与腔光耦合的悬挂镜的量子态– 摆和转动模的维纳滤波分析 –

Tomoya Shichijo, * Akira Matsumura, † Daisuke Miki, ‡ 和 Yuuki Sugiyama§

Department of Physics, Kyushu University, 744 Motooka, Nishi-Ku, Fukuoka 819-0395, Japan

Nobuyuki Matsumoto¶*Department of Physics, Faculty of Science, Gakushuin University, 1-5-1, Mejiro, Toshima, Tokyo, 171-8588 Japan*

Kazuhiro Yamamoto**Department of Physics, Kyushu University, 744 Motooka, Nishi-Ku, Fukuoka 819-0395, JapanResearch Center for Advanced Particle Physics, Kyushu University, 744 Motooka, Nishi-ku, Fukuoka 819-0395, Japan andInternational Center for Quantum-Field Measurement Systems for Studies of the Universe and Particles (QUP), KEK, Oho 1-1, Tsukuba, Ibaraki 305-0801, Japan*

arXiv:2303.04511v2 [quant-ph] 8 Nov 2023

我们利用维纳滤波研究了连续测量和反馈控制下光机械悬挂镜的量子态。我们重点关注悬挂镜的双模理论对量子态的影响，该量子态由摆模和旋转模描述。在低频范围内，该理论源自与腔光耦合的光束模型，其中包含梁的内摩擦和镜子的有限尺寸效应。我们为双模理论构建了维纳滤波器，并通过利用维纳滤波分析评估条件协方差矩阵来预测量子态。结果表明，多模分析可能在生成量子压缩态方面发挥重要作用。我们还指出，通过适当选择维纳滤波分析中傅里叶空间的范围，单模分析有可能成为一种良好近似。

I. 引言

光机械系统对引力波的基础物理研究，以及宏观量子系统和量子传感，都具有重要贡献（例如， [1–5]）。参考文献 [6–8] 通过实验验证了纳米尺度物体之间会发生量子纠缠。这些研究开创了量子与经典世界之间边界的探索。在宏观尺度上，引力是经典世界的一条基本定律；在广义相对论中，时空曲率本身就是引力。近年来，作为宏观量子系统的引力本质是否遵循量子力学框架 [9]，引起了广泛关注。尽管尚无人验证引力的量子本质，但先进的量子技术未来或许能够实现这一目标 [10–12]。要验证引力的量子本质，我们必须观测处于量子态的物体之间的引力相互作用。因此，由于引力非常微弱，为了开展这项检验，制备大质量物体的量子态至关重要。光机械振子系统是通过桌面实验制备大质量物体量子态的一种有前景的方法 [13–15], ，许多理论研究也聚焦于在发生引力相互作用的机械振子之间产生引力诱导的量子纠缠 [16–21]。为了使光机械系统处于量子态，必须抑制热涨落。连续测量冷却技术已经得到发展，可用于实现这种量子态 [13–15]。构建与实验设置相对应的精确理论模型，将有助于研究未来实验的可行性。参考文献 [22]提出了一个通用框架，用于通过腔失谐和反馈控制描述将机械振子冷却至基态的过程。参考文献 [23, 24] 讨论了探测光学腔模与处于基态的机械振子之间纠缠的可行性。

参考文献 [14] 报道了通过连续测量和反馈控制，利用维纳滤波实现毫克级悬浮镜的机械压缩 [25] （另见 [13, 27, 28]）。此前的一项研究 [14]仅关注镜子的

*电子邮箱：shichijo.tomoya.351@kyudai.jp
†电子邮箱：matsumura.akira@phys.kyushu-u.ac.jp
‡电子邮箱：miki.daisuke@phys.kyushu-u.ac.jp§电子邮箱：sugiyama.yuki@phys.kyushu-u.ac.jp
¶电子邮箱：nobuyuki.matsumoto@gakushuin.ac.jp **电子邮箱：yamamoto@phys.kyushu-u.ac.jp

平动。镜子的实际运动包含转动、弦振动等多种运动。因此，为了获得更好的测量结果，必须考虑这些运动对镜子平动的影响。最近的一项研究 [29], 基于梁模型 [30]，探究了悬挂镜与腔光耦合的理论模型。我们建立了一种理论，用于描述低频区域中的光机悬挂镜，该镜由摆模和转动模构成双模系统；在此区域中，可以忽略梁的小提琴模式。一个重要之处在于，我们使用复杨氏模量明确考虑了梁的内摩擦效应。本文将这项先前工作的[29], 理论应用于连续测量和反馈控制条件下的光机悬挂镜，并通过维纳滤波分析研究其量子态。我们讨论了在考虑镜子的转动模时，如何获得镜子的机械压缩量子态。

本文其余部分安排如下。第二节介绍与腔光耦合的梁模型。我们从系统的哈密顿量推导运动方程；该系统由镜子、梁和腔光组成，其中镜子的位置由质心及其绕质心的转动来描述，且与梁和腔光耦合。我们采用微扰方法，在稳态解附近求解运动方程。第二节 A 小节简要回顾模型的理论框架后，我们在第二节 B 小节中用微扰方法推导方程，并在第二节 C 小节中求出稳态解。我们在第二节 D 小节中表明，在低频范围内，微扰方程可化简为摆模和转动模的双模理论方程。在第二节 E 小节中，我们讨论基于复杨氏模量梁模型的结构阻尼模型的有效性。假设采用近期实验的模型参数，我们在第二节 F 小节中求解包含耗散和噪声的方程，以描述微扰方程中采用反馈冷却的模型。第三节中，我们基于双模理论，使用维纳滤波过程计算摆模和转动模对应的条件协方差。第四节中，我们讨论.....的有效性

在傅里叶空间的受限范围内使用单模滤波器的可能性；我们还讨论了本研究对生成参考文献 [31] 中所展示的反射镜间纠缠的意义。第五节给出总结和结论。附录 A 详细说明了如何求出第三节中双模理论的维纳滤波器。附录 B 给出单模理论的维纳滤波器，其中将镜子视为仅具有摆模的点粒子。我们利用它评估摆模的条件方差（参见参考文献 [14]），并与双模模型进行比较。

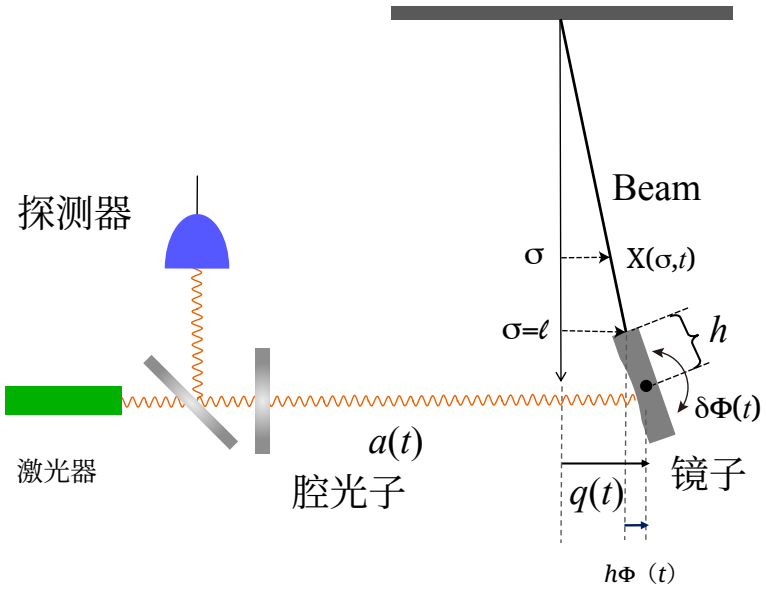

图 1： 与腔光耦合的光束模型示意图。

II. 光机梁模型

A. 基本公式

本节介绍与腔内光子耦合的光束模型 [30]（参见参考文献 [29]）。该光束模型将悬挂镜子的金属丝描述为有限尺寸物体的运动（见图 1）。我们假设镜子是一个刚体，具有作为摆的平动，以及绕其质心的转动。在光束模型中，镜子的运动与梁的动力学相关联。我们假设梁具有复杨氏模量 $E(=E_0(1-i\phi))$、截面惯性矩 I 和单位长度质量ρ。梁的一端完全固定，镜子固定在另一端，两端相距 ℓ，镜子距质心的距离为 h。镜子 M 的质量为.....，其绕质心的转动惯量为 J。由于质量所受引力的平衡，梁的张力为 $T=Mg$。在范围 $0\le\sigma\le\ell$ 内，梁的横向模态表示为 $X(\sigma,t)$。在光束模型中，我们假设镜子质心的位置 $q(t)$ 由以下梁的边界条件描述：

$$\Phi(t) = \left.\frac{\partial X(\sigma,t)}{\partial\sigma}\right|_{\sigma=\ell}, \tag{1}$$

$$q(t) = X(\sigma,t)|_{\sigma=\ell} + h\Phi(t), \tag{2}$$

and

$$X(\sigma=0,t) = \left.\frac{\partial X(\sigma,t)}{\partial\sigma}\right|_{\sigma=0} = 0, \tag{3}$$

其中，Φ 是梁下端相对于竖直方向的倾角，我们称之为镜子的转动模。边界条件的物理意义是，梁在两端分别与天花板和镜子垂直连接，即 $\sigma=0$ 和 $\sigma=\ell$。我们注意到，在上述假设下，梁模型的边界条件满足时，梁的拉格朗日量可写为

$$\mathcal{L}_B = K - V_1 - V_2, \tag{4}$$

其中，K 是镜子和梁在横向模与转动模下的动能，V_1 是重力引起的势能，V_2 是梁的弹性能，其定义为

$$K \equiv \frac{1}{2}\int_0^\ell d\sigma\rho\left(\frac{\partial X(\sigma,t)}{\partial t}\right)^2 + \frac{1}{2}M\left(\frac{dq(t)}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2}J\left(\frac{d\Phi(t)}{dt}\right)^2, \tag{5}$$

$$V_1 \equiv \frac{1}{2}\int_0^\ell d\sigma T\left(\frac{\partial X(\sigma,t)}{\partial\sigma}\right)^2 + \frac{1}{2}Th\Phi^2(t), \tag{6}$$

$$V_2 \equiv \frac{1}{2}\int_0^\ell d\sigma EI\left(\frac{\partial^2 X(\sigma,t)}{\partial\sigma^2}\right)^2. \tag{7}$$

我们注意到，镜子的重力势能包含在式（6）V_1的第二项中，$\frac{1}{2}Th\Phi^2$（t），其中 $T=Mg$ 在小角度近似 $\Phi\ll1$下成立。由于在相同近似下梁的重力能很小，且梁的质量可以忽略，因此我们不考虑梁的重力能。相对于梁和镜子的位置 X、q以及转动模 Φ 的共轭动量定义为：

$$\Pi(\sigma,t) \equiv \frac{\partial\mathcal{L}_B}{\partial\dot{X}(\sigma,t)} = \rho\dot{X}(\sigma,t), \tag{8}$$

$$p(t) \equiv \frac{\partial\mathcal{L}_B}{\partial\dot{q}(t)} = M\dot{q}(t), \tag{9}$$

$$\Pi_\Phi(t) \equiv \frac{\partial\mathcal{L}_B}{\partial\dot{\Phi}(t)} = J\dot{\Phi}(t), \tag{10}$$

其中，点表示对时间求导。随后，我们得到光束模型的哈密顿量 $\mathcal{H}_B$ 如下：

$$\mathcal{H}_B = \int_0^\ell d\sigma\left\{\frac{1}{2\rho}\Pi^2(\sigma,t) + \frac{T}{2}\left(\frac{\partial X(\sigma,t)}{\partial\sigma}\right)^2 + \frac{EI}{2}\left(\frac{\partial^2 X(\sigma,t)}{\partial\sigma^2}\right)^2\right\} + \frac{1}{2M}p^2(t) + \frac{1}{2J}\Pi_\Phi^2(t) + \frac{hT}{2}\Phi^2(t). \tag{11}$$

在研究连续测量和反馈控制下光机悬挂镜的量子态时，我们首先纳入腔光子的动力学。这些腔光子由激光器注入，并被束缚在由梁悬挂的镜子与另一面固定镜子之间。参考文献 [32], 研究了运动镜与腔内光子之间的相互作用，作者直接从运动镜的运动方程以及具有时变边界条件的矢势波动方程推导出哈密顿量。根据这一结果，腔内光子的哈密顿量 $\mathcal{H}_C$ 写作

$$\mathcal{H}_C = -\hbar G_0 a'^{\dagger} a' q + \hbar\omega_c a'^{\dagger} a' + i\hbar\mathcal{E}(a'^{\dagger} e^{-i\omega_0 t} - a' e^{i\omega_0 t}), \tag{12}$$

在假设可以忽略双光子发射和吸收的情况下，该哈密顿量右侧的第一项描述镜子与腔内光子之间的相互作用， G_0 （$\propto \omega_c/L$）是它们之间的耦合常数， ω_c 是腔内光子频率， L 是腔长， $\hbar$ 是约化普朗克常数。式（12）的第二项是腔内光子自由场的哈密顿量，而最后一项描述频率为 ω_0的输入激光。 $\mathcal{E}$ 与输入激光功率 P 之间的关系为 $|\mathcal{E}| = \sqrt{2P\kappa/\hbar\omega_0}$ [22]，其中 κ 是描述光子逃离光腔速率的衰减率。我们假设镜子始终将腔内光子散射成驻波。应当谨慎验证这一假设。然而，本文采用的参数基于参考文献 [13, 14], 报道的真实实验，因此可以假设我们的理论模型形成驻波腔模。此外，我们实验系统的精细度仅为几千，因此光学损耗的影响可以忽略不计。

根据哈密顿量 量 $\mathcal{H}_B$ 和 $\mathcal{H}_C$，可得整个系统的运动方程如下 :

$$\rho\ddot{X} = T\frac{\partial^2 X}{\partial\sigma^2} - EI\frac{\partial^4 X}{\partial\sigma^4}, \tag{13}$$

$$M\ddot{q} = -T\Phi + EI\left.\frac{\partial^3 X}{\partial\sigma^3}\right|_{\sigma=\ell} + \hbar G_0 a^{\dagger} a, \tag{14}$$

$$J\ddot{\Phi} = -EI\left(\left.\frac{\partial^2 X}{\partial\sigma^2}\right|_{\sigma=\ell} + h\left.\frac{\partial^3 X}{\partial\sigma^3}\right|_{\sigma=\ell}\right), \tag{15}$$

$$\dot{a} = -\kappa a + iG_0 a q - i(\omega_c - \omega_0)a + \mathcal{E} + \sqrt{2\kappa}a_{\rm in}, \tag{16}$$

