arXiv:2303.04495v2 [quant-ph] 4 Jun 2024

高阶量子绝热消除中约化动力学的完全正性违背

Masaaki Tokieda，[1,*] Cyril Elouard，[2] Alain Sarlette，[1,3] 和 Pierre Rouchon[1]

[1] *Laboratoire de Physique de l'École Normale Supérieure, Inria, ENS,Mines ParisTech, Université PSL, Sorbonne Université, Paris, France*[2] *Inria, ENS Lyon, LIP, F-69342, Lyon Cedex 07, France*

[3] *Department of Electronics and Information Systems, Ghent University, Belgium*

本文讨论量子绝热消除，这是一种用于复合林德布拉德系统的模型降阶技术。该系统由一个快速衰减子系统与另一个时间尺度慢得多的子系统耦合而成。此类系统具有一个接近慢子系统的不变流形。在快自由度衰减后，系统会到达该不变流形，随后慢动力学沿其演化。通过对不变流形进行参数化，可以利用约化模型模拟慢动力学。为求得约化态的演化，我们针对时间尺度分离进行渐近展开。迄今为止，研究主要集中于二阶展开。研究发现，约化动力学的二阶展开通常可由 Lindblad方程描述，从而确保时间演化的完全正性。本文给出两个例子，说明高阶贡献会导致约化动力学的完全正性遭到违背。在第一个例子中，即使不截断渐近展开，偏迹所描述的演化仍可检测到这种违背。偏迹并非参数化慢动力学的唯一方式。针对这种非唯一性，有人猜想，[R. Azouit、F. Chittaro、A. Sarlette 和 P. Rouchon，《量子科学与技术》**2**，044011（2017）]存在一种参数选择，可以确保完全正性。然而，第二个例子推翻了这一猜想：我们证明，无论选择何种参数化，都无法恢复完全正性。我们结合由量子关联态构成的不变慢流形讨论这些结果。

一、引言

任何量子系统都应视为开放系统。原因之一是，在实验中完美隔离量子系统并不现实，因此必须考虑周围环境的影响。此外，完美隔离的系统无法用于量子控制。要控制或读出量子态，就不可避免地需要与另一个系统耦合。开放量子系统的状态由密度矩阵表示。迄今为止，人们已开发出各种近似方法来描述其演化。应用最广泛的方法之一基于马尔可夫假设。从系统-环境哈密顿量出发，经过 Born-Markov-Secular 近似，可得到 Lindblad方程 [1]。

Lindblad方程也可以通过对时间演化映射施加公理化条件，在数学上推导出来。合理的假设是，时间演化保持密度矩阵的性质，即在整个演化过程中，密度矩阵均为厄米矩阵、具有单位迹且为半正定。正性条件通常由完全正性取代 [2]。物理学中对完全正性的要求源于这样一个事实：开放量子系统的密度矩阵是约化密度矩阵，而包含环境的总密度矩阵在演化过程中也应保持半正定。可以证明，密度矩阵的演化服从 Lindblad方程，当且仅当时间演化映射是一个单参数半群（$\{\Lambda_t\}_{t\geq 0}$ 满足 $\Lambda_t \circ \Lambda_s = \Lambda_{t+s}$ 对所有 $t, s \geq 0$均成立），其元素对所有 $t \geq 0$ [3–5]都是保迹的完全正映射。请注意，半群性质与马尔可夫假设 [1]相关。

本文考虑一个复合开放量子系统，其整体演化由 Lindblad 方程支配。假设该复合系统由一个快速衰减子系统构成，该子系统与另一个时间尺度较慢的系统弱耦合。在这种情况下，时间演化通常先经历快自由度的衰减，随后剩余慢自由度缓慢演化。因此，为了刻画后续动力学，可以舍弃快自由度。这种模型降阶技术在量子物理中称为绝热消除，其理论源于奇异摄动理论（例如，参见 [6]）。由于 Lindblad方程具有线性，事实上存在一个与整体系统的慢特征值相关联的不变线性子空间，动力学严格发生于该子空间上。

绝热消除应用于量子物理时有两个值得注意的方面。首先，它为复合 Lindblad 系统提供了一种模型降阶技术。通过舍弃快自由度，可以用约化模型描述慢动力学。这使得对原本

*电子邮箱：tokieda.masaaki.4e@kyoto-u.ac.jp

难以实现的大维系统进行模拟成为可能。其次，绝热消除可用于储备库工程。通过设计两个子系统之间的耦合，我们可以设计衰减后慢演化的耗散动力学。这一点在量子技术的最新发展中十分重要，因为耗散并非一定是量子技术的敌人，反而可以用来控制量子态。绝热消除的这两个方面可见于以往的研究，参考文献如下。

针对复合开放量子系统中的绝热消除，人们已发展出多种表述方法。最早的研究之一是 [7], ，作者对双体 Lindblad 系统应用了 Born-Markov近似，这也是研究复合哈密顿系统时的常见做法[1]。大量研究采用了类似的方法[8–16]。另一些研究探索了其他表述方式，包括将拉普拉斯变换应用于投影主方程[17, 18] 以及使用 Schrieffer-Wolff 变换[19–21]。与哈密顿系统不同，开放量子系统的生成元谱性质中内含弛豫行为。因此，我们可以考虑一个不变子空间，或者用几何语言来说，一个在长时间范围内吸引轨迹的流形。基于这种几何图像的表述见 [22, 23]。然而，这些方法的适用范围有限：要么仅适用于能够确定生成元特征向量的系统，要么只能评估时间尺度分离下直至二阶的贡献。本文重点讨论 [24], 中提出的表述方法，它能够克服这些限制。该方法基于中心流形理论提供了一种几何图像[25]。根据这一理论，系统确实具有一个对应于慢动力学的不变流形，因此我们认为，将模型降阶到慢自由度，就是对该流形以及系统初始化于其上之后的演化进行近似。为基于这一图像构建模型降阶，我们对不变流形上的自由度进行参数化（见图1）。随后，我们试图求得两个映射：一个描述参数的时间演化，另一个将参数化结果映射为 Lindblad方程的解，即总系统的密度矩阵。为了对一般问题近似计算这两个映射，我们针对时间尺度分离进行渐近展开。由此， [24] 建立了一套系统计算高阶贡献的方法。近期，这一方法被推广到周期驱动系统，其中驱动频率与快时间尺度相当，而驱动振幅则处于慢时间尺度的量级 [26]。此外，人们还在多系统平台上进行了数值模拟，以评估降阶后的动力学[27]。

在几何方法中，绝热消除包含一种规范自由度，它与参数化的不唯一性相关。如果慢变的 dy-

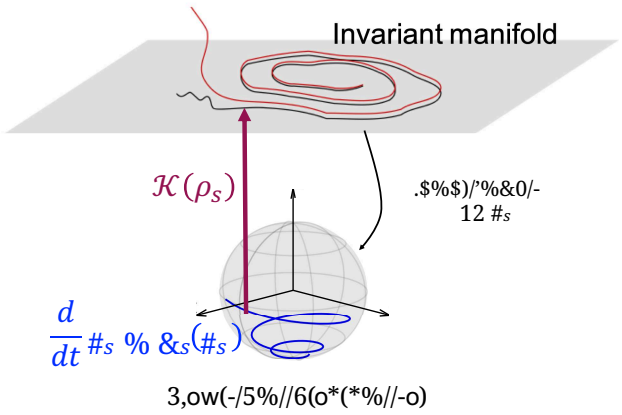


图 1：具有时间尺度分离的 Lindblad 系统中的状态演化示意图，用以说明绝热消除的机制。从任意初态出发，系统迅速收敛到低维不变流形（灰色平面），如红色轨迹所示。在绝热消除中，我们用 ρ_s对该流形上的自由度（称为慢自由度）进行参数化，并通过约化动力学描述流形内的动力学（黑色轨迹），如蓝色轨迹所示。这里假设约化系统是一个量子比特。绝热消除公式的主要目标是计算映射（$\mathcal{L}_s$），以描述 ρ_s 的演化；并计算映射（$\mathcal{K}$），将参数化结果赋给不变流形上的总态，该总态遵循 Lindblad方程。

如果动力学通过密度矩阵参数化，那么作为一项物理要求，人们会预期上述两个映射应保留量子结构。这一预期正是[24]中提出猜想的依据；作者猜想，存在一种规范选择，使得约化动力学由 Lindblad方程支配，且赋值映射是保迹完全正映射（也称为 Kraus映射 [28]），并且这一结论适用于渐近展开的任意阶。目前，已证明该结论对于一大类一般情形在二阶展开以内成立；文献 [24] 证明了演化方程可写成 Lindblad方程，而文献[29] 则证明总存在一种规范选择，可确保 Kraus映射赋值成立。迄今为止，对更高阶贡献的研究仍然有限。对于双量子比特系统，[30] 报告了一个支持该猜想对任意阶均成立的例子。文献[20]讨论了类似但不同的问题。作者将 Schrieffer-Wolff 变换推广至开放量子系统。他们发现，有效绝热生成元具有与未扰动部分相同的分块矩阵结构，并且能对任意时间的总动力学提供一阶近似，但由于某个耗散算符前不可避免地出现负系数，它一般无法写成林德布拉德形式，即使不对微扰级数进行截断也是如此。值得注意的是，他们研究的是总系统的有效生成元，而该猜想讨论的是约化系统的生成元

统。在我们的图景中，总动力学遵循 Lindblad方程是显而易见的。问题在于，它能否拆分为：在与慢子系统等价的希尔伯特空间上满足 Lindblad方程，以及将这种参数化映射到总系统的 Kraus映射。

本文通过考察二阶以外的高阶贡献，对这一猜想提出质疑。我们强调，量子技术的近期进展要求对慢动力学进行精确模拟。因此，理解高阶贡献的需求日益迫切。我们具体考察两个例子来检验这一猜想。第一个例子是一个与强耗散量子比特色散耦合的三能级系统，在该系统中，可以在不截断展开级数的情况下进行绝热消除。在这种全阶分析中，我们表明，将总密度矩阵对快子系统取偏迹所得到的参数化会导出一个非Lindblad方程，该方程甚至违背时间演化的正性，更不用说完全正性了。这一结果针对的是偏迹参数化；根据该猜想，或许存在另一种规范选择，使林德布拉德形式得以恢复。为探究规范自由度的作用，我们将第二个例子设为一个与强耗散振子共振耦合的量子比特。在这个例子中，我们可以严格证明，计入四阶贡献后，无论采用何种规范选择，都无法实现约化动力学的完全正性。因此，该系统构成了对这一猜想的反例。证明利用了 [31]中的一项结果，该结果揭示了完全正量子比特映射的谱所受到的约束。我们从不变流形上态的量子关联角度讨论这一完全正性违背；这种关联对约化系统的初态施加了限制。与我们先前的报告[32], 仅限于研究振子-量子比特系统不同，本文还给出了一个三能级系统的例子（第一个例子），并可对其进行全阶分析。此外，我们还进行了更为详细的讨论，以阐明完全正性违背的解释，旨在说服读者，这种违背并非非物理的异常现象，而是量子关联所预期的结果；我们还提出了对其进行实验验证的可能性。

本文结构安排如下。在第II节，我们回顾文献 中提出的绝热消除方法。为考察规范自由度的作用，我们推导了在不同规范选择下时间演化和赋值映射如何发生变化。在第III节，我们考察一个色散耦合系统。对于偏迹，我们证明全阶分析中演化的完全正性会遭到破坏。接下来，在第IV节，我们考察一个振子-量子比特系统，其中耗散振子系统被消除。通过这一例子，我们证明无法通过任何规范变换恢复完全正性。第V节将阐释这些发现。最后，我们在第VI节作总结。关于所有结论的更多细节可见附录。

II. 绝热消除

本节回顾 [24] 中提出的绝热消除方法。我们考虑一个由快速衰减子系统与另一个时间尺度较慢的子系统耦合而成的系统。设 $\mathscr{H}_A$ （$\mathscr{H}_B$）为快速（慢速）子系统的希尔伯特空间。复合系统的密度矩阵 $\mathscr{H}_A \otimes \mathscr{H}_B$，记作$\rho$，满足 Lindblad方程：

$$\frac{d}{dt}\rho = \mathcal{L}_A \otimes \mathcal{I}_B(\rho) + \epsilon \mathcal{I}_A \otimes \mathcal{L}_B(\rho) + \epsilon \mathcal{L}_{\text{int}}(\rho) \equiv \mathcal{L}_{\text{tot}}(\rho). \quad (1)$$

对于 $\xi = A$ 和 B， $\mathcal{I}_\xi$ 是仅作用于 $\mathscr{H}_\xi$ 上算符的恒等超算符。 $\mathcal{L}_A$ 是仅作用于 $\mathscr{H}_A$ 的林德布拉德算符，通常写作

$$\mathcal{L}_A \bullet = -i[H_A, \bullet] + \sum_k \mathcal{D}[L_{A,k}]\bullet, \quad (2)$$

其中， H_A 是哈密顿量， $\{L_{A,k}\}$ 是跳跃算符，它们都是作用于 $\mathscr{H}_A$ 上的算符。我们还引入了对易子超算符 $[H, \bullet] = H\bullet - \bullet H$ 和耗散子超算符 $\mathcal{D}[L]\bullet = L\bullet L^\dagger - (L^\dagger L \bullet + \bullet L^\dagger L)/2$，其中 H 是任意算符，且 L。我们假设，仅由 $\mathcal{L}_A$ 驱动的演化会指数收敛到唯一的稳态 $\bar{\rho}_A$。换言之，在 $\mathcal{L}_A$ 的谱中，零特征值是单重的，而其他特征值的实部均严格为负。 $\mathcal{L}_B$ 和 $\mathcal{L}_{\text{int}}$ 分别是作用于 $\mathscr{H}_B$ 和 $\mathscr{H}_A \otimes \mathscr{H}_B$ 上的超算符，并假设它们只包含哈密顿量项。最后，ϵ 是表示时间尺度分离的非负参数。从物理上讲， $\mathcal{L}_A$ 和 $\mathcal{L}_B$ 分别描述 $\mathscr{H}_A$ 和 $\mathscr{H}_B$ 的内部动力学，而 $\mathcal{L}_{\text{int}}$ 决定两个子系统如何相互作用。注意，假设 $\mathscr{H}_B$ 的内部动力学 $\mathcal{L}_B$ 较慢，即模型方程 (1) 必须在一个跟随其潜在快速运动的参考系中成立。

如引言部分所述，绝热消除的目标是在不变流形上求得慢动力学。对于林德布拉德方程这类线性方程，不变流形由生成元的（右）本征算符刻画 $\mathcal{L}_{\text{tot}}$，其特征值的实部接近于零。此类子空间在 $\mathcal{L}_{\text{tot}}$ 的作用下保持不变，因此相对于时间演化映射是不变的。我们注意到，当 $\mathcal{L}_{\text{int}}$ 非零时，不变流形并不与慢子系统完全重合 $\mathscr{H}_B$，这是因为不变流形上会逐渐形成关联（详见第V 节的讨论）。

为了描述慢动力学，我们应对不变流形上的自由度进行参数化。接下来，[24], 我们使用密度矩阵进行参数化。作为一种数学上的模型降阶技术，这种选择并无优劣之分。另一方面，在物理应用中，采用便于解释慢动力学的参数化方式更为合适。

在这方面，密度矩阵是一种合适的表示方式，因为大多数关于开放量子系统的研究都以它为基础。我们注意到，偏迹 $\mathrm{tr}_A(\rho)$（其中 tr_A 表示对 $\mathscr{H}_A$取迹）通常用于表示约化态 [1, 2]。只要时间尺度充分分离（等价地，$\epsilon \ll 1$），这种规范选择就是有效的。此选择在接下来的讨论中起着核心作用。为明确区分，我们用 $\rho_B = \mathrm{tr}_A(\rho)$ 表示偏迹，用 ρ_s 表示一般的密度矩阵参数化。

固定参数化为 ρ_s后，我们试图求出以下两个映射（见图1）。其中一个记为 $\mathcal{L}_s$，描述 ρ_s的时间演化，即 $(d/dt)\,\rho_s = \mathcal{L}_s(\rho_s)$。另一个记为 $\mathcal{K}$，将 ρ_s 映射为总 Lindblad 方程（1）的解 ρ，即 $\rho = \mathcal{K}(\rho_s)$。本文中，我们始终假设 $\mathcal{K}$ 和 $\mathcal{L}_s$ 是线性且与时间无关的。由于 ρ 满足方程（1），我们得到

$$\mathcal{K}(\mathcal{L}_s(\rho_s)) = \mathcal{L}_{\mathrm{tot}}(\mathcal{K}(\rho_s)), \tag{3}$$

由此原则上可以确定 $\mathcal{K}$ 和 $\mathcal{L}_s$。本文将这一关系称为不变性条件。

除特殊情况外（见第III节），很难精确求出满足不变性条件方程（3）的$\mathcal{K}$ 和 $\mathcal{L}_s$。为继续推导，我们假设 $\epsilon \ll 1$ 并作如下渐近展开：

$$\mathcal{K} = \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon^n \mathcal{K}_n, \qquad \mathcal{L}_s = \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon^n \mathcal{L}_{s,n}. \tag{4}$$

当 $\epsilon = 0$时，快子系统衰减后，方程（1）的解为 $\rho(t) = \bar{\rho}_A \otimes \mathrm{tr}_A(\rho(t=0))$，其中初始密度矩阵为 $\rho(t=0)$。因此，ϵ^0 阶项为

$$\mathcal{K}_0(\rho_s) = \bar{\rho}_A \otimes \rho_s, \qquad \mathcal{L}_{s,0}(\rho_s) = 0. \tag{5}$$

通过将展开式方程（4）代入不变性条件方程（3），即可计算高阶贡献。详细计算见附录 A。我们回顾一下，由于参数选择在任意阶 ϵ上都可能有不同的选项，因此解并不唯一。这反映在这样一个事实上：由于 $\mathcal{L}_A, \mathrm{tr}_A \circ \mathcal{K}_{n\geq 1}$ 的奇异性，无法通过不变性条件完全确定它。下文中，我们将 $G \equiv \mathrm{tr}_A \circ \sum_{n=1}^{\infty} \epsilon^n \mathcal{K}_n$记作任意一个作用于 $\mathscr{H}_B$上的线性、与时间无关的超算符。结合方程（5），我们得到

$$\rho_B = \mathrm{tr}_A(\rho) = \mathrm{tr}_A(\mathcal{K}(\rho_s)) = \rho_s + G(\rho_s). \tag{6}$$

本文中，我们始终假设 $(\mathcal{I}_B + G)$ 可逆；对于 $\epsilon \ll 1$，这一假设成立。

让我们看看，对于任意规范选择，$\mathcal{K}$ 和 $\mathcal{L}_s$ 与偏迹对应的结果之间有何关系。为清晰起见，我们将规范依赖显式写作 $\mathcal{K}^G$和 $\mathcal{L}_s^G$。我们预先指出，以下关系是一般基变换的结果，与之无关量子结构。对于 $\mathcal{K}^G$，注意 $\rho = \mathcal{K}^G(\rho_s) = \mathcal{K}^{G=0}(\rho_B)$。将式（6）代入最右侧可得

$$\mathcal{K}^G = \mathcal{K}^{G=0} \circ (\mathcal{I}_B + G). \tag{7}$$

对于 $\mathcal{L}_s^G$，偏迹的时间演化可写为 $\mathcal{L}_s^{G=0}\,\rho_B = d/dt\,\rho_B = d/dt\,\rho_s + G\,\rho_s = \mathcal{L}_s^G\,\rho_s + G(\mathcal{L}_s^G(\rho_s))$。比较最左侧和最右侧，我们得到 $\mathcal{L}_s^{G=0} \circ (\mathcal{I}_B + G) = (\mathcal{I}_B + G) \circ \mathcal{L}_s^G$。由 $(\mathcal{I}_B + G)^{-1}$ 的存在性，我们得到

$$\mathcal{L}_s^G = (\mathcal{I}_B + G)^{-1} \circ \mathcal{L}_s^{G=0} \circ (\mathcal{I}_B + G). \tag{8}$$

这表明，$\mathcal{L}_s$ 在不变流形内的谱或衰减率与规范选择无关。这是意料之中的，因为衰减率不应随慢动力学参数化方式的不同而改变。方程（7）和（8）有助于分析规范自由度可能进行的变换（见第IV节）。

如引言部分所述，[24] 的作者猜想存在一种规范选择，使约化动力学可由 Lindblad 形式描述，$\sum_{j=0}^{n} \epsilon^j \mathcal{L}_{s,j}(\rho_s) = -i[H_s, \rho_s] + \sum_k \mathcal{D}[L_{s,k}](\rho_s)$，其哈密顿量为 H_s，跳跃算符为 $\{L_{s,k}\}$；而赋值由 Kraus映射描述，$\sum_{j=0}^{n} \epsilon^j \mathcal{K}_j(\rho_s) = \sum_k M_k \rho_s M_k^\dagger$，其算符为 M_k：$\mathscr{H}_B \to \mathscr{H}_A \otimes \mathscr{H}_B$，对任意正整数 n，精度达到 ϵ^n。对于一类一般情形，这一猜想目前已被证明到 $n = 2$。在接下来的章节中，我们将展示一些例子，其中约化动力学的完全正性在高阶（$n > 2$）项下遭到破坏。

III. 全阶绝热消除中的完全正性违背

A. 问题设定

本节中，我们展示约化动力学的完全正性违背。为强调这种违背并非源于微扰级数的截断，我们考虑一个可精确求解系统；无需渐近展开，即可求得满足不变性条件 Eq. (3) 的$\mathcal{K}$ 和 $\mathcal{L}_s$。整个系统由一个目标量子多能级系统（d维）组成，该系统通过单项哈密顿量与另一个耗散系统耦合。为表示量子多能级系统的算符，我们在某个典范基下引入$E_{m,n} \in \mathbb{R}^{d\times d}(m, n = 1, \ldots, d)$，其取值为$[E_{m,n}]_{i,j} = 1$ ($i = m$ 和 $j = n$)，其他情况下为 0；以及$E_m = E_{m,m}$。据此，我们假设 $\mathcal{L}_B$ 和 $\mathcal{L}_{\mathrm{int}}$ 具有如下形式，如 [30]所示；

$$\epsilon \mathcal{L}_B \bullet = -i\,[\sum_{m=1}^{d} \omega_m E_m, \bullet],$$

and

$$\epsilon\mathcal{L}_{\rm int}\bullet = i[\sum_{m=1}^{d}\chi_m(V_A\otimes E_m),\bullet], \tag{9}$$

其中，$\{\omega_m\}$ 是量子多能级系统的跃迁频率，$\{\chi_m\}$ 是耦合常数，而 V_A 是作用于 $\mathscr{H}_A$上的算符。对于 $\mathcal{L}_A$，我们只假设其存在唯一稳态，在计算 $\mathcal{K}$ 和 $\mathcal{L}_s$的解析表达式时不指定其形式。稍后讨论 $\mathcal{L}_s$ 是否为林德布拉德算符时，我们考虑由下式表示的驱动耗散量子比特系统

$$\mathcal{L}_A\bullet = -i[\frac{\Omega}{2}\sigma_x+\frac{\Delta}{2}\sigma_z,\bullet]+\kappa\mathcal{D}[\sigma_-]\bullet,\quad V_A=\sigma_z, \tag{10}$$

驱动幅度为 Ω，驱动相对于量子比特频率的失谐为 Δ，泡利矩阵为 $\{\sigma_i\}_{i=x、y、z}$ 和 $\sigma_\pm=(\sigma_x\pm i\sigma_y)/2$。假设量子多能级系统是光学腔的 d 能级近似，则该林德布拉德算符描述了在无耗散 [33] 情况下对光子数进行的量子非破坏测量。

