 T^{i+1}。由于 T^{i+1} 是 T^i的无向子序列， T^{i+1} 也是每个 $S(\tau_j)$、 $j \in [i]$的无向子序列。此外，由于 T^{i+1} 是 S^i的无向子序列，它也是 $S(\tau_{i+1})$的无向子序列。

经过 $d-1$ 步，我们得到一个长度至少为 $2^{2^0}+1=3$ 的序列 T^d，它是所有 S^j、 $j \in [d]$的公共无向序列。任取 T^d的一个三元素子序列（x， y， z）。那么 x、 y 和 z 具有所需的性质。 □

我们指出，引理 20 中的界 $N \geq 2^{2^{d-1}}+1$ 是紧的：众所周知，存在一个由 m^2 个互不相同元素组成的序列，不满足 Erd˝os-Szekeres 定理中的性质。给定这样一个序列，我们可以直接构造一个 $2^{2^{d-1}}$元集合上的 d 个线性序，使得没有任何三元组 x， y， z 具有引理 20 的性质。

5.2 定理 8 的证明

定理 8 的证明。注意，对于所有 $3 \leq t \leq \log\log n$， $R(A_3, Q_n) \leq R(A_t, Q_n) \leq R(A_{\log\log n}, Q_n)$，因此只需证明 $R(A_3, Q_n) \geq n+3$以及 $R(A_{\log\log n}, Q_n) \leq n+3$。令$N = n+3$。

对于下界，我们考虑布尔格 $\mathcal{Q}=\mathcal{Q}([N-1])$ 的如下染色：对于所有 $i\in[N-1]$，将 $[i]$ 和 $[N-1]\backslash[i]$ 染成蓝色，其余顶点全部染成红色。注意，所有蓝色顶点都可以由两条链覆盖：$\{[i]: i\in[N-1]\}$ 和 $\{[N-1]\backslash[i]: i\in[N-1]\}$，因此在任意三个不同的蓝色顶点中，必有两个顶点属于同一条链；也就是说，$\mathcal{Q}$ 中不存在 A_3 的蓝色副本。现在，反设 $\mathcal{Q}$ 中存在 Q_n 的红色副本。由引理 15 可知，存在集合 $\mathcal{X}\subset[N-1]$、$|\mathcal{X}|=n$，以及一个嵌入 ϕ：$\mathcal{Q}(\mathcal{X})\to\mathcal{Q}$，使得$\phi$ 的像是单色红色的，且对所有 $X\subseteq\mathcal{X}$，$\phi(X)\cap\mathcal{X}=X$。注意，$\varnothing$在 $\mathcal{Q}$ 中染成了蓝色，因此 $\phi(\varnothing)\neq\varnothing$，于是设 $a\in\phi(\varnothing)$。那么 $a\notin\mathcal{X}$，因为 $\phi(\varnothing)\cap\mathcal{X}=\varnothing$。类似地，我们知道 $\phi(\mathcal{X})\neq[N-1]$，所以可找到一个元素 $b\in[N-1]\setminus\phi(\mathcal{X})$，满足 $b\notin\mathcal{X}$。注意，$a\in\phi(\varnothing)\subseteq\phi(\mathcal{X})$，但 $b\notin\phi(\mathcal{X})$，因此 $a\neq b$。回想一下，$|\mathcal{X}|=n=(N-1)-2$，于是 $\mathcal{X}=[N-1]\backslash\{a,b\}$。由于 ϕ 是 $\mathcal{Q}(\mathcal{X})$ 的一个嵌入，并且 $\mathcal{Q}(\mathcal{X})$ 的每个顶点都与 $\varnothing$ 和 $\mathcal{X}$可比较，因此得到 $a\in\phi(X)$，且对每个 $X\subseteq\mathcal{X}$，都有 $b\notin\phi(X)$。现在，由 $\phi(X)\cap\mathcal{X}=X$ 这一事实可推出，对所有 $X\subseteq\mathcal{X}$，$\phi(X)=X\cup\{a\}$。

