arXiv:2303.04463v1 [gr-qc] 8 Mar 2023

$f(Q)$引力的动力系统分析

Christian B¨ohmer* 和 Erik Jensko†
Department of Mathematics, University College London,Gower Street, London WC1E 6BT, United Kingdom

Ruth Lazkoz‡*Department of Physics, Faculty of Science and Technology,University of the Basque Country, P.O. Box 644, 48080 Bilbao, Spain andEHU Quantum Center, University of Basque Country, UPV/EHU*(日期：2023年3月9日)

修正引力理论可通过相应的场方程来描述均匀且各向同性的宇宙学模型。由于这些方程仅依赖于一个经过恰当选择的时间变量——无论是宇宙学时间还是其他时间变量——因此可以将其写成自治微分方程组。基于此，动力系统方法为研究这些方程提供了一条可靠途径。通过一组与模型无关的变量，我们能够研究所有 $f(Q)$ 修正引力模型。这一方法的缺点是约束方程更为复杂。不过，与其他方法相比，它可以用更少的维度来表述动力系统。我们重点研究近期受到关注的幂指数模型，并推广该模型的流体成分。

I. 引言

我们对引力相互作用已有前所未有的认识，它是宇宙大尺度动力学中的主要驱动因素，负责最大尺度结构的形成与演化。爱因斯坦的广义相对论（GR）成功解释了大量引力现象 [1–3]。然而，所谓的暗扇区——暗物质和暗能量——对这一原本成功的范式构成了真正的挑战。为解决这些问题，人们开始考虑与观测相容的广义相对论微小修正。根据大多数现有观测数据 [2, 4, 5]，我们假设宇宙几何由空间平坦的弗里德曼–勒梅特–罗伯逊–沃克（FLRW）线元描述。FLRW 模型目前看来是最理想的宇宙学模型 [6–16]。其形式为 $ds^2 = -N(t)^2dt^2 + a(t)^2\delta_{ij}dx^idx^j$，其中尺度因子为 $a(t)$，任意闵可夫斯基函数为 $N(t)$。在下文中，我们可以不失一般性地令$N(t) = 1$，但需注意，某些修正引力理论可能与这一选取不相容。广义相对论的修正有助于解决宇宙膨胀率方面的观测张力（由 H_0 给出），以及表征 $8h^{-1}$ [17–19]尺度上线性物质涨落的 S_8 参数所涉及的张力。

修正引力理论受到研究的时间几乎与广义相对论本身一样长 [20, 21]。可能的修正包括引入额外的几何结构、增加维度，或在关于曲率呈线性的爱因斯坦-希尔伯特作用量中引入非线性。其他选项还包括非最小物质-曲率耦合。目前考察的绝大多数修正引力模型都属于上述描述的某种情况 [22–37]。

我们的研究将讨论关于独立变量的导数阶数不高于二阶的场方程。由于模型具有特定结构，我们可以引入哈勃函数，使得所有场方程都具有如下形式：$E_i(H, \dot{H}, \Psi) = 0$ 其中，我们用 Ψ 表示任意物质场的存在。这种相当简单的描述涵盖了许多（如果不是全部的话）二阶修正引力理论，前提是不包括非最小耦合。还要指出，我们假设通常的物质守恒方程对每种流体分别成立。这是对所讨论的修正引力理论的一项假设，并且与微分同胚不变性有关；大多数模型都满足这一假设。

将宇宙学场方程改写为动力系统的形式很有用。有关该领域既往工作的全面总结，请参见 [38] 及其中的参考文献。我们简要指出，变量的选择可能会带来问题；这一点在 $f(R)$ 引力中众所周知，例如参见 [39–42], ; 关于 $f(T)$ 引力，另请参见 [43]。与这些方法类似，我们也发现，选择最有用的变量时，约束方程往往会变得复杂。不过，值得注意的是，我们能够对

* c.boehmer@ucl.ac.uk
† erik.jensko.19@ucl.ac.uk
‡ ruth.lazkoz@ehu.es

任意模型的系统作出大量一般性陈述。例如，通过引入恰当的函数 [44]，可以找到所有可能的德西特点。

下文中，我们将研究通常称为对称远隔引力，或 $f(Q)$ 引力 [45–47],的一类修正引力理论。这些理论与 $f(G)$ 和 $f(T)$ 理论有相似之处，详情参见 [35, 36, 45, 48–50]。事实上，这些理论的几何标量在宇宙学中均与 $Q = T = -G = 6H^2$一致。其宇宙学场方程为

$$6f'H^2 - \frac{1}{2}f = \rho\,, \tag{1}$$

$$(12H^2f'' + f')\dot{H} = -\frac{1}{2}(\rho + p)\,, \tag{2}$$

并且可以使用标准技术将其写成动力系统。我们的表述使我们能够将其与成功的 ΛCDM 模型进行简单比较。从动力系统的角度来看，该模型的早期行为由辐射主导，辐射对应一个鞍点（或排斥子）；而晚期渐近状态则表现为一个由宇宙学常数主导的（德西特）吸引子。物质主导时期是一个瞬态阶段（鞍点）。我们将在此研究的特定 $f(Q)$ 模型表现出的性质与 ΛCDM 模型相容。

II. 构建动力系统的标准方法简述

要找到合适的变量，将修正引力模型表述为动力系统并不容易，另见 [38]。引入不同变量的动机各不相同，因此会产生截然不同的特征 [39–41]。这里我们简要回顾标准方法，并说明它与我们的表述在少一个维度的情况下等价。

一种典型方法是将弗里德曼方程 (1) 除以 $6f'H^2$ （这需要作出假设 $f' \neq 0$ ）。这排除了平凡的常数函数，但也排除了 f' 在动力学演化中经过零点的情形，而这种情况可能很重要。典型变量为

$$X_i = \frac{\rho_i}{6f'H^2}\,, \qquad Y = \frac{f}{12f'H^2}\,, \tag{3}$$

这里我们考虑可能存在各种物质-能量源。提醒一下，广义相对论当然对应于 $f(Q) = Q + 2\lambda_0$，其中 λ_0 表示宇宙学常数项（具有适当的量纲）。使用这些变量，弗里德曼方程变为以下约束

$$\sum_i X_i + Y = 1\,. \tag{4}$$

弗里德曼约束的自然 性在采用这组变量时显而易见。

接下来需要引入一个额外变量，以消除动力学方程中将出现的对哈勃函数的显式依赖。这个额外变量的一种方便选择是

$$Z = \frac{Q/Q_0}{1 + Q/Q_0} = \frac{H^2/H_0^2}{1 + H^2/H_0^2}\,, \tag{5}$$

并且显然， Z 是 在所有时刻均为正且小于 1（即 $Q = 6H^2$ 非负且有限）。

约束方程使我们能够消去一个独立变量，从而剩下的独立变量数量等于物质源的数量加一。但这并非故事的全部：由于 f 是 Q 的函数，因此对于某个给定函数，它总可以改写为 Z 的形式。因此， Y 可以完全消去。这正是我们将在下一节采用的方法。可以认为， Y 涵盖了关于 f 中自由参数的信息（例如宇宙学常数这一重要情形），而这些信息并未由 Z 表示。我们将在一个具体例子中进一步讨论其含义。