注意，$\mathcal{L}_B$ 和 $\mathcal{L}_{\rm int}$ 对易。因此，在相对于哈密顿量 $\sum_{m=1}^{d}\omega_m E_m$ 的旋转框架中，相互作用哈密顿量保持不变，而量子多能级系统的内部动力学变得平凡，即 $\mathcal{L}_B=0$。下文中，我们在此框架下考虑绝热消除。

B. 任意阶绝热消除

我们回顾一下，我们的目标是求得映射 $\mathcal{K}$ 和 $\mathcal{L}_s$，使其满足式（3）中的不变性条件。为此，我们注意到

$$\mathcal{L}_{\rm tot}(A\otimes E_{m,n})=\mathcal{L}_A^{(m,n)}(A)\otimes E_{m,n}, \tag{11}$$

其中 A 是 $\mathscr{H}_A$ 上的任意算符，并且

$$\mathcal{L}_A^{(m,n)}(A)=\mathcal{L}_A(A)+i(\chi_m V_A A-\chi_n A V_A).$$

如附录 B1 中所述，我们由此得到

$$\mathcal{K}^{G=0}(\rho_B)=\sum_{m,n=1}^{d}Q_{m,n}\otimes E_m\rho_B E_n, \tag{12}$$

and

$$\mathcal{L}_s^{G=0}(\rho_B)=\sum_{m,n=1}^{d}\lambda_{m,n}\,E_m\rho_B E_n, \tag{13}$$

其中，对于 $m,n=1\ldots d$，$\lambda_{m,n}$是$\mathcal{L}_A^{(m,n)}$ 的特征值；从公式（11）可知，它实际上是 $\mathcal{L}_{\rm tot}$ 的特征值，且具有最小的实部绝对值；$Q_{m,n}$ 是对应的（右）本征算符，其归一化条件为 $\mathrm{tr}_A(Q_{m,n})=1$。这些结论适用于偏迹参数化（$G=0$），这可由关系式 $\mathrm{tr}_A(\mathcal{K}^{G=0}(\rho_B))=\rho_B$（见公式（6））确认。利用公式（11）可以验证不变性条件公式（3）。

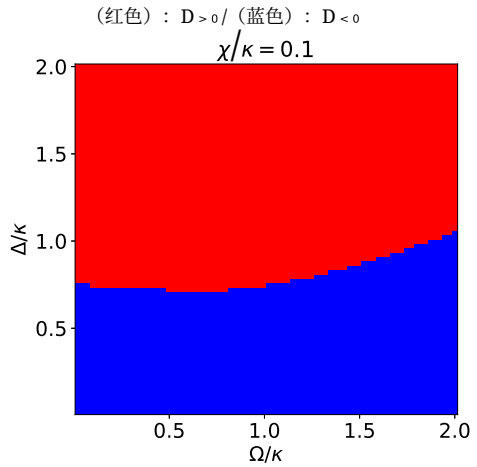


图 2：确保时间演化生成元具有林德布拉德形式的参数区域 $\mathcal{L}_s^{G=0}$由 D 的符号决定（见方程（15））。红色区域（$D>0$）中具有林德布拉德形式，而蓝色区域（$D<0$）中的耗散子带有负系数。耦合强度设为（χ_1，χ_2，χ_3）=（0，χ，2χ），其中 $\chi/\kappa=0.1$。

接下来，我们将探讨 $\mathcal{L}_s^{G=0}$是否为林德布拉德生成元。根据附录C4中的技术结果，当且仅当 $S^\top\lambda S$ 为半正定时，这一条件才成立。下文将其记为 $S^\top\lambda S\geq 0$，其矩阵转置为 $\top$，而矩阵 S 定义于公式（C13）。

举例来说，我们来看一下 $d=2$ 的情形。我们发现 $S^\top\lambda S=\mathrm{Re}(-\lambda_{1,2})/2$。如方程（13）下方所述，$\lambda_{1,2}$ 是 $\mathcal{L}_{\rm tot}$ 的一个特征值。根据稳定性条件，$S^\top\lambda S\geq 0$，因此 $\mathcal{L}_s^{G=0}$ 始终具有林德布拉德形式。[30]，中已证明了这一点，作者还进一步证明，存在某些规范选择，使得 $\mathcal{K}^G$ 完全正且为满射。

C. Qutrit ($d=3$) case

当 $d=3$ 时，我们得到

$$S^\top\lambda S=\begin{pmatrix}\frac{\mathrm{Re}(-\lambda_{1,2})}{2} & \frac{i\mathrm{Im}(\lambda_{1,2})-\lambda_{1,3}+\lambda_{2,3}}{6}\\ \frac{-i\mathrm{Im}(\lambda_{1,2})-\lambda_{1,3}^*+\lambda_{2,3}^*}{6} & \frac{\mathrm{Re}(\lambda_{1,2}-2(\lambda_{1,3}+\lambda_{2,3}))}{18}\end{pmatrix}, \tag{14}$$

其中 Im 表示虚部。$\mathcal{L}_s^{G=0}$ 是 Lindblad 算子，当且仅当该矩阵为半正定。整理后，条件可写为 $D\geq 0$，其中 D 定义为

$$\begin{aligned}D=&|\lambda_{1,2}+\lambda_{1,3}+\lambda_{2,3}|^2\\&-2(|\lambda_{1,2}|^2+|\lambda_{1,3}|^2+|\lambda_{2,3}|^2)-4\mathrm{Im}(\lambda_{1,2})\mathrm{Im}(\lambda_{2,3}).\end{aligned} \tag{15}$$

与情形 $d=2$不同，目前尚不清楚这一点是否普遍成立。为继续讨论，我们对

的符号 D 进行数值计算，其中三能级量子比特耦合到由方程（10）描述的快速衰减量子比特。在计算中，我们假设（χ_1，χ_2，χ_3）=（0，χ，2χ），其中 $\chi/\kappa = 0.1$。结果见图2。可以看到，蓝色区域内 D 为负。在这些区域中，构成 $\mathcal{L}_s^{G=0}$的耗散子之一具有负系数。因此，与情形 $d = 2$ 不同，$\mathcal{L}_s^{G=0}$一般而言并非林德布拉德算符。值得注意的是，如附录 $\mathcal{L}_s^{G=0}$B 2所述，即使耦合常数无穷小，$\mathcal{L}_s^{G=0}$也会呈现非 Lindblad 形式。B2。

更准确地说，遭到违背的是时间演化的完全正性。正如引言部分所述，当且仅当时间演化映射满足半群关系，且在任意时刻都是 Kraus映射时，生成元才是林德布拉德算符。在当前问题中，时间演化映射 $\exp(\mathcal{L}_s^{G=0}t)$（其中 $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$）满足半群关系，并保持厄米性和迹。因此，由 D 的负号所表明的 $\mathcal{L}_s^{G=0}$ 的非 Lindblad 形式，意味着时间演化映射 $\exp(\mathcal{L}_s^{G=0}t)$ 遭到完全正性违背。在这个量子多能级系统的例子中，不仅完全正性遭到违背，连正性也遭到违背。为说明这一点，我们注意到，时间演化映射 $\exp(\mathcal{L}_s^{G=0}t)$ 的作用形式为

$$e^{\mathcal{L}_s^{G=0}t}(\rho_B) = \sum_{m,n=1}^{d} e^{\lambda_{m,n}t} E_m \rho_B E_n.$$

根据引理 1 （见附录 C3），这种形式的超算符当且仅当它是完全正的，才是正的。因此，完全正性遭到违背的同时，正性也遭到违背。我们将在第V节对这种非正演化作出解释。

这个例子表明，即使不对级数展开进行截断，绝热消除中的偏迹演化也可能违反完全正性（以及正性）。在这种情况下，[24] 中的猜想指出，可以通过规范变换（式（8））消除耗散子前的负系数，并在另一种参数化下恢复约化动力学的完全正性。在当前例子中，由于类似式（15）这样的简单单一判据仅在 $d = 3$ 满足使 $G = 0$ 成为对角超算符（式（13））的特殊条件下才成立，因此很难检验这一猜想。

IV. 含阻尼振子的 Jaynes-Cummings 模型

A. 问题设定

为更深入地探究规范自由度的作用，本节将讨论与强耗散振子系统 [32] 耦合的慢量子比特系统。我们假设哈密顿量为 Jaynes-Cummings 哈密顿量，且振子与一个处于有限温度下的马尔可夫环境耦合。为简化起见，假设量子比特是无耗散的。在以量子比特频率旋转的参考系中，我们有

$$\mathcal{L}_A \bullet = -i[\Delta_A a^\dagger a, \bullet] + \gamma(1+n_{\rm th})\mathcal{D}[a]\bullet + \gamma n_{\rm th}\mathcal{D}[a^\dagger]\bullet, \quad (16)$$

$$\epsilon\mathcal{L}_{\rm int} \bullet = -i[g(a^\dagger \otimes \sigma_- + a \otimes \sigma_+), \bullet],$$

以及 $\mathcal{L}_B = 0$，其中振子相对于量子比特频率的失谐为 Δ_A，衰减率为 γ，无耦合时振子的渐近量子数为 $n_{\rm th}$（见式（D4））， 耦合常数为 g。算符 a 和$a^\dagger$ 分别是振子的湮灭算符和产生算符。在分析腔或超导电路架构中的振子-量子比特相互作用系统时，这种形式的林德布拉德算符被用作基准。

的完整谱及本征算符 $\mathcal{L}_A$ 见附录D。结果证实，只要$\gamma > 0$，就存在唯一的稳态 $\bar{\rho}_A$，其定义见式（D3）。

B. 四阶绝热消除

据我们所知，该系统的式（3）不变性条件无法精确求解。因此，我们按照式（4）下方的讨论进行渐近展开。在此例中，振子系统的时间尺度由 γ^{-1}表征，而相互作用的时间尺度为 $|g|^{-1}$。因此，时间尺度分离参数 ϵ为 $\epsilon = |g|/\gamma$。假设 $\epsilon \ll 1$，我们计算直至四阶的贡献。

如附录D所示，$\mathcal{L}_s$ 对于偏迹，$\mathcal{L}_s^{G=0}$展开至四阶时为

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_s^{G=0}\bullet = &-i[\frac{\omega_B^{(4)}}{2}\sigma_z, \bullet] \\ &+\gamma_-^{(4)}\mathcal{D}[\sigma_-]\bullet + \gamma_+^{(4)}\mathcal{D}[\sigma_+]\bullet + \gamma_\phi^{(4)}\mathcal{D}[\sigma_z]\bullet .\end{aligned} \quad (17)$$

系数 $\omega_B^{(4)}$、$\gamma_\pm^{(4)}$ 和 $\gamma_\phi^{(4)}$ 均为实数，定义如下

$$\omega_B^{(4)} = {\rm Im}(b_- + b_+), \qquad \gamma_\pm^{(4)} = 2{\rm Re}(b_\pm),$$

and

$$\gamma_\phi^{(4)} = -\frac{8g^4 n_+ n_- (3 - 6(2\Delta_A/\gamma)^2 - (2\Delta_A/\gamma)^4)}{\gamma^3(1 + (2\Delta_A/\gamma)^2)^3},$$

其中 $b_\pm$ 为

$$b_\pm = \frac{2g^2 n_\pm}{\bar{\gamma}} + \frac{8g^4 n_\pm^2}{\bar{\gamma}^3} + \frac{8g^4 n_+ n_- (1 + 8i\gamma\Delta_A/|\bar{\gamma}|^2)}{\bar{\gamma}^* |\bar{\gamma}|^2},$$

其中 $n_+ = n_{\rm th}$、$n_- = 1 + n_{\rm th}$ 和 $\bar{\gamma} = \gamma + 2i\Delta_A$。

系数 $\omega_B^{(4)}$ 表示由与振子的耦合引起的量子比特频移。保留至二阶 $\omega_B^{(2)}$ 时，它的形式为 $\omega_B^{(2)} = -4\Delta_A g^2($ $n_- + n_+)/|\bar{\gamma}|^2$。

$\gamma_{\pm}^{(4)}$ 和 $\gamma_{\phi}^{(4)}$ 项描述了与耗散振子的耦合所诱导的量子比特有效衰减。一方面，当 $|g|/\gamma \ll 1$时， $\gamma_{\pm}^{(4)}$ 由 $\gamma_{\pm}^{(2)} = 4g^2\gamma n_{\pm}/|\bar{\gamma}|^2 > 0$给出的二阶贡献主导，因此 $\gamma_{\pm}^{(4)} > 0$。另一方面， $\gamma_{\phi}^{(4)}$ 仅包含四阶贡献，并且

$$\gamma_{\phi}^{(4)} < 0 \quad \text{when}$$
$$n_{\text{th}} > 0 \quad \text{and} \quad |\Delta_A|/\gamma < \sqrt{2\sqrt{3}-3}/2 \simeq 0.34,$$

即使渐近展开的条件$|g|/\gamma \ll 1$成立。

即使 $\gamma_{\phi}^{(4)} < 0$，仍可如下确认时间演化的稳定性。如附录E1中的计算所示， $\mathcal{L}_s^{G=0}$的谱为

$$\{0, -1/T_2 + i\omega_B^{(4)}, -1/T_2 - i\omega_B^{(4)}, -1/T_1\}$$

其中 $1/T_1 = \gamma_-^{(4)} + \gamma_+^{(4)}$ 和 $1/T_2 = 1/(2T_1) + 2\gamma_{\phi}^{(4)}$。由于 $\gamma_{\pm}^{(4)} > 0$，且当 $|g|/\gamma$ 较小时 $\gamma_{\pm}^{(4)} \gg |\gamma_{\phi}^{(4)}|$，我们有$T_1 > 0$ 和 $T_2 > 0$。因此，即使 $\gamma_{\phi}^{(4)}$ 为负，时间演化仍然稳定。

出于类似的原因，即使 $\gamma_{\phi}^{(4)} < 0$，时间演化映射仍为正。证明见附录E2。然而，正如第IV C节所详述的，当 $\gamma_{\phi}^{(4)} < 0$时，演化并非完全正。这一机制似乎与矩阵转置这一著名例子有关：矩阵转置是正的，但不是完全正的。事实上，这个标准例子本质上说明，若某种演化使布洛赫向量的一个方向快速收缩，而另外两个方向收缩缓慢，那么它就不是完全正的。这里的情况是，$\gamma_{\phi}^{(4)} < 0$ 使布洛赫向量的 x 和 y 分量收缩减缓。

C. 规范变换

当 $\gamma_{\phi}^{(4)} < 0$、 $\mathcal{L}_s^{G=0}$时，它因而不是林德布拉德算符。更准确地说，具有 $\mathcal{L}_s^{G=0}$的时间演化映射不是完全正的。另一方面，正如 [24]中的猜想所述，在另一种规范选择下，或许可以恢复林德布拉德形式。然而，我们在此证明这是不可能的。

如式（8）所示，规范变换会诱导出一个相似变换。据我们所知，文献中尚未对时间演化生成元的相似变换进行深入讨论。因此，为了展示其作用，我们首先考虑以下简化示例。设一个时间演化方程（d/dt）$\rho = \mathcal{L}_0$（ρ），其中

$$\mathcal{L}_0\bullet = -i[\frac{\omega_0}{2}\sigma_z, \bullet] + \gamma_0\mathcal{D}[\sigma_x]\bullet - \gamma_0\mathcal{D}[\sigma_y]\bullet,$$

其中， ω_0 和 γ_0 为实数正参数。为确保演化的稳定性，我们假设 $\omega_0 > 2\gamma_0$。 $\mathcal{D}[\sigma_y]$ 前的负号表明 $\mathcal{L}_0$ 不是一个Lindbladian。通过相似变换可以消除这一负性

$$\mathcal{L}_0' = e^{-q_0\mathcal{D}[\sigma_x+\sigma_y]} \circ \mathcal{L}_0 \circ e^{q_0\mathcal{D}[\sigma_x+\sigma_y]},$$

其中 q_0 由 $\tanh(4q_0) = 2\gamma_0/\omega_0$ 定义，因为 $\mathcal{L}_0'$ 为

$$\mathcal{L}_0'\bullet = -i[\frac{\omega_0'}{2}\sigma_z, \bullet],$$

其中 $\omega_0' = \sqrt{\omega_0^2 - 4\gamma_0^2}$。因此，上述相似变换恢复了林德布拉德形式。

由于 $\mathcal{L}_0$ 和 $\mathcal{L}_0'$ 具有相同的谱，时间演化映射 $\exp(\mathcal{L}_0 t)$ 和 $\exp(\mathcal{L}_0' t)$ 也具有相同的谱。在无穷小 t下，$\exp(\mathcal{L}_0' t)$ 是一个 Kraus映射，而 $\exp(\mathcal{L}_0 t)$ 则不是。因此，这个例子表明，仅凭谱无法判断一个映射是否为Kraus映射。另一方面，在这个例子中，可以预见存在一个与 $\exp(\mathcal{L}_0 t)$ 具有相同谱的 Kraus映射。事实上，$\exp(\mathcal{L}_0 t)$ 的谱为 $\{1, 1, \exp(i\omega_0' t), \exp(-i\omega_0' t)\}$。这意味着时间演化仅使布洛赫向量发生旋转，而不产生阻尼；由此可知，在适当的基底下，该演化可以用酉变换描述。事实上，这一论证至少可以推广到量子比特映射。也就是说，对于给定的四个数 $\Lambda \in \mathbb{C}^4$，可以判定是否存在一个谱为 Λ 的 Kraus映射。[31] 的定理 1 保证了这一点，其内容如下：

定理（M. M. Wolf 和 D. Perez-Garcia）。给定 $\Lambda \in \mathbb{C}^4$，以下陈述等价：

- 存在一个 Kraus映射，其谱由 Λ给出。
- $\Lambda = 1 \cup \lambda$ 其中， $\lambda \in \mathbb{C}^3$ 在复共轭下封闭。此外，若我们将 $s \in \mathbb{R}^3$ 定义为$s_i = \lambda_i$ 当 $\lambda_i \in \mathbb{R}$ 时，以及 $s_i = |\lambda_i|$ 在其他情况下，则

$$s \in \mathcal{T}, \tag{18}$$

where $\mathcal{T} \subset \mathbb{R}^3$ *is the tetrahedron whose corners are* $(1,1,1)$, $(1,-1,-1)$, $(-1,1,-1)$, *and* $(-1,-1,1)$.

时间演化映射 $\exp(\mathcal{L}_s^G t)$ 的谱是规范不变的，并由以下给出

$$\{1, e^{-t/T_2 + i\omega_B^{(4)} t}, e^{-t/T_2 - i\omega_B^{(4)} t}, e^{-t/T_1}\}, \tag{19}$$

在任意规范选择下 G。利用上述定理，我们可以证明，当 $\gamma_{\phi}^{(4)} < 0$ 且对于无穷小时间 t，不存在谱为式（19）的 Kraus 映射。证明见附录 E3。由于由林德布拉德生成元描述的时间演化在整个时间范围内都是完全正的，这一结果表明

当 $\gamma_\phi^{(4)} < 0$ 时， $\mathcal{L}_s^G$不是林德布拉德算符，这在任意规范选择下 G 均成立。

总之，本节讨论的振子–量子比特系统可作为文献[24]中猜想的一个反例。

V. 讨论

本节将深入探讨完全正性违背的解释。本节结构如下。首先，在第 VA 节中，我们总结迄今为止得到的结果，并讨论它们与相关先前研究的联系。为了解释偏迹参数化的结果，我们回顾一下，绝热消除描述的是不变流形上的演化。对于不在不变流形上的初态，短时瞬态区间会被忽略。第 VB 节将探讨这种忽略对生成元性质的影响。在存在相互作用项 $\epsilon\mathcal{L}_{\rm int}$ 时，不变流形通常由关联态构成。因此，不变流形上的演化始于一个初始关联态，完全正性违背也可从这一视角加以理解。第 VC 节将进一步阐述这些问题。最后，第 VD 节将对规范自由度的作用作若干评论。

A. 前几节结果总结

我们已经看到，完全正性的违背会导致生成元不具有 Lindblad 形式。当且仅当时间演化映射满足半群关系且是一个 Kraus映射时，生成元才由林德布拉德算符给出。由于慢动力学被严格限制在一个不变流形上，半群关系得以保证。通常，厄米性和迹保持也都得到满足。然而，完全正性是一个非平凡条件，正如前几节所示，它可能遭到违背。我们还记得，时间演化映射不仅可能违背完全正性，甚至可能违背正性；第 III 节中的量子比特-量子三能级系统示例就展示了这一点。在这种情况下，密度矩阵会根据初态出现负特征值，因此，仅凭 ρ_B 无法对结果作出物理解释。

此外，我们强调，完全正性违背并非有限阶截断级数展开所造成的伪象。通过第III节给出的量子比特-三能级量子比特示例，我们已经看到，即使在全阶分析中，耗散子前的系数也会出现负值。对于第IV节中的振子-量子比特示例，高于四阶的项会给 $\mathcal{L}_s$ 的谱带来修正。然而，这些修正无法恢复完全正性。这一点可由附录 E中给出的完全正性条件方程（E2）看出。这些观察结果不同于[34], 中的论述。在那里，作者通过对哈密顿系统进行四阶微扰计算，推导出一个非林德布拉德形式的主方程，并推测其偏离林德布拉德形式可能归因于微扰级数的截断。

Redfield 方程是一种违背正性（更不用说完全正性）的主方程，这一点已广为人知 [1, 35]。尽管它最初是针对哈密顿系统推导的，[14] 的作者对 Lindblad 系统采用了相同的推导过程，并同样为约化动力学得到了一个非 Lindblad 形式的主方程。我们注意到，Redfield 方程是一个二阶主方程。另一方面，在我们的设定中，二阶近似下通常可以保证 Lindblad 形式。造成这种差异的原因是 $\mathscr{H}_B$内部动力学的时间尺度（即涉及 $\mathcal{L}_B$ 的项，见方程（1））。我们假设时间尺度较慢，并对其进行微扰处理；而导致[14] 正性遭到违背的 Redfield 方程推导，则假设时间尺度较快。值得注意的是，即使时间尺度较慢，高阶近似中仍可能出现完全正性违背。文献已对 Redfield 方程中的正性违背进行了探讨，我们将在第VB节讨论其与我们研究结果的联系。

B. 瞬态区间

为了理解非 Lindblad 形式的起源，我们先回顾一下最初为何预期会得到完全正的演化。为此，我们通过总态的时间演化来表示偏迹的时间演化。若假设初态为与 $\bar{\rho}_A$ 的乘积初态，则有

$$\rho_B(t) = \mathrm{tr}_A \circ e^{\mathcal{L}_{\rm tot}t}(\bar{\rho}_A \otimes \rho_B(t=0)). \tag{20}$$

注意，tr_A、$\exp(\mathcal{L}_{\rm tot}t)$，以及将 $\rho_B(t=0)$ 映射为 $\bar{\rho}_A \otimes \rho_B(t=0)$ 的映射都是完全正的。因此，从初态 $\rho_B(t=0)$ 到 $\rho_B(t)$ 的时间演化映射是完全正的。

这里需要指出，在绝热消除中，我们将一个态初始化在不变流形上。当$\epsilon = 0$时，不变流形上的一组密度矩阵可由乘积态表征为 $\mathcal{K}_0^{G=0}(\rho_B) = \bar{\rho}_A \otimes \rho_B$（见公式（5））。在这种情况下，公式（20）描述的是不变流形上的慢动力学，其中 $\bar{\rho}_A$ 固定。然而，当 $\epsilon > 0$时，不变流形不再具有 $\{\bar{\rho}_A \otimes \rho_B\}$ 的形式，因此公式（20）的初态不在不变流形上，公式（20）也包含了快自由度的瞬态动力学。在快子系统的衰减时间过后很久，例如$t \geq t_{\rm inv}$，总态 $\rho(t)$近似为不变流形上的[36] 。在这种情况下，绝热消除中计算得到的时间演化映射，会将 $\rho_B(t_{\rm inv}) = \mathrm{tr}_A(\rho(t_{\rm inv}))$ 映射为 $\rho_B(t)$（$t \geq t_{\rm inv}$）。无法保证此映射是完全正的，即使