若 $b\in\{a+1,\dots,N-1\}$，则 $[a-1]\subseteq\mathcal{X}$。因此 $\phi([a-1])=[a-1]\cup\{a\}=[a]$，但这个顶点在 $\mathcal{Q}$ 中被染成蓝色。这与 ϕ 有一个单色红色像这一事实矛盾。

若 $b\in\{1,\dots,a-1\}$，则 $[N-1]\backslash[a]\subseteq\mathcal{X}$。现在 $\phi([N-1]\backslash[a])=([N-1]\backslash[a])\cup\{a\}=[N-1]\backslash[a-1]$，它在 $\mathcal{Q}$ 中被染成蓝色，因此我们再次得出矛盾。

对于上界，设 $\mathcal{Z}$ 是一个任意的 N 元集合。考虑布尔格 $\mathcal{Q}(\mathcal{Z})$ 的任意一种着色，其中不含 A_t 的蓝色副本，且 $t\leq\log\log n$。我们将证明，在 $\mathcal{Q}(\mathcal{Z})$ 中存在 Q_n 的红色副本。

根据迪尔沃思定理（定理 11），存在一组 $t-1$ 链 C_1、.....、C_{t-1}，覆盖所有蓝色顶点。不失一般性，我们假设每个 C_i 都是一条满链，即一条由 $N+1$ 个顶点组成的链，其形式为 $\varnothing$、$\{a_1\}$、$\{a_1,a_2\}$、.....、$\{a_1,\dots,a_N\}=\mathcal{Z}$。于是，我们称每个 C_i、$i\in[t-1]$对应于 $\mathcal{Z}$ 的唯一线性序 τ_i，该线性序由 $a_1<_{\tau_i}a_2<_{\tau_i}\cdots<_{\tau_i}a_N$ 给出。现在，我们对线性序的集合 τ_i、$i\in[t-1]$ 应用引理 20，得到三个互不相同的元素 x、y、$z\in\mathcal{Z}$，使得对于每个 $i\in[t-1]$，$x<_{\tau_i}y<_{\tau_i}z$ 或 $z<_{\tau_i}y<_{\tau_i}x$。特别地，如果对于某个蓝色顶点 $Z\in\mathcal{Q}$（$\mathcal{Z}$），有 $x\in Z$ 和 $z\in Z$，那么也有 $y\in Z$。这是因为 Z 被某条链 C_j 覆盖，其中 $j\in[t-1]$，而在相应的线性序 τ_j 中，$y<_{\tau_j}z$ 或 $y<_{\tau_j}x$。

现在反设不存在 $\mathcal{Q}(\mathcal{Z})$ 中的 Q_n 红色副本，于是令 $\mathcal{Y}=\{x,y,z\}$，并令 $\mathcal{X}=\mathcal{Z}\backslash\mathcal{Y}$。令 $\mathcal{Y}$ 的线性序为 $x<_\tau z<_\tau y$ 所给出的线性序 τ。应用引理 13 可得，存在一条链，其中包含形如 $X_2\cup\{x,z\}$ 的蓝色顶点，其中某个 $X_2\subseteq\mathcal{X}$。于是 $y\notin X_2$，因此该蓝色顶点同时包含 x 和 z，但不包含 y，矛盾。 □

5.3 定理 9 和推论 10 的证明

如果 t 相对于 n 足够大，则 $R(A_t,Q_n)$ 存在一个改进的下界，其证明使用了分层构造，即对宿主格进行染色，使每一层都被染成单色。

定理 9 的证明。令 $n,r,t\in\mathbb{N}$ 满足 $t>\binom{n+2r+1}{r}$。令 $\mathcal{Q}=\mathcal{Q}(\mathcal{Z})$ 为底集 $\mathcal{Z}$ 上含有 $n+2r+1$ 个元素的布尔格。考虑对 $\mathcal{Q}$ 的如下分层蓝红着色：将所有满足 $|X|\leq r$ 或 $|X|\geq n+r+1$ 的顶点 $X\in\mathcal{Q}$ 染成蓝色，其余顶点均染成红色。可见，$\mathcal{Q}$ 由 $n+2r+2$ 层组成，其中 $2r+2$ 层被染成单色蓝，其余 n 层均被染成单色