按照惯例，随后使用时间变量 $N = \log a$。我们不会给出动力学方程 dX_i/dN和 dY/dN的显式形式；对于单一物质源的情形，其形式可见我们的工作 [35]。可以看出，定义函数

$$m = 12H^2(\log f')'\,, \tag{6}$$

使我们能够进行非常有效的 关于利用雅可比矩阵方程分析系统稳定性的一般性说明。

我们再次提到，可以利用变量 Y 和 Z 之间的依赖关系，从系统中去掉一个额外的维度，另见 [43]。为此，我们利用这一事实： $Y = f/(2f'Q)$。根据链式法则，结合方程 (5) 和约束 $\sum_i X_i + Y = 1$ ，我们可以写出

$$\sum_i \dot{X}_i = -\frac{\partial Y}{\partial Q}\frac{(Q_0+Q)^2}{Q_0}\dot{Z}\,. \tag{7}$$

我们必须始终牢记， Q 总可以改写为 Z的函数。下一步是利用 (7) 将X_i 替换到它出现的方程中。接下来，必须使用约束 $\sum_i X_i + Y = 1$ 消去 X_i ，然后还需记住， Y 是 Z的函数。这样便得到一个维度少一维的系统，其动力学变量的演化方程也略有不同。不难看出这两种方法（维度不同）所得结果一致，但我们仍建议读者检查 [44]。

乍看之下，这种等价表述似乎没有任何优势，因为要从系统中提取有用信息，就必须先指定一个模型。然而事实并非如此，我们将看到，即使在完全一般的情况下，也可以在一定程度上分析该动力系统。此外，尽管描述的是相同的物理过程，在维度较低的情况下，相空间分析和稳定性分析都会简单得多。

III. 动力系统表述

A. 双流体的一般设定

将问题的表述推广到降维情形后，我们现在可以在二维空间中处理双流体情形。它们的能量密度分别为 ρ_1 和 ρ_2 ，状态方程参数分别为 w_1 和 w_2。在本讨论中，我们将这些状态方程参数视为任意值，尽管稍后会设定 $w_1 = 0$ 和 $w = 1/3$。这些选择使宇宙学方程成为

$$-\frac{f}{6H^2} - \frac{\rho_1}{3H^2} - \frac{\rho_2}{3H^2} + 2f' = 0\,, \tag{8}$$

$$(w_1+1)\rho_1 + (w_2+1)\rho_2 + 2\dot{H}(f' + 12H^2 f'') = 0\,. \tag{9}$$

现在定义以下动力学变量

$$X_i = \frac{\rho_i}{3H^2}\,,\ \text{for}\, i = 1,2\,, \tag{10}$$

$$Z = \frac{H^2/H_0^2}{1 + H^2/H_0^2}\,. \tag{11}$$

前两个变量非负，形式容易辨认（它们就是标准的物质密度参数 Ω_i），并且不同于先前对应的变量 (3)，因为分母中不再出现 f'。现在所有变量都不依赖于 f。这是因为任何 H 的函数都可以写成 Z 的函数，而其动力学由弗里德曼约束本身决定。

现在可以　　将弗里德曼约束表示为仅涉及新变量的表达式　　s

$$X_1 + X_2 = \left(1 - \frac{1}{Z}\right)\frac{f}{6H_0^2} + 2f'\,, \tag{12}$$

这里我们将 $f = f(6H_0^2 Z/(1-Z))$ 视为 Z 的任意函数。

对 f 和 f' 始终可以作双重解释：它们既可以看作由支配修正引力理论的标量所决定的函数，也可以看作 H的函数。无论采用哪种解释，我们始终都将它们表示为 Z的函数。因此，在指定 f 的具体形式之前， $X_1 + X_2$ 的方程也是 Z 的函数。由此，我们可以利用该方程消去 X_1 或 X_2，使相空间成为二维。我们选择消去 X_1 ，并考察 $\{X_2, Z\}$的演化，

$$\frac{dX_2}{dN} = \frac{3X_2}{m+1}\left(\frac{(w_2-w_1)X_2}{f'} - (w_2+1)m - (w_1+1)n + 2w_1 - w_2 + 1\right)\,, \tag{13}$$

$$\frac{dZ}{dN} = -\frac{3(Z-1)Z((w_1+1)(n-2) + (w_1-w_2)X_2/f')}{m+1}\,, \tag{14}$$

这里我们利用了 (12)，并引入了便于使用的函数

$$m(Z) := \frac{2Qf''}{f'} = \frac{12H_0^2 Z f''}{(1-Z)f'}\,, \tag{15}$$

$$n(Z) := \frac{f}{Qf'} = \frac{f(1-Z)}{6H_0^2 Z f'}\,. \tag{16}$$

还需注意，f'是无量纲的，而 f''具有 H_0^{-2}单位，因为 f的量纲为 H_0^2。因此，方程（13）–（14）以及 m（Z）和 n（Z）也都是无量纲的。

通过 f 选定具体的理论设定后，我们便得到一个封闭的方程系统，可供研究。值得庆幸的是，这组方程的一些关键特征并不取决于 f的具体形式，因此可以得出若干非常普遍的结论，这也进一步提升了我们的分析与研究方法的意义。

B. 不动点

在本节讨论中，我们假设 $w_1 \neq w_2$ 且（w_1，w_2）$\neq -1$，也就是说，有两种不同的流体，且二者都不是宇宙学常数。于是，该系统存在两族不动点，我们将分别考察。第一族对应于点 $\{X_2, Z\} = \{0, Z^\star\}$，其第二个坐标由以下方程的解确定代数方程的

$$\frac{(n(Z)-2)(Z-1)Z}{1+m(Z)} = 0\,. \tag{17}$$

请注意，这些点的位置与两个流体参数 w_1 和 w_2均无关。解中满足$n(Z^\star) = 2$ 且 $m(Z^*) \to \infty$，同时 $n(Z^*)$ 有限的情形尤为重要。因此，我们分别将这些点命名为 P_n和 P_m。在下一节中，我们将说明这些点具有一些非常特殊的固定性质，这些性质有助于评估不同宇宙学模型的有效性。

T第二族的特征是两个点 $\mathrm{B} = \{X_2^\star, 1\}$ 和 $\mathrm{C} = \{X_2^\star, 0\}$，其中

$$X_2^\star = \frac{f'}{w_2 - w_1}\big((w_1+1)n(Z) + w_2 + (w_2+1)m(Z) - 1 - 2w_1\big)\,, \tag{18}$$

其中 X_2^* 在 $Z = 1$ 和 $Z = 0$处取值。这里，位置确实取决于 w_1 和 w_2的具体取值，并且 X_2^* 应视为 Z的函数。

请注意，这些点的存在及其是否属于物理相空间并无保证。要对此进行评估，必须研究该特定模型的哈勃约束，借助 $n(Z)$ 可将其写为

$$X_1 = f'(2 - n(Z)) - X_2\,. \tag{19}$$

我们要求两个变量 s X_1 和 X_2 均为正，以满足能量条件，同时还需满足 $0 \leq Z \leq 1$。

最后，我们指出，对于某些特定的 Z值，动力学方程可能发散；当且仅当$m(Z) = -1$ 或 $f' = 0$时会发生这种情况。在这些情况下，轨迹无法延伸到该 Z 坐标之外，相空间表现出“临界线”行为，见 [44]。若要进行包括临界点存在性判据在内的完整分析，则需要了解模型 $f(Q)$。