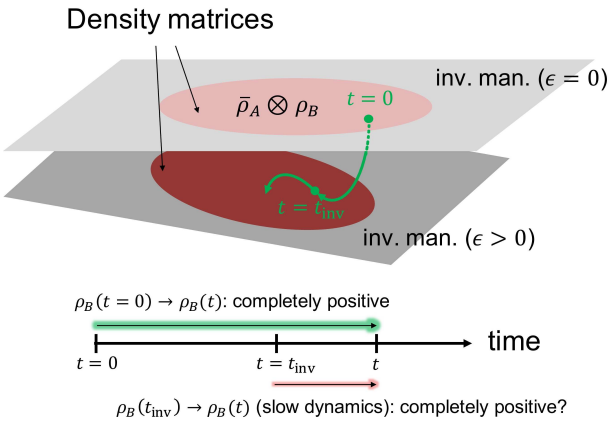


图 3：初始态为乘积态时总态演化的示意图。在显示带有 $\epsilon = 0$ (上) 和 $\epsilon > 0$ (下) 的不变流形的灰色平面上，红色区域表示一组密度矩阵。如绿色箭头所示，从乘积态出发的轨迹首先被吸引到带有 $\epsilon > 0$ (较深灰色平面)的不变流形上，随后在此处受限于 $t \geq t_{\rm inv}$ (慢动力学)。虽然包括吸引阶段在内的偏迹演化保证了完全正性（$\rho_B(t=0) \to \rho_B(t)$），但慢动力学（$\rho_B(t_{\rm inv}) \to \rho_B(t)$）则未必如此。

将 $\rho_B(t=0)$ 映射为 $\rho_B(t)$ 的映射是完全正的。这种情况如图3所示。

在瞬态区间，由于快自由度的演化，偏迹对应的主方程显式依赖于时间。快自由度弛豫后，我们得到一个与时间无关的主方程，而这正是我们在绝热消除中计算的内容。从这一观点来看，我们注意到这与 Redfield 方程中的非正性相似。采用渐近的、与时间无关的系数时，Redfield 方程会违背（完全）正性。另一方面，如[37–39]所示，考虑系数的时间依赖性即可恢复正性。本文讨论的复合 Lindblad 系统也应如此。在附录 F中，我们通过计算第III 节 qudit 系统在乘积初态下偏迹的精确主方程，证实了这一预期。因此，本文发现的非 Lindblad 生成元可以视为非马尔可夫性的标志 [40, 41]，因为它们必然与瞬态区间中特定的过去演化相关联。尽管高阶绝热消除与 Redfield 方程中的完全正性违背在解析结构上相似，但几何图像并不适用于后者。下文将讨论，这一图像能为非正演化提供清晰的解释。

C. 相关初始态

为考虑在不变流形上的初始化，式（20）应改写为

$$\rho_B(t) = \mathrm{tr}_A \circ e^{\mathcal{L}_{\rm tot} t} \circ \mathcal{K}^{G=0}(\rho_B(t=0)). \tag{21}$$

由该方程以及 tr 的完全正性$_A$ 和$e^{\mathcal{L}_{\rm tot} t}$可知，时间演化映射的完全正性违背源于 $\mathcal{K}^{G=0}$的完全正性违背。接下来，我们研究 $\mathcal{K}^{G=0}$的性质。这里我们聚焦于振子-量子比特系统。附录 G2中给出了对一类一般情形的类似分析。

对于振子-量子比特系统，为简单起见，假设 $\Delta_A = 0$。那么， g/γ 的二阶展开为（见附录 G2）

$$\begin{aligned}\mathcal{K}^{G=0}(\rho_B) &= W(\bar{\rho}_A \otimes \rho_B)W^\dagger \\ &- \Big[\frac{4g^2(1+n_{\rm th})}{\gamma^2}(I_A \otimes \sigma_-)(\bar{\rho}_A \otimes \rho_B)(I_A \otimes \sigma_-)^\dagger \\ &+ \frac{4g^2 n_{\rm th}}{\gamma^2}(I_A \otimes \sigma_+)(\bar{\rho}_A \otimes \rho_B)(I_A \otimes \sigma_+)^\dagger\Big],\end{aligned} \tag{22}$$

其中， I_A 是 $\mathscr{H}_A$ 上的恒等算子，且 $W = I_A \otimes I_B - (2ig/\gamma)($ $a^\dagger \otimes \sigma_- + a \otimes \sigma_+) - (2g^2/\gamma^2)(a^\dagger a - n_{\rm th} I_A) \otimes I_B$。

由于最后两行中的负号， $\mathcal{K}^{G=0}$ 的二阶展开不是完全正的。需要注意的是，即使 $\mathcal{K}^{G=0}$ 不是完全正的，时间演化映射仍可能是完全正的。例如，若 $n_{\rm th} = 0$，则生成元 $\mathcal{L}_s^{G=0}$在四阶项以内具有林德布拉德形式，尽管 $\mathcal{K}^{G=0}$ 仍包含一个负项。

令人惊讶的是，式（22）中的 $\mathcal{K}^{G=0}$ 甚至不是正的。我们在附录G 2中证明，对于任意纯约化态 ρ_B， $\mathcal{K}^{G=0}($ $\rho_B)$都不是半正定的。图4展示了这一情形，其中引入以下符号：令 $\mathscr{M}_{\rm inv}$ 为不变流形上的密度矩阵集合， $\mathscr{D}($ $\mathscr{H})$为希尔伯特空间 $\mathscr{H}$ 上的密度矩阵集合。赋值映射为 $\mathcal{K}^{G=0}$ ： $\mathscr{D}(\mathscr{H}_B) \to \mathscr{M}_{\rm inv}$ ；反过来，偏迹运算tr$_A$ 可视为映射tr$_A$ ： $\mathscr{M}_{\rm inv} \to \mathscr{D}(\mathscr{H}_B)$。首先注意，对于每个 $\rho^* \in \mathscr{M}_{\rm inv}$，其偏迹都是一个密度矩阵，$\rho_B^* \equiv \mathrm{tr}_A(\rho^*)$ $\in \mathscr{D}(\mathscr{H}_B)$，并且根据 $\mathcal{K}^{G=0}$的构造，有 $\rho^* = \mathcal{K}^{G=0}(\rho_B^*)$。此外，我们已经看到，对于振子-量子比特系统， $\mathcal{K}^{G=0}$ 的二阶展开不是正的。这意味着$\mathscr{M}_{\rm inv} \subset \mathcal{K}^{G=0}(\mathscr{D}(\mathscr{H}_B))$。类似地，尽管偏迹映射由tr$_A \circ \mathcal{K}^{G=0} = \mathcal{I}_B$ 和 $\mathcal{K}^{G=0}$的唯一性可知是单射，但它并非满射，因为对于振子-量子比特系统， $\mathscr{H}_B$ 上的任意纯密度矩阵都无法通过对 $\mathscr{M}_{\rm inv}$中的态取偏迹得到。换言之，我们有tr$_A(\mathscr{M}_{\rm inv}) \subset \mathscr{D}(\mathscr{H}_B)$。

$\mathcal{K}^{G=0}$ （偏迹映射的非满射性质）的正性违背，可以从两个子系统之间的纠缠来理解，正如 [42] 中对哈密顿系统的讨论。当 $\epsilon = 0$ 时， $\mathscr{M}_{\rm inv}$ 中的状态由 $\bar{\rho}_A \otimes \rho_B$ 表征，正如前文所述

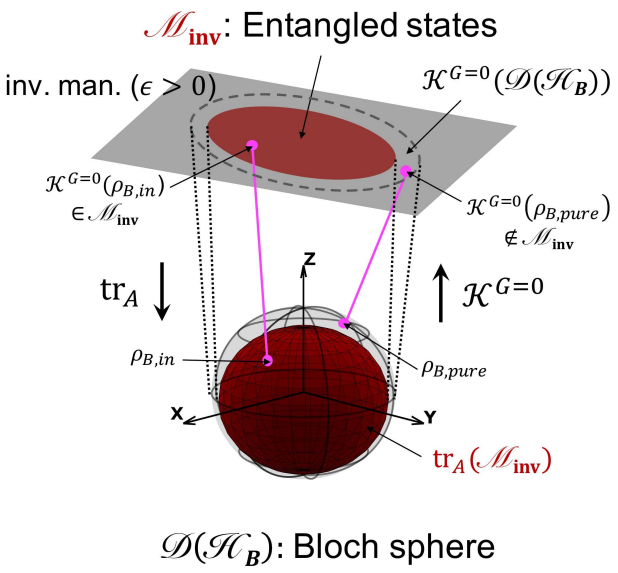


图4：示意说明振子-量子比特系统中偏迹 tr_A 的非满射性质，以及 $\mathcal{K}^{G=0}$ 的正性违背。不变流形 $\mathscr{M}_{\mathrm{inv}}$ 上以红色区域表示的密度矩阵，在 $\epsilon > 0$ 时包含纠缠态。因此，偏迹 $\mathrm{tr}_A(\mathscr{M}_{\mathrm{inv}})$（以红色椭球体表示）得到的是布洛赫球 $\mathscr{D}(\mathscr{H}_B)$ 的一个子集。反过来，将整个布洛赫球 $\mathcal{K}^{G=0}(\mathscr{D}(\mathscr{H}_B))$ 赋值映射到不变流形上，得到的集合比 $\mathscr{M}_{\mathrm{inv}}$ 中仅包含正半定矩阵的集合更大；前者由不变流形上的虚线围成。

。对于这些非关联的乘积态，任意约化态 ρ_B 都可以对应到一个有效的总态。另一方面，当 $\epsilon > 0$ 时，由于相互作用项，$\mathscr{M}_{\mathrm{inv}}$ 中的状态不再具有乘积形式。在 ϵ 的二阶近似下，它们包含纠缠态。因此，存在一些无法对应到有效总态的纯约化态。

这一视角也解释了为何即使包含二阶贡献，仍能得到林德布拉德形式。附录 G3 对这一主题作了进一步探讨；我们还推测，在一般情形下，$\mathcal{L}_s^{G=0}$可能允许得到包含三阶贡献的林德布拉德形式。Paolo 在某些假设下研究了一个类似问题，并在一种规范选择 [43]下，找到了生成元中包含至三阶贡献的林德布拉德形式。

在各种哈密顿系统中，已有研究探讨了相关初态的约化动力学的完全正性 [44–46]。 [47]，给出了一项重要结果，作者证明，量子失谐为零是约化动力学完全正的充分条件。量子失谐是衡量状态中关联的量子性的指标，用于量化在施加扰动最小的投影测量时所损失的信息量 [48–50]。 [51]，声称，量子失谐为零也是约化动力学完全正的必要条件——

条件。然而，后续研究发现了反例 [52, 53]。事实证明，量子失谐为零与约化动力学完全正等价，仅当初态具有如下形式时才成立

$$\rho = \sum_{i,j} c_{ij}\, \phi_{ij} \otimes |i\rangle\langle j|\,, \tag{23}$$

具有复系数 $\{c_{ij}\}$、固定的环境算符 $\{\phi_{ij}\}$，以及目标系统的一组标准正交基 $\{|i\rangle\}$ [51]。

注意，对于第III节中的色散耦合系统，不变流形上的状态遵循式（23）所示的构型（见式（12））。这里，我们估算该系统的量子失谐，以考察其与完全正性违背之间可能存在的关联。附录 H详细介绍了通过随机抽样估算量子失谐的方法，并深入讨论了先前研究与本研究之间的联系。图5比较了不同参数组（Ω Δ）下不变流形上量子失谐的代表值，以及完全正性违背的程度，其中耦合强度固定为 $\chi/\kappa = 0.1$。后者通过耗散算符前系数的负值进行估算：

$$\eta(\mathscr{M}_{\mathrm{inv}}) = \frac{\sum_{i=1}^{2}(|\mu_i| - \mu_i)/2}{\sum_{i=1}^{2}|\mu_i|}, \tag{24}$$

其中 μ_i （$i = 1, 2$）是矩阵$S^\top \lambda S$ 在式（C14）中的特征值。由此可得 $0 \le \eta$（$\mathscr{M}_{\mathrm{inv}}$）$\le 1$，且 η（$\mathscr{M}_{\mathrm{inv}}$）$= 0$ 当且仅当约化动力学是完全正的。我们从图5 中看到，参数依赖关系在定性上吻合：在完全正性显著违背的参数范围内，不变流形上的量子失谐往往较大。对于不同的耦合强度 χ/κ，我们也观察到类似趋势。这些观察结果与我们对完全正性违背的解释所预期的一致。

D. 规范自由度的作用

到目前为止，我们一直专注于通过偏迹进行参数化。现在让我们来讨论规范自由度在上述讨论中发挥的作用。虽然 $\mathcal{K}^{G=0}$ 的二阶展开并非完全正，但总存在一些规范选择 G 使得 $\mathcal{K}^G$ 具有这一性质。这已在 [29] 的定理 6 中得到证明，相关计算也在附录 G1中重述。恢复赋值映射完全正性的规范选择见式（G5）。对于振子–量子比特系统，其中一种选择（在式（G5）中令 $z = 1$）为

$$G(\rho_s) = \frac{4g^2(1+n_{\mathrm{th}})}{\gamma^2}\mathcal{D}[\sigma_-](\rho_s) + \frac{4g^2 n_{\mathrm{th}}}{\gamma^2}\mathcal{D}[\sigma_+](\rho_s),$$

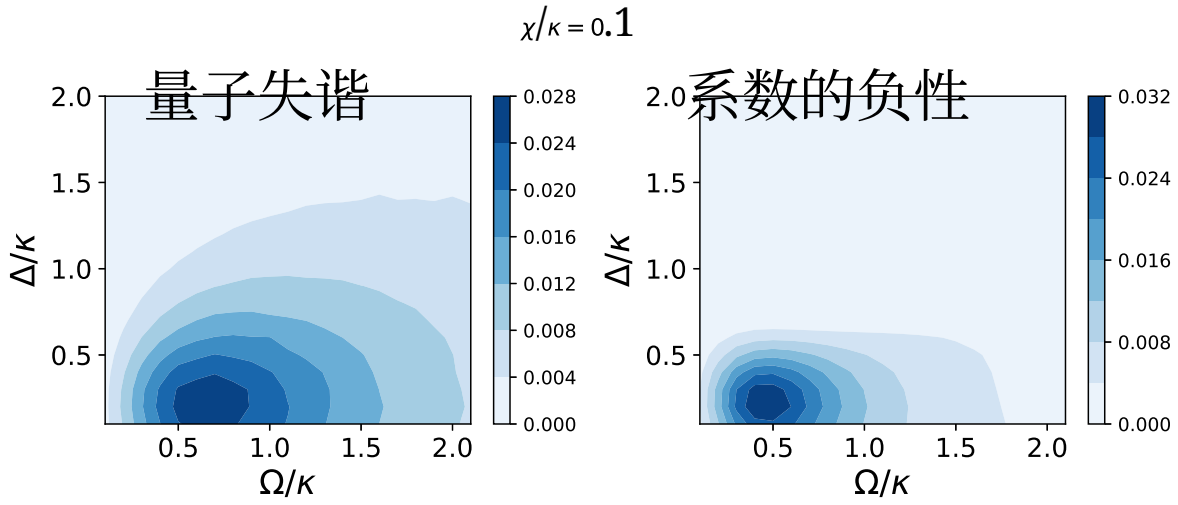


图 5：关联流形（左图）上关联强度与量子失谐的关系，$\delta_B(\mathscr{M}_{\rm inv})$见式（H2）；以及耗散算符前系数的负性所衡量的完全正性违背程度（右图），$\eta(\mathscr{M}_{\rm inv})$见式（24）。为得到左图，我们对不变流形上的 $N_{\rm proj} = 500$ 个正交投影算符和 $N_{\rm state} = 500$ 个态进行采样（详情见附录 H）。这些结果对应的耦合强度为（χ_1，χ_2，χ_3）$=(0,\ \chi,\ 2\chi)$，且 $\chi/\kappa = 0.1$，与图 2相同。

并且 $\mathcal{K}^G$ 的二阶展开为

$$\mathcal{K}^G(\rho_s) = W(\bar{\rho}_A \otimes \rho_s)W^\dagger,$$

其中 W 在式（22）中引入。

然而，即使 $\mathcal{K}^G$ 是完全正的，也不能保证生成元 $\mathcal{L}_s^G$ 具有林德布拉德形式。如式（21）所示，我们有

$$\rho_B(t) = \mathrm{tr}_A \circ e^{\mathcal{L}_{\rm tot}t} \circ \mathcal{K}^G(\rho_s(0)). \tag{25}$$

注意，映射 $\Upsilon_t^G = \mathrm{tr}_A \circ e^{\mathcal{L}_{\rm tot}t} \circ \mathcal{K}^G$ 是完全正的，但现在其输入不再是 $\rho_B(0)$。为了恢复一个从恒等映射开始、形式为 $\exp(\mathcal{L}_s^G t)$ 的半群，我们必须将 $\rho_s(0)$ 映射为 $\rho_B(0)$，或将 $\rho_B(t)$ 映射为 $\rho_s(t)$，见式 (25)。结论将是类似的，因此我们考虑使用 ρ_s 来描述$\rho_s(t) = (\mathcal{I}_B + G)^{-1}(\rho_B(t))$；

$$\rho_s(t) = (\mathcal{I}_B + G)^{-1} \circ \Upsilon_t^G(\rho_s(0)). \tag{26}$$

当 $\mathcal{K}^G$ 是完全正的时，$(\mathcal{I}_B+G)$ 也是完全正的。然而，$(\mathcal{I}_B + G)^{-1}$ 通常并非完全正，对于 ρ_s而言，时间演化映射也不是完全正的，即 $(\mathcal{I}_B + G)^{-1} \circ \Upsilon_t^G$。我们在上文已经看到，偏迹演化的完全正性违背是量子关联的自然结果。另一方面，仅凭式 (26) 我们无法判断是否有可能恢复完全正性。这凸显了第IV节分析的重要性。

这些结果为 Pechukas 与 Alicki 关于约化动力学完全正性的争论[42]增添了新的视角。Alicki 曾将类似于 $\rho_B(t) = \Upsilon_t^G(\rho_s(0))$ 的表示视为一个例子，说明从相关初态出发的演化可以是完全正的。在 Pechukas 的答复中，他强调应当讨论将$\rho_B(0)$ 映射为 $\rho_B(t)$ 的映射的性质，而该映射可能不是完全正的。这一反驳论点忽略了将 $\rho_s(0)$ 映射为 $\rho_s(t)$ 的映射实现完全正性的可能性。约化动力学 ρ_s 的这种替代表示不同于常规的偏迹 ρ_B，它自然地作为不变流形的一种不同参数化，出现在几何表述中。第IV 节的分析阐明，一般而言，不可能通过这种替代表示实现完全正性。

在附录I中，进一步讨论了规范自由度在该表述的实际应用中可能发挥的作用，以及所面临的挑战。

VI. 结论

高阶绝热消除（二阶以上）可能导致部分迹的慢演化不满足完全正性。这是因为不变流形上的态包含两个初始子系统之间的关联，从而限制了适当约化态的定义域。尽管有人猜想存在一种能够恢复完全正性的规范选择，但我们已证明，对于第IV节讨论的振子-量子比特系统，情况并非如此。

在实验方面，高阶约化模型（用于偏迹）可能导致非物理结果，这一事实可以这样理解。首先，一个非平凡的问题是，如何在慢

不变流形内制备一个初态。随后，可以追踪该状态的演化，以推导与$\mathcal{L}_s^{G=0}$相关的速率。由非林德布拉德生成元描述的约化模型意味着，即使不变流形的维数与例如量子比特相符，我们也不能将其解释为一个独立衰减的量子比特。对此进行检验的一种方法是测量慢动力学衰减的速率，例如量子比特约化系统的 T_1 和 T_2 弛豫时间。尽管根据稳定性条件，这些值均为正，但我们预计它们会违反完全正性条件所施加的相互关系，例如 $T_1 \geq T_2/2$。

最后，我们讨论本文提出的另外两个问题。首先，第IV 节讨论的振子-量子比特系统，迄今是唯一一个能够严格证明无法通过规范变换恢复完全正性的例子。这一结论的普遍性尚不明确。正如式（26）下方所讨论的，我们尚未对这种不可能性形成直观的理解。我们的证明利用了 [31],中的定理，而该定理仅适用于量子比特映射。未来在这一方向上的研究，有望让我们进一步认识一般量子映射谱所受的约束。第二个问题是，能否找到一种规范选择，使赋值映射 $\mathcal{K}^G$既为正又是满射，这与实际应用相关，详见附录I。迄今，只有在色散耦合的双量子比特系统中，才确认存在这样的规范选择[30]。要证明这种满射性，我们需要刻画总系统中的密度矩阵。即使对于三维系统[54] ，这一问题也已相当复杂，因此亟需一种新方法。

致谢

本研究得到了 Inria 量子信息处理器工程（EQIP）挑战项目、欧盟地平线 2020 研究与创新计划下欧洲研究理事会（ERC）的资助（拨款协议编号：{v1）、法国国家研究署通过 ANR 项目 HAMROQS 提供的资助，以及法国2030计划通过 ANR-22-PETQ-0006 项目提供的资助。

附录 A：不变性条件的微扰解

在本附录中，我们介绍一种计算渐近展开式（4）中高阶贡献的方法。将展开式代入不变性条件（3）， n阶的 ϵ 可写为

$$\bar{\rho}_A \otimes \mathcal{L}_{s,n}(\rho_s) = \mathcal{L}_A \otimes \mathcal{I}_B(\mathcal{K}_n(\rho_s))) + \mathcal{L}_n(\rho_s), \quad \text{(A1)}$$

其中我们引入了

$$\mathcal{L}_n(\rho_s) = (\mathcal{I}_A \otimes \mathcal{L}_B + \mathcal{L}_{\text{int}})(\mathcal{K}_{n-1}(\rho_s)) - \sum_{k=1}^{n-1} \mathcal{K}_k(\mathcal{L}_{s,n-k}(\rho_s)).$$

由于 $\text{tr}_A(\mathcal{L}_A \bullet) = 0$，对 $\mathscr{H}_A$ 取偏迹可得$\mathcal{L}_{s,\ n}$，其形式为

$$\mathcal{L}_{s,n}(\rho_s) = \text{tr}_A(\mathcal{L}_n(\rho_s)). \quad \text{(A2)}$$

随后可将方程（A1）重新整理，使已知项位于等式右侧；

$$\mathcal{L}_A \otimes \mathcal{I}_B(\mathcal{K}_n(\rho_s)) = \bar{\rho}_A \otimes \mathcal{L}_{s,n}(\rho_s) - \mathcal{L}_n(\rho_s). \quad \text{(A3)}$$

要对此线性方程求解 $\mathcal{K}_n$（ρ_s），需要求 $\mathcal{L}_A$的逆。注意，$\mathcal{L}_A$ 是奇异的，因为其一个特征值为零。因此，这个线性方程是欠定的。通过识别 $\mathcal{L}_A \otimes \mathcal{I}_B$的核， $\mathcal{K}_n$（ρ_s）只能通过求解（ $\bar{\rho}_A \otimes$tr$_A$（$\mathcal{K}_n$（ρ_s）来确定，且仅差一个A3）。我们引入未确定项 $G_n = \text{tr}_A \circ \mathcal{K}_n$，它可以是作用于 $\mathscr{H}_B$上的任意超算符。这个规范自由度与参数化的不唯一性有关。令 G_n（ρ_s），则 $\mathcal{K}_n$（ρ_s）可写为

$$\mathcal{K}_n(\rho_s) = \mathcal{L}_A^+ \otimes \mathcal{I}_B(\bar{\rho}_A \otimes \mathcal{L}_{s,n}(\rho_s) - \mathcal{L}_n(\rho_s)) + \bar{\rho}_A \otimes G_n(\rho_s), \quad \text{(A4)}$$