其中，在方程 (16) 中用 $a = a'e^{i\omega_0 t}$ 代替 a'。为满足涨落耗散关系，在方程 (16) 中引入噪声项 $\sqrt{2\kappa}a_{\rm in}$。具体而言，我们假设衰减率 κ 与辐射输入噪声有关，其特征由 $a_{\rm in}(t)$ 的关联函数描述

$$\langle a_{\rm in}(t)a_{\rm in}^{\dagger}(t')\rangle = [N(\omega_c)+1]\delta(t-t'), \tag{17}$$

$$\langle a_{\rm in}^{\dagger}(t)a_{\rm in}(t')\rangle = N(\omega_c)\delta(t-t'). \tag{18}$$

这里， $N(\omega_c) = (\exp\{\hbar\omega_c/k_B T_0\} - 1)^{-1}$ 表示平衡态下的平均光子数。由于腔光子 $\hbar\omega_{\rm c}$ 的能量相对于室温 $k_{\rm B}T_0$足够大： $\hbar\omega_c/k_B T_0 \gg 1$，因此可将其视为 $N(\omega_c) \simeq 0$。在本文后续部分，我们将考虑在稳态解附近的运动方程中纳入噪声项和耗散项的朗之万方程。

B. 微扰方法

通过设定下式，将方程（13）∼（16）分解为稳态部分及其扰动部分

$$X = \bar{X}(\sigma) + \delta X(\sigma, t), \tag{19}$$

$$q = \bar{q} + \delta q(t), \tag{20}$$

$$\Phi = \bar{\Phi} + \delta\Phi(t), \tag{21}$$

$$a = \bar{a} + \delta a(t). \tag{22}$$

边界条件式（2） ∼ （3）导出稳态解需满足以下条件:

$$\bar{q} = \bar{X}(\sigma = \ell) + h\bar{\Phi}, \tag{23}$$

$$\bar{\Phi} = \left.\frac{\partial\bar{X}(\sigma)}{\partial\sigma}\right|_{\sigma=\ell}, \tag{24}$$

$$\bar{X}(\sigma = 0) = \left.\frac{\partial\bar{X}}{\partial\sigma}\right|_{\sigma=0} = 0. \tag{25}$$

由于稳态不随时间变化，其运动方程变为

$$T\frac{\partial^2\bar{X}}{\partial\sigma^2} - EI\frac{\partial^4\bar{X}}{\partial\sigma^4} = 0, \tag{26}$$

$$-T\bar{\Phi} + EI\left.\frac{\partial^3\bar{X}}{\partial\sigma^3}\right|_{\sigma=\ell} + \hbar G_0|\bar{a}|^2 = 0, \tag{27}$$

$$-EI\left(\left.\frac{\partial^2\bar{X}}{\partial\sigma^2}\right|_{\sigma=\ell} + h\left.\frac{\partial^3\bar{X}}{\partial\sigma^3}\right|_{\sigma=\ell}\right) = 0, \tag{28}$$

$$-\left\{\kappa + i(\omega_c - \omega_0 - G_0\bar{q})\right\}\bar{a} + \mathcal{E} = 0. \tag{29}$$

另一方面，扰动部分的边界条件也可得为

$$\delta q(t) = \delta X(\sigma=\ell,t) + h\delta\Phi(t), \tag{30}$$

$$\delta\Phi(t) = \left.\frac{\partial\delta X(\sigma,t)}{\partial\sigma}\right|_{\sigma=\ell}, \tag{31}$$

$$\delta X(\sigma=0,t) = \left.\frac{\partial\delta X(\sigma,t)}{\partial\sigma}\right|_{\sigma=0} = 0. \tag{32}$$

扰动部分的运动方程如下：

$$\rho\delta\ddot{X} = T\frac{\partial^2\delta X}{\partial\sigma^2} - EI\frac{\partial^4\delta X}{\partial\sigma^4}, \tag{33}$$

$$M\delta\ddot{q} = -T\delta\Phi + EI\left.\frac{\partial^3\delta X}{\partial\sigma^3}\right|_{\sigma=\ell} + \hbar G_0(\bar{a}\delta a + \bar{a}^*\delta a^\dagger), \tag{34}$$

$$J\delta\ddot{\Phi} = -EI\left(\left.\frac{\partial^2\delta X}{\partial\sigma^2}\right|_{\sigma=\ell} + h\left.\frac{\partial^3\delta X}{\partial\sigma^3}\right|_{\sigma=\ell}\right), \tag{35}$$

$$\delta\dot{a} = -\{\kappa + i(\omega_c - \omega_0)\}\delta a + iG_0(\bar{a}\delta q + \bar{q}\delta a) + \sqrt{2\kappa}a_{\rm in}. \tag{36}$$

这些是围绕稳态解线性化得到的方程。我们注意到，方程 (34) 和 (36) 中含有 G_0 的项来源于围绕稳态解线性化的辐射压相互作用。

C. 稳态解

本节中，我们求得稳态解。首先，由方程 (26) 可轻易得到

$$\frac{\partial^2\bar{X}(\sigma)}{\partial\sigma^2} = A''e^{\beta\sigma} + B''e^{-\beta\sigma}, \tag{37}$$

其中，我们定义 $\beta \equiv \sqrt{T/EI}$，而 A'' 和 B'' 为积分常数。二次积分得到梁位移 X（σ）的 $^-$ 通解，表示如下：

$$\bar{X}(\sigma) = A'e^{\beta\sigma} + B'e^{-\beta\sigma} + C'\sigma + D', \tag{38}$$

其中 A', B', C', D' 为常数。利用边界条件式 (25)，得到以下条件：

$$C' = -\beta(A' - B'), \quad D' = -(A' + B'). \tag{39}$$

将式 (38)、(39) 代入式 (28)，得到

$$0 = A'\beta^2e^{\beta\ell} + B'\beta^2e^{-\beta\ell} + h\beta^3(A'e^{\beta\ell} - B'e^{-\beta\ell}), \tag{40}$$

可改写为

$$B' = -\frac{1+h\beta}{1-h\beta}e^{2\beta\ell}A'. \tag{41}$$

此外，将式（38）、（39）代入式（27）可得

$$C' = \frac{\hbar G_0 |\bar{a}|^2}{T}. \tag{42}$$

将这些关系代入式（39），得到

$$A' = -\frac{\hbar G_0 |\bar{a}|^2}{\beta T} \frac{1-h\beta}{(1+h\beta)e^{2\beta\ell}+1-h\beta}, \quad D' = A' \left(\frac{1+h\beta}{1-h\beta} e^{2\beta\ell} - 1 \right). \tag{43}$$

最后，我们得到梁位移的稳态解 $X(\sigma)$

$$\begin{aligned} \bar{X}(\sigma) &= -\frac{\hbar G_0 |\bar{a}|^2}{\beta T} \frac{1-h\beta}{(1+h\beta)e^{2\beta\ell}+1-h\beta} \left[e^{\beta\ell} + \frac{1+h\beta}{1-h\beta} e^{2\beta\ell}(1-e^{-\beta\sigma}) - 1 \right] + \frac{\hbar G_0 |\bar{a}|^2}{T}\sigma \\ &\simeq \frac{\hbar G_0 |\bar{a}|^2}{T}\sigma, \end{aligned} \tag{44}$$

其中第二行表示利用 $\beta\ell \gg 1$ 得到的近似公式，该公式在我们的模型中成立。这个条件意味着梁的弯曲刚度很小。

由式 (23)， 质心位置 $\bar{q}$ 可以写成 n as

$$\begin{aligned} \bar{q} &= \frac{\hbar G_0 |\bar{a}|^2}{\beta T} \frac{1-h\beta}{(1+h\beta)e^{2\beta\ell}+1-h\beta} \left[1 + (h+\ell)\beta - \frac{1+h\beta}{1-h\beta}(1-\beta(h+\ell))e^{2\beta\ell} \right] \\ &\simeq \frac{\hbar G_0}{T}(\ell+h)|\bar{a}|^2, \end{aligned} \tag{45}$$

其中，第二行是利用 $\beta\ell \gg 1$ 得到的。由式 (29)， $\bar{a}$ 可写为

$$\bar{a} = \frac{\mathcal{E}}{\kappa + i(\omega_c - \omega_0 - G_0\bar{q})} \equiv \alpha_{\rm s} e^{-i\theta}, \tag{46}$$

其中，腔光子 $\bar{a}$ 的振幅是一个复数，我们引入了相位 θ 以及正实数 α_s，由此得到

$$|\bar{a}|^2 = \alpha_{\rm s}^2 = \frac{\mathcal{E}^2}{\kappa^2 + (\omega_c - \omega_0 - G_0\bar{q})^2} = \frac{\mathcal{E}^2}{\kappa^2 + \Delta^2}. \tag{47}$$

这里我们在最后一个等式中引入了 $\Delta = \omega_c - \omega_0 - G_0\bar{q}$。光腔中的光子数记为 $n_c = |\bar{a}|^2$。失谐 Δ 是一个可通过改变腔长 L 进行实验调节的参数。它以光学衰减率 κ 归一化，其相反数定义为 $\delta \equiv -\Delta/2\kappa$。在这种情况下，稳态下的光子数 n_c 可表示为 δ 的函数，如下所示：

$$n_c = |\bar{a}|^2 = \frac{\mathcal{E}^2}{\kappa^2(1+\delta^2)}. \tag{48}$$

本研究的分析采用表 I 中给出的数值，这些数值曾用于参考文献 [14, 28]，且是最先进的技术所能达到的预期水平（见参考文献 [29, 31]）。图 2 展示了光子数随 δ 变化的情况。图 3 展示了稳态下的 $X(\sigma)$，它与 σ 成正比。红色曲线和蓝色曲线分别表示 $\delta = 0.0292$ 和 $\delta = 0.2$。

D. 微扰方程

接下来，我们着重讨论微扰方程。为方便起见，我们引入相对于腔光子的振幅正交分量和相位正交分量，定义如下：

$$\delta x \equiv \delta a + \delta a^\dagger, \quad \delta y \equiv \frac{1}{i}(\delta a - \delta a^\dagger), \tag{49}$$

而输入噪声为

$$x_{\rm in} \equiv a_{\rm in} + a_{\rm in}^\dagger, \quad y_{\rm in} \equiv \frac{1}{i}(a_{\rm in} - a_{\rm in}^\dagger). \tag{50}$$

符号	描述	数值	量纲	参考文献
P	激光功率	30	mW	[14, 28]
$\kappa/2\pi$	光学衰减率	8.2×10^{5}	Hz	[14, 28]
$\omega_c/2\pi \sim \omega_0/2\pi$	腔共振频率	2.818×10^{14}	Hz	[14, 28]
$\delta_0(=-\Delta_0/2\kappa)$	归一化失谐	0.2		[31]
M	镜面质量	7.71×10^{-3}	g	[14, 28]
L	腔长	9.81	cm	[14, 28]
ℓ	梁长	1	cm	[14, 28]
h	质心到固定点的距离	0.15	cm	[14, 28]
$\Omega/2\pi$	摆的频率	4.99	Hz	[14, 28]
J	转动惯量	4.50×10^{-5}	g cm^2	[29]
E_0I	弯曲刚度	3.583×10^{-6}	g cm^3/s^2	[29]
ϕ_0	内损耗因子	10^{-3}		[29]
ρ	单位长度质量	1.72×10^{-8}	g/cm	[29]
$G_0/2\pi$	光机械耦合	4.639×10^{13}	赫兹/厘米	[14, 28]
T_0	热浴温度	300	K	[14, 28]
$\Gamma(\Omega)/2\pi$	无转动模态的机械衰减率	4.11×10^{-7}	Hz	[13]
$\Gamma_r(\Omega)/2\pi$	包含转动模态的机械衰减率 1.717×10^{-6}		Hz	
$\gamma_m/2\pi$	反馈下的有效机械衰减率 6.875×10^{-3}		Hz	[31]
$N(\omega_c)$	平衡平均热光子数	0		[31]
g	重力加速度	980	厘米/秒^2	
c	光速	2.998×10^{10}	cm/s	
$\hbar$	约化普朗克常数	1.05×10^{-27}	克 厘米^2/秒	
k_B	玻尔兹曼常数	1.38×10^{-16}	g·cm^2/K ·s^2	

表 I: 本研究中使用的参数。

根据方程（36）， δx 和 δy 可改写为

$$\delta\dot{x} = -\kappa\delta x + \Delta\delta y + \sqrt{2\kappa}x_{\rm in}, \quad \delta\dot{y} = -\kappa\delta y - \Delta\delta x + 2G_0\sqrt{n_c}\delta q + \sqrt{2\kappa}y_{\rm in}.$$

方程的扰动部分在傅里叶空间中求解。在本研究中， $\delta f(t)$ 的傅里叶变换定义为:

$$\delta f(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta f(t) e^{i\omega t} dt, \tag{51}$$

其中 δf 为分 母 $\delta q, \delta\Phi$， δX， δx， δy。根据此定义，傅里叶空间中的边界条件为 re

$$\delta q(\omega) = \delta X(\sigma=\ell,\omega) + h\delta\Phi(\omega), \tag{52}$$

$$\delta\Phi(\omega) = \left.\frac{\partial\delta X(\sigma,\omega)}{\partial\sigma}\right|_{\sigma=\ell}, \tag{53}$$

$$\delta X(\sigma=0,\omega) = \left.\frac{\partial\delta X(\sigma,\omega)}{\partial\sigma}\right|_{\sigma=0} = 0. \tag{54}$$