C. 一般系统的物理参数

减速参数 q 和有效状态方程 w_{eff} 可以用动力学变量表示

$$q := -\frac{\ddot{a}a}{\dot{a}^2} = -1 - \frac{3}{2}\frac{\big(X_1 + w_1 X_1 + X_2 + w_2 X_2\big)\big(n(Z)-2\big)}{(X_1+X_2)(m(Z)+1)}\,, \tag{20}$$

$$w_{\mathrm{eff}} := \frac{p_{\mathrm{tot}}}{\rho_{\mathrm{tot}}} = -1 - \frac{\big(X_1 + w_1 X_1 + X_2 + w_2 X_2\big)\big(n(Z)-2\big)}{(X_1+X_2)(m(Z)+1)}\,, \tag{21}$$

其中总能量密度 ρ_{tot} 定义为 $\rho_{\mathrm{tot}} = \rho_1 + \rho_2 + \rho_f$，其中 ρ_f 表示额外的非广义相对论项

$$\rho_f := 3H^2 + \frac{1}{2}f - 6H^2 f'\,. \tag{22}$$

总压强的定义方式类似 $p_{\rm tot} = p_1 + p_2 + p_f$。在方程（20）和（21）中，变量 X_1 同样可以利用弗里德曼约束改写为关于 X_2 和 Z 的表达式，但只有在指定函数 f 后，才能进行完整分析。

额外的非广义相对论项的密度参数稍后将发挥作用，我们可以用来表示我们的动力学变量为

$$\Omega_f := \frac{\rho_f}{3H^2} = 1 - f'(2 - n(Z)) \,, \tag{23}$$

根据弗里德曼方程，这满足 $\Omega_1 + \Omega_2 + \Omega_f = 1$。因此，我们得到了一个非常简洁的表达式，用以表示修正理论中超出广义相对论的贡献。如前所述，更标准的动力系统表述会为此 Ω_f（例如第 II 节中的 Y）引入一个动力学变量，但由于它完全可以用 Z 表示，因此没有必要这样做。因此，我们以更繁复的哈勃约束为代价，得到了一个维数更少的相空间。

对于满足 $n(Z) = 2$ 的不动点 P_n s，可以立即得到 $\Omega_f = 1$。类似地，对于不动点 P_m，考察式 (15) 中 $m(Z)$ 的定义可知，若 $m(Z) \to \infty$，而 $n(Z)$ 保持有限，也可得到 $\Omega_f = 1$。对于这两个解，减速参数和状态方程固定为 $q = w_{\rm eff} = -1$，对应一个德西特宇宙。事实上，鉴于我们假设了 $w_1 \neq w_2$ 和 w_1、$w_2 \neq -1$，这是任何德西特解都必须满足的条件。若对于某个处于 (0, 1) 范围内的 Z，模型满足 $n(Z) \neq 2$ 且 $m(Z) \nrightarrow \infty$，则不可能存在德西特不动点。这立即排除了诸如 $\alpha \neq 1/2$ 时的 $f(Q) \propto Q^\alpha$，或 $\beta \geq 0$ 时的 $f(Q) = Q + \beta Q^2$ 等模型。

对于位于 $\{X_2^\star, 1\}$ 和 $\{X_2^\star, 0\}$处的另外两个不动点 B 和 C，我们也可以确定减速参数和有效状态方程。对于这两个点，均可得到 $w_{\rm eff} = w_2$ 和 $q = (1 + 3w_2)/2$；这是一个与模型无关、具有普遍性的显著结果。这些结果汇总于表 I。

点	X_2	Z	q	$w_{\rm eff}$	要求
$\mathrm{P_m}$	0	$Z^\star$	-1	-1	$n(Z^\star) = 2$
$\mathrm{P_n}$	0	$Z^\star$	-1	-1	$m(Z^\star) \to \infty$
B	$X_2^\star$	1	$\frac{1}{2}(1 + 3w_2)$	w_2	$X_2^\star$ 在 $Z = 1$处取值
C	$X_2^\star$	0	$\frac{1}{2}(1 + 3w_2)$	w_2	$X_2^\star$ 在 $Z = 0$处取值

表 I：具有固定减速参数 q 和有效状态方程 $w_{\rm eff}$取值的临界点。

请注意，可能还存在其他定点，它们位于 $\{0, Z^\star\}$处，是方程 (17) 的解，但未列入表中。这是因为它们的性质更依赖于具体模型，且不会导致 q或 $w_{\rm eff}$取固定值。还请注意，我们尚未全面讨论这些定点的存在条件；它们是否存在于物理相空间中取决于特定模型的哈勃约束。接下来，我们将研究一个选定的模型，并对其进行全面分析。

IV. 在 $f(Q)$ 模型中的应用

A. Anagnostopoulos 等人模型

Anagnostopoulos 等人在 [51] 提出的幂指数模型具有许多有趣的特征，并且已证明能够通过多种观测检验 [51, 52]。具体而言，作者将该模型与 Ia 型超新星（SNIa）、重子声学振荡（BAO）、宇宙年代计（CC）和红移空间畸变（RSD）数据进行了比较，发现其表现与 ΛCDM 模型相当，在某些数据集上甚至更优。此外，该模型能够立即满足早期宇宙约束。因此，它已被证明是 ΛCDM 一致性模型的一种真正替代方案，值得从动力系统视角加以研究。

该模型由以下函数给出

$$f(Q) = Q e^{\lambda \frac{Q_0}{Q}} \,, \tag{24}$$

具有单个自由参数 λ。近期，[53]对该模型进行了动力系统分析。作者研究了仅含一个流体物质组分（$w = 0$）的宇宙背景方程和微扰方程，随后得到的相空间是三维的。接下来，研究在我们这种降维表述下、额外加入一个流体物质组分的该模型将会很有意义；结果表明，这种表述下的系统是二维的。此外，我们的方法所采用的降维方式还将使稳定性分析的计算简单得多。

当 λ 趋于零时，模型（24）退化为不含宇宙学常数的广义相对论。不过，它并不直接对应 ΛCDM 极限。当参数 λ 较小时，该函数在一阶近似下表现为带有宇宙学常数项 $Q_0\lambda$的广义相对论，这一行为将在相空间分析中体现出来。参数 λ的符号会导致不同的相空间，因此我们将研究这两种情况。我们还将假设 $\lambda \neq 0$，因为这显然会使模型退化回广义相对论。

该系统由动力学方程 (13)-(14) 和哈勃约束 (19) 描述，其中函数$n(Z)$ 和 $m(Z)$ 的形式极为简单

$$n(Z) = \frac{Z}{Z + \lambda(Z-1)}\,, \tag{25}$$

$$m(Z) = \frac{2(Z-1)^2\lambda^2}{Z(Z+\lambda(Z-1))}\,. \tag{26}$$

用变量 Z 显式表示的 f' 项为

$$f'(Q) = (Z + \lambda(Z-1))\frac{e^{-\lambda(Z-1)/Z}}{Z}\,. \tag{27}$$

不动点是方程 (17) 和 (18) 的解，利用上文给出的 $n(Z)$、 $m(Z)$ 和 f' 的精确形式即可轻松求解。沿着 $X_2 = 0$ 线且满足 $Z = Z^*$ 的第一族解为点 A $= \{0,1\}$、$\mathrm{P_m} = \{0,0\}$ 和 $\mathrm{P_n} = \{0, 2\lambda/(1+2\lambda)\}$。点 A 是代数方程 (17) 的一个额外解，其性质无法一般性地确定，因此未列入表 I。临界点 $\mathrm{P_m}$ 满足 $m(Z) \to \infty$，且 $n(Z) =$ 有限；而点 $\mathrm{P_n}$ 是 $n(Z) = 2$ 的解。因此，如上一节和表 I 所述，这两个点描述了德西特吸引子。