其中 $\mathcal{L}_A^+$ 是 $\mathcal{L}_A$的摩尔－彭若斯广义逆。利用仅由 $\mathcal{L}_A$ 驱动的演化会指数收敛到唯一稳态这一事实来计算 $\mathcal{L}_A^+$ 的一种方法已在 [24]中讨论。我们在附录 C中使用向量化方法重新审视了他们的结果。请注意，规范超算符的定义与 [24]中的不同。本文中，选择$G_n = 0\,(n = 1,\ 2,$ .....) 对应于通过偏迹 $\rho_s = \rho_B$进行的参数化。

由式（A2）和（A4）可得 $\mathcal{K}_n$ 和 $\mathcal{L}_{s,\ n}$，且可求至所需阶数。从这些方程可以看出，$\mathcal{K}_n$和 $\mathcal{L}_{s,\ n+1}$取决于 G_1、.....、G_n。因此，例如，只要 G_1、.....、G_n 中有一个是非线性的，$\mathcal{K}_n$和 $\mathcal{L}_{s,\ n+1}$ 就会成为 ρ_s 的非线性函数。为满足 $\mathcal{K}$ 和 $\mathcal{L}_s$ 是线性且与时间无关的条件，我们假设 $\{G_n\}$ 具有这些性质。

附录 B：色散耦合量子比特系统的绝热消除

1. 全阶绝热消除

在本附录中，我们给出第 III 节所介绍的色散耦合量子比特系统的绝热消除计算细节。如 [30], 所述，无需借助渐近展开即可求解不变性条件。为此，我们回顾一下公式（11），即

$$\mathcal{L}_{\text{tot}}(A \otimes E_{m,n}) = \mathcal{L}_A^{(m,n)}(A) \otimes E_{m,n}.$$

这表明， $\mathcal{L}_{\rm tot}$ 的特征值问题可以形式化地求解为

$$\mathcal{L}_{\rm tot}(Q^{(k)}_{m,n}\otimes E_{m,n})=\lambda^{(k)}_{m,n}(Q^{(k)}_{m,n}\otimes E_{m,n}),\qquad \text{(B1)}$$

对于 $m,n=1,\ldots,d$和 $k=1,\ldots,d_A^2$，其中 $\{Q^{(k)}_{m,n}\}$满足

$$\mathcal{L}_A^{(m,n)}(Q^{(k)}_{m,n})=\lambda^{(k)}_{m,n}Q^{(k)}_{m,n}.\qquad \text{(B2)}$$

注意 $(\lambda^{(k)}_{m},_{n})^*=\lambda^{(k)}_{n},_{m}$ 和 $(Q^{(k)}_{m},_{n})^\dagger=Q^{(k)}_{n},_{m}$。稳定性条件为 $\mathrm{Re}(\lambda^{(k)}_{m},_{n})\le 0$，其中 Re 表示实部。给定 (m,n)，对慢动力学有贡献的本征算符是 $\mathrm{Re}(-\lambda^{(k)}_{m},_{n})$ 最小的那个。对于每组 (m,n)，我们重新排列 $\{k\}$，使 $k=1$ 具有此性质，并在下文将其记为 $\lambda_{m},_{n}=\lambda^{(1)}_{m},_{n}$ 和$Q_{m},_{n}=Q^{(1)}_{m},_{n}$。此外，我们将 $Q_{m},_{n}$ 归一化为 $\mathrm{tr}_A(Q_{m},_{n})=1$。由式 (B2) 可知，$Q_{m},_{m}$ 是一个 Lindblad 算符。由于 Lindblad 算符的特征值中包含 0，这是由迹保持性质所致，因此对于 $m=1,\ldots,d$，有 $\lambda_{m},_{m}=0$。总之，特征值具有以下性质，

$$\lambda^*_{m,n}=\lambda_{n,m},\quad \lambda_{m,m}=0,\quad \mathrm{Re}(-\lambda_{m,n})\ge 0,\qquad \text{(B3)}$$

以及本征算符，

$$Q^\dagger_{m,n}=Q_{n,m},\quad \mathrm{tr}_A(Q_{m,n})=1.$$

当不等式

$$\max_{m,n}\mathrm{Re}(-\lambda_{m,n})<\min_{k>1,m,n}\mathrm{Re}(-\lambda^{(k)}_{m,n}),\qquad \text{(B4)}$$

成立时， $k>1$ 衰减比 $k=1$快的模态。在这种情况下，$k>1$ 模态衰减后的总密度矩阵可表示为

$$\rho=\sum_{m,n=1}^{d}[\rho_B]_{m,n}\,Q_{m,n}\otimes E_{m,n},$$

其中$[\rho_B]_{m,\ n}$ 是 ρ_B 演化的 mn元，其演化由下式给出

$$\frac{d}{dt}[\rho_B]_{m,n}=\lambda_{m,n}\,[\rho_B]_{m,n}.$$

因此，与偏迹参数化（$G=0$）相关的映射 $\mathcal{K}$ 和 $\mathcal{L}_s$ 可写为

$$\mathcal{K}^{G=0}(\rho_B)=\sum_{m,n=1}^{d}Q_{m,n}\otimes E_m\rho_B E_n,$$

and

$$\mathcal{L}_s^{G=0}(\rho_B)=\sum_{m,n=1}^{d}\lambda_{m,n}\,E_m\rho_B E_n.$$

2. 四阶绝热消除

利用附录B 1中的结果，我们在图2中发现了一个参数区域，在该区域内生成元$\mathcal{L}_s^{G=0}$不具有林德布拉德形式。然而，上述全阶分析需要对特征值进行数值计算 $\{\lambda_{m,n}\}$。因此，即使耦合常数趋于无穷小，是否仍会得到非 Lindblad 形式也尚不明确。为明确耦合常数的影响，我们在此给出四阶绝热消除的结果。

此处考虑的设置见第III节。假设相互作用由式（9）给出。为明确体现对耦合常数的依赖，我们将其改写为

$$\epsilon\mathcal{L}_{\rm int}\bullet=i[\chi(V_A\otimes B),\bullet],$$

其中 $B=\sum_{m=1}^{d}(\chi_m/\chi)E_m$ 和 $\chi\in\mathbb{R}_{>0}$ 特征耦合强度满足 $\chi_m/\chi\,(m=1,\ldots,d)$ 的量级为 1。我们在一个参考系中考虑绝热消除，在该参考系下，当 $\mathcal{L}_B=0$时，量子多能级系统的内部动力学变得平凡。假设子系统 $\mathscr{H}_A$ 是由方程（10）描述的量子比特系统。此时，时间尺度分离参数 ϵ 为 $\epsilon=\chi/\kappa$。

我们假设生成元 $\mathcal{L}_A$ 的特征值问题可解。尽管这可能需要数值计算，但我们注意到，结果与 χ 耦合常数无关。采用向量化形式，我们引入以下记号（见方程（C3））

$$\hat{\mathcal{L}}_A\,|X_\alpha\rangle\!\rangle=\kappa\nu_\alpha\,|X_\alpha\rangle\!\rangle,\quad \langle\!\langle\bar{X}_\alpha|\,\hat{\mathcal{L}}_A=\kappa\nu_\alpha\,\langle\!\langle\bar{X}_\alpha|,$$

对于 $\alpha=0,\ 1,\ 2,\ 3$。由于存在唯一的稳态，我们令 $\{\nu_\alpha\}$ 使得 $\nu_0=0$ 且 $\mathrm{Re}(\nu_\alpha)<0$（$\alpha=1,\ 2,\ 3$）。假设$\{X_\alpha\}$线性无关，我们可以得到 $\hat{}\,\mathcal{L}_A$ 的摩尔—彭若斯广义逆（见方程（C6））

$$\hat{\mathcal{L}}_A^{+}=\sum_{\alpha=1}^{3}\frac{1}{\kappa\nu_\alpha}\,|X_\alpha\rangle\!\rangle\langle\!\langle\bar{X}_\alpha|\,.$$

利用摩尔—彭若斯广义逆，我们现在可以计算高阶贡献。对于偏迹参数化，$\mathcal{L}_s^{G=0}$截至四阶展开为

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_s^{G=0}(\rho_B)=&-i\epsilon x_1B\rho_B+\epsilon^2x_2[B\rho_B,B]\\&+i\epsilon^3[x_3B\rho_BB+y_3\rho_BB^2,B]\\&+\epsilon^4[x_4B^2\rho_BB-y_4B^3\rho_B,B]\\&+(h.c.),\end{aligned}\qquad \text{(B5)}$$

其中，$(h.c.)$ 表示前面所有项的厄米共轭。系数 x_k（$k=1$,2, 3, 4) 和y_k ($k=3$, 4) 与耦合常数 χ 无关，其定义为

$$x_1/\kappa=(V_A)_0,$$

$$x_2/\kappa = -\sum_{\alpha=1}^{3}(V_A)^*_{0,\bar{\alpha}}(V_A)_\alpha \frac{1}{\nu^*_\alpha},$$

$$x_3/\kappa = -(V_A)_0\sum_{\alpha=1}^{3}(V_A)^*_{0,\bar{\alpha}}(V_A)_\alpha \frac{1}{(\nu^2_\alpha)^*} + \sum_{\alpha,\beta=1}^{3}(V_A)_{0,\bar{\alpha}}(V_A)^*_{\alpha,\bar{\beta}}(V_A)_\beta \frac{1}{\nu_\alpha\nu^*_\beta},$$

$$y_3/\kappa = -(V_A)_0\sum_{\alpha=1}^{3}(V_A)^*_{\bar{\alpha},0}(V_A)_\alpha \frac{1}{(\nu^2_\alpha)^*} + \sum_{\alpha,\beta=1}^{3}(V_A)_{0,\bar{\alpha}}(V_A)^*_{\bar{\beta},\alpha}(V_A)_\beta \frac{1}{\nu_\alpha\nu^*_\beta},$$

$$\begin{aligned} x_4/\kappa = &\sum_{\alpha=1}^{3}\left[2\mathrm{Re}\left((V_A)_{0,\bar{\alpha}}(V_A)^*_\alpha\frac{x_2}{\nu^2_\alpha}\right) + (V_A)_{\bar{\alpha},0}(V_A)^*_\alpha\frac{x_2}{\nu^2_\alpha}\right] \\ &-(V_A)^2_0\sum_{\alpha=1}^{3}\left[2(V_A)^*_{0,\bar{\alpha}}(V_A)_\alpha\frac{1}{(\nu^*_\alpha)^3} + (V_A)_{0,\bar{\alpha}}(V_A)^*_\alpha\frac{1}{\nu^3_\alpha}\right] \\ &+\sum_{\alpha,\beta=1}^{3}\left\{2\mathrm{Re}\left((V_A)_0(V_A)^*_{0,\bar{\alpha}}(V_A)_{\alpha,\bar{\beta}}(V_A)^*_\beta\frac{\nu^*_\alpha+\nu_\beta}{(\nu^*_\alpha\nu_\beta)^2}\right)\right. \\ &\left.+(V_A)_0(V_A)^*_{0,\bar{\alpha}}(V_A)_{\bar{\beta},\alpha}(V_A)^*_\beta\frac{\nu^*_\alpha+\nu_\beta}{(\nu^*_\alpha\nu_\beta)^2}\right\} \\ &-\sum_{\alpha,\beta,\gamma=1}^{3}\left\{(V_A)^*_{0,\bar{\alpha}}(V_A)_\gamma\left[(V_A)_{\alpha,\bar{\beta}}(V_A)^*_{\bar{\beta},\bar{\gamma}}+(V_A)_{\bar{\beta},\alpha}(V_A)^*_{\bar{\gamma},\beta}\right]\right. \\ &\left.\times\frac{1}{\nu^*_\alpha\nu_\beta\nu^*_\gamma}+\left[(V_A)^*_{0,\bar{\alpha}}(V_A)_{\alpha,\bar{\beta}}(V_A)^*_{\bar{\gamma},\beta}(V_A)_\gamma\frac{1}{\nu^*_\alpha\nu_\beta\nu^*_\gamma}\right]^*\right\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_4/\kappa = &\sum_{\alpha=1}^{3}(V_A)_{\bar{\alpha},0}(V_A)^*_\alpha\frac{x_2}{\nu^2_\alpha} \\ &-(V_A)^2_0\sum_{\alpha=1}^{3}(V_A)^*_{0,\bar{\alpha}}(V_A)_\alpha\frac{1}{(\nu^*_\alpha)^3} \\ &+\sum_{\alpha,\beta=1}^{3}(V_A)_0(V_A)^*_{0,\bar{\alpha}}(V_A)_{\bar{\beta},\alpha}(V_A)^*_\beta\frac{\nu^*_\alpha+\nu_\beta}{(\nu^*_\alpha\nu_\beta)^2} \\ &-\sum_{\alpha,\beta,\gamma=1}^{3}(V_A)^*_{0,\bar{\alpha}}(V_A)_{\bar{\beta},\alpha}(V_A)^*_{\beta,\bar{\gamma}}(V_A)_\gamma\frac{1}{\nu^*_\alpha\nu_\beta\nu^*_\gamma}, \end{aligned}$$

其中，我们引入了如下记号，

$$(V_A)_{\alpha,\bar{\beta},\gamma,\bar{\sigma}} = \langle\langle X_\alpha\bar{X}_\beta X_\gamma\bar{X}_\sigma|V_A\rangle\rangle,$$

对于矩阵元。

为探究$\mathcal{L}_s^{G=0}$由式（B5）给出的结构，我们将其改写如下，该表达式在阶数 ϵ^4以内成立；

$$\mathcal{L}_s^{G=0}\bullet = -i[h_B,\bullet] + \left[\epsilon^2\mathcal{D}[l_B]\bullet + \epsilon^4 c_B\mathcal{D}[l_B^2]\bullet\right]. \quad \text{(B6)}$$

第一项包含厄米算符 h_B ，其定义为

$$\begin{aligned} h_B = &\epsilon x_1 B + \epsilon^2\mathrm{Im}(x_2)B^2 \\ &-\epsilon^3\mathrm{Re}(y_3)B^3 - \epsilon^4\mathrm{Im}(y_4)B^4. \end{aligned}$$

在方括号内的各项中，算符 l_B定义为

$$l_B = c_1 B + \epsilon c_2 B^2 + \epsilon^2 c_3 B^3,$$

其中 $|c_1|^2 = 2\mathrm{Re}(x_2)$、 $c_2 = -i(y_3{}^* + 2\mathrm{Re}(x_3))/c_1^*$和 $c_3 = -(x_4+y_4)/c_1^*$。这里作出了假设 $\mathrm{Re}(x_2) > 0$，该假设是合理的，因为二阶展开总是具有林德布拉德形式，如 [24] 所示。基于这些 $\{c_k\}$，我们引入了 $c_B = |c_1|^{-4}(2\mathrm{Re}(x_4) - |c_2|^2) \in \mathbb{R}$。现在，我们将 l_B 记作 $l_B = \sum_{m=1}^{d} l_m E_m$，其中 $l_m = c_1(\chi_m/\chi) + \epsilon c_2(\chi_m/\chi)^2 + \epsilon^2 c_3(\chi_m/\chi)^3$。于是，方程 (B6) 中方括号内的各项为

$$\begin{aligned} &\epsilon^2\mathcal{D}[l_B](\rho_B) + \epsilon^4 c_B\mathcal{D}[l_B^2](\rho_B) \\ &= \sum_{m,n=1}^{d}\beta_{m,n}\left[E_m\rho_B E_n - \frac{1}{2}(E_n E_m\rho_B + \rho_B E_n E_m)\right], \end{aligned}$$

对于 $\beta_{m,\ n} = \epsilon^2 l_m l_n^*\ (1 + \epsilon^2 c_B l_m l_n^*)$ 。由于其形式与方程（C12）类似，正如方程（C14）下方所述， $\mathcal{L}_s^{G=0}$是林德布拉德算符，当且仅当满足条件 $S^\top\beta S \geq 0$ ，其中矩阵 β 定义为 $[\beta]_{m,\ n} = \beta_{m,\ n}$ 而矩阵 S 定义于方程（C13）中。

与第III节一样，我们以情形 $d = 3$ 为例。当 $\epsilon \ll 1$时，矩阵 $S^\top\beta S$ 的迹主要由 ϵ^2阶项贡献，这些项为正。条件 $S^\top\beta S \geq 0$ 于是可写为

$$\epsilon^4 c_B|(l_1 - l_2)(l_1 - l_3)(l_2 - l_3)|^2 \geq 0,$$

这等价于 $c_B \geq 0$。由于 c_B 与χ 耦合常数无关，我们现在可以讨论无穷小耦合常数下 $\mathcal{L}_s^{G=0}$的林德布拉德结构。通过在与图2相同的设置下数值计算 c_B ，其中已通过数值方法确认特征向量 $\{X_\alpha\}$ 线性无关，我们考察了它在各种参数组中的符号。结果发现，这些结果与图2所示的情况非常相似。因此，在图2蓝色区域附近的参数范围内，$\mathcal{L}_s^{G=0}$即使耦合常数无穷小，也不是林德布拉德算符。

附录 C：向量化

1. 向量化简介

在本附录中，我们介绍一种算符的向量化方法，它是研究开放量子系统时一种便捷的表示。设 A 是作用于

维数为 d 的希尔伯特空间 $\mathscr{H}$，其矩阵表示为

$$A = \sum_{i,j=1}^{d} (A)_{ij} \, |i\rangle\langle j| \, ,$$

取一组标准正交基 $\{|i\rangle\}_{i=1,\ldots,d}$，其属于 $\mathscr{H}$。根据 [5], ，我们将此算符映射为一个向量:

$$|A\rangle\!\rangle \equiv \sum_{i,j=1}^{d} (A)_{ij} \, |j\rangle \otimes |i\rangle \, .$$

我们还将 $|A\rangle\!\rangle$ 的厄米共轭定义为对偶态:

$$\langle\!\langle A| \equiv [|A\rangle\!\rangle]^{\dagger} = \sum_{i,j=1}^{d} (A)_{ij}^{*} \, \langle j| \otimes \langle i| \, .$$

设 B 和 C 为作用于 $\mathscr{H}$ 上的算符，则希尔伯特-施密特内积可表示为:

$$\langle\!\langle A|B\rangle\!\rangle = \mathrm{tr}(A^{\dagger} B),$$

其中 tr 表示对 $\mathscr{H}$ 进行的迹运算，并且

$$|ABC\rangle\!\rangle = C^{\top} \otimes A \, |B\rangle\!\rangle \, , \tag{C1}$$

其中 $\top$ 表示矩阵转置。

2. 具有唯一稳态的林德布拉德算符的摩尔－彭若斯广义逆

接下来，我们考虑向量化形式的超算符。由于向量化算符是一个 d^2 维向量，因此超算符可表示为一个 d^2 维矩阵。我们用加帽符号ˆ来表示这样的超矩阵（名称取自 [5]）；也就是说，若 $\mathcal{L}$ 是作用于 $\mathscr{H}$ 上的超算符，我们记作

$$\mathcal{L}(A) \to |\mathcal{L}(A)\rangle\!\rangle = \hat{\mathcal{L}} \, |A\rangle\!\rangle \, . \tag{C2}$$

例如，若 $\mathcal{L}(B) = ABC$，则 $\hat{\mathcal{L}} = C^{\top} \otimes A$ 如式（C1）所示。现在假设 $\hat{\mathcal{L}}$ 的特征值问题已求解为

$$\hat{\mathcal{L}} \, |X_{\alpha}\rangle\!\rangle = \lambda_{\alpha} \, |X_{\alpha}\rangle\!\rangle \, , \quad \langle\!\langle \bar{X}_{\alpha}| \, \hat{\mathcal{L}} = \lambda_{\alpha} \, \langle\!\langle \bar{X}_{\alpha}| \, , \tag{C3}$$

对于 $\alpha = 0, \ 1, \ \ldots\ldots, \ d^2 - 1$。若 $\{|X_{\alpha}\rangle\!\rangle\}_{\alpha=0, \ 1, \ \ldots\ldots, \ d^2-1}$ 线性无关，且归一化后满足正交归一关系 $\langle\!\langle \bar{X}_{\alpha}|X_{\beta}\rangle\!\rangle = \delta_{\alpha, \ \beta}$（$\alpha, \ \beta = 0, \ 1, \ \ldots\ldots, \ d^2 - 1$），则有完备关系

$$\sum_{\alpha=0}^{d^2-1} |X_{\alpha}\rangle\!\rangle\langle\!\langle \bar{X}_{\alpha}| = I_d \otimes I_d, \tag{C4}$$

与 d 维恒等矩阵 I_d。于是， $\mathcal{L}$ 的谱分解可写为

$$\hat{\mathcal{L}} = \sum_{\alpha=0}^{d^2-1} \lambda_{\alpha} \, |X_{\alpha}\rangle\!\rangle\langle\!\langle \bar{X}_{\alpha}| \, . \tag{C5}$$

设 $\lambda_0 = 0$ 且 $\mathrm{Re}(\lambda_{\alpha}) < 0 \, (\alpha = 1, \ldots, d^2 - 1)$，正如我们在第 $\mathcal{L}_A$ 节中对 II 所作的假设。在这种情况下，$\hat{\mathcal{L}}$, $\hat{\mathcal{L}}^{+}$ 的摩尔－彭若斯广义逆可写为

$$\hat{\mathcal{L}}^{+} = \sum_{\alpha=1}^{d^2-1} \frac{1}{\lambda_{\alpha}} \, |X_{\alpha}\rangle\!\rangle\langle\!\langle \bar{X}_{\alpha}| \, . \tag{C6}$$

为推导出另一种表达式，我们对 $\alpha = 1$、……、$d^2 - 1$ 使用 $1/\lambda_{\alpha} = -\int_0^{\infty} ds \, \exp(\lambda_{\alpha} s)$,

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{L}}^{+} &= -\sum_{\alpha=1}^{d^2-1} \int_0^{\infty} ds \, e^{\lambda_{\alpha} s} \, |X_{\alpha}\rangle\!\rangle\langle\!\langle \bar{X}_{\alpha}| \\ &= -\int_0^{\infty} ds \, e^{\hat{\mathcal{L}} s} \sum_{\alpha=1}^{d^2-1} |X_{\alpha}\rangle\!\rangle\langle\!\langle \bar{X}_{\alpha}| \, . \end{aligned}$$

利用完备关系式（C4），我们得到

$$\hat{\mathcal{L}}^{+} = -\int_0^{\infty} ds \, e^{\hat{\mathcal{L}} s} (I_d \otimes I_d - |X_0\rangle\!\rangle\langle\!\langle \bar{X}_0|),$$

或其运算形式为

$$\mathcal{L}^{+}(A) = -\int_0^{\infty} ds \, e^{\mathcal{L} s} (A - \mathrm{tr}(\bar{X}_0^{\dagger} A) X_0). \tag{C7}$$

该表达式在 [24] 中推导得出。

3. Choi矩阵

给定一个超算符 $\mathcal{T}$，我们将 Choi 矩阵定义为 [5, 28]

$$Choi(\hat{\mathcal{T}}) = \mathcal{I} \otimes \mathcal{T}(|\alpha\rangle\langle\alpha|),$$

其中 $\mathcal{I}$ 是作用于 $\mathscr{H}$ 上的恒等超算符，而 $|\alpha\rangle \in \mathscr{H} \otimes \mathscr{H}$ 是由 $|\alpha\rangle = \sum_{i=1}^{d} |i\rangle \otimes |i\rangle$ 定义的（未归一化）最大纠缠态。