红色。由于 $h(Q_n) = n+1$，这种染色中不存在 Q_n 的红色副本。接下来只需证明 $\mathcal{Q}$ 中不存在 A_t 的蓝色副本。

我们固定一个由定理12给出的 $\mathcal{Q}$ 的对称链分解。令 $\mathcal{C}$ 为仅包含大小恰为 r的顶点的对称链族。对于任意大小至多为 r 或至少为 $n+r+1$的顶点 X，分解中都有某条链 $C(X)$覆盖 X。利用对称链的性质可得 $C(X) \in \mathcal{C}$，因此 $\mathcal{C}$ 中的链覆盖了所有大小至多为 r 或至少为 $n+r+1$的顶点。于是，所有蓝色顶点都由 $\mathcal{C}$中的链覆盖，其中 $|\mathcal{C}| = \binom{n+2r+1}{r} < t$。然后，迪尔沃思定理表明， $\mathcal{Q}$中不存在 A_t 的蓝色副本。

□

推论 *10* 的证明。上界由Axenovich和Walzer的 [1] 和(∗)的一般界得到。对于给定的 $n \geq 3$ 和 $t \geq 2$，令 r 为满足 $t > \binom{n+2r+1}{r}$的最大非负整数。在定理 9中，我们证明了 $R(A_t, Q_n) \geq n+2r+2$。现在我们用 n 和 t来界定r 。注意，由 r的极大性可知，

$$t \leq \binom{n+2r+3}{r+1} \leq \left(\frac{e(n+2r+3)}{r+1}\right)^{r+1} \leq \left(\frac{en}{r+1}+3e\right)^{r+1} \leq (2en)^{r+1}.$$

因此，$r+1 \geq \frac{\log t \log(2e)+\log n}{3+\log n} \geq \frac{\log t}{\log n}$。

□

6 已知方法概述

6.1 证明技巧

为了深入了解非对角偏序集 Ramsey 数的研究，我们简要综述当 P 固定时，界定 $R(P, Q_n)$ 的已知证明方法。对于一些容易分析的偏序集，例如若干平凡偏序集，无需借助高级工具即可得到精确界。我们在第 4 节中对定理 5 的证明就是一个例子，该证明仅依赖于基本观察推论 14。许多其他偏序集则需要更复杂的证明技巧，而有三种方法可以给出 $R(P, Q_n)$ 的**上界**。

对于布尔格 $P = Q_m$，尤其会采用**团块方法**。这种方法的核心思路是考虑一个以红色和蓝色着色的宿主格，并在其中定义许多团块，也就是两两不相交、按积结构排列的小型子格。如果任意一个团块是单色蓝，我们就得到 P 的蓝色副本。否则，我们从每个团块中各选一个红色顶点，从而找到 Q_n 的红色副本。Axenovich和Walzer 首创了这种证明技巧 [1]，；更精细的版本见 Lu和Thompson [16]。

Gr´osz、Methuku 和 Tompkins [12] 提出了另一种证明技巧，即**链方法**。这里，我们考虑由链引理（引理 13）得到的大量蓝色链，并利用计数论证来迫使 P 的一个单色蓝副本存在。这一方法的典型例子包括第 3 节中定理 3 的证明，以及 Winter [22] 中定理1的证明。

一种更具技术性的证明方法是**阻挡集方法**。它试图加强链引理，以便精确了解染色中的蓝色链如何彼此相对分布；事实上，它们被归入称为阻挡集的结构中。这一证明技巧在本系列的另一部分中有所描述，见 Axenovich 和作者 [3]。