方程（18）的第二组解包括点 B $= \{1,1\}$ 以及条件点 C（ $\{0,0\}$ ），后者要求满足 $\lambda < 0$。不过，我们将忽略这个最后的点，因为它与 $\mathrm{P_m}$ 重合。点 B 是 ρ_2 物质主导点。再次说明，我们尚未评估任何不动点的有效性；只有满足（X_1,X_2） ≥ 0 和 $1 \geq Z \geq 0$ 的点才具有物理意义，因此我们需要使用哈勃约束。

哈勃约束（19）可用变量明确写为

$$X_1 + X_2 = e^{-\lambda\left(Z-1\right)/Z}\Big(1 + \frac{2\lambda(Z-1)}{Z}\Big)\,. \tag{28}$$

要求物质流体具有正能量密度，会对相空间施加物理界限。具体而言，对于正的 λ，流体的密度参数最大值为 1；而对于负的 λ，则有（X_1, X_2）$\leq \frac{2}{\sqrt{e}} \approx 1.21$。密度参数可以大于 1 的情况，可从物理角度通过考察方程（23）中的修正密度参数 Ω_f 来理解。对于正的λ，密度参数非负；由哈勃方程 $\Omega_1 + \Omega_2 + \Omega_f = 1$，可得 $\Omega_1 + \Omega_2 \leq 1$。然而，对于负的 λ，$\Omega_f = 1 - \frac{2}{\sqrt{e}}$取最小值，因此有 $\Omega_1 + \Omega_2 \leq \frac{2}{\sqrt{e}}$。

利用（28），我们可以确定各个不动点处的 X_1，以及这些点属于物理相空间的条件。无论 λ 为何，点 A 和 B 始终存在。德西特点 $\mathrm{P_m}$ 和 $\mathrm{P_n}$ 分别要求 $\lambda < 0$ 和 $\lambda > 0$。值得注意的是，所有不动点的位置及其存在条件均与具体的流体状态方程无关。利用方程（20）和（21），可以求得各个不动点处的减速参数和有效状态方程。最后，我们对这些不动点应用了线性稳定性理论，相关内容见附录A。在此表述中，点 A、B 和 $\mathrm{P_n}$ 为双曲型，而 $\mathrm{P_m}$ 为非双曲型。然而，我们在附录A中表明，$\mathrm{P_m}$ 在物理相空间（$\lambda < 0$）内充当晚期吸引子。上述结果汇总于表II。

点	X_1	X_2	Z	q	w_{eff}	存在条件	稳定性
A	1	0	1	$\frac{1}{2}(1+3w_1)$	w_1	none	鞍点
B	0	1	1	$\frac{1}{2}(1+3w_2)$	w_2	none	不稳定
$\mathrm{P_m}$	0	0	0	-1	-1	$\lambda < 0$	非双曲
$\mathrm{P_n}$	0	0	$2\lambda/(1+2\lambda)$	-1	-1	$\lambda > 0$	稳定

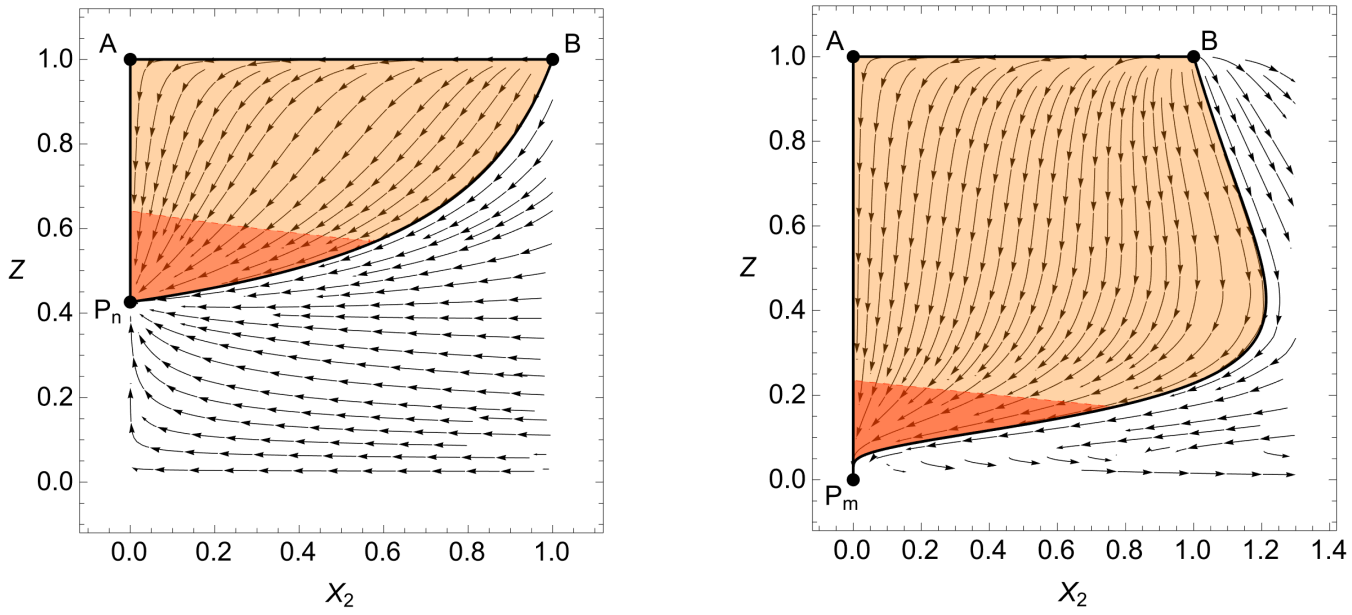
表II：Anagnostopoulos等人的模型的不动点表

B. 相空间分析

接下来，我们将两种流体组分的状态方程分别设为 $w_1 = 0$ 和 $w_2 = 1/3$，对应物质和辐射。图1展示了该模型在自由参数 λ 取正值和负值时的相图。自由参数的绝对值取为 $|\lambda| = 0.371$，因为 [51] 表明该取值与观测约束最为一致。带边框的区域标示了物理相空间，红色叠加区域表示宇宙膨胀正在加速的状态 $q < 0$。

可以预期，当 λ 为正时，定性结果应与具有正宇宙学常数的广义相对论相同，因为在这一参数取值下，动力学与 ΛCDM 类似 [51, 53]。将图1a中的相图与具有宇宙学常数的广义相对论相图进行比较（后者见我们此前采用相同动力系统表述的研究 [44], ），可以发现两者的定性特征确实相同。相空间包含一个早期辐射主导排斥点 B、一个物质主导鞍点 A，以及一个晚期德西特吸引子 $\mathrm{P_n}$。稳定性分析确实证实，B 点不稳定，A 点为鞍点，而 $\mathrm{P_n}$ 稳定。