Choi矩阵为判断超算符的完全正性提供了一种实用方法。为说明这一点，假设 $\mathcal{T}$ 的作用为

$$\mathcal{T}(A) = \sum_{p,q=1}^{d^2} \tau_{p,q} T_p A T_q^{\dagger}, \tag{C8}$$

取满足 $(T_p|T_q) = \delta_{p,q} \, (p, q = 1, 2, \ldots, d^2)$ 的正交归一算符基 $\{T_p\}$，以及一个 d^2 维厄米矩阵 τ。于是可得

$$\begin{aligned} Choi(\hat{\mathcal{T}}) &= \sum_{i,j=1}^{d} |i\rangle\langle j| \otimes \mathcal{T}(|i\rangle\langle j|) \\ &= \sum_{i,j,k,l=1}^{d} \sum_{p,q=1}^{d^2} \tau_{p,q} (T_p)_{ki} (T_q)_{lj}^{*} \, |i\rangle\langle j| \otimes |k\rangle\langle l| \\ &= \sum_{p,q=1}^{d^2} \tau_{p,q} \, |T_p\rangle\!\rangle\langle\!\langle T_q| \, . \end{aligned} \tag{C9}$$

由式（C8）以及 $\{T_p\}$ 的线性无关性可知， $\mathcal{T}$ 是完全正映射，当且仅当 $\tau \geq 0$。另一方面， $\tau \geq 0$ 等价于 $Choi$（$\mathcal{T}$） ≥ 0。综合这些结果， $\mathcal{T}$ 是完全正映射，当且仅当 $Choi$（$\mathcal{T}$） ≥ 0。类似地， $\mathcal{T}$ 保持厄米性，当且仅当 $Choi$（$\mathcal{T}$）$^{\dagger} = Choi$（$\mathcal{T}$）。

虽然一般来说，完全正性条件比正性条件更强，但我们可以证明以下结论；

引理 1. 假设 $\mathcal{T}$ 具有如下形式

$$\mathcal{T}(A) = \sum_{m,n=1}^{d} \mathfrak{p}_{m,n} E_m A E_n, \tag{C10}$$

其中有一个 d维厄米矩阵 $\mathfrak{p}$以及 $\{E_m\}$ 第*III*节中引入的投影算子。那么， $\mathcal{T}$ 是正的，当且仅当它是完全正的。

证明。由 $\{E_m\}$ 的线性无关性可知， $\mathfrak{p} \geq 0$ 等价于 $\mathcal{T}$ 是完全正的。我们证明， $\mathfrak{p} \geq 0$ 也是 $\mathcal{T}$ 正性的一个等价条件。由于充分性显而易见，我们只需证明必要性。设 $U \in \mathbb{C}^{d\times d}$ 是一个将 $\mathfrak{p}$ 对角化的酉矩阵，使其为 $\mathfrak{p}_{m,\ n} = \sum_{l=1}^{d} \mathfrak{p}_l U_{m,\ l} U^*_{n,\ l}$ 其中 $\{\mathfrak{p}_l\}$ 为特征值 $\mathfrak{p}$。由此，上述方程可写为

$$\mathcal{T}(A) = \sum_{l=1}^{d} \mathfrak{p}_l P_l A P_l^{\dagger},$$

其中 $P_l = \sum_{m=1}^{d} U_{m,\ l} E_m$。假设 $\mathfrak{p}$ 不是半正定的。那么，至少有一个元素 $\{\mathfrak{p}_l\}$为负。当 $\mathfrak{p}_n < 0$时，例如，我们引入$|\psi_n\rangle = [U^*_{1,n}\ U^*_{2,n}\ \ldots\ U^*_{d,n}]^{\top}$和 $|\varphi\rangle = [1\ 1\ \ldots 1]^{\top}$。于是可得

$$\langle\varphi|P_l|\psi_n\rangle = (U^{\dagger}U)_{n,l} = \delta_{n,l},$$

根据 $\{E_m\}$ 的定义和 U的幺正性。由此得到

$$\langle\varphi|\mathcal{T}(|\psi_n\rangle\langle\psi_n|)|\varphi\rangle = \sum_{l=1}^{d} \mathfrak{p}_l |\langle\varphi|P_l|\psi_n\rangle|^2 = \mathfrak{p}_n < 0,$$

这意味着 $\mathcal{T}$不是正的。因此，根据逆否命题， $\mathfrak{p} \geq 0$ 是 $\mathcal{T}$为正的必要条件。 □

4. 林德布拉德算符

要判断给定的超算符是否为林德布拉德算符，下面的引理很有用；

引理 2. 假设 $\mathcal{L}$ 保持厄米性质， $[\mathcal{L}(A)]^{\dagger} = \mathcal{L}(A^{\dagger})$，且迹为零， $\mathrm{tr} \circ \mathcal{L} = 0$。那么， $\mathcal{L}$是林德布拉德算符，当且仅当超矩阵 $\hat{\mathcal{P}}^I Choi(\hat{\mathcal{L}})\hat{\mathcal{P}}^I$（其中 $\hat{\mathcal{P}}^I = I_d \otimes I_d - |I_d\rangle\!\rangle\langle\!\langle I_d|/d$）是半正定的。

证明。这里给出的证明取自[5]。首先注意， $\hat{\mathcal{P}}^I$ 是厄米超矩阵， $[\hat{\mathcal{P}}^I]^2 = \hat{\mathcal{P}}^I$，其作用为 $\mathcal{P}^I(A) = A - (\mathrm{tr}(A)/d) I_d$。因此， $\mathcal{P}^I$ 是投影到无迹算子上的正交投影算符，而 $\hat{\mathcal{P}}^I$ 的核为 $\ker(\hat{\mathcal{P}}^I) = \{|I_d\rangle\!\rangle\}$。我们将利用这些性质。

如果 $\mathcal{L}$ 是林德布拉德算符，它通常可表示为

$$\mathcal{L}(A) = -i[H, A] + \sum_{\mu} \mathcal{D}[L_\mu]A,$$

其中矩阵 $L_\mu \in C^{d\times d}$ 和厄米矩阵 $H \in C^{d\times d}$任意。根据 Choi 矩阵的定义，式（C9），我们得到

$$Choi(\hat{\mathcal{L}}) = -i[|H\rangle\!\rangle\langle\!\langle I_d| - |I_d\rangle\!\rangle\langle\!\langle H|] + \sum_{\mu}\Big[|L_\mu\rangle\!\rangle\langle\!\langle L_\mu| - \frac{1}{2}[|L_\mu^{\dagger}L_\mu\rangle\!\rangle\langle\!\langle I_d| + |I_d\rangle\!\rangle\langle\!\langle L_\mu^{\dagger}L_\mu|]\Big].$$

从左右两侧作用 $\hat{\mathcal{P}}^I$ ，我们可以提取耗散部分

$$\hat{\mathcal{P}}^I Choi(\hat{\mathcal{L}})\hat{\mathcal{P}}^I = \sum_{\mu} |\mathcal{P}^I(L_\mu)\rangle\!\rangle\langle\!\langle\mathcal{P}^I(L_\mu)|.$$

因此， $\hat{\mathcal{P}}^I Choi(\hat{\mathcal{L}})\hat{\mathcal{P}}^I \geq 0$。

另一方面，若 $\hat{\mathcal{P}}^I Choi(\hat{\mathcal{L}})\hat{\mathcal{P}}^I$ 是半正定的，则存在无迹算符 $\{\overline{L}_\mu\}_{\mu=1\ \ldots\ D}$ $D < {}_{,,}(\,)$，使得 d^2

$$\hat{\mathcal{P}}^I Choi(\hat{\mathcal{L}})\hat{\mathcal{P}}^I = \sum_{\mu=1}^{D} |\overline{L}_\mu\rangle\!\rangle\langle\!\langle\overline{L}_\mu|.$$

由于 $\ker(\hat{\mathcal{P}}^I) = \{|I_d\rangle\!\rangle\}$, $Choi(\hat{\mathcal{L}})$ 通常可写为

$$Choi(\hat{\mathcal{L}}) = |K\rangle\!\rangle\langle\!\langle I_d| + |I_d\rangle\!\rangle\langle\!\langle K| + \sum_{\mu=1}^{D} |\overline{L}_\mu\rangle\!\rangle\langle\!\langle\overline{L}_\mu|,$$

其中 K 是一个 d 维复矩阵，并且我们使用了由厄米性保持推出的 $Choi(\hat{\mathcal{L}})^{\dagger} = Choi(\hat{\mathcal{L}})$。请注意，我们尚未施加 $\mathrm{tr}(\mathcal{L}\bullet) = 0$ 。 $\mathcal{L}$ 的运算可写为

$$\mathcal{L}(A) = KA + AK^{\dagger} + \sum_{\mu=1}^{D} \overline{L}_\mu A \overline{L}_\mu^{\dagger}.$$

根据条件 $\mathrm{tr}\mathcal{L} = 0$ ，或者等价地 ly,

$$\mathrm{tr}(\mathcal{L}(A)) = \mathrm{tr}\Big(\Big[K + K^{\dagger} + \sum_{\mu=1}^{D} \overline{L}_\mu^{\dagger}\overline{L}\Big]A\Big) = 0,$$

对于任意 A，我们得到 $K + K^{\dagger} = -\sum_{\mu=1}^{D} \overline{L}_\mu^{\dagger}\overline{L}$。因此，

$$\mathcal{L}(A) = -i\Big[\frac{i(K - K^{\dagger})}{2}, A\Big] + \sum_{\mu=1}^{D} \mathcal{D}[\overline{L}_\mu](A),$$

且 $\mathcal{L}$ 是一个林德布拉德算符。 □

例如，假设 $\mathcal{L}$ 由下式给出：

$$\mathcal{L}(A) = -i[H, A] + \sum_{\alpha,\beta=1}^{D} \gamma_{\alpha,\beta}\Big[V_\alpha A V_\beta^\dagger - \frac{1}{2}\{V_\beta^\dagger V_\alpha, A\}\Big], \tag{C11}$$

对于任意矩阵 $V_\alpha \in \mathbb{C}^{d\times d}$ 和厄米矩阵 $H \in \mathbb{C}^{d\times d}$ 以及 $\gamma \in \mathbb{C}^{D\times D}$。鉴于引理 2，$\gamma \geq 0$ 是使 $\mathcal{L}$ 成为林德布拉德算符的充分条件，但一般而言并非必要条件。注意，

$$\hat{\mathcal{P}}^I Choi(\hat{\mathcal{L}})\hat{\mathcal{P}}^I = \sum_{\alpha,\beta=1}^{D} \gamma_{\alpha,\beta}\, |\mathcal{P}^I(V_\alpha)\rangle\!\rangle\langle\!\langle \mathcal{P}^I(V_\beta)|\,.$$

当 $\{\mathcal{P}^I(V_\alpha)\}$ 线性相关时，即使 γ 并非半正定，右端仍可能是半正定的。一个简单的例子是 $D = 2$, $\mathcal{P}^I(V_1) = \mathcal{P}^I(V_2)$, $\gamma_{1,\,2} = 0$,$\gamma_{1,\,1} > 0$，以及$\gamma_{2,\,2} = -\gamma_{1,\,1}/2 < 0$。在这种情况下，尽管 γ 并非半正定，$\hat{\mathcal{P}}^I Choi(\hat{\mathcal{L}})\hat{\mathcal{P}}^I = (\gamma_{1,\,1}/2)\, |\mathcal{P}^I(V_1)\rangle\!\rangle\langle\!\langle \mathcal{P}^I(V_1)| \geq 0$。事实上，$\mathcal{L}$ 的作用可写成以下林德布拉德形式，

$$\mathcal{L}(A) = -i\Big[H - \frac{\gamma_{1,1}}{2id}(\mathrm{tr}(V_1)^* V_1 - \mathrm{tr}(V_1)V_1^\dagger) + \frac{\gamma_{1,1}}{4id}(\mathrm{tr}(V_2)^* V_2 - \mathrm{tr}(V_2)V_2^\dagger), A\Big] + \frac{\gamma_{1,1}}{2}\mathcal{D}[\mathcal{P}^I(V_1)](A).$$

当 $\{\mathcal{P}^I(V_\alpha)\}$ 线性无关时，$\mathcal{L}$ 是林德布拉德算符，当且仅当 $\gamma \geq 0$。注意，即使 $\{V_\alpha\}$ 线性无关，$\{\mathcal{P}^I(V_\alpha)\}$也可能不是线性无关的。例如，考虑第 III 节中的投影算子，$\{E_m\}$。尽管它们构成一个线性无关集，但由 $\sum_{m=1}^d E_m = I_d$ 和 $\mathcal{P}^I(E_m) = E_m - I_d/d$，可得 $\sum_{m=1}^d \mathcal{P}^I(E_m) = 0$。因此，$\{\mathcal{P}^I(E_m)\}$并非线性无关。若 $\{V_\alpha\}$无迹，则 $\mathcal{P}^I(V_\alpha) = V_\alpha$。由此得到以下推论；

推论 1. 在公式 (*C11*) 中，假设 $\{V_\alpha\}$ 无迹且线性无关。那么，$\mathcal{L}$ 是林德布拉德算符，当且仅当 $\gamma \geq 0$。

作为一个具体例子，我们考虑 $\mathcal{L}_s^{G=0}$第III节中的内容，见公式 (13)。首先注意到

$$\mathcal{L}_s^{G=0}(\rho_B) = \sum_{m,n=1}^{d} \lambda_{m,n}\Big[E_m\rho_B E_n - \frac{1}{2}(E_n E_m \rho_B + \rho_B E_n E_m)\Big], \tag{C12}$$

其中我们使用了 $\lambda_{m,\,m} = 0\,(m = 1, \ldots\ldots, d)$（见式（B3））。如上所述，$\{\mathcal{P}^I(E_m)\}$ 并非相互独立。因此，$\lambda \geq 0$ 只是使 $\mathcal{L}_s^{G=0}$成为林德布拉德算符的充分条件，而非必要条件。

为判断 $\mathcal{L}_s^{G=0}$是否为林德布拉德算符，我们用线性无关且无迹的算符来表示它。一组可能的算符为 $\{\tau_k\}_{k=1,\ldots,d-1}$，定义如下

$$\tau_k = \sum_{l=1}^{k} E_l - kE_{k+1},$$

经过归一化后，它们通常与非对角算符一起用作 $\mathfrak{su}$（d）李代数的基矩阵。令 d 维单位矩阵为 I_d，则 $\{E_m\}$ 和 $I_d \cup \{\tau_k\}$ 基之间的变换为

$$\begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \\ \vdots \\ E_{d-1} \\ E_d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & & 1 \\ & S & 1 \\ & & \vdots \\ & & 1 \\ & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \vdots \\ \tau_{d-1} \\ I_d/d \end{pmatrix},$$

其中 $S \in \mathbb{R}^{d\times(d-1)}$ 定义为

$$S = \begin{pmatrix} q(2) & q(3) & \ldots & q(d-1) & q(d) \\ -1/2 & q(3) & \ldots & q(d-1) & q(d) \\ 0 & -1/3 & \ldots & q(d-1) & q(d) \\ & & \vdots & & \\ 0 & 0 & \ldots & q(d-1) & q(d) \\ 0 & 0 & \ldots & -1/(d-1) & q(d) \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & -1/d \end{pmatrix}, \tag{C13}$$

其中 $q(k) = (k(k-1))^{-1}$。利用 $\{\tau_k\}$，我们可以将$\mathcal{L}_s^{G=0}$表示为

$$\mathcal{L}_s^{G=0}(\rho_B) = -\Big[\sum_{\substack{m,n=1 \\ (m<n)}}^{d}\sum_{k=1}^{d-1} \frac{\lambda_{m,n} - \lambda_{m,n}^*}{2d}(S_{m,k} - S_{n,k})\tau_k, \rho_B\Big] + \sum_{k,l=1}^{d-1}(S^\top \lambda S)_{k,l}\Big[\tau_k\rho_B\tau_l - \frac{1}{2}(\tau_l\tau_k\rho_B + \rho_B\tau_l\tau_k)\Big]. \tag{C14}$$

根据推论 1，因此，$S^\top\lambda S \geq 0$ 是使 $\mathcal{L}_s^{G=0}$成为林德布拉德算符的充要条件。

附录 D：阻尼振子系统的绝热消除

设 $\mathscr{H}_A$ 为一个阻尼振子系统，其式（16）通过以下方式与慢子系统 $\mathscr{H}_B$ 耦合：

$$\epsilon\mathcal{L}_{\mathrm{int}}\bullet = -i[g(a^\dagger \otimes B + a \otimes B^\dagger), \bullet],$$

其中，B 是作用于 $\mathscr{H}_B$上的算符。我们不指定 $\mathcal{L}_B$的形式。在本附录中，我们介绍一种在此情形下进行绝热消除的高效方法。

我们首先求解 $\mathcal{L}_A$ 的特征值问题。$\mathcal{L}_A$ 的特征算符可以利用正规序和广义拉盖尔多项式 [55] 表示为紧凑形式。这里我们介绍一种将 $\mathcal{L}_A$ 对角化的替代方法，该方法可以由梯算符超算符技术 [56, 57] 推导得到。为此，我们引入一个厄米保持映射

$$\mathcal{W}_A(O_A) = \sum_{p,q=0}^{\infty} \frac{(-n_{\mathrm{th}})^p}{p!\,q!}(a^\dagger)^p a^q\, O_A\, (a^\dagger)^q a^p,$$

其中 O_A 是 $\mathscr{H}_A$上的任意算符。在超矩阵形式下（见公式（C2））， 它写作 $\hat{}\,\mathcal{W}_A = \exp(-n_{\rm th}a^\top \otimes a^\dagger)\exp(a^* \otimes a)$，由此可得其逆为 $\hat{}\,\mathcal{W}_A^{-1} = \exp(-a^* \otimes a)\exp(n_{\rm th}a^\top \otimes a^\dagger)$。与 $\mathcal{W}_A$ 的相似变换给出

$$\begin{aligned}
\mathcal{W}_A(a\mathcal{W}_A^{-1}(O_A)) &= a\,O_A + n_{\rm th}O_A a,\\
\mathcal{W}_A(\mathcal{W}_A^{-1}(O_A)a^\dagger) &= O_A\,a^\dagger + n_{\rm th}a^\dagger O_A,\\
\mathcal{W}_A(a^\dagger\mathcal{W}_A^{-1}(O_A)) &= (1+n_{\rm th})a^\dagger O_A + O_A\,a^\dagger,\\
\mathcal{W}_A(\mathcal{W}_A^{-1}(O_A)a) &= (1+n_{\rm th})\,O_A a + a\,O_A.
\end{aligned} \tag{D1}$$

利用这些关系，我们得到

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_A(O_A) &\equiv \mathcal{W}_A \circ \mathcal{L}_A \circ \mathcal{W}_A^{-1}(O_A)\\
&= -\frac{1}{2}(\bar\gamma\, a^\dagger a\, O_A + \bar\gamma^* O_A\, a^\dagger a),
\end{aligned} \tag{D2}$$

其中 $\bar\gamma = \gamma + 2i\Delta_A$。该算符在振子的福克基中为对角形式，我们将其记为 $\{|n\rangle\}_{n=0,\,1,\,2,\,\ldots}$。因此， $\mathcal{L}_A$ 的特征值问题在矢量化表示中（见式（C3））可解为

$$\begin{aligned}
\hat{\mathcal{L}}_A\,|X_{m,n}\rangle\!\rangle &= \lambda_{m,n}\,|X_{m,n}\rangle\!\rangle\,,\\
\langle\!\langle \bar X_{m,n}|\,\hat{\mathcal{L}}_A &= \lambda_{m,n}\,\langle\!\langle \bar X_{m,n}|\,,
\end{aligned}$$

对于 m、$n = 0$、1、2、……，其中 $\lambda_{m,\,n} = -(\bar\gamma m + \bar\gamma^* n)/2$，$|X_{m,\,n}\rangle\!\rangle = \hat{}\,\mathcal{W}_A^{-1}\,||m\rangle\langle n|\rangle\!\rangle$，以及 $\langle\!\langle \bar X_{m,\,n}| = \langle\!\langle |m\rangle\langle n||\,\hat{}\,\mathcal{W}_A$。特征值满足 $\lambda_{0,\,0} = 0$ 且 $\mathrm{Re}(\lambda_{m,\,n}) < 0\ (m+n>0)$。因此，只有在 $\mathcal{L}_A$ 作用下，演化才会指数收敛至唯一的稳态 $\bar\rho_A$，其表达式为

$$\bar\rho_A = X_{0,0} = \Big(\frac{n_{\rm th}}{1+n_{\rm th}}\Big)^{a^\dagger a}\Big/\mathrm{tr}_A\Big[\Big(\frac{n_{\rm th}}{1+n_{\rm th}}\Big)^{a^\dagger a}\Big]. \tag{D3}$$

注意， $n_{\rm th}$ 是振子平均量子数，其中 $\bar\rho_A$

$$\mathrm{tr}_A(a^\dagger a\,\bar\rho_A) = n_{\rm th}. \tag{D4}$$

在 $\mathcal{L}_A$的本征基中，绝热消除会大大简化。为此，我们引入 $\xi = \mathcal{W}_A \otimes \mathcal{I}_B(\rho)$，它是厄米的 $\xi^\dagger = \xi$，并考虑 ξ的主方程，

$$\frac{d}{dt}\xi = \mathcal{M}_A \otimes \mathcal{I}_B(\xi) + \epsilon\mathcal{M}_{\rm ad}(\xi) \equiv \mathcal{M}_{\rm tot}(\xi), \tag{D5}$$

其中 $\mathcal{M}_A \quad \mathcal{I}_B \circ \mathcal{I}_A \otimes \mathcal{L}_B + \mathcal{L}_{\rm int} \circ \mathcal{W}_A^{-1} \otimes \mathcal{I}_B \quad \mathcal{M}_{\rm ad} = \mathcal{W}_A \otimes$ 定义于方程（D）中，且 2 1 。由方程（D）可知， $\mathcal{M}_{\rm ad}$ 的运算为

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_{\rm ad}(\xi) &= \mathcal{I}_A \otimes \mathcal{L}_B(\xi)\\
&+(a\otimes I_B)\mathcal{I}_A \otimes \mathcal{B}_L(\xi) + \mathcal{I}_A \otimes \mathcal{B}_D(\xi)(a^\dagger \otimes I_B)\\
&+(a^\dagger \otimes I_B)\mathcal{I}_A \otimes \mathcal{B}_R(\xi) + \mathcal{I}_A \otimes \mathcal{B}_U(\xi)(a \otimes I_B),
\end{aligned}$$

其中，I_B $\mathscr{H}_B$ 上的恒等算子，以及$\{\mathcal{B}_X\}_{X=L,D,R,U}$ 是定义在 $\mathscr{H}_B$ 上的超算符，定义如下

$$\begin{aligned}
\mathcal{B}_L(O_B) &= i[O_B, B^\dagger],\quad \mathcal{B}_D(O_B) = i[O_B, B],\\
\mathcal{B}_R(O_B) &= i(n_{\rm th}O_B B - (1+n_{\rm th})BO_B),\\
\mathcal{B}_U(O_B) &= -i(n_{\rm th}B^\dagger O_B - (1+n_{\rm th})O_B B^\dagger),
\end{aligned}$$

其中， O_B 是 $\mathscr{H}_B$上的任意算符。显然可得 $\mathcal{B}_L(O_B)^\dagger = \mathcal{B}_D(O_B^\dagger)$以及 $\mathcal{B}_R(O_B)^\dagger = \mathcal{B}_U(O_B^\dagger)$，这正如$\mathcal{M}_{\rm ad}$的厄米保持性质所预期的那样。