微扰方程如下

$$-\omega^2\rho\delta X(\sigma,\omega) = T\frac{\partial^2\delta X(\sigma,\omega)}{\partial\sigma^2} - EI\frac{\partial^4\delta X(\sigma,\omega)}{\partial\sigma^4}, \tag{55}$$

$$-\omega^2 M\delta q(\omega) = -T\delta\Phi(\omega) + EI\left.\frac{\partial^3\delta X(\sigma,\omega)}{\partial\sigma^3}\right|_{\sigma=\ell} + \hbar G_0\sqrt{n_c}\delta x(\omega), \tag{56}$$

$$-\omega^2\ J\delta\Phi(\omega) = -EI\left(\left.\frac{\partial^2\delta X(\sigma,\omega)}{\partial\sigma^2}\right|_{\sigma=\ell} + h\left.\frac{\partial^3\delta X(\sigma,\omega)}{\partial\sigma^3}\right|_{\sigma=\ell}\right), \tag{57}$$

$$-i\omega\delta x(\omega) = -\kappa\delta x(\omega) + \Delta\delta y(\omega) + \sqrt{2\kappa}x_{\rm in}(\omega), \tag{58}$$

$$-i\omega\delta y(\omega) = -\kappa\delta y(\omega) - \Delta\delta x(\omega) + 2G_0\sqrt{n_c}\delta q(\omega) + \sqrt{2\kappa}y_{\rm in}(\omega). \tag{59}$$

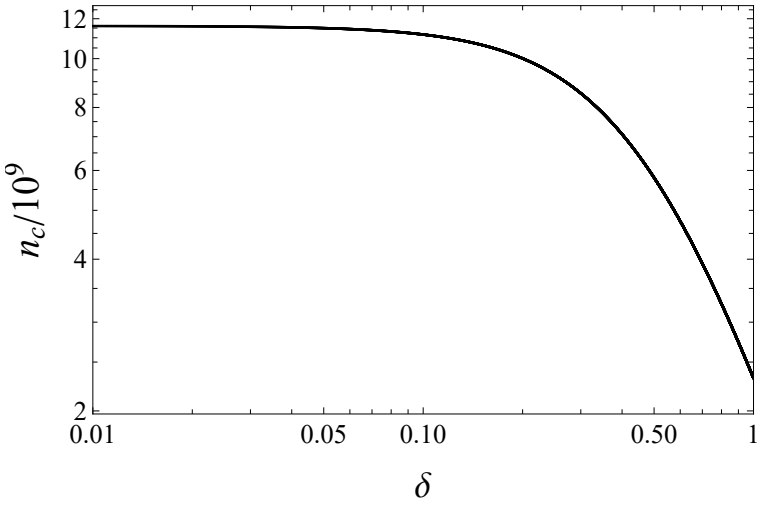

图2： 数 光子数 $n_c = |\bar{a}|^2$ 随归一化失谐 $\delta(= -\Delta/2\kappa)$ 的变化。这里我们采用了 e
参数 表 I 中列出的参数。

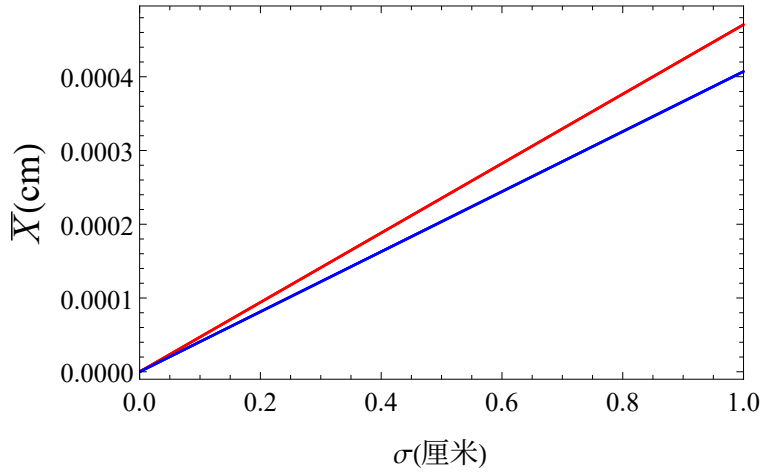

图3： 稳态 梁的 y 状态解 $\bar{X}$（σ）。红线和蓝线分别使用 $\delta = 0.0292$ 和 $\delta = 0.2$ 绘制，
分别 地。

这里总结系统的物理自由度数量。由 $\delta X(\sigma, \omega)$ 描述的梁具有无限多个自由度。镜子由其质心位置 $\delta q(\omega)$ 和转动模 $\delta\Phi(\omega)$ 描述，而腔光子则由振幅正交分量和相位正交分量 $\delta x(\omega)$ 和 $\delta y(\omega)$ 描述。因此，整个系统由梁的一维场动力学自由度和谐振子的三个动力学自由度组成。然而，下文将说明，通过有效地关注低频区域，可以消除梁的动力学自由度。此外，对于大耗散 $\kappa \gg \omega$ 的腔光子，我们采用绝热极限，从而有效地消除其动力学自由度。这样，模型将简化为由 $\delta q(\omega)$ 和 $\delta\Phi(\omega)$ 这两个动力学自由度构成的系统。

在边界条件 (54) 下，方程 (55) 的解为

$$\delta X(\sigma, \omega) = A(\cos k\sigma - \cosh k_e\sigma) + B(\sin k\sigma - \frac{k}{k_e}\sinh k_e\sigma), \tag{60}$$

其中 k 和 k_e 定义为

$$k \equiv \sqrt{\frac{-T+\sqrt{T^2+4EI\rho\omega^2}}{2EI}} \simeq \sqrt{\frac{\rho}{T}}\omega, \tag{61}$$

$$k_e \equiv \sqrt{\frac{T+\sqrt{T^2+4EI\rho\omega^2}}{2EI}} \simeq \sqrt{\frac{T}{EI}}. \tag{62}$$

近似公式在满足条件 $T^2 \gg 4|E|I\rho\omega^2$ 的低频区域内有效，因此可以忽略梁的小提琴模式。将式（60）代入边界条件（52）和（53），得到

$$\delta X(\sigma=\ell,\omega) = A(\cos k\ell - \cosh k_e\ell) + B(\sin k\ell - \frac{k}{k_e}\sinh k_e\ell) = \delta x(\omega) - h\delta\Phi(\omega), \tag{63}$$

$$\left.\frac{\partial\delta X(\sigma,\omega)}{\partial\sigma}\right|_{\sigma=\ell} = A(-k\sin k\ell - k_e\sinh k_e\ell) + B(k\cos k\ell - k\cosh k_e\ell) = \delta\Phi(\omega). \tag{64}$$

这些方程可写成如下矩阵形式：

$$\begin{pmatrix} \cos k\ell - \cosh k_e\ell & \sin k\ell - \frac{k}{k_e}\sinh k_e\ell \\ -k\sin k\ell - k_e\sinh k_e\ell & k(\cos k\ell - \cosh k_e\ell) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -h \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta q(\omega) \\ \delta\Phi(\omega) \end{pmatrix}. \tag{65}$$

系数 A 和 B 可表示为

$$\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{C}_{00} & \bar{C}_{01} \\ \bar{C}_{10} & \bar{C}_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta q(\omega) \\ \delta\Phi(\omega) \end{pmatrix}, \tag{66}$$

其中，上式右端的矩阵定义为

$$\begin{pmatrix} \bar{C}_{00} & \bar{C}_{01} \\ \bar{C}_{10} & \bar{C}_{11} \end{pmatrix} = \frac{1}{\Upsilon} \begin{pmatrix} k(\cos k\ell - \cosh k_e\ell) & -\sin k\ell + \frac{k}{k_e}\sinh k_e\ell - hk(\cos k\ell - \cosh k_e\ell) \\ k\sin k\ell + k_e\sinh k_e\ell & \cos k\ell - \cosh k_e\ell - h(k\sin k\ell + k_e\sinh k_e\ell) \end{pmatrix} \tag{67}$$

with

$$\Upsilon = 2k(1-\cos k\ell\cosh k_e\ell) + \frac{k_e^2-k^2}{k_e}\sin k\ell\sinh k_e\ell. \tag{68}$$

利用式（58）和（59），可得到 δx（ω）和 δy（ω）的解，如下：

$$\delta x(\omega) = \frac{2G_0\sqrt{n_c}\Delta}{(\kappa - i\omega)^2+\Delta^2}\delta q(\omega) + \sqrt{2\kappa}\left\{\frac{(\kappa-i\omega)x_{\rm in}(\omega)+\Delta y_{\rm in}(\omega)}{(\kappa-i\omega)^2+\Delta^2}\right\}, \tag{69}$$

$$\delta y(\omega) = \frac{1}{\Delta}\left\{(\kappa-i\omega)\delta x(\omega) - \sqrt{2\kappa}x_{\rm in}(\omega)\right\}. \tag{70}$$

由式 (56) 可得，镜子质心位置微扰 $\delta q(\omega)$ 的运动方程为

$$\begin{aligned}
&-\omega^2\delta q(\omega) \\
&= -\frac{T}{M}\delta\Phi(\omega) + \frac{EI}{M}\left.\frac{\partial^3\delta X(\sigma,\omega)}{\partial\sigma^3}\right|_{\sigma=\ell} + \frac{\hbar G_0\sqrt{n_c}}{M}\delta x(\omega) \\
&= -\frac{T}{M}\delta\Phi(\omega) + \frac{EI}{M}\{A(k^3\sin k\ell - k_e^3\sinh k_e\ell) + B(-k^3\cos k\ell - kk_e^2\cosh k_e\ell)\} \\
&+ \frac{2\hbar G_0^2 n_c\Delta}{M\{(\kappa-i\omega)^2+\Delta^2\}}\delta q(\omega) + N_{\rm photon}(\omega) \\
&= \frac{1}{M}\left[\frac{2\hbar G_0^2 n_c\Delta}{(\kappa-i\omega)^2+\Delta^2} + EI\{\bar{C}_{00}(k^3\sin k\ell - k_e^3\sinh k_e\ell) - \bar{C}_{10}(-k^3\cos k\ell - kk_e^2\cosh k_e\ell)\}\right]\delta q(\omega) \\
&+ \frac{1}{M}\left[-T + EI\{\bar{C}_{01}(k^3\sin k\ell - k_e^3\sinh k_e\ell) - \bar{C}_{11}(k^3\cos k\ell + kk_e^2\cosh k_e\ell)\}\right]\delta\Phi(\omega) + N_{photon}(\omega) \\
&\equiv -\omega_A^2\delta q(\omega) + \Delta_A^2\delta\Phi(\omega) + N_{\rm photon}(\omega),
\end{aligned} \tag{71}$$

其中， ω_A^2 和 Δ_A^2 由式 (75) 和 (76) 定义，而 $N_{\rm photon}(\omega)$ 定义为

$$N_{\rm photon}(\omega) \equiv \frac{\hbar G_0\sqrt{n_c}\sqrt{2\kappa}}{M}\left\{\frac{(\kappa-i\omega)x_{\rm in}(\omega)+\Delta y_{\rm in}(\omega)}{(\kappa+i\omega)^2+\Delta^2}\right\}. \tag{72}$$

同样，由式（57）可将镜面转动微扰 $\delta\Phi(\omega)$ 的运动方程写为:

$$\begin{aligned}
-\omega^2\delta\Phi(\omega) &= -\frac{hEI}{J}\left.\frac{\partial^3\delta X(\sigma,\omega)}{\partial\sigma^3}\right|_{\sigma=\ell}+\frac{EI}{J}\left.\frac{\partial^2\delta X(\sigma,\omega)}{\partial\sigma^2}\right|_{\sigma=\ell}\\
&= -\frac{hEI}{J}\{A(k^3\sin k\ell-k_e^3\sinh k_e\ell)+B(-k^3\cos k\ell-kk_e^2\cosh k_e\ell)\}\\
&= -\frac{EI}{J}\{A(-k^2\cos k\ell-k_e^2\cosh k_e\ell)+B(-k^2\sin k\ell-kk_e\sinh k_e\ell)\}\\
&= -\frac{EI}{J}\left[\bar{C}_{00}\{h(k^3\sin k\ell-k_e^3\sinh k_e\ell)+(-k^2\cos k\ell-k_e^2\cosh k_e\ell)\}\right.\\
&\quad\left.+\bar{C}_{10}\{h(-k^3\cos k\ell-kk_e^2\cosh k_e\ell)+(-k^2\sin k\ell-kk_e\sinh k_e\ell)\}\right]\delta x(\omega)\\
&\quad -\frac{EI}{J}\left[\bar{C}_{01}\{h(k^3\sin k\ell-k_e^3\sinh k_e\ell)+(-k^2\cos k\ell-k_e^2\cosh k_e\ell)\}\right.\\
&\quad\left.+\bar{C}_{11}\{h(-k^3\cos k\ell-kk_e^2\cosh k_e\ell)+(-k^2\sin k\ell-kk_e\sinh k_e\ell)\}\right]\delta\Phi(\omega)\\
&\equiv \omega_B^2\delta q(\omega)-\Delta_B^2\delta\Phi(\omega).
\end{aligned} \tag{73}$$

由这些方程可得

$$-\omega^2\begin{pmatrix}\delta q(\omega)\\ \delta\Phi(\omega)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\omega_A^2 & \Delta_A^2\\ \omega_B^2 & -\Delta_B^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\delta q(\omega)\\ \delta\Phi(\omega)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}N_{\rm photon}(\omega)\\ 0\end{pmatrix}, \tag{74}$$