对于参数为负的情况 λ，见图1b，相空间与前一种情况相似，但又有明显不同。系统的不动点保持不变，唯有 $\mathrm{P_m}$（位于 $\{0, 0\}$）取代了 $\mathrm{P_n}$（位于 $\{0, 2\lambda/(1 + 2\lambda)\}$）。新的德西特点 $\mathrm{P_m}$ 具有与 $\mathrm{P_n}$ 相同的性质，参见表 I 和表 II。显著的区别在于，物理相空间向外延伸，超出了 $X_2 = 1$。如前所述，这是因为修正密度参数 Ωf 在 $\lambda < 0$ 时具有负的下界。这导致密度参数和物理参数 q 与 w_{eff} 的演化明显不同。



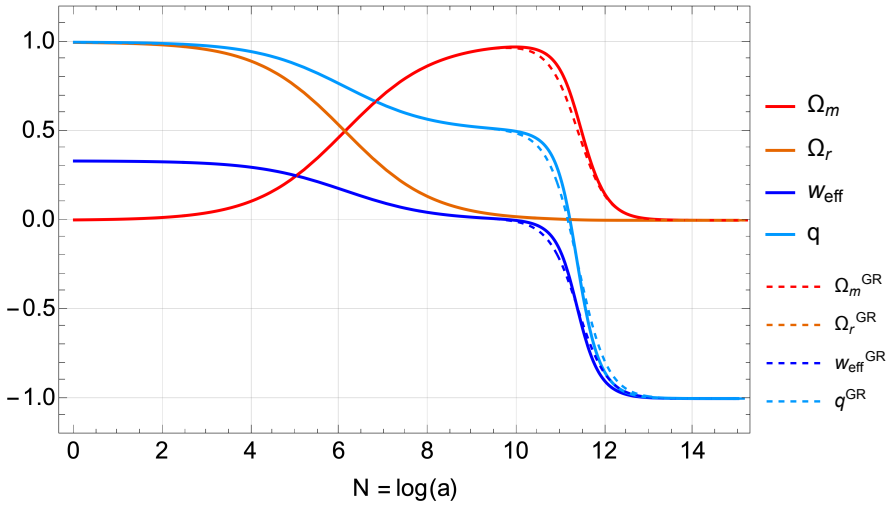
(a) 正 λ时的相空间。

(b) 负 λ时的相空间。

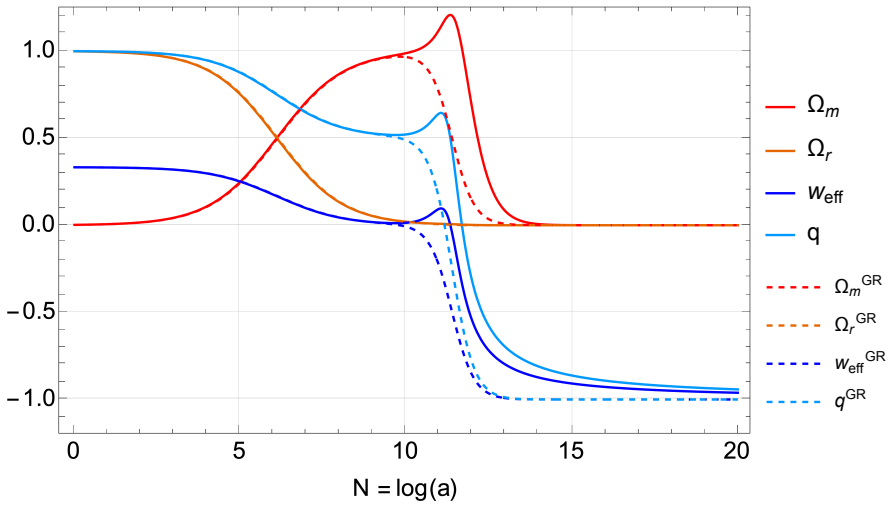
图 1：Anagnostopoulos等人的模型 (24) 的相图。物理相空间位于边框所围区域内，红色区域表示加速膨胀。

图 2 展示了两个相空间中物质和辐射密度参数 $\Omega_m = X_1$、$\Omega_r = X_2$、减速参数 q 以及有效状态方程 w_{eff} 的演化。图 2a 展示了$\lambda > 0$ 沿着从点 B $\to$ A $\to$ $\mathrm{P_n}$的异宿轨道运动的轨迹演化；图 2b 则展示了 $\lambda < 0$下沿着异宿轨道 B $\to$ A $\to$ $\mathrm{P_m}$ 的演化。虚线表示广义相对论中具有正宇宙学常数 $f(Q) = Q + 2\Lambda Q_0 = 6H^2 + 12H_0^2\Lambda$ 且满足 $\Lambda = |\lambda|$时这些参数的演化。我们选择令 Λ 等于 λ，使得广义相对论的德西特点 $\mathrm{P_n}$ 与 Anagnostopoulos 模型（具有正的 λ）的德西特点 $\mathrm{P_n}$ 取相同的值。有趣的是，对于 $f(Q) = Q + 2\Lambda Q_0$，不动点恰好是表 II 中给出的 A、B 和 $\mathrm{P_n}$，其中以 Λ 替换了 λ。当自由参数 λ 为负时，无法进行相同的匹配，因为在具有宇宙学常数 [1] 的广义相对论中，点 $\mathrm{P_m}$ 并不存在。

[1] 对于含宇宙学常数 $f(Q) = Q + 2\Lambda Q_0$ 的广义相对论，函数 $n(Z) = 1 - 2\Lambda + \frac{2\Lambda}{Z}$ 和 $m(Z) = 0$。点 $\mathrm{P_m}$ 无法存在，因为它要求 $m(Z) \to \infty$，更多详情请参见 [44] 。



（a） λ为正时的演化。



（b） λ为负时的演化。

图 2：对于宇宙学常数为正的广义相对论（虚线）和 Anagnostopoulos 等人的模型（实线），密度参数 Ω_m、Ω_r、有效状态方程 w_{eff}和减速参数 q 的演化。

可以看出，在初始条件相同的情况下，具有正 λ 的模型背景演化与其广义相对论对应模型非常接近。对于图 2b 中 λ 为负的情况，在趋近于 $w_{\text{eff}} = -1$的德西特点之前，可以观察到物质密度参数出现一个尖锐峰值。

总体而言，动力系统分析有助于深入理解 Anagnostopoulos 等人的模型在自由参数 λ取正值和负值时的背景动力学。当 λ 为正时，该系统的不动点及其稳定性与宇宙学常数为正的广义相对论中的结果一致。事实上，从定性角度来看，这些模型是相同的。当 λ 为负时，该系统的不动点具有相同的性质，但值得注意的是，物理相空间有所不同，密度参数的演化也各不相同。

五、总结

我们提出了一种非常适用于各种修正引力理论所产生的宇宙学方程的动力系统表述，其中 $f(Q)$ 是本文的研究重点。一旦指定模型函数 f，更复杂的约束方程这一缺点确实存在，但影响甚微。尤其是，与三维相空间相比，处理二维相空间所带来的清晰性（高维情形亦然）使这一点更加显著。这种方法也很容易推广，以纳入额外的