我们不使用方程（1），而是对方程（D5）进行绝热消除。我们引入 $\xi = \mathcal{J}(\rho_s)$，它与第 II 节中的 $\mathcal{K}$相关，满足 $\mathcal{K} = \mathcal{W}_A^{-1} \otimes \mathcal{I}_B \circ \mathcal{J}$。此时，不变性条件方程（3）写作 $\mathcal{J}(\mathcal{L}_s(\rho_s)) = \mathcal{M}_{\rm tot}(\mathcal{J}(\rho_s))$。据我们所知，此方程无法精确求解，因此我们像方程（4）中那样，将 $\mathcal{J}$关于 ϵ，$\mathcal{J} = \sum_{n=0}^{\infty}\epsilon^n\mathcal{J}_n$展开。随后，按照推导方程（5）的类似方法，我们得到零阶 $\mathcal{J}_0(\rho_s) = |0\rangle\langle 0|\otimes\rho_s$。将渐近展开代入不变性条件后， ϵ 的第 n阶写作

$$|0\rangle\langle 0| \otimes \mathcal{L}_{s,n}(\rho_s) = \mathcal{M}_A \otimes \mathcal{I}_B(\mathcal{J}_n(\rho_s)) + \mathcal{M}_n(\rho_s), \tag{D6}$$

with

$$\mathcal{M}_n(\rho_s) = \mathcal{M}_{\rm ad}(\mathcal{J}_{n-1}(\rho_s)) - \sum_{k=1}^{n}\mathcal{J}_k(\mathcal{L}_{s,n-k}(\rho_s)).$$

注意 $\langle 0|\mathcal{M}_A|0\rangle = 0$，这可直接由定义式（D2）得出。因此，在等式（D6）两侧夹入 $|0\rangle$，可得 $\mathcal{L}_{s,\,n}$

$$\mathcal{L}_{s,n}(\rho_s) = \langle 0|\mathcal{M}_n(\rho_s)|0\rangle\,.$$

此外，我们得到

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}_n(\rho_s) = \mathcal{M}_A^+ \otimes \mathcal{I}_B(|0\rangle\langle 0| \otimes \mathcal{L}_{s,n}(\rho_s) - \mathcal{M}_n(\rho_s))\\
+ |0\rangle\langle 0| \otimes G_n(\rho_s),
\end{aligned}$$

与等式（A4）的推导相同。在此等式中， $G_n = \langle 0|\mathcal{J}_n|0\rangle$ 是与 $\mathcal{M}_A$的奇异性相关联的规范超算符。由于 $\langle 0|\mathcal{J}_n|0\rangle = \mathrm{tr}_A \circ \mathcal{K}_n$，这一对 G_n 的定义与第II 节中的定义一致；这一点可由恒等式 $\langle 0|\mathcal{W}_A(O_A)|0\rangle = \mathrm{tr}_A(O_A)$ 得出。接下来，我们采用偏迹参数化，或等价地，令 $G_n = 0\ (n = 1,\ 2,\ \ldots\ldots)$。

在继续计算之前，我们先列出几个方便使用的公式。我们引入 $O_{m,\,n} = |m\rangle\langle n|\otimes O_B + (h.c.)$。为了计算 $\mathcal{L}_{s,\,n}$，我们使用

$$\langle 0|\mathcal{M}_{\rm ad}(|0\rangle\langle 0| \otimes O_B)|0\rangle = \mathcal{L}_B(O_B),$$

and

$$\begin{aligned}
\langle 0|\mathcal{M}_{\rm ad}(O_{m,n})|0\rangle &= \delta_{m,0}\delta_{n,0}\mathcal{L}_B(O_B)\\
+\delta_{m,1}\delta_{n,0}\mathcal{B}_L(O_B) &+ \delta_{m,0}\delta_{n,1}\mathcal{B}_D(O_B) + (h.c.).
\end{aligned}$$

为计算 $\mathcal{J}_n$，我们需要计算 $\mathcal{M}_A^+(\bullet)$ 和 $|0\rangle\langle 0|\otimes\langle 0|\mathcal{M}_{\rm ad}(\bullet)|0\rangle - \mathcal{M}_{\rm ad}(\bullet)$。根据式 (C6)，$\mathcal{M}_A^+$的运算形式为

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_A^+(|m\rangle\langle n| + (h.c.)) = -y_{m,n}\,|m\rangle\langle n| + (h.c.),\\
(m+n>0),
\end{aligned}$$

其中 $y_{m,\ n}=-1/\lambda_{m,\ n}=2/(\bar{\gamma}m+\bar{\gamma}^{*}n)$。为计算后者，即 $|0\rangle\langle 0|\otimes\langle 0|\mathcal{M}_{\mathrm{ad}}(\bullet)|0\rangle-\mathcal{M}_{\mathrm{ad}}(\bullet)$，我们使用

$$\begin{aligned}&|0\rangle\langle 0|\otimes\langle 0|\mathcal{M}_{\mathrm{ad}}(|0\rangle\langle 0|\otimes\rho_B)|0\rangle-\mathcal{M}_{\mathrm{ad}}(|0\rangle\langle 0|\otimes\rho_B)\\&=-|1\rangle\langle 0|\otimes\mathcal{B}_R(\rho_B)+(h.c.),\end{aligned}$$

对于 ρ_B 在 $\mathscr{H}_B$ 上的任意厄米算符

$$\begin{aligned}&|0\rangle\langle 0|\otimes\langle 0|\mathcal{M}_{\mathrm{ad}}(O_{m,n})|0\rangle-\mathcal{M}_{\mathrm{ad}}(O_{m,n})\\&=-\sqrt{m+1}\,|m+1\rangle\langle n|\otimes\mathcal{B}_R(O_B)\\&-\sqrt{n+1}\,|m\rangle\langle n+1|\otimes\mathcal{B}_U(O_B)\\&-(1-\delta_{m,1}\delta_{n,0})\sqrt{m}\,|m-1\rangle\langle n|\otimes\mathcal{B}_L(O_B)\\&-(1-\delta_{m,0}\delta_{n,1})\sqrt{n}\,|m\rangle\langle n-1|\otimes\mathcal{B}_D(O_B)\\&-|m\rangle\langle n|\otimes\mathcal{L}_B(O_B)+(h.c.).\end{aligned}$$

借助这些公式，我们可以计算高阶贡献。对于偏迹参数化，$\{\mathcal{L}_{s,n}\}_{n=1,\ 2,\ 3,\ 4}$ 和 $\{\mathcal{J}_n\}_{n=1,\ 2,\ 3}$ 读作

$$\mathcal{L}_{s,1}(\rho_B)=\mathcal{L}_B(\rho_B),$$

$$\mathcal{J}_1(\rho_B)=y_{1,0}\,|1\rangle\langle 0|\otimes\mathcal{B}_R(\rho_B)+(h.c.),$$

$$\mathcal{L}_{s,2}(\rho_B)=y_{1,0}\mathcal{B}_R\circ\mathcal{B}_L(\rho_B)+(h.c.),$$

$$\begin{aligned}\mathcal{J}_2(\rho_B)&=y_{1,0}^2\,|1\rangle\langle 0|\otimes[\mathcal{L}_B,\mathcal{B}_R](\rho_B)\\&+\sqrt{2}\,y_{1,0}y_{2,0}\,|2\rangle\langle 0|\otimes\mathcal{B}_R\circ\mathcal{B}_R(\rho_B)\\&+y_{1,0}y_{1,1}\,|1\rangle\langle 1|\otimes\mathcal{B}_U\circ\mathcal{B}_R(\rho_B)+(h.c.),\end{aligned}$$

$$\mathcal{L}_{s,3}(\rho_B)=y_{1,0}^2\mathcal{B}_L\circ[\mathcal{L}_B,\mathcal{B}_R](\rho_B)+(h.c.),$$

$$\begin{aligned}\mathcal{J}_3(\rho_B)&=y_{1,0}^3\,|1\rangle\langle 0|\otimes[\mathcal{L}_B,[\mathcal{L}_B,\mathcal{B}_R]](\rho_B)\\&+2\,y_{1,0}^2y_{2,0}\,|1\rangle\langle 0|\otimes\mathcal{B}_L\circ\mathcal{B}_R\circ\mathcal{B}_R(\rho_B)\\&+|y_{1,0}|^2y_{1,1}\,|0\rangle\langle 1|\otimes\mathcal{B}_L\circ\mathcal{B}_U\circ\mathcal{B}_R(\rho_B)\\&+y_{1,0}^2y_{1,1}\,|1\rangle\langle 0|\otimes\mathcal{B}_D\circ\mathcal{B}_U\circ\mathcal{B}_R(\rho_B)\\&-y_{1,0}^2\,|1\rangle\langle 0|\otimes\mathcal{B}_R\circ\mathcal{L}_{s,2}(\rho_B)\\&+\cdots+(h.c.),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{s,4}(\rho_B)&=y_{1,0}^3\mathcal{B}_L\circ[\mathcal{L}_B,[\mathcal{L}_B,\mathcal{B}_R]](\rho_B)\\&+2\,y_{1,0}^2y_{2,0}\mathcal{B}_L\circ\mathcal{B}_L\circ\mathcal{B}_R\circ\mathcal{B}_R(\rho_B)\\&+|y_{1,0}|^2y_{1,1}\mathcal{B}_D\circ\mathcal{B}_L\circ\mathcal{B}_U\circ\mathcal{B}_R(\rho_B)\\&+y_{1,0}^2y_{1,1}\mathcal{B}_L\circ\mathcal{B}_D\circ\mathcal{B}_U\circ\mathcal{B}_R(\rho_B)\\&-y_{1,0}^2\mathcal{B}_L\circ\mathcal{B}_R\circ\mathcal{L}_{s,2}(\rho_B)+(h.c.),\end{aligned}$$

其中 $\ldots$ 在 $\mathcal{J}_3$ 中，含有 $|m\rangle\langle n|\,(m+n>1)$ 的项不会对 $\mathcal{L}_{s,\ 4}$ 产生贡献。结合 $B=\sigma_-$ 和 $\mathcal{L}_B=0$，我们得到式（17）。

附录E：方程（17）的性质

在本附录中，我们讨论由式（ $\mathcal{L}_s^{G=0}$17）定义的 的若干性质。

1. 谱

我们先计算 $\mathcal{L}_s^{G=0}$的谱。令 I_B为 $\mathscr{H}_B$ 上的单位矩阵（二维单位矩阵），集合 $\{I_B/\sqrt{2},\sigma_x/\sqrt{2},\sigma_y/\sqrt{2},\sigma_z/\sqrt{2}\}$ 在希尔伯特-施密特内积下构成一组标准正交基。令 $[\mathcal{L}_s^{G=0}]$ 为 $\mathcal{L}_s^{G=0}$在该基下的 4×4 矩阵表示。它为

$$[\mathcal{L}_s^{G=0}]=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&-1/T_2&-\omega_B^{(4)}&0\\0&\omega_B^{(4)}&-1/T_2&0\\R_z/T_1&0&0&-1/T_1\end{pmatrix},\qquad\text{(E1)}$$

其中 $1/T_1=\gamma_-^{(4)}+\gamma_+^{(4)}$、$1/T_2=1/(2T_1)+2\gamma_\phi^{(4)}$，且$R_z=-(\gamma_-^{(4)}-\gamma_+^{(4)})\,T_1$。由此，$\mathcal{L}_s^{G=0}$的谱为 $\{0,-1/T_2+i\omega_B^{(4)},-1/T_2-i\omega_B^{(4)},-1/T_1\}$。

2. 正性

接下来我们证明，即使在 $\gamma_\phi^{(4)}<0$ 的情况下，时间演化映射仍是正的。为此，我们引入布洛赫向量 $\boldsymbol{r}(t)=(r_x(t)\ r_y(t)\ r_z(t))^{\top}\in\mathbb{R}^3$，它与偏迹的关系为 $\rho_B(t)=(I_B+\sum_{i=x,y,z}r_i(t)\sigma_i)/2$。由式（17）可知，布洛赫向量的演化为

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}r_x(t)&=-\frac{r_x(t)}{T_2}-\omega_B^{(4)}r_y(t),\\\frac{d}{dt}r_y(t)&=-\frac{r_y(t)}{T_2}+\omega_B^{(4)}r_x(t),\\\frac{d}{dt}r_z(t)&=-\frac{1}{T_1}(r_z(t)-R_z).\end{aligned}$$

这些方程表明，R_z 是 $r_z(t)$的渐近值，即 $\lim_{t\to\infty}\boldsymbol{r}(t)=(0,0,R_z)^{\top}$。它们还推出

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{r}^2(t)=-2\Big(\frac{\boldsymbol{r}^2(t)-r_z^2(t)}{T_2}+\frac{r_z(t)(r_z(t)-R_z)}{T_1}\Big).$$

当且仅当 $\boldsymbol{r}^2(t)\le 1$时，偏迹 $\rho_B(t)$ 是半正定的。若在约束条件 $\boldsymbol{r}^2(t)=1$ 下，对任意 t，我们有 $(d/dt)\boldsymbol{r}^2(t)<0$，则沿时间演化，$\boldsymbol{r}^2(t)$ 不超过 1，因此正性得以保持。将 $\boldsymbol{r}^2(t)=1$ 代入上述方程，可得

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\boldsymbol{r}^2(t)=\\&-\frac{2}{\Delta T}\Big[\Big(r_z(t)-\frac{\Delta T}{2T_1}R_z\Big)^2+(\Delta T)^2(\gamma_-^{(4)}\gamma_+^{(4)}-4(\gamma_\phi^{(4)})^2)\Big],\end{aligned}$$

其中 $1/\Delta T = 1/T_1 - 1/T_2 = (\gamma_-^{(4)} + \gamma_+^{(4)})/2 - 2\gamma_\phi^{(4)}$。当 $|g|/\gamma \ll 1$时，我们有 $\gamma_\pm^{(4)} \gg |\gamma_\phi^{(4)}|$。由此得到 $\Delta T > 0$ 且 $\gamma_-^{(4)}\gamma_+^{(4)} > 4(\gamma_\phi^{(4)})^2$。因此，只要 $\boldsymbol{r}^2(t) = 1$，就有 $(d/dt)\boldsymbol{r}^2(t) < 0$。这证明，即使 $\gamma_\phi^{(4)}$ 为负值，时间演化映射仍然是正的。

3. 与 Kraus映射的不相容性

根据附录 E1中的结果，时间演化映射 $\exp(\mathcal{L}_s^{G=0}t)$ 的谱为$\{1, \exp(-t/T_2 + i\omega_B^{(4)}t), \exp(-t/T_2 - i\omega_B^{(4)}t), \exp(-t/T_1)\}$. 这里我们证明，当 $\gamma_\phi^{(4)} < 0$ 且时间 t无穷小时，不存在谱由该集合给出的 Kraus映射。为此，我们使用 [31], 中的定理，该定理已在第IV节中明确给出。令 Λ 为时间演化映射 $\exp(\mathcal{L}_s^{G=0}t)$ 的谱，即

$$\Lambda = \{1, e^{-t/T_2 + i\omega_B^{(4)}t}, e^{-t/T_2 - i\omega_B^{(4)}t}, e^{-t/T_1}\}.$$

我们回顾一下，T_1 和 T_2 定义在式 (E1) 下方。容易验证，Λ 在复共轭运算下封闭。为了考察条件式 (18)，注意根据定义，$\{s_i\}$ 现在均为正。在这种情况下，假设 $s_1 \geq s_2 \geq s_3$，条件式 (18) 可写为 $s_1 \leq 1$和 $s_1 + s_2 \leq 1 + s_3$ （见 [31]）。当 $\gamma_\phi^{(4)} < 0$时，我们总有 $1/T_1 > 1/T_2$，且对于 $t > 0$，$\exp(-t/T_2) > \exp(-t/T_1)$。因此，我们令 $s_1 = s_2 = \exp(-t/T_2)$，并令$s_3 = \exp(-t/T_1)$。这样，虽然第一个条件 $s_1 \leq 1$总是满足的，但第二个条件为

$$2e^{-t/T_2} \leq 1 + e^{-t/T_1}, \tag{E2}$$

并非平凡。对于无穷小时间 t 使得 $\exp(-t/T_i) \simeq 1 - t/T_i$ $(i = 1,2)$，该条件可写为$\gamma_\phi^{(4)} \geq 0$，且当 $\gamma_\phi^{(4)} < 0$时，该条件不成立。因此，当 18式的条件在 $\gamma_\phi^{(4)} < 0$ 且无穷小时间为 t 时不满足，证明完毕。

附录 F：具有乘积初态和完全正性的精确主方程

如式（20）后所述，当初态为乘积态时，偏迹的时间演化通常是完全正的。本文发现的完全正性违背源于绝热消除过程中被舍弃的瞬态动力学。我们预计，考虑短时区间后，完全正性将得以恢复。本附录将验证这一预期。为此，我们考虑第 III 节讨论的量子多能级系统，并推导初态为乘积态时偏迹的精确主方程。

为了推导主方程，我们首先计算偏迹的时间演化。利用方程（11），总密度矩阵在乘积初态 $\rho(0) = \rho_A \otimes \rho_B(0)$（其中 ρ_A 的初态固定为 $\mathscr{H}_A$）下的演化为

$$\begin{aligned}\rho(t) &= e^{\mathcal{L}_{\rm tot}t}(\rho_A \otimes \rho_B(0)) \\ &= \sum_{m,n=1}^{d} e^{\mathcal{L}_A^{(m,n)}t}(\rho_A) \otimes E_m \rho_B(0) E_n.\end{aligned}$$

对该方程取迹$_A$ 后，我们得到偏迹的演化

$$\rho_B(t) = \sum_{m,n=1}^{d} [\mathcal{T}_{B,t}]_{m,n} E_m \rho_B(0) E_n, \tag{F1}$$

其中 $[\mathcal{T}_{B,t}]_{m,\,n} = \mathrm{tr}_A \circ \exp(\mathcal{L}_A^{(m,n)}t)(\rho_A)$。根据 $(\mathcal{L}_A^{(m,n)}(A))^\dagger = \mathcal{L}_A^{(n,m)}(A^\dagger)$，由 $\mathcal{L}_A^{(m,n)}$ 的定义可直接证明，系数满足$[\mathcal{T}_{B,t}]^*_{m,\,n} = [\mathcal{T}_{B,t}]_{n,\,m}$。这一关系保证了 $\rho_B(t)$的厄米性质。此外，由于 $\mathcal{L}_A^{(m,m)}$ 是一个 Lindbladian，迹保持性意味着 $[\mathcal{T}_{B,t}]_{m,\,m} = \mathrm{tr}_A(\rho_A) = 1$。这保证了偏迹 $\mathrm{tr}_B(\rho_B(t)) = 1$ 的迹保持性，其中 tr_B 表示对 $\mathscr{H}_B$取迹。

下文中，我们假设 $[\mathcal{T}_{B,t}]_{m,\,n} \neq 0$ 对任意m、$n = 1$、……、d 以及 $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$均成立。在此假设下，偏迹的主方程可写成紧凑形式：

$$\frac{d}{dt}\rho_B(t) = \sum_{m,n=1}^{d} \lambda_{m,n}(t) E_m \rho_B(t) E_n, \tag{F2}$$

其中 $\lambda_{m,\,n}(t) = (d/dt)\ln([\mathcal{T}_{B,t}]_{m,\,n})$。经过远长于快子系统衰减时间的时间后，$[\mathcal{T}_{B,t}]_{m,\,n}$ 的时间依赖由 $\mathcal{L}_A^{(m,n)}$ 中实部最接近零的本征模决定。在附录 B1中，我们将具有这一性质的模定义为 $k = 1$。因此，$[\mathcal{T}_{B,t}]_{m,\,n}$ 的时间依赖渐近地表示为$[\mathcal{T}_{B,t}]_{m,\,n} \propto \exp(\lambda_{m,\,n}t)$，由此可得

$$\lim_{t\to\infty} \lambda_{m,n}(t) = \lambda_{m,n}. \tag{F3}$$

换言之，尽管弛豫完成前主方程（F2）显式依赖于时间，但其渐近形式与绝热消除中的演化方程（13）一致。

根据$[\mathcal{T}_{B,t}]_m$的性质，$_n$ 由上文推导可得$\lambda_{m,\,n}(t)^* = \lambda_{n,\,m}(t)$ 以及$\lambda_{m,\,m}(t)$。$= 0$与方程（C14）一样，因此，方程（F2）可重写为

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\rho_B(t) = \\ -\Big[\sum_{\substack{m,n=1\\(m<n)}}^{d}\sum_{k=1}^{d-1} \frac{\lambda_{m,n}(t) - \lambda^*_{m,n}(t)}{2d}(S_{m,k} - S_{n,k})\tau_k, \rho_B(t)\Big] \\ + \sum_{k,l=1}^{d-1}(S^\top \lambda(t) S)_{k,l}\Big[\tau_k \rho_B(t) \tau_l - \frac{1}{2}(\tau_l\tau_k\rho_B(t) + \rho_B(t)\tau_l\tau_k)\Big],\end{aligned} \tag{F4}$$

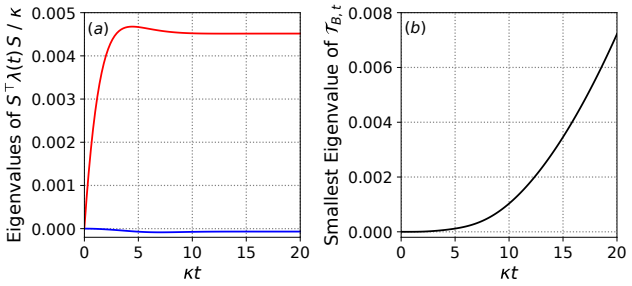


图6：量子比特-量子三能级系统的精确主方程中的系数，以及完全正性的确认，其中 $(\chi_1,\ \chi_2,\ \chi_3) = (0,\ \chi,\ 2\chi)$，$\chi/\kappa = 0.1$，$\Omega/\kappa = 0.5$，以及$\Delta/\kappa = 0.5$。（$a$）精确主方程中耗散算符前的时变系数。根据式（F4），我们通过矩阵 $S^\top\lambda(t)S$ 的特征值计算出这些系数。较大的特征值（红色曲线）始终为正，而较小的特征值（蓝色曲线）为负。（b）矩阵 $\mathcal{T}_{B,\ t}$ 的最小特征值。该值非负这一事实表明，时间演化映射是完全正的（见正文）。

其中，矩阵 $\lambda(t)$ 由 $[\lambda(t)]_{m定义,\ n} = \lambda_{m,\ n}(t)$。注意，$S^\top\lambda(t)S$的特征值对应于衰减率，现在取决于时间。

作为一个具体示例，我们考虑一个与耗散量子比特耦合的三能级量子比特（$d = 3$），该耗散量子比特由方程（10）描述。我们关注这样一组参数：在这组参数下，慢动力学中的（完全）正性遭到破坏。根据图 2，例如，当 $(\chi_1,\chi_2,\chi_3) = (0,\chi,2\chi)$、$\chi/\kappa = 0.1$、$\Omega/\kappa = 0.5$且$\Delta/\kappa = 0.5$时，会发生这种破坏；我们的模拟采用了这些数值。我们假设 ρ_A 是 $\mathcal{L}_A$的唯一稳态，也就是说，初态位于无耦合时的不变流形上。在模拟中，我们根据 $\mathcal{L}_A$ 的右特征向量计算了ρ_A ，所对应的特征值与零最接近。给定稳态 ρ_A后，我们在向量化表示$[\mathcal{T}_{B,t}]_m$中计算了$[\mathcal{T}_{B,t}]_{m,n}$ $\exp(\hat{\mathcal{L}}_A^{(m,n)}t)\,|\rho_A\rangle\!\rangle$，其中矩阵指数 $\exp(\hat{\mathcal{L}}_A^{(m,n)}t)$ 直接使用 SciPy 函数求得。我们确认，在所研究的时间范围内（$0 \le \kappa t \le 20$），对于 $m,n = 1$中的 2、3，$[\mathcal{T}_{B,t}]_{m,\ n} \neq 0$ 均成立。最后，我们在离散形式λ_m中计算了系数 $\{\lambda_{m,n}(t)\}$ $(\ln([\mathcal{T}_{B,t+\delta t}]_{m,n}) - \ln([\mathcal{T}_{B,t}]_{m,n}))/\delta t$，其中 $\kappa\delta t = 10^{-2}$。