其中 $\omega_A^2,\Delta_A^2,\omega_B^2,\Delta_B^2$ 分别为:

$$\omega_A^2 = -\frac{1}{M}\left[-\frac{EIk}{\det C}(k^2+k_e^2)\left\{\frac{1}{EI\det C}(k\sin k\ell\cosh k_e\ell+k_e\cos k\ell\sinh k_e\ell)+\frac{2\hbar G_0^2 n_c\Delta}{(\kappa-i\omega)^2+\Delta^2}\right\}\right], \tag{75}$$

$$\begin{aligned}
\Delta_A^2 = \frac{1}{M}\Bigg[-T+\frac{}{+}\Bigg.&\frac{1}{k_e}(k_e^4+k^4)\sin k\ell\sinh k_e\ell-k(k_e^2-k^2)\cos k\ell\cosh k_e\ell\\
&\Bigg.+hk(k^2+k_e^2)(k\sin k\ell\cosh k_e\ell+k_e\cos k\ell\sinh k_e\ell)\Bigg\}\Bigg],
\end{aligned} \tag{76}$$

$$\begin{aligned}
\omega_B^2 = -\frac{EI}{J}\frac{k}{\det C}\big\{&(k_e^2-k^2)-2kk_e\sin k\ell\sinh k_e\ell-(k_e^2-k^2)\cos k\ell\cosh k_e\ell\\
&-h(k^2+k_e^2)(k\sin k\ell\cosh k_e\ell+k_e\cos k\ell\sinh k_e\ell)\big\},
\end{aligned} \tag{77}$$

$$\Delta_B^2 = \frac{EI}{J}\frac{1}{\det C}\frac{k^2+k_e^2}{k_e}\left[k_e(1+h^2k^2)\sin k\ell\cosh k_e\ell+\{k(-1+h^2k_e^2)\cos k\ell+h(k^2+k_e^2)\sin k\ell\}\sinh k_e\ell\right]. \tag{78}$$

我们注意到， ω_A^2, Δ_A^2, ω_B^2 和 Δ_B^2 取决于 ω。这是因为镜子与由$\delta X(\sigma,\ t)$描述的梁耦合，而该梁具有无限多个自由度。因此，镜子的模式是否可由镜子的变量 δq 和 $\delta\Phi$描述，并非显而易见。不过，我们关注的是镜子共振频率的低频区域，这一范围是在条件 $\omega^2\ll T^2/4|E|I\rho$下确定的。该条件将方程（75）$\sim$（78）化简为

$$\omega_A^2 \simeq -\frac{1}{M}\left\{\frac{2\hbar G_0^2 n_c\Delta}{\kappa^2+\Delta^2}-\frac{T}{\ell}\left(1+\frac{2}{\ell}\sqrt{\frac{EI}{T}}\right)\right\}, \tag{79}$$

$$\Delta_A^2 \simeq \frac{Th}{M\ell}\left\{1+\left(\frac{1}{h}+\frac{2}{\ell}\right)\sqrt{\frac{EI}{T}}\right\}, \tag{80}$$

$$\omega_B^2 \simeq \frac{Th}{J\ell}\left\{1+\left(\frac{1}{h}+\frac{2}{\ell}\right)\sqrt{\frac{EI}{T}}\right\}, \tag{81}$$

$$\Delta_B^2 \simeq \frac{Th}{J}\left\{1+\frac{h}{\ell}+\left(\frac{1}{h}+\frac{2}{\ell}\right)\sqrt{\frac{EI}{T}}\right\}. \tag{82}$$

因此，在低频区域 $\omega^2 \ll T^2/4|E|I\rho$内，方程（79）$\sim$（82）与 ω无关，这意味着该理论可简化为关于 δq 和 $\delta\Phi$ 的双模理论。在双模理论中，忽略梁的小提琴模式，但可将梁的内摩擦纳入复杨氏模量。复杨氏模量会使量 ω_A^2、Δ_A^2、ω_B^2 和 Δ_B^2具有微小的虚部。此外，在我们的分析中，还假设腔内光子的耗散速度快于镜子 $\kappa \gg \omega$的振荡。

E. 耗散的频率依赖性

根据式 (74)，消去变量 $\delta\Phi(\omega)$ 后，针对 $\delta q(\omega$ 可得以下结果):

$$\delta q(\omega) = \frac{\omega^2 - \Delta_B^2}{f(\omega)} N_{\rm photon}(\omega), \tag{83}$$

其中定义

$$f(\omega) \equiv -(\omega^2 - \omega_A^2)(\omega^2 - \Delta_B^2) + \omega_B^2 \Delta_A^2. \tag{84}$$

现在，我们着重研究满足 $f(\omega) = 0$ 的解，因为它们给出了耦合振子的正规模，并决定了在涨落噪声力作用下的共振振荡，而这些振荡必须通过涨落耗散关系与耗散相关联。我们的模型使我们能够研究梁的自由度对低频区域内镜子运动的影响。特别是，可以利用复杨氏模量 $E(= E_0(1 - i\phi))$ 研究由梁的内摩擦引起的耗散。随后，我们将基于复杨氏模量，重点研究镜子运动的耗散。

方程 $f(\omega) = 0$ 的解因存在耗散而为复数。解的实部对应于耦合振子的正规模的本征频率。解的虚部表示各模式中的耗散。这里，我们假设内损耗因子 ϕ 非常小，即 $\phi \ll 1$，因此解的虚部与 ϕ 的一阶项成正比。为求得解，我们将函数 $f(\omega)$ 改写为

$$f(\omega) \approx -(\omega^2 - \omega_{AR}^2 - i\phi\omega_{AI}^2)(\omega^2 - \Delta_{BR}^2 - i\phi\Delta_{BI}^2) + (\Delta_{AR}^2 + i\phi\Delta_{AI}^2)(\omega_{BR}^2 + i\phi\omega_{BI}^2), \tag{85}$$

其中我们假设 $\omega_A^2 = \omega_{AR}^2 + i\phi\omega_{AI}^2$, $\omega_B^2 = \omega_{BR}^2 + i\phi\omega_{BI}^2$, $\Delta_A^2 = \Delta_{AR}^2 + i\phi\Delta_{AI}^2$, $\Delta_B^2 = \Delta_{BR}^2 + i\phi\Delta_{BI}^2$,，并通过假设 $\phi \ll 1$明确定义

$$\omega_{AR}^2 = -\frac{1}{M}\left\{-\frac{T}{\ell}\left(1 + \frac{2}{\ell}\sqrt{\frac{E_0 I}{T}}\right) + \frac{\hbar\Delta G^2}{\kappa^2 + \Delta^2}\right\}, \quad \omega_{AI}^2 = -\frac{T}{M\ell^2}\sqrt{\frac{E_0 I}{T}}, \tag{86}$$

$$\Delta_{AR}^2 = \frac{Th}{M\ell}\left\{1 + \left(\frac{1}{h} + \frac{2}{\ell}\right)\sqrt{\frac{E_0 I}{T}}\right\}, \quad \Delta_{AI}^2 = -\frac{(2h+\ell)T}{2M\ell^2}\sqrt{\frac{E_0 I}{T}}, \tag{87}$$

$$\omega_{BR}^2 = \frac{Th}{J\ell}\left\{1 + \left(\frac{1}{h} + \frac{2}{\ell}\right)\sqrt{\frac{E_0 I}{T}}\right\}, \quad \omega_{BI}^2 = -\frac{(2h+\ell)T}{2J\ell^2}\sqrt{\frac{E_0 I}{T}}, \tag{88}$$

$$\Delta_{BR}^2 = \frac{Th}{J}\left\{1 + \frac{h}{\ell} + \left(\frac{1}{h} + \frac{2}{\ell}\right)\sqrt{\frac{E_0 I}{T}}\right\}, \quad \Delta_{BI}^2 = -\frac{(2h+\ell)T}{2J\ell}\sqrt{\frac{E_0 I}{T}}. \tag{89}$$

假设方程 $f(\omega_c) = 0$ 的解为 $\omega_c = \omega_0 + i\phi\omega_1$, $f(\omega_c)$ 可以表示为:

$$\begin{aligned} f(\omega_c) = &-(\omega_0^2 - \omega_{AR}^2)(\omega_0^2 - \Delta_{BR}^2) + \Delta_{AR}^2\omega_{BR}^2 + i\phi\Big\{(\omega_0^2 - \Delta_{BR}^2)(-2\omega_0\omega_1 + \omega_{AI}^2) \\ &+ (\omega_0^2 - \omega_{AR}^2)(-2\omega_0\omega_1 + \Delta_{BI}^2) + \Delta_{AR}^2\omega_{BI}^2 + \Delta_{AI}^2\omega_{BR}^2\Big\}. \end{aligned} \tag{90}$$

比较方程 $f(\omega_c) = 0$ 的实部和虚部，我们得到以下条件:

$$(\omega_0^2 - \omega_{AR}^2)(\omega_0^2 - \Delta_{BR}^2) - \Delta_{AR}^2\omega_{BR}^2 = 0, \tag{91}$$

$$(\omega_0^2 - \Delta_{BR}^2)(-2\omega_0\omega_1 + \omega_{AI}^2) + (\omega_0^2 - \omega_{AR}^2)(-2\omega_0\omega_1 + \Delta_{BI}^2) + \Delta_{AR}^2\omega_{BI}^2 + \Delta_{AI}^2\omega_{BR}^2 = 0. \tag{92}$$

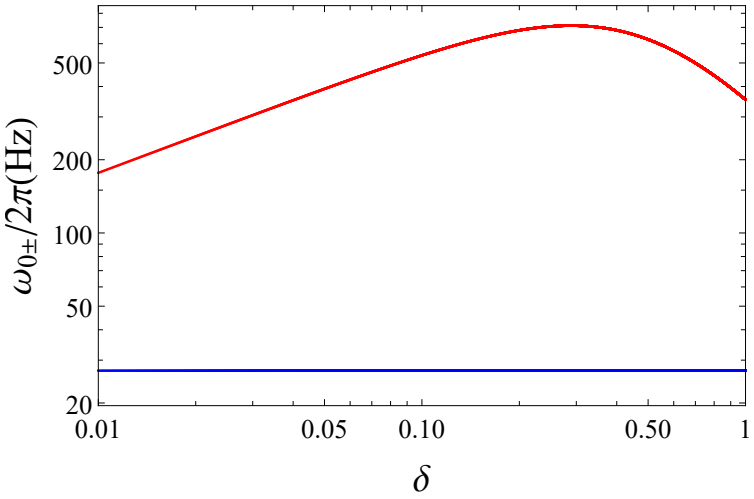

图 4： 共振频率随归一化失谐 $\delta(=-\Delta/2\kappa)$ 的变化。红色曲线和蓝色线分别表示平动（摆）模 ω_{0+} 和转动模 ω_{0-} 的共振频率。

然后， ω_0 和 ω_1 可按如下方式求得:

$$\omega_0^2 = \frac{(\Delta_{BR}^2+\omega_{AR}^2) \pm \sqrt{(\omega_{AR}^2-\Delta_{BR}^2)^2+4\Delta_{AR}^2\omega_{BR}^2}}{2} \equiv \omega_{0\pm}^2, \tag{93}$$

$$\omega_1 = \frac{-\omega_0^2(\Delta_{BI}^2+\omega_{AI}^2)+\Delta_{BR}^2\omega_{AI}^2+\Delta_{BI}^2\omega_{AR}^2-\Delta_{AR}^2\omega_{BI}^2-\Delta_{AI}^2\omega_{BR}^2}{2\omega_0(2\omega_0^2-\omega_{AR}^2-\Delta_{BR}^2)}. \tag{94}$$

共振频率 ω_0^2 有两个模态，分别为 ω_{0+}^2 和 ω_{0-}^2。对于 $(\Delta_{BR}^2-\omega_{AR}^2)^2 \gg \Delta_{AR}^2\omega_{BR}^2$，共振频率 $\omega_{0\pm}^2$ 可近似为

$$\omega_{0+}^2 \approx \frac{(\Delta_{BR}^2+\omega_{AR}^2)+|(\omega_{AR}^2-\Delta_{BR}^2)|}{2} = \omega_{AR}^2, \tag{95}$$

$$\omega_{0-}^2 \approx \frac{(\Delta_{BR}^2+\omega_{AR}^2)-|(\omega_{AR}^2-\Delta_{BR}^2)|}{2} = \Delta_{BR}^2. \tag{96}$$

本研究重点关注 $(\Delta_{BR}^2-\omega_{AR}^2)^2 \gg \Delta_{AR}^2\omega_{BR}^2$ 的情况。在这种情况下， δq 和 $\delta\Phi$ 分别对应质心的平动摆动和镜子绕质心的转动，因此我们将 δq 和 $\delta\Phi$ 分别称为摆模和转动模。于是， ω_{AR} 和 Δ_{BR} 分别表示摆模和转动模的共振频率，尽管这两个模态之间的对应关系会随耦合而变化。对于表 I 中的参数， ω_{0+} 和 ω_{0-} 分别对应摆模和转动模的频率（另见参考文献 [29]）。图 4 描绘了共振频率 $\omega_{0\pm}$ 随归一化失谐 $\delta(=-\Delta/2\kappa)$ 的变化。红色和蓝色曲线分别表示摆模和转动模。

具体而言，我们重点关注 180 Hz $<\omega_{0+}/2\pi<$ 650Hz 的频率范围，其中 ω_{0+} 大致对应于摆模的频率。耗散的频率依赖性以 $\omega_1\phi$ 表示，如图 5 所示，其中 $\phi=\phi_0=10^{-3}$。图 5 清楚地表明，在摆模的共振频率范围内，耗散 $\omega_1\phi_0$ 与频率$1/\omega$ 成反比。为了定量理解这一行为，我们可以作如下近似： $\omega_0 \approx \omega_{AR}$，从而可将 ω_1 表示为:

$$\omega_1 \approx \frac{(-\omega_{AR}^2+\Delta_{BR}^2)\omega_{AI}^2-\Delta_{AR}^2\omega_{BI}^2-\Delta_{AI}^2\omega_{BR}^2}{2\omega_0(\omega_{AR}^2-\Delta_{BR}^2)} = -\frac{\omega_{\mathrm{AI}}^2}{2\omega_0}\left[1+\frac{\Delta_{AR}^2\omega_{BI}^2+\Delta_{AI}^2\omega_{BR}^2}{(\omega_{AR}^2-\Delta_{BR}^2)\omega_{AI}^2}\right]. \tag{97}$$