由额外动力学变量表示的自由度。例如，在我们的表述中，很容易纳入额外的物质源、标量场或非零空间曲率，参见例如 [38]。使用式（15）和（16）中引入的函数 $m(Z)$ 和 $n(Z)$，特别适合评估模型的有效性，因为几乎可以立即确定是否存在晚期德西特点。

对于 Anagnostopoulos 等人最近提出的 $f(Q)$ 模型 [51], ，我们分析了由物质和辐射这两种流体组分构成的宇宙的相空间。这补充了此前针对该模型所进行的动力系统分析；此前的分析研究了物质以及正自由参数 [53] 下的物质扰动。事实上，当 λ 为正时，我们重现了 ΛCDM 的动力学。这或许是意料之中的，因为对小 λ 下的函数 f 进行级数展开，其首阶项为 $Q + Q_0\lambda$，恰好就是广义相对论的拉格朗日量加上宇宙学常数。

然而，我们也发现了一个令人意外的结果：参数取负值时，会产生定性上相似的动力系统。特别值得注意的是，参数 λ 取负值时实际上仍表现为正的宇宙学常数，从而在相空间中形成一个晚期德西特点。我们通过研究函数 $n(Z)$ 和 $m(Z)$ （式（ 25 ）和（ 26 ））得出了这一结论；对于该模型，这些函数的形式异常简单。

对 Anagnostopoulos 等人 [51] 模型进行动力系统分析的结果表明，该模型在背景层面满足宇宙学观测约束，呈现出物质密度参数和有效状态方程的正确演化行为。具体而言，对于任意非零的参数 λ，都存在一个早期辐射主导点、一个物质鞍点以及一个加速的德西特吸引子。这项研究首次同时采用物质源和辐射源，为今后继续研究该模型提供了更多理由。

总而言之，这种方法得出了一系列模型无关结果，尤其值得进一步深入探究。这种方法背后的要义最终可追溯至广义相对论的动力系统表述：对于每一种物质源 ρ_i，我们都引入相应的密度参数 Ω_i 作为变量。随后，为了封闭系统，我们再引入一个与哈勃约束中其余项相关的变量，并选择了哈勃函数 H。我们已证明，在诸如 $f(T)$ 和 $f(Q)$ 引力这样的二阶修正中，这一相同的方案适用于所有模型。这与修正引力中采用的大多数动力系统表述形成对照。未来，运用这种表述进一步研究 ΛCDM 模型的有前景替代模型，将会很有意义。探寻既符合当前观测、又表现出不同于广义相对论且更复杂的不动点行为的模型也同样值得关注，因为这可能带来定性上不同的预测。

致谢

Ruth Lazkoz 得到了西班牙科学与创新部通过研究项目 PID2021- 123226NB-I00（包含欧洲区域发展基金资金）提供的资助，并得到了巴斯克政府和瓦伦西亚自治区政府分别通过研究项目 IT1628-22 和 PROMETEO/2020/079 提供的资助。

Erik Jensko 获得了 EPSRC博士培训计划（EP/R513143/1）的资助。

附录A：Anagnostopoulos等人模型的稳定性分析

在此，我们对第 IV 节中讨论的模型 $f(Q) = Q\exp(\lambda Q/Q_0)$ 的表II中各个定点应用线性稳定性理论。对于线性稳定性理论不适用的情况，我们将直接考察自治方程和约束，以探究这些定点的性质。

对于点 A $\{0,1\}$，我们得到特征值

$$\lambda_1^{\mathrm{A}} = 3(w_1 - w_2) \quad , \quad \lambda_2^{\mathrm{A}} = 3(1 + w_1)\,. \tag{A1}$$

因此，该点对于 $w_1 < w_2$ 是鞍点，或对于 $w_1 > w_2$ 是不稳定点，因为根据假设， $w_1 > -1$ 的第二个特征值始终为正。点 B $\{1,1\}$ 的特征值为

$$\lambda_1^{\mathrm{B}} = 3(w_2 - w_1) = -\lambda_1^{\mathrm{A}} \quad , \quad \lambda_2^{\mathrm{B}} = 3(1 + w_2)\,, \tag{A2}$$

对于 $w_1 < w_2$，该点是不稳定的；对于 $w_1 > w_2$，则是鞍点。同样，第二个特征值始终为正。由于物质流体 ρ_1 和 ρ_2 的排序具有自由度，我们不失一般性地选择 $w_1 < w_2$，使得点 A 为鞍点，点 B 为不稳定点。

点 P_n $\{0, 2\lambda/(1+2\lambda)\}$ 的特征值为

$$\lambda_1^{\mathrm{P_n}} = -3(1 + w_1) = -\lambda_2^{\mathrm{A}} \quad , \quad \lambda_2^{\mathrm{P_n}} = -3(1 + w_2) = -\lambda_2^{\mathrm{B}}\,, \tag{A3}$$

因此始终稳定。这是系统的稳定的晚期德西特点。点 P_m 的特征值为

$$\lambda_1^{\mathrm{P_m}} = 0 \quad , \quad \lambda_2^{\mathrm{P_m}} = -3(1+w_2) = -\lambda_2^{\mathrm{B}} \, , \tag{A4}$$

因此，必须采用线性稳定性理论之外的方法，才能全面确定其稳定性。

图3展示了对非双曲点的进一步考察，以及根据哈勃约束（28）确定的 X_2 和 Z 的物理允许取值。回顾一下，该点存在的条件是 $\lambda < 0$ 。尽管从数学上看该点似乎不稳定，图3中的轨迹也在远离该点，但可以利用哈勃约束来确定物理相空间内轨迹的演化结局。物理相空间的边界由以下方程描述

$$X_2 = e^{\lambda\left(\frac{1}{Z}-1\right)}\left(1+\frac{2\lambda(Z-1)}{Z}\right) \quad , \quad \text{with } \mathrm{X_2} \geq 0 \ , \ 0 \leq \mathrm{Z} \leq 1 \ , \ \lambda < 0 \, . \tag{A5}$$

当 Z 从上方趋近于零时， X_2 也趋近于零。还可以证明，对于所有 $X_2 \geq 0$ ，当 Z 介于 0 和 1 之间时，轨迹始终沿负 Z 方向运动。将物理边界上的 X_2 表达式（A5）代入自治方程 dZ/dN，即可最简便地看出这一点。由此得到的方程为

$$\frac{dZ}{dN} = -\frac{3(1+w_2)Z^2(1-Z)\big(Z-2\lambda(1-Z)\big)}{Z^2+2\lambda^2(Z-1)^2-\lambda Z(1-Z)} \, , \tag{A6}$$

其中状态方程为 $w_2 > -1$。当 $\lambda < 0$ 时，分子和分母中的所有项均为正，因此 dZ/dN 为负，边界上的轨迹趋近于原点。

按照相同的逻辑，可以证明，对于满足 $\lambda < 0$ 的一般方程 dZ/dN ，同样的结论也成立。因此，我们可以得出结论：所有满足哈勃约束的物理轨迹都趋向原点，并最终终止于点 P_m。这是因为轨迹不会穿越边界，且必须终止于 $Z = 0$ ，而这仅在 $X_2 = 0$ 时才允许。这确实与相图（图 1b 和图 3）以及图 2b 中的数值解所呈现的情况相符。