图6 (a)展示了系数矩阵 $S^\top\lambda(t)S$ 的两个特征值随时间的变化。如预期，经过 $\kappa t \simeq 10$后，特征值变为常数。我们在这个长时间区间内数值检验了关系式 Eq. (F3)。蓝色曲线所示的一个特征值始终为负。这种负性在渐近极限下导致了第III节中发现的（完全）正性违背。另一方面，包含瞬态区间的时间演化映射（在当前设置中为 $0 \le \kappa t \le 10$ ）是完全正的。为对此进行数值验证，我们考察时间演化映射的 Choi矩阵。由 Eq. (F1)可得 $\sum_{m,\ n=1}^{d}[\mathcal{T}_{B,t}]_{m,n}\ |E_m\rangle\!\rangle\langle\!\langle E_n|$。如图所示

附录C中指出，当且仅当该矩阵为正半定时，时间演化映射才是完全正的。由于 $\{|E_m\rangle\!\rangle\}_{m=1,2,3}$ 是一个正交归一集，我们只需考察矩阵 $\mathcal{T}_{B,t} \in \mathbb{C}^{3\times3}$的性质，其 mn个元素为 $[\mathcal{T}_{B,t}]_{m,n}$ $(m,n = 1,2,3)$。在图6 (b)中，我们展示了$\mathcal{T}_{B,t}$沿时间演化的最小特征值。正如预期，该值非负。因此，在这个例子中，即使包含瞬态区间，时间演化映射仍然是完全正的。

附录G：一般类设置下的 $\mathcal{K}$ 和 $\mathcal{L}_s$

在本附录中，我们考虑第II 节（$\mathcal{L}_B$ 和 $\mathcal{L}_{\rm int}$ 均假定仅包含哈密顿量项），并计算 $\mathcal{K}$ 的二阶展开以及$\mathcal{L}_s$的三阶展开。这些内容旨在阐明并扩展[29]中的结果。与 [29]，一样，我们将相互作用记为 $\mathcal{L}_{\rm int}(\rho) = -i[H_{\rm int},\rho]$，其中 $H_{\rm int} = \sum_k A_k^\dagger \otimes B_k = \sum_k A_k \otimes B_k^\dagger$。有时，我们会将第IV 节中的振子-量子比特系统作为具体示例。

1. $\mathcal{K}$的二阶展开

在[29], 的定理 6 中，针对一般类设置计算了 $\mathcal{K}$的二阶展开。该定理指出，总存在某些规范选择，使得 $\mathcal{K}$ 在展开阶数内是完全正的。尽管没有明确证明，该结果还意味着，对于偏迹， $\mathcal{K}$ 始终不是完全正的。在此，我们重复这一计算，以阐明这一点，并找出一类能够导出完全正 $\mathcal{K}$的规范超算符的具体形式。

我们首先概述计算的步骤。方程（A3）的右端无迹，因此通常具有以下形式

$$\bar\rho_A \otimes \mathcal{L}_{s,n}(\rho_s) - \mathcal{L}_n(\rho_s) = \mathcal{S}(X_1\bar\rho_A)\otimes\mathcal{B}_1(\rho_s) + \mathcal{S}(\bar\rho_A X_2)\otimes\mathcal{B}_2(\rho_s) + \mathcal{S}(X_3\bar\rho_A X_4)\otimes\mathcal{B}_3(\rho_s),$$

其中，超算符 $\mathcal{S}$ 定义为 $\mathcal{S}(X) = X - \text{迹}_A(X)\bar\rho_A$，$\{X_i\}_{i=1,\ 2,\ 3,\ 4}$ 是作用于 $\mathscr{H}_A$上的算符，而$\{\mathcal{B}_j\}_{j=1,\ 2,\ 3}$ 是作用于 $\mathscr{H}_B$上的超算符。于是，方程（A4）可写为

$$\mathcal{K}_n^G(\rho_s) = \mathcal{L}_A^+(\mathcal{S}(X_1\bar\rho_A))\otimes\mathcal{B}_1(\rho_s) + \mathcal{L}_A^+(\mathcal{S}(\bar\rho_A X_2))\otimes\mathcal{B}_2(\rho_s) + \mathcal{L}_A^+(\mathcal{S}(X_3\bar\rho_A X_4))\otimes\mathcal{B}_3(\rho_s) + \bar\rho_A \otimes G_n(\rho_s).$$

关于右侧的第一项和第二项， [24] 的引理 4 中证明了，即使 $\bar\rho_A$ 不是满秩矩阵，也存在 $\{Y_i\}_{i=1,2}$ 使得 $\mathcal{L}_A^+(\mathcal{S}(X_1\bar\rho_A)) = Y_1\bar\rho_A$ 且$\mathcal{L}_A^+(\mathcal{S}(\bar\rho_A X_2)) = \bar\rho_A Y_2$。这些关系对于证明如下所示的 Kraus映射形式至关重要。右侧的第四项表示规范自由度。这里我们将规范选择限制为以下形式，该形式只

修改其他项，而不产生独立项；

$$G_n(\rho_s) = g_1\mathcal{B}_1(\rho_s) + g_2\mathcal{B}_2(\rho_s) + g_3\mathcal{B}_3(\rho_s),$$

其中 $g_i \in \mathbb{C}$ (i = 1,2,3)。重新定义 Y_i ，使 g_i项在 $i = 1$, 2 时被吸收，我们得到

$$\mathcal{K}_n^G(\rho_s) = Y_1\bar{\rho}_A \otimes \mathcal{B}_1(\rho_s) + \bar{\rho}_A Y_2 \otimes \mathcal{B}_2(\rho_s) + Z \otimes \mathcal{B}_3(\rho_s),$$

with

$$Y_1\bar{\rho}_A = \mathcal{L}_A^+(\mathcal{S}(X_1\bar{\rho}_A)) + g_1\bar{\rho}_A,$$

$$\bar{\rho}_A Y_2 = \mathcal{L}_A^+(\mathcal{S}(\bar{\rho}_A X_2)) + g_2\bar{\rho}_A,$$

and

$$Z = \mathcal{L}_A^+(\mathcal{S}(X_3\bar{\rho}_A X_4)) + g_3\bar{\rho}_A.$$

利用这些公式，我们可以计算一阶和二阶贡献如下；

$$\mathcal{K}_1^G(\rho_s) = -i\sum_k (F_k \otimes B_k^\dagger)(\bar{\rho}_A \otimes \rho_s) + (h.c.), \tag{G1}$$

and

$$\begin{aligned}\mathcal{K}_2^G(\rho_s) = i\sum_k V_k\bar{\rho}_A \otimes (\mathcal{C}_B^k(\rho_s) - \mathcal{L}_B(B_k^\dagger)\rho_s) \\ +i\sum_k (V_k \otimes \mathcal{L}_B(B_k^\dagger))(\bar{\rho}_A \otimes \rho_s) \\ -\sum_{k,j}\langle A_k^\dagger\rangle (V_j \otimes B_j^\dagger B_k)(\bar{\rho}_A \otimes \rho_s) \\ +\sum_{k,j}(U_{k,j} \otimes B_k B_j^\dagger)(\bar{\rho}_A \otimes \rho_s) \\ -\sum_{k,j} Z_{k,j} \otimes B_k^\dagger\rho_s B_j + (h.c.).\end{aligned} \tag{G2}$$

其中 $\mathcal{C}_B^k(\rho_s) = \mathcal{L}_B(B_k^\dagger\rho_s) - B_k^\dagger\mathcal{L}_B(\rho_s)$。在这些方程中，我们引入了 $\langle A_k\rangle = \mathrm{tr}_A(A_k\bar{\rho}_A)$。 $\mathcal{L}_A$ 的逆导致

$$F_k\bar{\rho}_A = -\mathcal{L}_A^+(\mathcal{S}(A_k\bar{\rho}_A)) + f_k\bar{\rho}_A,$$

$$V_k\bar{\rho}_A = \mathcal{L}_A^+(\mathcal{S}(F_k\bar{\rho}_A)) + v_k\bar{\rho}_A,$$

$$U_{k,j}\bar{\rho}_A = \mathcal{L}_A^+(\mathcal{S}(A_k^\dagger F_j\bar{\rho}_A)) + u_{k,j}\bar{\rho}_A,$$

and

$$Z_{k,j} = \mathcal{L}_A^+(\mathcal{S}(F_k\bar{\rho}_A\bar{A}_j^\dagger)) - z_{k,j}\bar{\rho}_A,$$

其中 $\bar{A}_j = A_j - \langle A_j\rangle I_A$。规范超算符设定为

$$G_1(\rho_s) = -i\sum_k f_k B_k^\dagger\rho_s + (h.c.),$$

and

$$G_2(\rho_s) = i\sum_k v_k\mathcal{C}_B^k(\rho_s) - \sum_{k,j}\langle A_k^\dagger\rangle v_j B_j^\dagger B_k\rho_s + \sum_{k,j} u_{k,j}B_k B_j^\dagger\rho_s + \sum_{k,j} z_{k,j}B_k^\dagger\rho_s B_j + (h.c.).$$

当 $\mathcal{L}_B$ 仅包含哈密顿量项时， $\mathcal{C}_B^k(\rho_s) = \mathcal{L}_B(B_k^\dagger)\rho_s$ 且方程（G2）右侧的第一行消失。因此，在下文中我们忽略这一项。

Note

$$\sum_{k,j} Z_{k,j} \otimes B_k^\dagger\rho_s B_j + (h.c.) = \sum_{k,j}(Z_{k,j} + Z_{j,k}^\dagger) \otimes B_k^\dagger\rho_s B_j,$$

其中

$$Z_{k,j} + Z_{j,k}^\dagger = \mathcal{L}_A^+(\mathcal{S}(F_k\bar{\rho}_A\bar{A}_j^\dagger + \bar{A}_k\bar{\rho}_A F_j^\dagger)) - (z_{k,j} + z_{j,k}^*)\bar{\rho}_A.$$

当 $\mathcal{L}_A$ 由式(2)给出时，文献 [29] 指出，右侧的 $\mathcal{L}_A^+$ 部分为

$$\mathcal{L}_A^+(\mathcal{S}(F_k\bar{\rho}_A\bar{A}_j^\dagger + \bar{A}_k\bar{\rho}_A F_j^\dagger)) = \mathcal{S}(F_k\bar{\rho}_A F_j^\dagger) - \mathcal{L}_A^+(\sum_\mu [L_{A,\mu}, F_k]\bar{\rho}_A[L_{A,\mu}, F_j]^\dagger).$$

将所有项合并后，最终得到保留至 ϵ 的二阶项的结果：

$$\begin{aligned}\mathcal{K}^G(\rho_s) = W(\bar{\rho}_A \otimes \rho_s)W^\dagger \\ -\epsilon^2\mathcal{L}_A^+\Big(\sum_\mu P_\mu(\bar{\rho}_A \otimes \rho_s)P_\mu^\dagger\Big) \\ +\epsilon^2\sum_{k,j}\mu_{k,j}(I_A \otimes B_k^\dagger)(\bar{\rho}_A \otimes \rho_s)(I_A \otimes B_j),\end{aligned} \tag{G3}$$

其中 $W = I_A \otimes I_B - i\epsilon M + \epsilon^2 N$, $M = \sum_k F_k \otimes B_k^\dagger$, $N = \sum_{k,j}(U_{k,j} \otimes B_k B_j^\dagger - \langle A_k^\dagger\rangle V_j \otimes B_j^\dagger B_k) + i\sum_k V_k \otimes \mathcal{L}_B(B_k^\dagger)$, $P_\mu = \sum_k [L_{A,\mu}, F_k] \otimes B_k^\dagger$ ，以及 $\mu_{k,j} = z_{k,j} + z_{j,k}^* - \mathrm{tr}_A(F_k\bar{\rho}_A F_j^\dagger)$。第二行是完全正的，因为根据 [24] 的引理 1， $-\mathcal{L}_A^+$ 是一个完全正映射。因此，当且仅当矩阵 μ （其元素定义为 $[\mu]_{k,j} = \mu_{k,j}$）是半正定时， $\mathcal{K}^G$ 才是完全正的。

偏迹参数化对应于 $G_1 = G_2 = 0$，因此 $z_{k,j} = 0$。在这种情况下， $\mu_{k,j} = -\mathrm{tr}_A(F_k^\dagger\bar{\rho}_A F_j)$，且它是负半定的。由此可知， $\mathcal{K}^{G=0}$ 始终是一个非完全正映射。另一方面，如果令

$$z_{k,j} = \frac{z}{2}\mathrm{tr}_A(F_k\bar{\rho}_A F_j^\dagger), \tag{G4}$$

在 $z \in \mathbb{R}_{\geq 1}$ 下，矩阵 μ 是半正定的。因此，始终存在能够确保 $\mathcal{K}^G$完全正性的规范选择。

$\mathcal{K}^G$ 的完全正性不受 f_k、 v_k和 u_k、$_j$取值的影响，均可实现。然而，若令 $f_k = v_k = u_k$、$_j$ =为 0，则 $G(\rho_s)$ $= \rho_s + \sum_k$、 $_j(z_k$ 、 $_j + z_j^*$ 、 $_k)B_k^\dagger \rho_s B_j$，且 $\mathcal{K}$ 不保持迹。恢复迹保持的最简单规范选择是 $f_k = v_k = 0$ 和u_k、$_j = -z_j$、$_k$。根据式 (G4)，规范超算符为

$$G(\rho_s) = \epsilon^2 z \sum_{k,j} \mathrm{tr}_A(F_k \bar{\rho}_A F_j^\dagger)(B_k^\dagger \rho_s B_j - \frac{1}{2}\{B_j B_k^\dagger, \rho_s\}). \tag{G5}$$

2. $\mathcal{K}^{G=0}$的纠缠与非正性

虽然 $\mathcal{K}^{G=0}$ 不是完全正的，但尚不确定它是否具有正性。为了解决这一问题，我们首先考虑第IV节中的振子-量子比特系统作为示例。利用公式（G3）， $\mathcal{K}^{G=0}$ 在二阶展开下，在此情况下由公式（22）给出。为说明它不是正的，令 $|0\rangle \in \mathscr{H}_A$ 为振子的真空态，并令 $|\psi\rangle \in \mathscr{H}_B$ 为一个态。关于 $\mathcal{K}^{G=0}$ 的矩阵元 $|0,\ \psi\rangle =$ $|0\rangle \otimes |\psi\rangle$ 为

$$\langle 0,\psi|\mathcal{K}^{G=0}(\rho_B)|0,\psi\rangle = \langle 0|\bar{\rho}_A|0\rangle \Big[\Big(1 + \frac{4g^2 n_{\mathrm{th}}}{\gamma^2}\Big)\langle\psi|\rho_B|\psi\rangle - \frac{4g^2(1+n_{\mathrm{th}})}{\gamma^2}\langle\psi_+|\rho_B|\psi_+\rangle - \frac{4g^2 n_{\mathrm{th}}^2}{\gamma^2(1+n_{\mathrm{th}})}\langle\psi_-|\rho_B|\psi_-\rangle\Big].$$

其中 $|\psi_\pm\rangle = \sigma_\pm|\psi\rangle$。如果 ρ_B 是纯态，则其核非空。设 $|\psi\rangle$ 属于 ρ_B的核，即 $\rho_B|\psi\rangle = 0$。由于 $\langle\psi_+|\rho_B|\psi_+\rangle$ 或 $\langle\psi_-|\rho_B|\psi_-\rangle$中至少一个非零，我们得到 $\langle 0,\psi|\mathcal{K}^{G=0}(\rho_B)|0,\psi\rangle < 0$。因此， $\mathcal{K}^{G=0}$ 不是正的。

为了将分析推广到更一般的一类情形，我们注意到一个关于赋值映射的定理。该定理最初针对量子比特约化系统在 [42] 中得到证明，随后在 [45]中被推广。采用第 V节中的记号，设 $\Phi: \mathscr{D}(\mathscr{H}_B) \to \mathscr{D}(\mathscr{H}_A \otimes \mathscr{H}_B)$ 是一个将 $\mathscr{H}_B$ 中的约化态赋给 $\mathscr{D}(\mathscr{H}_A \otimes \mathscr{H}_B)$ 中总态的映射。那么，以下陈述等价:

- Φ 是线性的、一致的（$\mathrm{tr}_A \circ \Phi = \mathcal{I}_B$），且为正的（对于每个 $\rho_B \in \mathscr{D}(\mathscr{H}_B)$，$\Phi(\rho_B) \in \mathscr{D}(\mathscr{H}_A \otimes \mathscr{H}_B)$）。

  对于每个 $\rho_B \in \mathscr{D}(\mathscr{H}_B)$，$\bullet(\rho_B) = \rho_A \otimes \rho_B$，其中 $\rho_A \in \mathscr{D}(\mathscr{H}_A)$ 与 ρ_B 无关。

现在我们将该定理应用于 $\mathcal{K}^{G=0}$。由于它是线性且一致的， $\mathcal{K}^{G=0}$ 为正当且仅当 $\mathscr{M}_{\mathrm{inv}}$可由在 $\mathscr{D}(\mathscr{H}_A)$ 上具有固定态的乘积态刻画。由于相互作用项， $\mathscr{M}_{\mathrm{inv}}$ 在二阶展开中通常包含纠缠态。因此，相应的 $\mathcal{K}^{G=0}$ 不是正的。

有人可能会认为，在 ϵ 的一阶展开中也应得到非乘积态。关于这一点，我们指出， $\mathcal{K}^{G=0}$ 的一阶展开为（见式（G3））

$$\mathcal{K}^{G=0}(\rho_B) = \bar{\rho}_A \otimes \rho_B - i\epsilon(M(\bar{\rho}_A \otimes \rho_B) - (\bar{\rho}_A \otimes \rho_B)M^\dagger), \tag{G6}$$

其中 M 满足 $\mathrm{tr}_A(M\bar{\rho}_A) = 0$。与上述定理一致，这不是正的。这里我们指出，这可以改写为

$$\mathcal{K}^{G=0}(\rho_B) = (I_A \otimes I_B - i\epsilon M)(\bar{\rho}_A \otimes \rho_B)(I_A \otimes I_B - i\epsilon M)^\dagger - \epsilon^2 M(\bar{\rho}_A \otimes \rho_B)M^\dagger. \tag{G7}$$

在一阶展开的精度范围内，我们可以忽略第三行，从而得到 $\mathcal{K}^{G=0}$ 的 Kraus映射形式。由于忽略第三行会在 ϵ^2 阶违背一致性，这一结果也并不与上述定理矛盾。另一方面，在二阶展开中，存在一个在该精度范围内无法消除的负项。这导致 $\mathcal{K}^{G=0}$ 的正性违背。

3. $\mathcal{L}_s$ 的三阶展开

虽然由一阶展开得到的映射 $\mathcal{K}^{G=0}$ ，即方程(G6)，并非完全正，但根据方程(G7)对其进行改写后可见，非正性只会产生一个 ϵ^2 阶的项。这说明了为什么必须始终将二阶贡献纳入其中，才能得到林德布拉德形式，如 [24] 所示。

$\mathcal{K}^{G=0}$ 在二阶时的非正性表明，三阶展开及更高阶展开可能存在问题。对于振子-量子比特系统，三阶贡献 $\mathcal{L}_{s\,3}^{G=0}$，为零，而非 Lindblad 形式则由四阶展开得到。即使 $\mathcal{L}_{s\,3}^{G=0}$，不为零，[29] 中的定理 9也已证明，如果相互作用哈密顿量包含一个张量积项，且二阶贡献不为零，那么$\mathcal{L}_s^{G=0}$在三阶展开以内仍具有林德布拉德形式。这里我们考虑相互作用哈密顿量为一般形式 $H_{\mathrm{int}} = \sum_k A_k^\dagger \otimes B_k = \sum_k A_k \otimes B_k^\dagger$ 时的三阶展开。

由于 $\mathrm{tr}_A \circ \mathcal{K}_n^{G=0} = 0\,(n = 1, 2, \ldots)$，由式（A2）可得，$\mathcal{L}_{s\,n}^{G=0}(\rho_B) = \mathrm{tr}_A\Big((\mathcal{I}_A \otimes \mathcal{L}_B + \mathcal{L}_{\mathrm{int}})(\mathcal{K}_{n-1}^{G=0}(\rho_B))\Big)$。结合式（5）、（G1）和（G2），我们得到 $\{\mathcal{L}_{s,n}^{G=0}\}_{n=1,\ 2,\ 3}$ 为

$$\mathcal{L}_{s,1}^{G=0}(\rho_B) = -i\sum_k \langle A_k\rangle\, B_k^\dagger\, \rho_B + (h.c.),$$

$$\mathcal{L}_{s,2}^{G=0}(\rho_B) = \sum_{j,k} \langle A_j^\dagger F_k\rangle\, [B_k^\dagger \rho_B, B_j] + (h.c.),$$

$$\mathcal{L}_{s,3}^{G=0}(\rho_B) = -\sum_{j,k} \langle A_j^\dagger V_k \rangle \left[\mathcal{L}_B(B_k^\dagger)\rho_B, B_j\right] - \sum_{i,j,k} i \langle A_i^\dagger V_j \rangle \langle A_k^\dagger \rangle \left[B_j^\dagger B_k \rho_B, B_i\right] + \sum_{i,j,k} i \langle A_i^\dagger U_{k,j} \rangle \left[B_k B_j^\dagger \rho_B, B_i\right] - \sum_{i,j,k} i \mathrm{tr}_A(A_i^\dagger Z_{k,j})[B_k^\dagger \rho_B B_j, B_i] + (h.c.).$$

由于 $\mathcal{L}_s^{G=0}$保持厄米性且迹为零，我们只需关注耗散部分，以判断 $\mathcal{L}_s^{G=0}$是否为 Lindbladian。$\mathcal{L}_{s\,2}^{G=0}$的耗散部分为 $\sum_{j,k} \eta_{k,j} B_k^\dagger \rho_B B_j$，其中 $\eta_{k,j} = \langle A_j^\dagger F_k \rangle + \langle A_k^\dagger F_j \rangle^*$。如 [24], 中所证明的，由 $[\eta]_{k,j} = \eta_{k,j}$ 定义的矩阵 η 通常是半正定的。$\mathcal{L}_{s\,3}^{G=0}$的耗散部分为 $\sum_k (Q_k^\dagger \rho_B B_k + B_k^\dagger \rho_B Q_k)$，其中 $Q_k^\dagger = -\sum_i \langle A_k^\dagger V_i \rangle [\mathcal{L}_B($ $B_i^\dagger) + i \sum_j \langle A_j^\dagger \rangle B_i^\dagger B_j] + i \sum_{i,j} [\langle A_k^\dagger U_{i,j} \rangle + \mathrm{tr}_A(A_i^\dagger (Z_j,$ $_k + Z_{k,j}^\dagger))] B_i B_j^\dagger$。若假设 η 可逆（或者等价地，η 正定），那么 $\mathcal{L}_s^{G=0}$的耗散部分写至 ϵ的三阶为

$$\sum_{j,k} \eta_{k,j} R_k^\dagger \rho_B R_j,$$

其中 $R_k^\dagger = \epsilon B_k^\dagger + \epsilon^2 \sum_j [\eta^{-1}]_{j,\ k} Q_j^\dagger$。因此，$\mathcal{L}_s^{G=0}$具有林德布拉德形式。