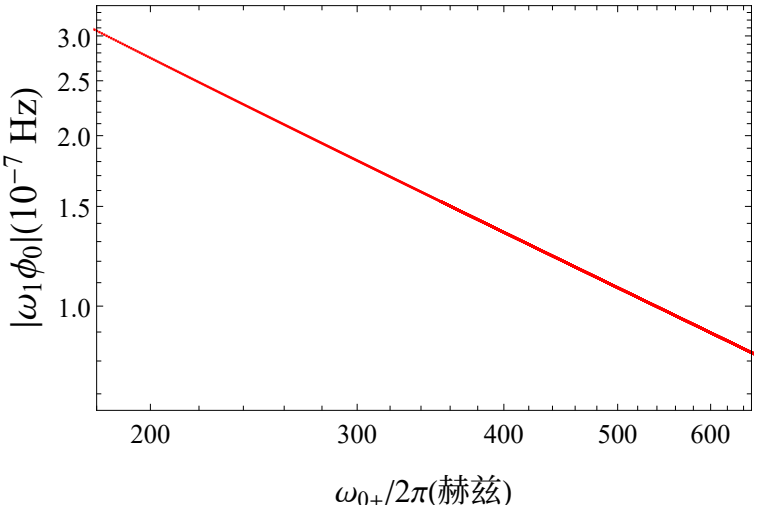

图5： 频率　　响应于镜子摆模共振频率处的耗散 $\omega_1\phi_0$ 。

公式（97）右侧括号中的第二项可计算为

$$\begin{aligned}\frac{\Delta_{AR}^2\omega_{BI}^2+\Delta_{AI}^2\omega_{BR}^2}{(\omega_{AR}^2-\Delta_{BR}^2)\omega_{AI}^2} &= \frac{\Delta_{\mathrm{AR}}\omega_{\mathrm{BR}}}{(\omega_{AR}^2-\Delta_{BR}^2)\omega_{AI}^2}\frac{\Delta_{AR}^2\omega_{BI}^2+\Delta_{AI}^2\omega_{BR}^2}{\Delta_{\mathrm{AR}}\omega_{\mathrm{BR}}}\\ &= \frac{\Delta_{\mathrm{AR}}\omega_{\mathrm{BR}}}{(\omega_{AR}^2-\Delta_{BR}^2)}\left(\frac{\Delta_{\mathrm{AI}}^2}{\omega_{\mathrm{AI}}^2}\right)\left(\frac{\omega_{\mathrm{BR}}}{\Delta_{\mathrm{AR}}}\right)\left(1+\frac{\omega_{\mathrm{BI}}^2}{\Delta_{\mathrm{AI}}^2}\frac{\Delta_{\mathrm{AR}}^2}{\omega_{\mathrm{BR}}^2}\right)\\ &= \ell\sqrt{\frac{M}{J}}\left(1+\frac{2h}{\ell}\right)\frac{\Delta_{\mathrm{AR}}\omega_{\mathrm{BR}}}{(\omega_{AR}^2-\Delta_{BR}^2)}.\end{aligned} \tag{98}$$

请注意，当条件 $(\omega_{AR}^2-\Delta_{BR}^2)^2 \gg \Delta_{\mathrm{AR}}^2\omega_{\mathrm{BR}}^2$ 成立时，条件 $\omega_0 \approx \omega_{\mathrm{AR}}$ 是合理的。因此，只要 $\ell\sqrt{M/J}\,(1+2h/\ell) \sim \mathcal{O}(1)$，条件 $(\Delta_{AR}^2\omega_{BI}^2+\Delta_{AI}^2\omega_{BR}^2)/(\omega_{AR}^2-\Delta_{BR}^2)\,\omega_{AI}^2 \ll 1$ 就有效，而这满足我们的参数。

我们将摆模的机械衰减率定义为

$$\Gamma_{\mathrm{r}}(\omega)=\phi_0\omega_1. \tag{99}$$

如图5所示，$\Gamma_{\mathrm{r}}(\omega) \propto 1/\omega$。于是，我们可以写出关系式

$$\Gamma_{\mathrm{r}}(\omega)\approx\frac{\Gamma_{\mathrm{r}}(\Omega)\Omega}{\omega}, \tag{100}$$

其中，Ω 是没有腔光时摆模的频率。因此，式（100）所示的关系（称为结构阻尼关系）可以用梁模中的内摩擦来解释，该内摩擦以复杨氏模量 ϕ 建模。本文采用表 I 中的 $\Gamma_{\mathrm{r}}(\Omega)$ 值，该值由 Γ(Ω) 乘以 4.18 得到，其中 Γ(Ω) 是表 I 中不考虑转动模 [13] 时的机械衰减率。因子 4.18 是根据 $\Gamma_r(\Omega) \approx \Gamma_r(\omega)\omega/\Omega \approx \phi_0\omega_{AI}^2/\Omega$ 以及表 I 中的 Γ(Ω) 值得到的。该因子与参考文献 [29]，中的结果一致；该文表明，由于梁的内摩擦通过转动模产生作用，品质因数会降低 4 倍。

F. 噪声项

在本小节中，我们考虑包含噪声的双模理论运动方程。由于我们假设系统处于极低压 10^{-5} Pa环境中，因此可以忽略残余气体摩擦，并主要采用由梁的内部结构引起的结构阻尼模型 [13, 29]。因此，我们在 $\delta q(\omega)$的运动方程中加入满足涨落耗散关系的结构阻尼和随机热噪声。我们还考虑通过以下方式加入反馈冷却，以有效降低摩擦力：

探测从光腔中射出的光。在这种情况下，式（34）被有效方程取代：

$$-M\omega^2\delta q(\omega) = -T\delta\Phi(\omega) + E_0 I \left.\frac{\partial^3 \delta X(\omega)}{\partial \sigma^3}\right|_{\sigma=\ell} + \hbar G_0\sqrt{n_c}\delta x(\omega) + i\omega\Gamma_{\rm r} M\delta q(\omega) + \xi(\omega) - g_{\rm FB}(\omega)X_A(\omega), \quad (101)$$

其中， $\Gamma_{\rm r}$ 是机械（结构）衰减率，其定义见上一小节末尾，用于描述梁的内摩擦通过转动模产生的影响。式（101）中的最后一项表示反馈冷却， $X_{\rm A}$ 是测量输出光，其定义为

$$X_{\rm A}(\omega) = \sqrt{\eta}x_{\rm out}(\omega) + \sqrt{1-\eta}x'_{\rm in}(\omega), \quad x_{\rm out}(\omega) = x_{\rm in}(\omega) - \sqrt{2\kappa}\delta x(\omega), \quad (102)$$

其中， $\eta \in [0,1]$ 表示探测效率， $x'_{\rm in}$（ω）是假真空，表示不完全探测。此外， ξ 是涨落力，其满足 $\langle \xi$（t）$\rangle = 0$的时间平均值。关于 ξ 的关联函数在参考文献 [22, 34],中被推广到有限维情形。

$$\langle \xi(t)\xi(t')\rangle = \int \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega(t-t')} M\hbar\Gamma_{\rm r}\omega \left[\coth\left(\frac{\hbar\omega}{2k_B T_0}\right) + 1\right], \quad (103)$$

or

$$\langle \xi(\omega)\xi(\omega')\rangle = M\hbar\Gamma_{\rm r}\omega \left[\coth\left(\frac{\hbar\omega}{2k_B T_0}\right) + 1\right] 2\pi\delta(\omega-\omega'). \quad (104)$$

这里， T_0 是环境温度。我们假设镜面转动微扰 $\delta\Phi$（ω）产生的随机热噪声很小，因此忽略了它。本文采用这一假设，是因为我们的研究重点是梁的内摩擦导致的摆模耗散。

含反馈冷却的式 (101) 可表示为

$$-M\omega^2\delta q(\omega) = -T\delta\Phi(\omega) + E_0 I \left.\frac{\partial^3 \delta X(\omega)}{\partial \sigma^3}\right|_{\sigma=\ell} + \hbar G_0\sqrt{n_c}\delta x(\omega) + i\omega\gamma_m M\delta q(\omega) + \xi_m(\omega), \quad (105)$$

其中， γ_m 是机械振子的有效阻尼率，对应于镜子质心处的有效温度，其值降至 $T_0\Gamma_{\rm r}/\gamma_m$。涨落力 ξ 也会因反馈冷却而改变，并重新定义为 $\xi_{\rm m}$，其关联函数 (103) 和 (104) 为

$$\langle \xi_m(t)\xi_m(t')\rangle = \int \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega(t-t')} M\hbar\gamma_m\omega \left[\coth\left(\frac{\hbar\omega\gamma_m}{2k_B T_0\Gamma_{\rm r}}\right) + 1\right], \quad (106)$$

or

$$\langle \xi_m(\omega)\xi_m(\omega')\rangle = M\hbar\gamma_m\omega \left[\coth\left(\frac{\hbar\omega\gamma_m}{2k_B T_0\Gamma_{\rm r}}\right) + 1\right] 2\pi\delta(\omega-\omega'). \quad (107)$$

计入反馈冷却和噪声项后，式 (74) 可得:

$$-\omega^2\begin{pmatrix}\delta q(\omega)\\ \delta\Phi(\omega)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\omega_{\rm AR}^2 + i\gamma_m\omega & \Delta_{\rm AR}^2\\ \omega_{\rm BR}^2 & -\Delta_{\rm BR}^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\delta q(\omega)\\ \delta\Phi(\omega)\end{pmatrix} + \frac{1}{M}\begin{pmatrix}\frac{\hbar G_0\sqrt{n_c}\sqrt{2\kappa}}{(\kappa^2+\Delta^2)}(\kappa x_{\rm in}(\omega) + \Delta y_{\rm in}(\omega)) + \xi_m(\omega)\\ 0\end{pmatrix}, \quad (108)$$

由此得到以下解

$$\delta q(\omega) = \frac{\omega^2 - \Delta_{BR}^2}{F(\omega)}\left\{\frac{\hbar G_0\sqrt{n_c}\sqrt{2\kappa}}{M(\kappa^2+\Delta^2)}(\kappa x_{\rm in}(\omega) + \Delta y_{\rm in}(\omega)) + \frac{\xi_m(\omega)}{M}\right\}, \quad (109)$$

$$\begin{aligned}\delta\Phi(\omega) &= -\frac{\omega_{BR}^2}{\omega^2 - \Delta_{BR}^2}\delta q(\omega)\\ &= -\frac{\omega_{BR}^2}{F(\omega)}\left\{\frac{\hbar G_0\sqrt{n_c}\sqrt{2\kappa}}{M(\kappa^2+\Delta^2)}(\kappa x_{\rm in}(\omega) + \Delta y_{\rm in}(\omega)) + \frac{\xi_m(\omega)}{M}\right\},\end{aligned} \quad (110)$$

其中 $F(\omega)$ 定义为

$$F(\omega) = -(\omega^2 + i\gamma_m\omega - \omega_{AR}^2)(\omega^2 - \Delta_{BR}^2) + \Delta_{AR}^2\omega_{BR}^2. \quad (111)$$

最后，利用上述内容　　结果中，我们总结了 $\delta p(\omega)$、 $\delta\Pi_\Phi(\omega)$ 和 $X_A(\omega)$ a 的噪声项解　　s

$$\delta p(\omega) = -iM\omega\delta q(\omega), \tag{112}$$

$$\delta\Pi_\Phi(\omega) = -iJ\omega\delta\Phi(\omega), \tag{113}$$

$$X_A(\omega) = \sqrt{\eta}\left[\left\{1 - \frac{2\kappa^2}{\kappa^2+\Delta^2} - \frac{\omega^2-\Delta_{BR}^2}{F(\omega)}\frac{4\hbar G_0^2 n_c\Delta\kappa^2}{M(\kappa^2+\Delta^2)^2}\right\}x_{\rm in}(\omega) - \left\{\frac{2\kappa\Delta}{\kappa^2+\Delta^2} + \frac{\omega^2-\Delta_{BR}^2}{F(\omega)}\frac{4\hbar G_0^2 n_c\Delta^2\kappa}{M(\kappa^2+\Delta^2)^2}\right\}y_{\rm in}(\omega)\right.$$
$$\left. - \frac{2G_0\sqrt{n_c}\Delta\sqrt{2\kappa}}{\kappa^2+\Delta^2}\frac{\omega^2-\Delta_{BR}^2}{F(\omega)}\frac{\xi_m(\omega)}{M}\right] + \sqrt{1-\eta}x'_{\rm in}(\omega). \tag{114}$$

He其中，方程（112）和（113）中的 $\delta q(\omega)$ 和 $\delta\Phi(\omega)$ 分别由方程（109）和（110）给出　　.

III. 维纳滤波器与条件协方差

本节将介绍一种最优滤波器——维纳滤波器，它能在根据观测到的物理量[25, 26]进行估计的过程中，使真实值与估计值之间的均方根误差最小。基于上一节提出的双模理论（这是将文献[14, 15]中的工作推广至多模理论），我们研究了连续测量和反馈控制条件下镜子的运动的条件方差。有关维纳滤波器的精彩综述和教材，可参见参考文献 [25, 26, 35], 。本节第一部分将以自成一体的方式，推导如何通过维纳滤波过程使不确定性最小化，并推导条件协方差。

A. 谱密度与维纳滤波器

维纳滤波器是一种最优滤波器，用于根据观测到的物理量进行估计时，最小化真实值与估计值之间的均方差。我们考虑在傅里叶空间中，根据观测到的物理量来估计感兴趣的物理量的过程。由于不可能进行完美观测，物理量的真实值与根据观测值估计出的值总是不同。因此，我们采用了一种能使真实值与估计值之间的均方差最小化的滤波器。设$\delta q(\omega)$为真实值， $X_A(\omega)$为观测量， $H(\omega)$为实现最优估计的滤波器，$\delta q_e(\omega)$为根据观测值获得的估计值。 $\delta q_e(\omega)$表示为

$$\delta q_{\rm e}(\omega) = H(\omega)X_A(\omega). \tag{115}$$

我们将均　　方差定义为傅里叶空间中真实 $\delta q(\omega)$与估计 $\delta q_{\rm e}(\omega)$值之间的均方差，如下所示　　[1]

---

[1] 假设 $A(t)$和 $B(t)$是厄米算符，我们可以写成

$$\begin{aligned}\langle A(t)B(t)+B(t)A(t)\rangle &\equiv \langle A(t)^\dagger B(t)\rangle + \langle B(t)A(t)^\dagger\rangle \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2}\int\int d\omega d\omega'(\langle A(\omega)^\dagger B(\omega')\rangle e^{i(\omega-\omega')t} + \langle B(\omega)A(\omega')^\dagger\rangle e^{-i(\omega-\omega')t}) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2}\int\int d\omega d\omega'(\langle A(\omega)^\dagger B(\omega')\rangle + \langle B(\omega')A(\omega)^\dagger\rangle)e^{i(\omega-\omega')t}.\end{aligned}$$