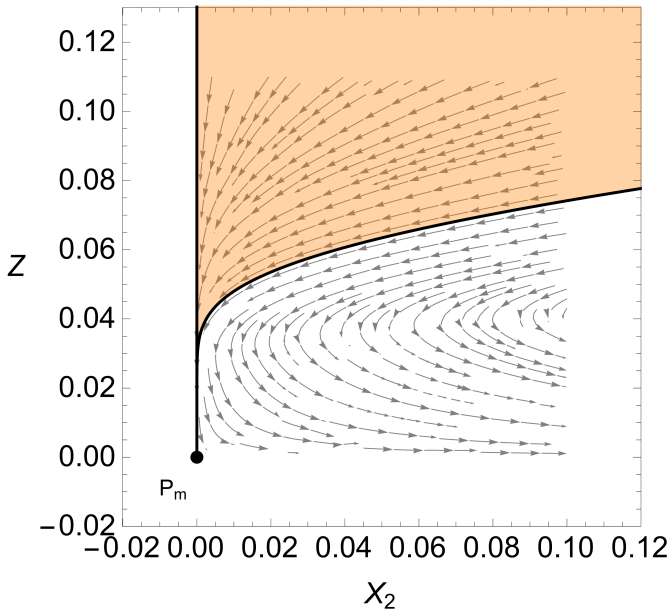


图 3：非双曲定点 P_m。

[1] B. P. Abbott *et al.* [LIGO Scientific and Virgo], 《物理评论快报》116 (2016年) 第 6 期，061102 doi:10.1103/PhysRevLett.116.061102 [arXiv:1602.03837 [gr-qc]]。

[2] N. Aghanim *et al.* [Planck], 《天文学与天体物理学》641 (2020), A6 [勘误: 《天文学与天体物理学》652 (2021), C4] doi:10.1051/0004-6361/201833910 [arXiv:1807.06209 [astro-ph.CO]].
[3] 2018, 978 1 108 67982 4, 978 1 107 11744 0 C. M. Will, 剑桥大学出版社, ISBN - - - - - - - - D.
[4] Saadeh, S. M. Feeney, A. Pontzen, H. V. Peiris 和 J. D. McEwen, 《物理评论快报》117 (2016) 第13期, 131302 doi:10.1103/PhysRevLett.117.131302 [arXiv:1605.07178 [astro-ph.CO]]. [5] G. Efstathiou 和 S. Gratton, 《皇家天文学会月刊》 **496** 2020 1, 91 95 10 1093 093 ( ) 第 L -L 期 doi: . / [2002 06892 [ ]] mnrasl/slaa arXiv: . astro-ph.CO . [6] E. J. Copeland, M. Sami 和 S. Tsujikawa, 《国际现代物理学杂志D辑》15 (2006年), 1753-1936 doi:10.1142/S021827180600942X [arXiv:hep-th/0603057 [hep-th]]. [7] B. Jain 和 P. Zhang, 《物理评论D》78 (2008年), 063503 doi:10.1103/PhysRevD.78.063503 [arXiv:0709.2375 [astro-ph]]. [8] L. Lombriser 和 N. A. Lima, 《物理学快报B》 **765** 2017 382 385 10 1016 2016 12 048 [1602 07670 ( ), - doi: . /j.physletb. . . [ ]] arXiv: . astro-ph.CO . [9] K. Koyama, 《物理学进展报告》79 (2016年) 第4期, 046902 doi:10.1088/0034-4885/79/4/046902 [arXiv:1504.04623 [astro- ph.CO]]. [10] R. C. Nunes, S. Pan 和 E. N. Saridakis, 《宇宙学与天体粒子物理学杂志》 **08** 2016 011 10 1088 1475 7516 2016 08 011 [1606 04359 ( ), doi: . / - / / / arXiv: . [ ]] gr-qc . [11] **27** 2018 15, 1848001 10 1142 0218271818480012 K. Koyama, 《国际现代物理学杂志D辑》( ) [12] **27** 2018 15, 1848002 10 1142 第 期 doi: . /S L. Lombriser, 《国际现代物理学杂志D辑》( ) 第 期 doi: . /S0218271818480024 [arXiv:1908.07892 [astro- ph.CO]]. [13] R. Lazkoz, F. S. N. Lobo, M. Ortiz-Ba˜nos 和 V. Salzano, 《物理评论D》100 (2019年) 第10期, 104027 doi:10.1103/PhysRevD.100.104027 [arXiv:1907.13219 [gr-qc]]. [14] M. Benetti, S. Capozziello 和 G. Lambiase, 《皇家天文学会月刊》500 (2020年) 第2期, 1795-1805 doi:10.1093/mnras/staa3368 [arXiv:2006.15335 [astro-ph.CO]]. [15] M. Braglia, M. Ballardini, F. Finelli 和 K. Koyama, 《物理评论D》103 (2021年) 第4期, 043528 doi:10.1103/PhysRevD.103.043528 [arXiv:2011.12934 [astro-ph.CO]]. [16] E. Di Valentino, O. Mena, S. Pan, L. Visinelli, W. Yang, A. Melchiorri, D. F. Mota, A. G. Riess 和 J. Silk, 《经典与量子引力》38 (2021年) 第15期, 153001 doi:10.1088/1361-6382/ac086d [arXiv:2103.01183 [astro-ph.CO]]. [17] E. Abdalla, G. Franco Abell´an, A. Aboubrahim, A. Agnello, O. Akarsu, Y. Akrami, G. Alestas, D. Aloni, L. Amendola 和 L. A. Anchordoqui, *et al.* 《高能天体物理学杂志》34 (2022年), 49-211 doi:10.1016/j.jheap.2022.04.002 [arXiv:2203.06142 [astro-ph.CO]]. [18] E. Di Valentino, L. A. Anchordoqui, ¨O. Akarsu, Y. Ali-Haimoud, L. Amendola, N. Arendse, M. Asgari, M. Ballar- dini, S. Basilakos 和 E. Battistelli, *et al.* 《天体粒子物理学》 **131** 2021 102605 10 1016 2021 102605 [2008 11284 [ ]] ( ), doi: . /j.astropartphys. . arXiv: . astro-ph.CO .[19] E. Di Valentino, L. A. Anchordoqui, ¨O. Akarsu, Y. Ali-Haimoud, L. Amendola, N. Arendse, M. Asgari, M. Ballar- dini, S. Basilakos 和 E. Battistelli, *et al.* 《天体粒子物理学》 **131** 2021 102604 10 1016 2021 102604 ( ), doi: . /j. [2008 11285 [ ]] astropartphys. . arXiv: . astro-ph.CO . [20] **7** 2004 2 H. F. M. Goenner, 《相对论综述》( ), H. F. M. [21] **17** 2014 Goenner, 《相对论综述》( ), 5 10 12942 2014 5 doi: . /lrr- - S. Capozziello, 《国际现代 [22] **11** 2002 483 492 10 1142 物理学杂志D辑》( ), - doi: . /S0218271802002025 [arXiv:gr-qc/0201033 [gr-qc]]. [23] R. Ferraro 和 F. Fiorini, 《物理评论D》75 (2007年), 084031 doi:10.1103/PhysRevD.75.084031 [arXiv:gr-qc/0610067 [gr-qc]]. [24] T. P. Sotiriou 和 V. Faraoni, 《现代物理学评论》 **82** 2010 451 497 10 1103 82 451 [0805 1726 ( ), - doi: . /Rev [ ]] ModPhys. . arXiv: . gr-qc . [25] A. De Felice 和 S. Tsujikawa, 《相对论综述》13 (2010年), 3 doi:10.12942/lrr-2010-3 [arXiv:1002.4928 [gr-qc]]. [26] S. Nojiri 和 S. D. Odintsov, 《物理学报告》505 (2011年), 59-144 doi:10.1016/j.physrep.2011.04.001 [arXiv:1011.0544 [gr-qc]]. [27] S. Capozziello 和 M. De Laurentis, 《物理学报告》 **509** 2011 167 321 10 1016 2011 09 003 [1108 6266 ( ), - doi: . /j.physrep. . . [ ]] arXiv: . gr-qc . [28] T. Harko, F. S. N. Lobo, S. Nojiri 和 S. D. Odintsov, 《物理评论D》 **84** 2011 024020 10 1103 84 024020 ( ), doi: . /PhysRevD. . [1104 2669 [ ]] arXiv: . gr-qc . [29] T. Clifton, P. G. Ferreira, A. Padilla 和 C. Skordis, 《物理学报告》 **513** 2012 1 189 10 1016 2012 01 001 ( ), - doi: . /j.physrep. . . [1106 2476 [ ]] arXiv: . astro-ph.CO . [30] K. Bamba, S. Capozziello, S. Nojiri 和 S. D. Odintsov, 《天体物理学与空间科学》342 (2012年), 155-228 doi:10.1007/s10509- 012-1181-8 [arXiv:1205.3421 [gr-qc]]. [31] S. Nesseris, S. Basilakos, E. N. Saridakis 和 L. Perivolaropoulos, 《物理评论D》 88 (2013年), 103010 doi:10.1103/PhysRevD.88.103010 [arXiv:1308.6142 [astro-ph.CO]]. [32] A. Joyce, B. Jain, J. Khoury 和 M. Trodden, 《物理学报告》 **568** 2015 1 98 10 1016 2014 12 002 ( ), - doi: . /j.physrep. . [1407 0059 [ ]] . arXiv: . astro-ph.CO . [33] Y. F. Cai, S. Capozziello, M. De Laurentis 和 E. N. Saridakis, 《物理学进展报告》 79 (2016 年) 第 10 期, 106901 doi:10.1088/0034- 4885/79/10/106901 [arXiv:1511.07586 [gr-qc]]. [34] S. Nojiri, S. D. Odintsov 和 V. K. Oikonomou, 《物理学报告》 **692** 2017 1 104 10 1016 2017 06 001 ( ), - doi: . /j.physrep. . . [1705 11098 [ ]] arXiv: . gr-qc . [35] C. G. B ¨ **104** 2021 2, 024010 10 1103 104 024010 [2103 15906 [ ]] ohmer 和 E. Jensko, 《物理评论D》( ) 第 期 doi: . /PhysRevD. . arXiv: . gr-qc . [36] E. N. Saridakis *et al.* [CANTATA], 施普林格, 2021年, ISBN 978-3-030-83715-0 [arXiv:2105.12582 [gr-qc]]. [37] C. G. B¨ohmer, doi:10.1007/978-3-030-83715-0 3