当 η 不可逆时，三阶贡献可能产生一个独立于二阶贡献的新耗散子。关于这类情况的研究仍在进行中。请注意，当 $\mathcal{L}_B$ 和 $\mathcal{L}_{\mathrm{int}}$ 仅包含哈密顿量项时，无论 ϵ 的符号如何，$\mathcal{L}_{\mathrm{tot}}$ 都是一个林德布拉德算符。因此，改变 ϵ 的符号不会影响 $\mathcal{L}_s^{G=0}$ 的结构，因为 $\epsilon \to -\epsilon$。这意味着，三阶产生的新耗散子要么始终包含一个负系数，要么为零。为详细说明这一点，我们考虑一个 $\eta = 0$ 的极端情况。一般来说，我们可以将 Q_k 写成 $Q_k = q_k B_k + Q_k$，其中 q_k 是一个复数，而 Q_k 是作用于 $\mathscr{H}_B$ 上、与 B_k 线性无关的算符。于是，$\mathcal{L}_s^{G=0}$的耗散部分在三阶展开范围内可写为$\epsilon^3 \sum_k [($ $\mathcal{D}[\bar{Q}_k + B_k] - \mathcal{D}[\bar{Q}_k - B_k])/2 + 2\mathrm{Re}(q_k)\mathcal{D}[B_k]]$。一方面，第一个部分带有 Q_k，始终包含一个负系数，且 $\mathcal{L}_s^{G=0}$ 的结构与 ϵ 的符号无关。另一方面，带有 $\mathrm{Re}(q_k)$ 的第二部分会在变换 $\epsilon \to -\epsilon$下改变符号。根据上述讨论，我们预期在 $\eta = 0$ 条件下有 $\mathrm{Re}(q_k) = 0$。然而，我们尚未能够证明这一点。

附录 H：量子失谐与完全正性违背

在第 VC 节中，我们从不变流形上的态所具有的关联角度来解释完全正性违背。为支持这一解释，我们考察不变流形上关联强度与完全正性违背程度之间的关系。我们在此分析中采用第III 节中的量子比特-量子三能级系统。在此情况下，不变流形上的态由式（12）刻画。对于这类双体态，约化动力学的完全正性与量子失谐之间存在密切联系，下一段将对此作进一步阐述。因此，我们以量子失谐作为关联的度量。

在讨论量子失谐的估算方法之前，我们先对完全正的约化动力学与量子失谐之间的联系作几点说明。这些说明旨在补充第VC节中的历史概述。文献[47] 证明，对于哈密顿系统，量子失谐为零意味着约化动力学完全正。就本研究而言，他们的证明可以直接推广到总系统中的任意完全正过程，包括由 Lindblad 生成元描述的时间演化。因此，若不变流形上的所有状态均具有零量子失谐，约化动力学必定完全正。文献[51], 证明，对于形式如式（12）的初态，反过来同样成立，即约化动力学完全正意味着量子失谐为零。这里我们应强调，该条件要求对所有可能的幺正变换，约化动力学都完全正。事实上，文献[51] 中的证明依赖这一点，因为它采用了一种特殊形式的幺正变换，以阐明完全正性对环境算符施加的限制。因此，这一判据仅为充分条件；即使在本研究中观察到约化动力学完全正，也不一定意味着量子失谐为零。举例来说，我们来考虑第III节中的色散耦合量子比特-量子比特系统。如第III B节最后一段所述，生成元 $\mathcal{L}_s^{G=0}$具有林德布拉德形式，因而确保约化动力学完全正。然而，这仅能确认该情况下总系统演化的完全正性，并不能保证所有幺正变换下都完全正。事实上，我们按照下文所述的步骤估算了该情况下的量子失谐，并观察到非零量子失谐。

现在我们深入探讨量子失谐的估算。考虑对 $\mathscr{H}_B$ 进行局域投影测量时，量子态 $\rho \in \mathscr{D}(\mathscr{H}_A \otimes \mathscr{H}_B)$ 的量子失谐（记为 $\delta_B(\rho)$）定义为 [48–50]

$$\delta_B(\rho) = S(\rho_B) - S(\rho) + \min_{\{\Pi_j^B\}} S(A|\{\Pi_j^B\}), \tag{H1}$$

其中 $S(\rho) = -\mathrm{tr}(\rho \ln \rho)$ 为冯·诺依曼熵。

右侧的最后一项 $\min_{\{\Pi_j^B\}} S(A|\{\Pi_j^B\})$ 概括了对子系统$\mathscr{H}_A$ 在对与秩-

1 $\{\Pi_j^B\}$ j =正交

1 ... $\mathscr{H}_B$

投影算符（,,dim( )）相关联的 $\mathscr{H}_B$ 进行测量后的条件熵。条件熵通过以下公式计算

$$S(A|\{\Pi_j^B\}) = \sum_{j=1}^{\dim(\mathscr{H}_B)} p_j S(\rho_{A|\Pi_j^B}),$$

其中， $p_j = \mathrm{tr}(\Pi_j^B \rho)$为标记为 j 的结果出现的概率，$\rho_{A|\Pi_j^B} = \Pi_j^B \rho \Pi_j^B / p_j$ 为相应的测量后态。最小化是在所有可能的投影测量 $\{\Pi_j^B\}$上进行的。

据我们所知，目前尚无高效方法可计算 $\min_{\{\Pi_j^B\}} S(A|\{\Pi_j^B\})$。因此，我们采用蛮力法来估计该最小值，即对投影算子$\{\Pi_j^B\}$进行随机抽样。通过对在 $\mathscr{H}_B$中随机生成的可观测量进行对角化，我们获得一组正交投影算子。设N_{proj} 为所生成可观测量的数量。给定一个状态，我们计算该集合中条件熵的最小值，并据此利用式（H1）估计该状态的量子失谐。由于在实践中对所有正交投影算子 $\{\Pi_j^B\}$ 进行抽样是不可行的，所估计的量子失谐应被视为一个上界。

我们的目标是估算不变流形 $\mathscr{M}_{\mathrm{inv}}$ 的量子失谐代表值，记作 $\delta_B(\mathscr{M}_{\mathrm{inv}})$。为此，我们采用一种直接的方法：在不变流形 $\rho_a \in \mathscr{M}_{\mathrm{inv}}$ $(a = 1, 2, \ldots, N_{\mathrm{state}})$ 上随机抽样N_{state} 个态，然后通过这些态的量子失谐平均值来估算 $\delta_B(\mathscr{M}_{\mathrm{inv}})$；

$$\delta_B(\mathscr{M}_{\mathrm{inv}}) = \frac{1}{N_{\mathrm{state}}} \sum_{a=1}^{N_{\mathrm{state}}} \delta_B(\rho_a). \tag{H2}$$

一组 $\{\rho_a\}$ 可以通过随机生成$\rho_B \in \mathscr{D}(\mathscr{H}_B)$ 并将其代入式(12)来构造。鉴于映射 $\mathcal{K}^{G=0}$ 不是正映射，我们检查 $\mathcal{K}^{G=0}(\rho_B)$ 的特征值，以确保 $\{\rho_a\}$ 均为正半定。

所得的量子失谐如图5左图所示。随机抽样的数量取 $N_{\mathrm{proj}} = N_{\mathrm{state}} = 500$。我们确认，采用更大的$N_{\mathrm{proj}}$ 和 N_{state}时，结果不会发生显著变化。

附录 I：实际应用中的规范选择

第二节中引入的几何表述II 涉及规范自由度。此前，曾提出可以利用规范自由度来恢复生成元的林德布拉德形式$\mathcal{L}_s$。然而，在第四节IV中，我们发现了一个无法实现这种恢复的例子。基于这一背景，本附录探讨规范自由度在实际应用中可能发挥的作用。

在实际应用中，若初态是在约化系统中确定的，则应谨慎处理。对于偏迹参数化，初始约化态的定义域必须限制[45] 为 $\mathrm{tr}_A(\mathscr{M}_{\mathrm{inv}})$（符号见第V 节），通常这是 $\mathscr{D}(\mathscr{H}_B)$的子集。根据线性，将 $\mathcal{K}^{G=0}$的定义域扩展 $\mathscr{D}(\mathscr{H}_B)$（所有密度矩阵）是可行的。然而，这种扩展会导致初始总态不是半正定的，因而不符合物理实际。请注意，$\mathcal{K}^{G=0}$ 通常在二阶展开中不是正的。因此，严格来说，一旦考虑高于二阶的贡献，就必须限制定义域，即使 $\mathcal{L}_s^{G=0}$具有 Lindblad 形式。

为了涵盖 $\mathscr{M}_{\mathrm{inv}}$ 中的所有态，映射$\mathcal{K}^G$: $\mathscr{D}(\mathscr{H}_B) \to \mathscr{M}_{\mathrm{inv}}$ 必须是正且满射的。若 $G = G_{ps}$ 具有这些性质，那么采用这一规范选择的时间演化映射 $\exp(\mathcal{L}_s^{G_{ps}} t)$ 至少能保持正性。事实上，由于 $\mathcal{K}^{G_{ps}}$ 将 $\mathscr{D}(\mathscr{H}_B)$映射到由 $\mathscr{M}_{\mathrm{inv}}$张成的子空间中的所有正态，根据单射性，经 $\exp(\mathcal{L}_s^{G_{ps}} t)$ 得到的非正 ρ_s 也只能映射到由 $\mathscr{M}_{\mathrm{inv}}$张成的空间中的非正 ρ_s。

因此会产生一个问题：一般情况下是否存在这样的 G_{ps} 。据我们所知，只有对于文献 G_{ps} 中的色散耦合双量子比特系[30]统，才证实了 的存在。本附录的其余部分将探讨第 III节介绍的量子比特-量子三能级系统中的这一问题。事实上，我们发现，适用于双量子比特系统的方法并不适用。

与 [30]，中的做法相同，我们考虑以下规范选择；

$$(\mathcal{I}_B + G)(\rho_s) = \sum_{m,n=1}^{d} c_{m,n} E_m \rho_s E_n, \tag{I1}$$

其中，复系数 $c_{m、n}$ 满足 $c^*_{m、n} = c_{n、m}$ 和 $c_{m、m} = 1$ ，分别用于保证 $\mathcal{K}^G$ 的厄米性和迹保持。这是最简单的规范选择之一，因为相应的超矩阵（见附录C）是对角的，即 $\hat{\mathcal{I}}_B + \hat{G} = \sum_{m、n=1}^{d} c_{m、n} E_n \otimes E_m$。从这一表示可以清楚地看出，当且仅当所有系数 $\{c_{m,n}\}$ 均非零时，$(\mathcal{I}_B + G)^{-1}$ 才存在。在这种情况下，可以使用公式 (8) 计算不同规范选择下的 $\mathcal{L}_s$ 。事实上，在公式 (I1) 的形式下，生成元 $\mathcal{L}_s^G$ 与规范选择无关，因为 $\mathcal{L}_s^{G=0}$ 是对角的（见公式 (13)），因此与 $(\mathcal{I}_B + G)$ 对易。

由公式（7）和（12）， $\mathcal{K}^G$ 结合公式（I1）可得

$$\mathcal{K}^G(\rho_s) = \sum_{m,n=1}^{d} c_{m,n} Q_{m,n} \otimes E_m \rho_s E_n.$$

$\{c_{m,n}\}$ 的绝对值受限于 $\mathcal{K}^G$ 必须为正这一条件。另一方面，若取

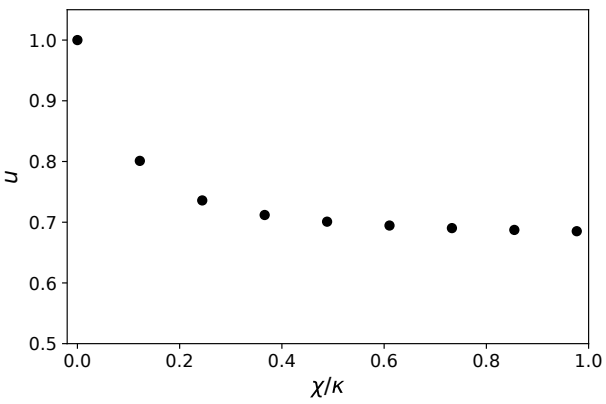


图7：在耦合强度（$(\chi_1, \chi_2, \chi_3) = (0, \chi, 2\chi)$）以量子比特阻尼率为单位时，对于任意三态叠加，确保复合量子比特-量子三能级态正性的最大乘数因子 u，其中 $c_{m,\,n} = u\tilde{c}_{m,\,n}$。该图通过改变 χ 的值，同时固定 $\Omega/\kappa = 0.5$ 和 $\Delta/\kappa = -0.5$ 得到。

过小的值，则会导致 $\mathcal{K}^G$不是满射。因此，问题在于找到它们的最优值，以确保两者都能满射性与正性。我们可以使用任意量子多能级态 ρ_s，对这些系数施加约束，并探索它们所能张成的总态空间。具体而言，若考虑处于 m 与 n 之间两个能级叠加态中的量子多能级系统，我们可以利用 [30] 的结果证明，存在一个最优值 $\tilde{c}_{m,n}$，可同时确保满射性与正性。由于这对任意一对 (m, n) 都成立，人们可能会倾向于选择集合 $\{\tilde{c}_{m,n}\}$ 作为最优集合。然而，值得注意的是，对于 $d > 2$，该集合并不适用，因为它无法确保 $\mathcal{K}^G$ 的正性。换言之，为了在 $u \leq 1$ 下获得正的 $\mathcal{K}^G$，系数必须取小于 $\{\tilde{c}_{m,n}\}$ 的值，即 $c_{m,n} = u\tilde{c}_{m,n}$。例如，对于满足方程（10）的量子比特-量子三能级系统（$d = 3$），我们在图7中绘出了确保 $\mathcal{K}^G$ 正性的 u 最大值。必须取 $u < 1$，这意味着在此规范选择下并非所有量子三能级态都能被涵盖。特别是，某些仅包含两个能级的叠加态要求 $u = 1$。因此，这个反例使我们得出结论：在方程（I 1）给出的对角规范下，当 $d > 2$ 时，不存在任何集合 $\{c_{m,n}\}$ 能够使 $\mathcal{K}^G$ 同时为正且满射。这一结果促使我们考虑非对角规范超算符。目前正在研究这种扩展。

[1] H.-P. Breuer 和 F. Petruccione, *The Theory of OpenQuantum Systems*, （牛津大学出版社，纽约，2002）。[2] M. A. Nielsen 和 I. L. Chuang, *Quantum Computationand Quantum Information*, （剑桥大学出版社，剑桥，2002）。[3] V. Gorini、A. Kossakowski 和 E. C. G. Sudarshan，N 级系统的完全正动力半群，《数学物理杂志》17，821（1976）。[4] G. Lindblad，论量子动力半群生成元，《数学物理通讯》48，119（1976）。[5] T. F. Havel，量子动力半群的 Lindblad、Kraus 和矩阵表示之间转换的稳健方法，《数学物理杂志》44，534（2003）。[6] P. V. Kotovic，奇异摄动技术在控制问题中的应用，《SIAM评论》26，501（1984）。[7] J. I. Cirac，坏腔极限下二能级原子与腔模的相互作用，《物理评论A》46，4354（1992）。[8] H. M. Wiseman 和 G. J. Milburn，场正交分量测量的量子理论，《物理评论A》47，642（1993）。[9] J. J. Garc´ıa-Ripoll、S. D¨urr、N. Syassen、D. M. Bauer、M. Lettner、G. Rempe 和 J. I. Cirac，光学晶格中由耗散诱导的硬核玻色子气体，《新物理学杂志》11，013053（2009）。[10] Flore ntin Reiter 和 Anders S. Sørensen，开放量子系统的有效算符形式，《物理评论A》85，032111（2012）。[11] Igor Lesanovsky 和 Juan P. Garrahan，强相互作用耗散里德伯气体中的动力学约束、层级弛豫与玻璃化的出现，《物理评论快报》111, 215305 (2013). [12] A. Karabanov、D. Wi´sniewski、I. Lesanovsky 和 W. K¨ ockenberger，《将动态核极化视为动力学约束扩散》，《物理评论快报》115, 020404 (2015). [13] T. Tomita、S. Nakajima、I. Danshita、Y. Takasu 和 Y. Takahashi，《观测驱动耗散玻色-哈伯德系统从莫特绝缘体到超流体的交叉》，《科学进展》3, e1701513 (2017). [14] Fran¸cois Damanet、Andrew J. Daley 和 Jonathan Keel- ing，《驱动耗散迪克模型的仅原子描述》，《物理评论A》99, 033845 (2019).[15] Alejandro Vivas-Via˜na、Alejandro Gonz´alez-Tudela 和 Carlos S´anchez Mu˜noz，《通过耗散产生虚态布居的非常规机制》，《物理评论A》106, 012217 (2022).[16]Bo Yang、Bo Xiong、Zilong Liu 和 Bo Zhang，《弱耦合耗散量子系统的有效四阶林德布拉德方程》，《物理快报A》425, 127881 (2022).[17]Daniel Finkelstein-Shapiro、David Viennot、Ibrahim Saideh、Thorsten Hansen、T˜onu Pul- lerits 和 Arne Keller，《开放量子系统的绝热消除与子空间演化》，《物理评论A》101, 042102 (2020).[18]Ibrahim Saideh、Daniel Finkelstein-Shapiro、T˜onu Pullerits 和 Arne Keller，《基于投影的二分开放量子系统绝热消除》，《物理评论A》102, 032212 (2020). [19] E. M. Kessler，《耗散系统的广义施里弗-沃尔夫形式体系》，《物理评论A》86, 012126 (2012).[20]Daniel Burgarth、Paolo Facchi、Hiromichi Nakazato、Saverio Pascazio 和 Kazuya Yuasa,

量子演化中的永恒绝热性，《物理评论A》103, 032214 (2021). [21] Simon B. J¨ager、Tom Schmit、Giovanna Morigi、Mur- ray J. Holland 和 Ralf Betzholz，《与耗散玻色模耦合的量子系统的林德布拉德主方程》，《物理评论快报》129, 063601 (2022). [22] K. Macieszczak、M. Guţˇa、I. Lesanovsky 和 J. P. Gar- rahan，《迈向开放量子动力学亚稳态理论》，《物理评论快报》116, 240404 (2016). [23] P. Zanardi、J. Marshall 和 L. Campos Venuti，《耗散性通用 Lindblad 模拟》，《物理评论A》93, 022312 (2016). [24] R. Azouit、F. Chittaro、A. Sarlette 和 P. Rouchon，《迈向二分开放量子系统的通用绝热消除》，《量子科学与技术》2, 044011 (2017). [25] N. Fenichel，《常微分方程的几何奇异微扰理论》，J. Di. Equations, 31:53-98, (1979). [26] M. Burgelman、P. Forni 和 A. Sarlette，《通过摇动近邻环境实现量子动力学解耦》，J. Franklin Inst 360 14022 (2023).[27] Francois-Marie Le R´egent 和 Pierre Rouchon，《复合开放量子系统的绝热消除：约化模型表述与数值模拟》，《物理评论A》109, 032603 (2024). [28] M. D. Choi，《复矩阵上的完全正线性映射》，《线性代数及其应用》10, 285 (1975). [29] R. Azouit, *Adiabatic elimination for open quantum systems* 2017 ，《博士论文》（）。[30] A. Sarlette、P. Rouchon、A. Essig、Q. Ficheux 和 B. Huard，《光子数测量的任意阶量子绝热消除》，IFACPapersOnLine 53, 250 (2020). [31] M. M. Wolf 和 D. Perez-Garcia，《量子信道的逆特征值问题》，arXiv:quant-ph/1005.4545. [32]M. Tokieda、C. Elouard、A. Sarlette 和 P. Rouchon，《高阶量子绝热消除中的完全正性违背》，IFACPapersOnLine 56, 1333 (2023). [33] A. Essig、Q. Ficheux、T. Peronnin、N. Cottet、R. Lescanne、A. Sarlette、P. Rouchon、Z. Leghtas 和 B. Huard，《多路复用光子数测量》，《物理评论X》11, 031045 (2021). [34] Clemens M¨uller 和 Thomas M. Stace，《利用 Keldysh 图推导林德布拉德主方程：高阶微扰理论中的关联增益与损失》，《物理评论A》95, 013847 (2017). [35] A. G. Redfield，《弛豫过程理论》，IBM J. Res. Deli., 1, 19 (1957). [36] 例如，对于第IV节中的振子-量子比特系统，当参数足够小时，快速弛豫模通常以 $\exp(-\gamma t)$ 的最慢速率衰减。这意味着当 $t=\gamma^{-1}\ln\delta^{-1}$ 时，轨迹与不变流形的距离为 δ。[37] S. Maniscalco、F. I ntravaia、J. Piilo 和 A. Messina，《关于阻尼谐振子非马尔可夫动力学的错误认识与误解》，J. Opt. B: Quantum Semiclass. Opt. 6, S98 (2004). [38] R. S. Whitney，《保持正性：通过微扰主方程超越林德布拉德形式》，《物理学杂志A：数学与理论》41, 175304 (2008). [39] R. Hartmann and W. T. Strunz，《微扰主方程的准确性评估：正视非正性》，《物理评论A》101, 012103 (2020).[40] ´Angel Rivas, Susana F Huelga, and Mar- tin B Plenio，《量子非马尔可夫性：表征、量化与检测》，《物理学进展报告》77, 094001 (2014).[41]Heinz-Peter Breuer, Elsi-Mari Laine, Jyrki Pi- ilo, and Bassano Vacchini，《专题综述：开放量子系统中的非马尔可夫动力学》，《现代物理评论》88, 021002 (2016). [42] P. Pechukas，《约化动力学不必是完全正的》，《物理评论快报》73, 1060 (1994); R. Alicki, *ibid*. 75, 3020 (1995); P. Pechukas. *ibid*. 75, 3021 (1995). [43] Paolo Forni（私人通信）。[44] Peter ˇStelmachoviˇc and Vladim´ır Buˇzek，《与环境初始纠缠的开放量子系统的动力学：超越Kraus表示》，《物理评论A》64, 062106 (2001)。[45] T. F. Jordan, A. Shaji, and E.C.G. Sudarshan，《初始纠缠开放量子系统的动力学》，《物理评论A》70, 052110 (2004). [46] James M. McCracken，《哈密顿复合动力学几乎总会导致约化动力学非正》，《物理评论A》88, 022103 (2013).[47]C´esar A Rodr´ıguez-Rosario, Kavan Modi, Aik-meng Kuah, Anil Shaji, and E C G Sudarshan，《完全正映射与经典关联》，《物理学杂志A：数学与理论》41, 205301 (2008). [48] L. Henderson and V. Vedral，《经典关联、量子关联与总关联》，《物理学杂志A：数学与通论》34, 6899 (2001). [49] Harold Ollivier and Wojciech H. Zurek，《量子失谐：一种量化关联量子性的度量》，《物理评论快报》88, 017901 (2001).[50] Kavan Modi，《量子失谐教学概述》，《开放系统与信息动力学》21, 1440006 (2014). [51] Alireza Shabani and Daniel A. Lidar，《量子失谐消失是完全正映射的必要且充分条件》，《物理评论快报》102, 100402 (2009); *ibid*. 116, 049901 (2016).[52] Aharon Brodutch, Animesh Datta, Kavan Modi, ´Angel Rivas, and C´esar A. Rodr´ıguez-Rosario，《量子失谐消失并非完全正映射的必要条件》，《物理评论A》87, 042301 (2013).[53] Francesco Buscemi，《初始系统-环境关联存在时的完全正性、马尔可夫性与量子数据处理不等式》，《物理评论快报》113, 140502 (2014). [54] G. Kimura，《 N能级系统的布洛赫向量》，《物理快报A》314, 339 (2003). [55] H.-J. Briegel and B.-G. Englert，《量子光学主方程：阻尼基的运用》，《物理评论A》47, 3311 (1993). [56] T. Prosen and T. H. Seligman，《玻色子算符空间上的量子化》，《物理学杂志A：数学与理论》43, 392004 (2010). [57] T. Barthel and Y. Zhang，《求解开放费米子与玻色子系统的准自由及二次林德布拉德主方程》，《统计力学杂志》113101 (2022).