对于每个 P， $R(P, Q_n)$ 的一般**下界**都可由一个平凡的分层染色得到，见定理1。为了给出 $R(P, Q_n)$ 的下界，大多数构造都会根据固定的 P 对分层染色稍作改进，参见定理5和定理6的证明，或

Gr´osz、Methuku 和 Tompkins [12]。大多数已知的下界证明只是将平凡下界提高一个常数。唯一一次对平凡下界的显著改进由 Axenovich 和作者 [2] 给出，他们以阻挡集方法所得的结构性洞见为基础。

6.2 开放问题

在我们的一系列论文中，我们讨论了当 P 固定且 n 较大时，非对角偏序集 Ramsey 情形 $R(P, Q_n)$ 中的渐近行为。我们以归纳若干开放问题来结束这项研究。对于平凡的 P，也就是说，既不包含 $\mathcal{V}$ 也不包含$\mathcal{V}$的偏序集，定理1给出的$R(P, Q_n) = n + \Theta(1)$ 的界在加法常数范围内是紧的。我们在推论 7 中改进了这一常数的界，但一般情形下的精确界仍有待确定。对于非平凡的P，情况则不那么明朗。定理1给出 $n + \frac{1}{15}\frac{n}{\text{对数}\, n} \leq R(P, Q_n) \leq c_P \cdot n$。Axenovich 和作者 [2] 猜想，$R(P, Q_n)$ 的真实值更接近下界。

猜想 21 ([2])。对于每个固定偏序集 P，$R(P, Q_n) = n + o(n)$。

已知对于某些非平凡偏序集 P，下界$R(P, Q_n) = n + \Omega(\frac{n}{\log n})$ 的两个主导加性项渐近紧，即 $R(P, Q_n) = n + \Theta(\frac{n}{\log n})$。我们称这类偏序集 P为温和偏序集。注意，$\mathcal{V}$ 和$\mathcal{V}$都是温和偏序集，而且每个非平凡偏序集都包含 $\mathcal{V}$ 或$\mathcal{V}$ 作为子偏序集。属于温和偏序集这一类的还有细分菱形（见定理 3）、完全多部偏序集 [22]以及 N 形偏序集 $\mathcal{N}$ [3]。值得注意的是，是否存在一个不温和的非平凡偏序集，仍是一个开放问题。

猜想 22。存在一个固定偏序集 P满足 $R(P, Q_n) = n + \omega\left(\frac{n}{\log n}\right)$。

已知的温和偏序集在各种偏序集参数上各不相同，例如$\mathcal{SD}_{t,\, t}$ 的高度较大，而 $K_{1,\, t}$ 的宽度较大。然而，所有已知的温和偏序集的序维数都是 2。P 的序维数是这样一个最小数量：存在这么多个线性序，使得 P 是这些线性序的交。证明猜想 22 的自然候选对象是 Q_3 或标准例 S_3，后者是由 Q_3的第 1 层和第 2 层所诱导的 6 元素偏序集。这两个偏序集的序维数都是 3。

确定 $R(Q_m, Q_n)$ 对于 $m \in \mathbb{N}$ 是偏序集 Ramsey 数相关问题中最有趣的开放问题之一。尽管对于 $m \in \{1, 2\}$ 已有充分了解，但对于固定的 $m \geq 3$，$R(Q_m, Q_n)$ 的渐近行为目前只能界定到一个常数线性因子，参见 Lu和Thompson [16]。猜想 21 和 22 等价于以下猜想。

猜想 23。对于每个固定的 $m \in \mathbb{N}$，$R(Q_m, Q_n) = n + o(n)$。此外，存在一个固定整数 $m \in \mathbb{N}$ 使得 $R(Q_m, Q_n) = n + \omega\left(\frac{n}{\log n}\right)$。