[38] S. Bahamonde, C. G. B¨ohmer, S. Carloni, E. J. Copeland, W. Fang 和 N. Tamanini, 《物理学报告》775-777 (2018年), 1-122 doi:10.1016/j.physrep.2018.09.001 [arXiv:1712.03107 [gr-qc]]. [39] L. Amendola, R. Gannouji, D. Polarski 和 S. Tsujikawa, 《物理评论D》 **75** 2007 083504 10 1103 75 083504 ( ), doi: . /PhysRevD. . [0612180 [ ]] arXiv:gr-qc/ gr-qc . [40] S. Carloni, 《宇宙学与天体粒子物理学杂志》09 (2015年), 013 doi:10.1088/1475-7516/2015/09/013 [arXiv:1505.06015 [gr-qc]]. [41] A. Alho, S. Carloni 和 C. Uggla, 《宇宙学与天体粒子物理学杂志》08 (2016年), 064 doi:10.1088/1475-7516/2016/08/064 [arXiv:1607.05715 [gr-qc]]. [42] S. Chakraborty, P. K. S. Dunsby 和 K. Macdevette, 《国际几何方法现代物理学杂志》19 (2022年) no.08, 2230003 doi:10.1142/S0219887822300033 [arXiv:2112.13094 [gr-qc]]. [43] M. Hohmann, L. Jarv 和 U. Ualikhanova, 《物理评论D》 **96** 2017 4, 043508 10 1103 96 043508 ( ) no. doi: . /PhysRevD. . [1706 02376 [ ]] arXiv: . gr-qc . [44] C. G. B¨ohmer, E. Jensko 和 R. Lazkoz, 《欧洲物理学杂志C》82 (2022年) no.6, 500 doi:10.1140/epjc/s10052-022-10412-y [arXiv:2201.09588 [gr-qc]]. [45] J. Beltr´an Jim´enez, L. Heisenberg, T. S. Koivisto 和 S. Pekar, 《物理评论D》101 (2020年) no.10, 103507 doi:10.1103/PhysRevD.101.103507 [arXiv:1906.10027 [gr-qc]]. [46] J. Beltr´an Jim´enez, L. Heisenberg 和 T. S. Koivisto, 《宇宙》 **5** 2019 7, 173 10 3390 5070173 [1903 06830 [ ]] an Jimenez, L. Heisenberg 和 T. S. Koivisto, 《宇宙》 ( ) no. doi: . /universe arXiv: . hep-th . [47] M. Hohmann, 《物理评论D》104 (2021年) no.12, 124077 doi:10.1103/PhysRevD.104.124077 [arXiv:2109.01525 [gr-qc]]. [48] J. Beltr´an Jim´enez, L. Heisenberg 和 T. S. Koivisto, 《物理评论D》 **98** 2018 4, 044048 10 1103 98 044048 [1710 03116 [ ]] an Jimenez, L. Heisenberg 和 T. Koivisto, 《物理评论D》 ( ) no. doi: . /PhysRevD. . arXiv: . gr-qc . [49] T. Harko, T. S. Koivisto, F. S. N. Lobo, G. J. Olmo 和 D. Rubiera-Garcia, 《物理评论D》98 (2018年) no.8, 084043 doi:10.1103/PhysRevD.98.084043 [arXiv:1806.10437 [gr-qc]]. [50] C. G. B¨ohmer 和 E. Jensko, [arXiv:2301.11051 [gr-qc]]. [51] F. K. Anagnostopoulos, S. Basilakos 和 E. N. Saridakis, 《物理学快报B》822 (2021年), 136634 doi:10.1016/j.physletb.2021.136634 [arXiv:2104.15123 [gr-qc]]. [52] F. K. Anagnostopoulos, V. Gakis, E. N. Saridakis 和 S. Basilakos, 《欧洲物理学杂志C》83 (2023) no.1, 58 doi:10.1140/epjc/s10052-023-11190-x [arXiv:2205.11445 [gr-qc]]. [53] W. Khyllep, J. Dutta, E. N. Saridakis 和 K. Yesmakhanova, 《物理评论D》107 (2023) no.4, 044022 doi:10.1103/PhysRevD.107.044022 [arXiv:2207.02610 [gr-qc]].