When 我们通过 $\langle A^\dagger(\omega)B(\omega') + B(\omega')A^\dagger(\omega)\rangle = 2\pi\delta(\omega-\omega')S_{AB}(\omega)$ 引入谱密度 $S_{AB}(\omega)$，我们有　　e

$$\langle A(t)B(t)+B(t)A(t)\rangle = \frac{1}{2\pi}\int d\omega S_{AB}(\omega).$$

因此，在傅里叶空间中，算符 $A(t)$的平方（的两倍）可定义为

$$\langle A(\omega)^\dagger A(\omega) + A(\omega)A(\omega)^\dagger\rangle.$$

$$\begin{aligned}\langle|\delta q(\omega)-\delta q_{\rm e}(\omega)|^2\rangle &\equiv \langle(\delta q(\omega)-H(\omega)X_A(\omega))^\dagger(\delta q(\omega)-H(\omega)X_A(\omega))\\ &\quad+(\delta q(\omega)-H(\omega)X_A(\omega))(\delta q(\omega)-H(\omega)X_A(\omega))^\dagger\rangle\\ &= \langle\delta q^\dagger(\omega)\delta q(\omega)+\delta q(\omega)\delta q^\dagger(\omega)\rangle-H^*(\omega)\langle X_A^\dagger(\omega)\delta q(\omega)+\delta q(\omega)X_A^\dagger(\omega)\rangle\\ &\quad-H(\omega)\langle\delta q^\dagger(\omega)X_A(\omega)+X_A(\omega)\delta q^\dagger(\omega)\rangle\\ &\quad+H(\omega)H^*(\omega)\langle X_A^\dagger(\omega)X_A(\omega)+X_A(\omega)X_A^\dagger(\omega)\rangle.\end{aligned}\tag{116}$$

我们求得最小 $\langle|\delta q(\omega)-\delta q_{\rm e}(\omega)|^2\rangle$的 m。为此，其相对于滤波器 $H(\omega)$ 的偏导数为

$$\frac{\partial\langle|\delta q(\omega)-\delta q_{\rm e}(\omega)|^2\rangle}{\partial H(\omega)}=-\langle\delta q^\dagger(\omega)X_A(\omega)+X_A(\omega)\delta q^\dagger(\omega)\rangle+H^*(\omega)\langle X_A^\dagger(\omega)X_A(\omega)+X_A(\omega)X_A^\dagger(\omega)\rangle.\tag{117}$$

这里我们认为滤波器 $H(\omega)$ 与其复共轭 $H^*(\omega)$ 相互独立，因为它有两个自由度。此方法用于通过作用量积分和变分原理推导复标量场的运动方程。这里，使估计达到最优的滤波器 $H_{\rm opt}(\omega)$ 会使真实值与估计值 $\langle|\delta q(\omega)-\delta q_{\rm e}(\omega)|^2\rangle$ 之间的差异最小。因此

$$\frac{\partial\langle|\delta q(\omega)-\delta q_{\rm e}(\omega)|^2\rangle}{\partial H_{\rm opt}(\omega)}=0\tag{118}$$

成立。用于最优估计的滤波器的复共轭 $H^*_{\rm opt}(\omega)$ 为

$$H^*_{\rm opt}(\omega)=\frac{\langle\delta q^\dagger(\omega)X_A(\omega)+X_A(\omega)\delta q^\dagger(\omega)\rangle}{\langle X_A^\dagger(\omega)X_A(\omega)+X_A(\omega)X_A^\dagger(\omega)\rangle}.\tag{119}$$

此外，选择 $H(\omega)$ 作为可实现最优估计的滤波器 $H_{\rm opt}(\omega)$，代入方程 (116)，可得

$$\begin{aligned}\langle|\delta q(\omega)-\delta q_{\rm e}(\omega)|^2\rangle &= \langle\delta q^\dagger(\omega)\delta q(\omega)+\delta q(\omega)\delta q^\dagger(\omega)\rangle\\ &\quad-\frac{\langle\delta q^\dagger(\omega)X_A(\omega)+X_A(\omega)\delta q^\dagger(\omega)\rangle}{\langle X_A^\dagger(\omega)X_A(\omega)+X_A(\omega)X_A^\dagger(\omega)\rangle}\langle X_A^\dagger(\omega)\delta q(\omega)+\delta q(\omega)X_A^\dagger(\omega)\rangle\\ &\quad-H_{\rm opt}(\omega)\langle\delta q^\dagger(\omega)X_A(\omega)+X_A(\omega)\delta q^\dagger(\omega)\rangle\\ &\quad+H_{\rm opt}(\omega)\frac{\langle\delta q^\dagger(\omega)X_A(\omega)+X_A(\omega)\delta q^\dagger(\omega)\rangle}{\langle X_A^\dagger(\omega)X_A(\omega)+X_A(\omega)X_A^\dagger(\omega)\rangle}\langle X_A^\dagger(\omega)X_A(\omega)+X_A(\omega)X_A^\dagger(\omega)\rangle\\ &= \langle\delta q^\dagger(\omega)\delta q(\omega)+\delta q(\omega)\delta q^\dagger(\omega)\rangle-|H_{opt}(\omega)|^2\langle X_A^\dagger(\omega)X_A(\omega)+X_A(\omega)X_A^\dagger(\omega)\rangle.\end{aligned}\tag{120}$$

这里我们使用

$$H_{\rm opt}(\omega)=\frac{\langle X_A^\dagger(\omega)\delta q(\omega)+\delta q(\omega)X_A^\dagger(\omega)\rangle}{\langle X_A^\dagger(\omega)X_A(\omega)+X_A(\omega)X_A^\dagger(\omega)\rangle}.\tag{121}$$

一般而言，某个物理量 $A(\omega)$ $B(\omega)$ 的对称化单边谱密度 $S_{AB}(\omega)$ 定义为$2\pi\delta(\omega-\omega')S_{AB}(\omega)\equiv\langle A^\dagger(\omega)B(\omega')+B(\omega')A^\dagger(\omega)\rangle$[24]。利用此方程，可将其表示为

$$H_{\rm opt}(\omega)=\frac{S_{X_A\delta q}(\omega)}{S_{X_AX_A}(\omega)}.\tag{122}$$

使真实值 δq 与估计值 $\delta q_{\rm e}(\omega)$ 之间的均方差最小的滤波器 $H_{\delta q}(\omega)$ 称为维纳滤波器。其他变量的维纳滤波器也可以用类似的方法确定。为了确定维纳滤波器，我们必须考虑 $H_{\rm opt}(\omega)$ 的因果部分，

$$H_{\delta q}(\omega)=\frac{1}{S^+_{X_AX_A}(\omega)}\left[\frac{S_{X_A\delta q}(\omega)}{S^-_{X_AX_A}(\omega)}\right]_+,\quad H_{\delta p}(\omega)=\frac{1}{S^+_{X_AX_A}(\omega)}\left[\frac{S_{X_A\delta p}(\omega)}{S^-_{X_AX_A}(\omega)}\right]_+,\tag{123}$$

$$H_{\delta\Phi}(\omega)=\frac{1}{S^+_{X_AX_A}(\omega)}\left[\frac{S_{X_A\delta\Phi}(\omega)}{S^-_{X_AX_A}(\omega)}\right]_+,\quad H_{\delta\Pi_\Phi}(\omega)=\frac{1}{S^+_{X_AX_A}(\omega)}\left[\frac{S_{X_A\delta\Pi_\Phi}(\omega)}{S^-_{X_AX_A}(\omega)}\right]_+,\tag{124}$$

其中，$[Z(\omega)]_+$ 是 $Z(\omega)$ 的因果分量，而 $S^{\pm}_{X_AX_A}(\omega)$ 则由附录 A 中的公式 (A5) 明确定义。这里，“因果”是指考虑正耗散，以保证阻尼振荡具有物理上正确的行为。相反，“非因果”是指负耗散，这意味着振幅发散，具有物理上不正确的行为。

我们可以按照附录 A 中所述确定这些维纳滤波器，并发现维纳滤波器可写为

$$H_{\delta q}(\omega)=\frac{1}{S^{+}_{X_AX_A}(\omega)}\left[\frac{S_{X_A\delta q}(\omega)}{S^{-}_{X_AX_A}(\omega)}\right]_+=\frac{G_{\delta q}(\omega)}{S^{+}_{X_AX_A}(\omega)},\quad G_{\delta q}(\omega)=\frac{C_{1X_A\delta q}}{\sqrt{C_{1X_AX_A}}}\frac{\tilde{E}\omega^3+\tilde{F}\omega^2+\tilde{G}\omega+\tilde{H}}{F(\omega)}, \tag{125}$$

$$H_{\delta p}(\omega)=\frac{1}{S^{+}_{X_AX_A}(\omega)}\left[\frac{S_{X_A\delta p}(\omega)}{S^{-}_{X_AX_A}(\omega)}\right]_+=\frac{G_{\delta p}(\omega)}{S^{+}_{X_AX_A}(\omega)},\quad G_{\delta p}(\omega)=\frac{C_{1X_A\delta q}}{\sqrt{C_{1X_AX_A}}}\frac{\tilde{I}\omega^3+\tilde{J}\omega^2+\tilde{K}\omega+\tilde{L}}{F(\omega)}, \tag{126}$$

$$H_{\delta\Phi}(\omega)=\frac{1}{S^{+}_{X_AX_A}(\omega)}\left[\frac{S_{X_A\delta\Phi}(\omega)}{S^{-}_{X_AX_A}(\omega)}\right]_+=\frac{G_{\delta\Phi}(\omega)}{S^{+}_{X_AX_A}(\omega)},\quad G_{\delta\Phi}(\omega)=\frac{C_{1X_A\delta q}}{\sqrt{C_{1X_AX_A}}}\frac{\tilde{M}\omega^3+\tilde{N}\omega^2+\tilde{O}\omega+\tilde{P}}{F(\omega)}, \tag{127}$$

$$H_{\delta\Pi_\Phi}(\omega)=\frac{1}{S^{+}_{X_AX_A}(\omega)}\left[\frac{S_{X_A\delta\Pi_\Phi}(\omega)}{S^{-}_{X_AX_A}(\omega)}\right]_+=\frac{G_{\delta\Pi_\Phi}(\omega)}{S^{+}_{X_AX_A}(\omega)},\quad G_{\delta\Pi_\Phi}(\omega)=\frac{C_{1X_A\delta q}}{\sqrt{C_{1X_AX_A}}}\frac{\tilde{Q}\omega^3+\tilde{R}\omega^2+\tilde{S}\omega+\tilde{T}}{F(\omega)}, \tag{128}$$

上述各量所需的显式公式定义于附录 A。

B. 条件协方差

条件协方差是实际值与根据测得的输出光 X_A 在测量输出光 X_A 时估计出的物理量之差的平方期望值，记作

$$V_{r_1r_2}=\langle(r_1(\omega)-r_{1\mathrm{e}}(\omega))^\dagger(r_2(\omega)-r_{2\mathrm{e}}(\omega))+(r_2(\omega)-r_{2\mathrm{e}}(\omega))(r_1(\omega)-r_{1\mathrm{e}}(\omega))^\dagger\rangle. \tag{129}$$

这里 r_1, r_2 表示变量 δq、δp、$\delta\Phi$ 和 $\delta\Pi_\Phi$，而 $r_{1\mathrm{e}}$, $r_{2\mathrm{e}}$ 对应于相应的估计值。对于每个变量，这些估计值均使用维纳滤波器求得，如式 (115) 所定义；例如，对于 δq，有

$$r_{j\mathrm{e}}(\omega)=H_{r_j}(\omega)X_A(\omega) \tag{130}$$

其中 $j=1,2$。这里 $H_{r_j}(\omega)$ 表示 $H_{\delta q}(\omega)$、$H_{\delta p}(\omega)$、$H_{\delta\Phi}(\omega)$、$H_{\delta\Pi_\Phi}(\omega)$，它们分别由式 (125)、(126) 和 (128) 给出。(127),

条件方差是对变量不确定性的定量度量。我们引入矩阵 $\boldsymbol{V}_c$, $\boldsymbol{V}_r$，它们表示摆和转动模的条件协方差:

$$\boldsymbol{V}_{\mathrm{c}}=\begin{pmatrix}V_{\delta q\delta q} & V_{\delta q\delta p}\\ V_{\delta q\delta p} & V_{\delta p\delta p}\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{V}_{\mathrm{r}}=\begin{pmatrix}V_{\delta\Phi\delta\Phi} & V_{\delta\Phi\delta\Pi_\Phi}\\ V_{\delta\Phi\delta\Pi_\Phi} & V_{\delta\Pi_\Phi\delta\Pi_\Phi}\end{pmatrix}. \tag{131}$$

随后 根据上述定义，条件协方差的各分量表示如下 s:

$$V_{\delta q\delta q}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{Re}[S_{\delta q\delta q}(\omega)-|G_{\delta q}(\omega)|^2]d\omega, \tag{132}$$

$$V_{\delta p\delta p}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{Re}[S_{\delta p\delta p}(\omega)-|G_{\delta p}(\omega)|^2]d\omega, \tag{133}$$

$$V_{\delta q\delta p}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{Re}[S_{\delta q\delta p}(\omega)-G_{\delta q}(\omega)^*G_{\delta p}(\omega)]d\omega, \tag{134}$$

$$V_{\delta\Phi\delta\Phi}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{Re}[S_{\delta\Phi\delta\Phi}(\omega)-|G_{\delta\Phi}(\omega)|^2]d\omega, \tag{135}$$

$$V_{\delta\Pi_\Phi\delta\Pi_\Phi}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{Re}[S_{\delta\Pi_\Phi\delta\Pi_\Phi}(\omega)-|G_{\delta\Pi_\Phi}(\omega)|^2]d\omega, \tag{136}$$

$$V_{\delta\Phi\delta\Pi_\Phi}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{Re}[S_{\delta\Phi\delta\Pi_\Phi}(\omega)-G_{\delta\Phi}(\omega)^*G_{\delta\Pi_\Phi}(\omega)]d\omega. \tag{137}$$