请注意，猜想 23 是 Lu和Thompson [16] 提出的一条开放猜想的加强版本。

致谢：本研究部分由德国研究联合会资助，项目编号 FKZ AX 93/2-1。作者谨向 Maria Axenovich 致谢，感谢她提出的诸多有益意见、参与讨论，并为本系列其他部分作出的贡献。作者还感谢 Torsten Ueckerdt 的意见，这些意见使引理 16 的论证更加简洁；感谢 Felix Clemen 对稿件提出的宝贵意见；也感谢此前版本的两位匿名审稿人认真审阅稿件并提出建设性反馈。

参考文献

[1] M. Axenovich, and S. Walzer. 布尔格：Ramsey性质与嵌入。Order 34(2), 287–298, 2017.[2] M. Axenovich, and C. Winter. 偏序集 Ramsey 数：大型布尔格与固定偏序集。组合学、概率与计算，1–16, 2023.[3] M. Axenovich, and C. Winter. 偏序集 Ramsey 数 R(P,Q_n). III. N 形偏序集。已投稿，预印本见 arXiv:2211.02440v1, 2022.[4] T. Bohman, and F. Peng. 布尔立方体Ramsey数的一种构造。Order, 2022.[5] F.-H. Chang, D. Gerbner, W.-T. Li, A. Methuku, D. Nagy, B. Patk´os, and M. Vizer. 布尔格的彩虹Ramsey问题。Order 39, 453–463, 2022.[6] H.-B. Chen, W.-H. Chen, Y.-J. Cheng, W.-T. Li, and C.-A. Liu. 布尔格中 V 形偏序集的Ramsey性质。预印本，见 arXiv:2108.08033v1, 2021.[7] C. Cox, and D. Stolee. 偏序集的Ramsey数。Order 35(3), 557– 579, 2018.[8] N. G. de Bruijn, C. van Ebbenhorst Tengbergen, and D. Kruyswijk. 关于一个数的因子集。Nieuw Archief voor Wiskunde 23(2), 191–193, 1952.[9] R. Diestel. 图论。第五版。Graduate Texts in Mathematics, 173. Springer, Berlin, 2017.[10] R. P. Dilworth. 偏序集的分解定理。Annals of Mathematics (2) 51(1), 161–166, 1950.[11] P. Erd˝os, and G. Szekeres. 几何中的一个组合问题。Compositio Mathematica 2, 463–470, 1935.[12] D. Gr´osz, A. Methuku, and C. Tompkins. 布尔格的Ramsey数。伦敦数学学会通报，2023.[13] M. Habib, L. Nourine, O. Raynaud, and E. Thierry. 偏序集的 2-维数的计算方面。理论计算机科学 312(2-3), 401–431, 2004.[14] B. Keszegh, N. Lemons, R. R. Martin, D. P´alv¨olgyi, and B. Patk´os. 诱导与非诱导偏序集饱和问题。Journal of Combinatorial Theory, Series A, 184, no. 105497, 2021.[15] H. Kierstead, and W. Trotter. 有限有序集的Ramsey理论问题。Discrete Mathematics 63(2-3), 217–223, 1987.[16] L. Lu, and C. Thompson. 布尔格的偏序集 Ramsey 数。Order 39(2), 171–185, 2022.[17] A. Methuku, and D. P´alv¨olgyi. 禁超矩阵蕴含诱导禁子偏序集问题的一般界。组合学、概率与计算 26(4), 593–602, 2017.

[18] J. Neˇsetˇril 和 V. R¨odl. 有限偏序集与格的组合划分——拉姆齐格，Algebra Universalis 19(1), 106–119, 1984.[19] E. Sperner. 一个定理 ¨关于有限集合的子集，（德文）。Mathe- matische Zeitschrift, **27**(1), 544–548, 1928.[20] J. Valdes. 流程图解析与串并联图。技术报告 STAN-CS-78- 682，斯坦福大学计算机科学系，斯坦福（1978）。[21] S. Walzer. 偏序集 2-维数的拉姆齐变体。载于：硕士论文，卡尔斯鲁厄理工学院（2015）。[22] C. Winter. 偏序集 *Ramsey* 数 $R(P,Q_n)$。*I.* 完全多部偏序集。Order，2023。