由式（109）和（110），可得谱密度：

$$S_{\delta q\delta q}(\omega)=\frac{1}{|F(\omega)|^2}(\omega^2-\Delta_{BR}^2)^2\left\{\frac{2\kappa\hbar^2G_0^2n_c}{M^2(\kappa^2+\Delta^2)}\left(\kappa^2\langle x_{\rm in}^2(\omega)\rangle+\Delta^2\langle y_{\rm in}^2(\omega)\rangle\right)+\frac{\langle\xi_m^2(\omega)\rangle}{M^2}\right\},\tag{138}$$

$$S_{\delta\Phi\delta\Phi}(\omega)=\frac{1}{|F(\omega)|^2}(\omega_{BR}^2)^2\left\{\frac{2\kappa\hbar^2G_0^2n_c}{M^2(\kappa^2+\Delta^2)^2}\left(\kappa^2\langle x_{\rm in}^2(\omega)\rangle+\Delta^2\langle y_{\rm in}^2(\omega)\rangle\right)+\frac{\langle\xi_m^2(\omega)\rangle}{M^2}\right\},\tag{139}$$

以及其他分量

$$S_{\delta p\delta p}(\omega)=M^2\omega^2S_{\delta q\delta q}(\omega),\quad S_{\delta q\delta p}(\omega)=iM\omega S_{\delta q\delta q}(\omega),\tag{140}$$

$$S_{\delta\Pi_\Phi\delta\Pi_\Phi}(\omega)=J^2\omega^2S_{\delta\Phi\delta\Phi}(\omega),\quad S_{\delta\Phi\delta\Pi_\Phi}(\omega)=iJ\omega S_{\delta\Phi\delta\Phi}(\omega).\tag{141}$$

条件方差的积分使用留数定理计算。留数定理利用被积函数的极点处的值，该值由 $|F(\omega)|^2=0$ 得到。$|F(\omega)|^2=0$ 中出现两类极点，对应于摆和转动模。微扰 δq 及其共轭动量 δp 在摆模频率处发生共振，而转动模的影响很小。因此，我们可以将与频率成反比的耗散 $\Gamma_{\rm r}(\omega)$ 视为 $\Gamma_{\rm r}(\omega)\simeq\Gamma_{\rm r}(\Omega)\Omega/\omega$。对于由式（106）或式（107）表示的涨落 ξ_m，即使在非常低的温度 $T_0'\sim1$K 下，也有 $k_BT_0'/\hbar\simeq10^{10}[1/\mathrm{s}]$。于是，以下近似成立：

$$M\hbar\gamma_m\omega\coth\left(\frac{\hbar\omega\gamma_m}{2k_BT_0\Gamma_{\rm r}(\omega)}\right)\simeq M\hbar\omega\gamma_m\frac{2k_BT_0\Gamma_{\rm r}(\omega)}{\hbar\omega\gamma_m}\simeq M\hbar\Omega\gamma_m(2\bar n_p+1),\tag{142}$$

其中定义

$$\bar n_{\rm p}=\left(\exp\left\{\frac{\hbar\Omega\gamma_{\rm m}}{k_{\rm B}T_0\Gamma_{\rm r}(\omega)}\right\}-1\right)^{-1}\simeq\frac{k_{\rm B}T_0\Gamma_{\rm r}(\omega)}{\hbar\Omega\gamma_{\rm m}}-\frac{1}{2}.\tag{143}$$

这里，$\bar n_{\rm p}$ 表示热激发态的平均声子数。

C. 与点粒子镜模型的比较

在前面的分析中，[14], 将镜子建模为点粒子，忽略转动模，仅考虑摆模。在附录 B 1 中，我们回顾了点粒子镜模型的维纳滤波器和条件方差，即式 (B29) 及式 (B30) ∼ (B32)，该模型由参考文献 [14] 提出。与本文提出的双模理论相比，点粒子模型相当简单，因此值得探究双模理论的预测能否通过这一简单模型再现。为此，我们基于单模理论的维纳滤波器考虑以下两种模型。

修正模型I：在附录 B 4 中，我们求得了采用基于单模理论的维纳滤波器处理光束模型式 (B43) 所得输出光 $X_A(\omega)$ 时的条件方差 $\boldsymbol{V}_c'$；输出光的各分量由式 (B44) ∼ (B46) 给出，其中 $H_{\delta q_m}(\omega)$ 和 $H_{\delta p_m}(\omega)$ 是附录 B 2 中提出的单模理论维纳滤波器。利用这一条件协方差，我们可以评估转动模对上一节所推导的条件方差的影响。

修正模型 II：在前一篇论文中 [29], ，我们基于耦合谐振子的类比指出，当摆模与转动模彼此共振时，摆模的品质因数会降低至原来的四分之一。这一事实启发我们建立单模维纳滤波器模型，用 $N\Gamma$替代耗散 Γ，其中采用 $N=4.18$。具体而言，修正模型 II 与修正模型 I 相同，只是将耗散替换为 $N\Gamma$。

D. 结果

在我们的分析中，理论预测基于表 I 中列出的模型参数，这些参数在先前的研究中曾被提及 [13, 14, 28, 29]。特别是，我们假设温度为 $T_0=300$K，因此在我们的模型中，镜子的有效温度通过反馈控制降至 $T_{\rm eff}=T_0\Gamma_r/\gamma_m\simeq7.5\times10^{-2}$ K。此外，由于维纳滤波过程，噪声降低到这样的水平：

对双模模型始终使用双模维纳滤波器时，可达到 0<style id='4'>.</style>5 的高纯度；而对双模模型使用单模维纳滤波器时，效果可能较差。为展示结果，我们将以下有量纲量相乘，从而引入归一化条件方差；这些量是以真空基态归一化为 1 的无量纲量：

$$V_{\delta q\delta q}\times\frac{2M\omega_{AR}}{\hbar},\quad V_{\delta p\delta p}\times\frac{2}{\hbar M\omega_{AR}},\quad V_{\delta q\delta p}\times\frac{2}{\hbar}, \tag{144}$$

$$V_{\delta\Phi\delta\Phi}\times\frac{2J\Delta_{BR}}{\hbar},\quad V_{\delta\Pi_\phi\delta\Pi_\phi}\times\frac{2}{\hbar J\Delta_{BR}},\quad V_{\delta\Phi\delta\Pi_\Phi}\times\frac{2}{\hbar}. \tag{145}$$

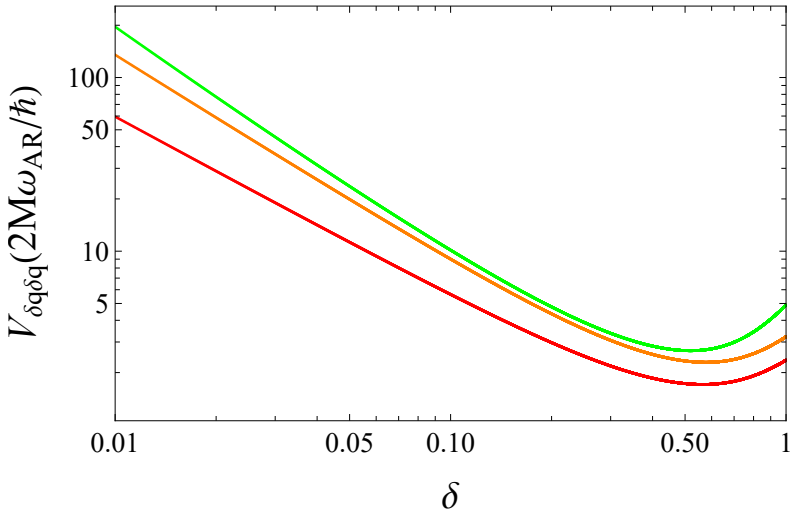

图 6： δq 的无量纲方差随归一化失谐 δ的变化。通过因子 $2M\omega_{\mathrm{AR}}/\hbar$将真空态下的方差归一化为 1。红色曲线表示双模理论的维纳滤波器结果，即根据式（132）得到的 $V_{\delta q\delta q}(2M\omega_{AR}/\hbar)$；绿色曲线表示在点质量镜极限下，仅对摆模应用单模维纳滤波器（修正模型 II）的结果，即根据式（B44）得到的 $V'_{\delta q\delta q}(2M\omega_{AR}/\hbar)$。橙色曲线表示采用耗散 4.18Γ 而非 Γ 的单模维纳滤波器（修正模型 II）的结果。有关单模维纳滤波器的更多细节，请参见附录 B。当失谐较小时，由于失谐决定了式（69）所示的测量效率，因此无法通过对 X_A 的测量充分获取位置 δq 的信息。于是，失谐较小时 δq 的方差较大；随着失谐增大，方差会减小，但失谐进一步增大则会妨碍对振子位置进行有效测量，因而无法降低 $\delta\gtrsim 0.5$的噪声。因此，失谐存在一个合适的取值范围 $0.2\lesssim\delta\lesssim 0.5$。这也解释了图 $7\sim 9$ 中的行为，因为根据式（112），δq 与 δp 彼此相关。

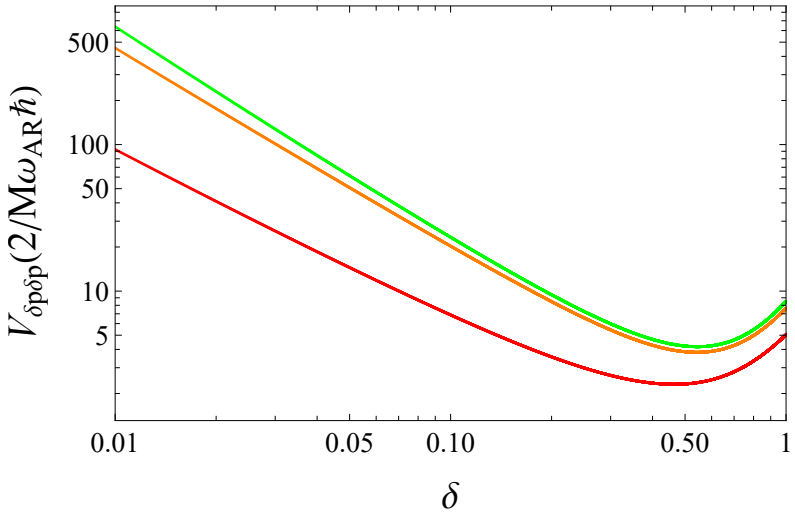

图7： 与图6相同，但此处展示动量 δp 的方差；将其除以因子 $2/M\omega_{\mathrm{AR}}\hbar$ 后，在真空态下归一化为1。红色曲线表示采用双模理论 $V_{\delta p\delta p}(2/M\omega_{AR}\hbar)$ 的维纳滤波器并使用公式（133）得到的结果；绿色曲线表示采用单模理论 $V'_{\delta p\delta p}(2/M\omega_{AR}\hbar)$ 的维纳滤波器并使用公式（B45）得到的结果，定义为（修正模型I）。橙色曲线表示采用单模维纳滤波器，并以耗散 4.18Γ 代替 Γ 得到的结果（修正模型 II）。

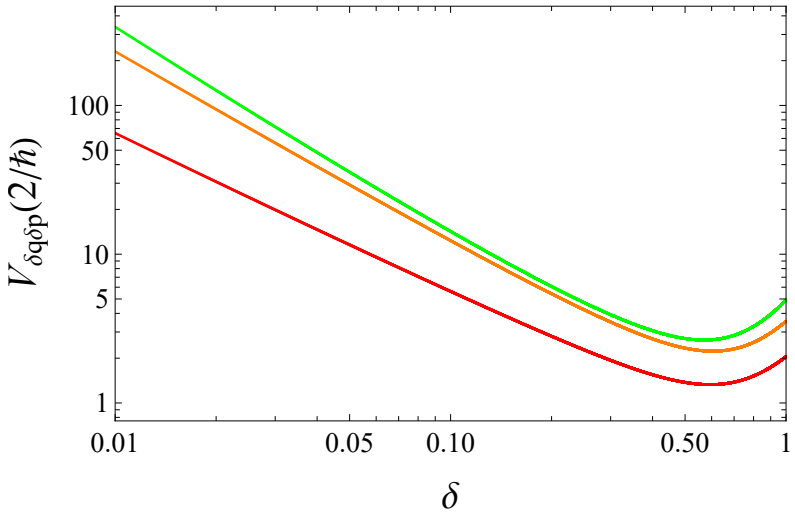

图8： 与图6相同，但此处展示 δq 和 δp 的协方差。红色曲线为使用公式（134）的 $V_{\delta q\delta p}(2/\hbar)$；绿色曲线为使用公式（B46）的 $V'_{\delta q\delta p}(2/\hbar)$，即单模维纳滤波器（修正模型I）。橙色曲线表示采用单模维纳滤波器，并以耗散 4.18Γ 代替 Γ 得到的结果（修正模型 II）。如图6的图注所述，通过 X_A 对 δq 的测量效率决定了 $\delta \lesssim 0.5$ 的行为。在失谐较小的区域，δq 和 δp 之间较大的协方差并不意味着二者之间存在很强的相关性，因为此时它们各自的方差也都很大。

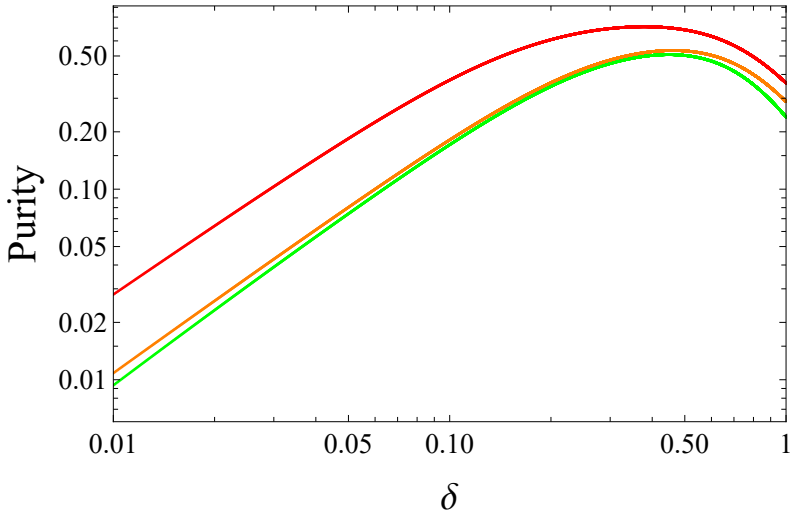

图 9： 纯度随失谐 δ 的变化。红色曲线表示双模理论中维纳滤波器的结果（$1/\sqrt{\det \boldsymbol{V}_c}$）；绿色曲线表示在点质量镜极限下，仅对摆模使用单模维纳滤波器的结果（$1/\sqrt{\det \boldsymbol{V}_c'}$）（修正模型I）。橙色曲线表示使用耗散 4.18Γ 而非 Γ 的单模维纳滤波器结果（修正模型 II）。

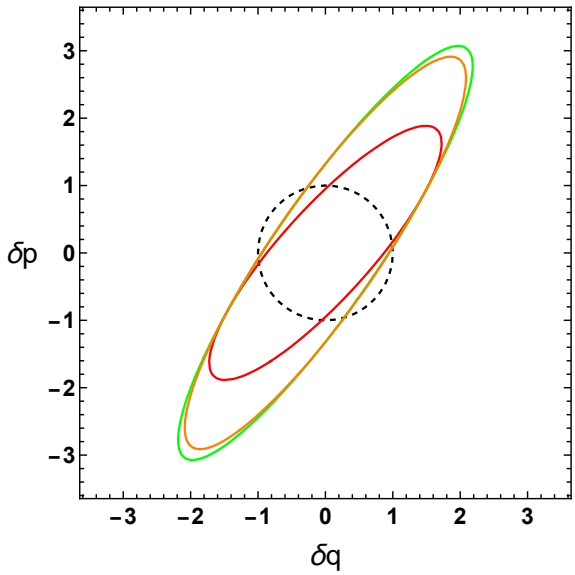

图 10： 满足 $W(\delta q,\ \delta p) = e^{-1}W_{\max}$（维格纳椭圆）的维格纳函数在 δq 和 δp 平面上的等高线，其中协方差采用双模理论的维纳滤波器计算得出 $\boldsymbol{V}_c$（红色椭圆）。绿色椭圆表示相同的结果，但协方差采用单模建模计算得出 $\boldsymbol{V}_c'$（修正模型I）。橙色椭圆表示使用耗散 4.18Γ 而非 Γ 的单模维纳滤波器结果（修正模型 II）。绿色和红色椭圆分别是修正模型 I 和 II 的结果。这里维格纳函数定义为 $W(\delta q,\ \delta p) = 2/(\pi\sqrt{\det V})\exp\left[-\boldsymbol{r}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{V}^{-1}\boldsymbol{r}\right]$，其中 $\boldsymbol{r} = (\delta q,\ \delta p)$，且 $\boldsymbol{V}$ 表示 $\boldsymbol{V}_c$ 或 $\boldsymbol{V}_c'$。失谐固定为 $\delta = 0.2$。黑色虚线圆表示真空态。

图6绘制了 δq 的无量纲方差随归一化失谐 δ的变化关系，其中红色曲线表示上一小节建立的双模理论结合维纳滤波器所得的结果，而绿色曲线表示在点质量镜极限下，仅考虑摆模的单模模型结合维纳滤波器所得的结果（修正模型I）。附录 B中描述了单模模型的详细内容。橙色曲线表示将耗散衰减率 Γ替换为4.18Γ 后，对单模理论应用维纳滤波器所得的结果（修正模型 II）；这一处理源于我们的发现：由于存在转动模型 [29]，摆模的品质因数降低了四倍。类似地，图7绘制了动量 δp的无量纲方差，而图8展示了 δq 与动量 δp的无量纲协方差。这些曲线

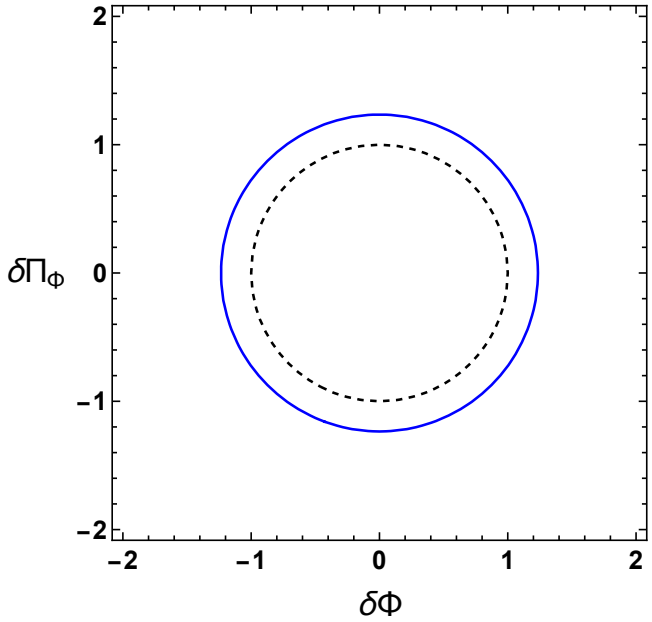

图 11： $\delta\Phi$ 与 $\delta\Pi_\Phi$ 的相空间中的维格纳椭圆，其协方差为 $\boldsymbol{V}_r$（蓝色曲线）。此处的参数与图 10 中的相同。黑色虚线圆表示真空态。

随失谐 δ 的变化行为可理解为通过对X_A进行测量来确定 δq 的效率，该测量由公式（69）规定。

如附录 B 所述，单模模型将镜子视为质点，这一处理方式已用于参考文献 [13]中的先前研究。因此，红色曲线与绿色曲线之间的差异可理解为本模型中镜子的有限尺寸效应。结果表明，恰当处理旋转模型对于获得接近真空态的量子态至关重要。图 9 展示了这一点，其中绘出了纯度（$=1/\sqrt{\det \boldsymbol{V}_c}$）。纯态的纯度为 1。图 9 和图 6 中各曲线的颜色代表相同的模型。当 $\delta<1$时，红色曲线始终高于绿色曲线。因此，图 9 表明，忽略转动模会使镜子的状态无法形成量子压缩态。图 10 展示了这一点，其中绘出了维格纳椭圆，即相空间中维格纳分布函数的等高线；相应状态的协方差分别为：由式 (131) 定义的 $\boldsymbol{V}_c$（红色曲线）、由式 (B43) 定义的 $\boldsymbol{V}_c'$（绿色曲线，修正模型I），以及将 Γ 替换为 4.18Γ 后由式 (B43) 定义的 $\boldsymbol{V}_c'$（橙色曲线，修正模型 II）。归一化失谐固定为 $\delta=0.2$。图 10 和图 6 中各曲线的颜色对应相同的模型。黑色虚线圆表示真空态的维格纳椭圆。图 10 表明，双模建模对于产生量子压缩态具有重要作用。

图 6∼8 显示，橙色曲线的数值小于绿色曲线。这表明，可以将 Γ 作为参数，在单模理论中改进维纳滤波过程。图 9 和图 10 展示了这一点：橙色的纯度和维格纳椭圆更接近红色所示的双模理论结果。不过，这种改进有限，仅仅改变单模维纳滤波器的耗散 Γ，并不能完全体现双模维纳滤波器中转动模的影响。

最后，在本节中，我们介绍转动模的状态。图 11 显示了转动模 $\delta\Phi$ 和 $\delta\Pi_\Phi$在相空间中的维格纳椭圆。该椭圆由式（131）定义的协方差 $\boldsymbol{V}_r$ 得出，其中参数与图 10 中的相同。图 11 所示的转动模状态接近真空态，维格纳椭圆近似为圆形。这表明转动模也像摆模一样被冷却了，但该状态并未被压缩。对于与测量冷却自由度耦合的模而言，这一结果或许可视为能量均分定律。不过，对于转动模的这些结果应谨慎看待，因为我们只考虑了与梁的内摩擦相关的噪声，而忽略了其他噪声。

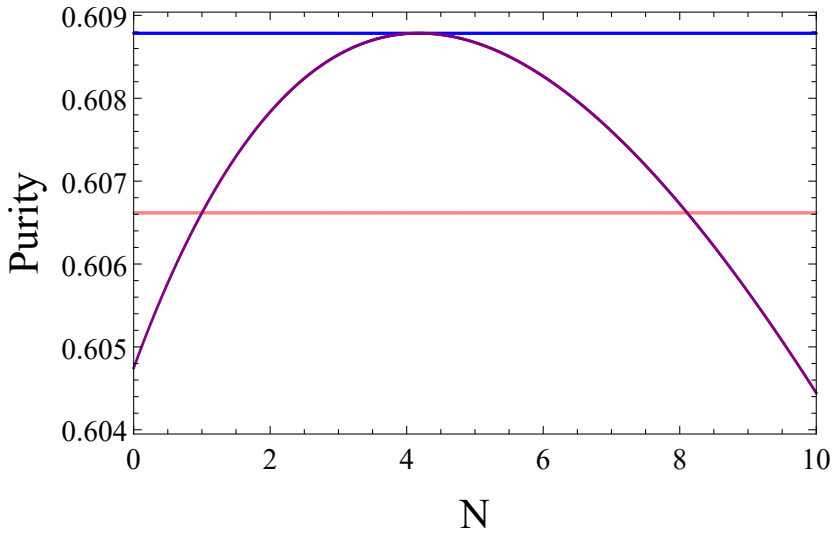

图12： 紫色曲线表示省略转动模极点的贡献时，将耗散 Γ 替换为 $N\Gamma$ 后，使用单模维纳滤波器（修正模型 III）得到的纯度。这里固定为 $\delta = \delta_0 (= 0.2)$。蓝线和粉线用于对比。蓝线是使用双模理论的维纳滤波器得到的结果，而粉线是将镜子视为质点 $N = 1$ （修正模型 III）后，使用单模维纳滤波器得到的结果。所有情况均忽略转动模极点的贡献。

IV. 讨论

A. 傅里叶空间范围受限时的单模滤波器

我们讨论了理论方面的问题，但也有必要分析实际实验。在使用维纳滤波器分析谱密度时，会对傅里叶空间中的数据进行积分，以计算条件方差。因此，在实际实验中，通常会将傅里叶空间的频率范围限制在与测量相关的范围内，而不使用整个频率空间。由于我们关注的是镜子的摆模，测量范围被认为局限于包含摆模的有限频段。例如，我们的模型应涵盖摆模的频率范围，即 100 赫兹 $< \omega/2\pi <$ 700 赫兹，而转动模的频率范围为 $\omega/2\pi \simeq 27$ 赫兹。换言之，在进行这项实验分析时，可以排除傅里叶空间中的其他频段。在本节中，我们考虑排除镜子转动模的频域 $\omega/2\pi \approx 27$赫兹的情况。

为了考虑这一效应，我们在估算条件方差时限制关于 ω 的积分范围，见式（132）～（135）。如第三节B所述，条件方差的积分使用留数定理计算。留数定理使用被积函数的极点值，这些极点由 $|F(\omega)|^2 = 0$求得。 $|F(\omega)|^2 = 0$会出现两类极点，分别对应摆模和转动模，其中转动模极点的实部远小于摆模极点的实部。这里我们应考虑仅在摆模附近进行关于 ω 的积分的情况。我们假设，这种情况可以通过计算被积函数中对应于摆模的极点的留数，并舍弃对应于转动模的极点的留数来描述。也就是说，我们计算式（B44）、 ～（B45）中的条件协方差$\boldsymbol{V}_c'$，但忽略转动模极点的贡献。我们将说明，这为单模维纳滤波器提供了一种简单而实用的方法。我们将此模型称为修正模型 III。

图12比较了双模理论的维纳滤波器（蓝线）、修正模型 III（粉线）以及含耗散 $N\Gamma$ 的修正模型 III（紫色曲线）的纯度随 N 的变化。在所有这些模型中，均舍弃了转动模极点的贡献。需要指出的是，蓝线和粉线仅在 $N = 1$处定义，其绘制目的是与作为 N函数定义的紫色曲线进行比较。修正模型 III 的结果能够很好地重现精确双模维纳滤波器 $\boldsymbol{V}_c$ 的协方差矩阵，在 $\delta \leq 1$范围内误差不超过 10^{-6} %。如图12所示，通过改变耗散率 Γ 可以进一步减小这一差异。含耗散 $N\Gamma$ 的修正模型 III 的纯度达到最大值，并与双模理论一致，适用于

$N \simeq 4$，这可以用转动模的存在使摆模的品质因数降低至原来的四分之一来解释 [29]。这表明，通过移除维纳滤波器的低频傅里叶模，单模维纳滤波分析可以给出良好的近似。也就是说，在傅里叶空间中适当选择模的范围并舍弃低频傅里叶模 $\omega/2\pi \lesssim 30 \sim 100$ 赫兹后，就可以使用单模维纳滤波器。这是因为在我们的模型参数中，摆模和转动模的频率彼此相差很大。

B. 对生成纠缠的意义

最后，我们考虑上述结果对于通过半透镜在构成功率再循环法布里-珀罗-迈克耳孙干涉仪的两面毫克级镜子之间生成量子纠缠的意义，该干涉仪已在参考文献 [31]中展示。本文所考虑装置的示意图见图 13。宏观物体之间的纠缠生成是现代物理学探索量子世界与经典世界边界的前沿课题 [33]。参考文献 [31]的作者研究了由构成法布里-珀罗-迈克耳孙干涉仪的 7 毫克镜子之间生成纠缠的条件，其中每面镜子均采用单模理论建模。双模理论对纠缠生成可行性的影响值得关注。参考文献 [31] 的作者表明，机械共模和差模的纯度与压缩都是实现纠缠生成所必需的，而纠缠生成在差模失谐处达到最优 $\delta_- = -\Delta/2\kappa_- \sim 0.2$。对于表 I 中的参数，差模的纯度$P_- \gtrsim 0.5$ 大致需要达到生成纠缠所需的水平。图 9 中的纯度指差模的纯度。我们仅通过功率再循环镜降低光学衰减率，便可得到共模的纯度。在图 9 中，使用单模滤波器时的纯度（绿色曲线）小于 0。5，而使用双模滤波器时的纯度（红色曲线）则大于所需值。

我们关注 两个镜子的摆模之间的对数负性，如参考文献 [31] 所述。对数 a-
负性是一个 两个反射镜之间纠缠的指标，其产生源于.....的不对称 ic

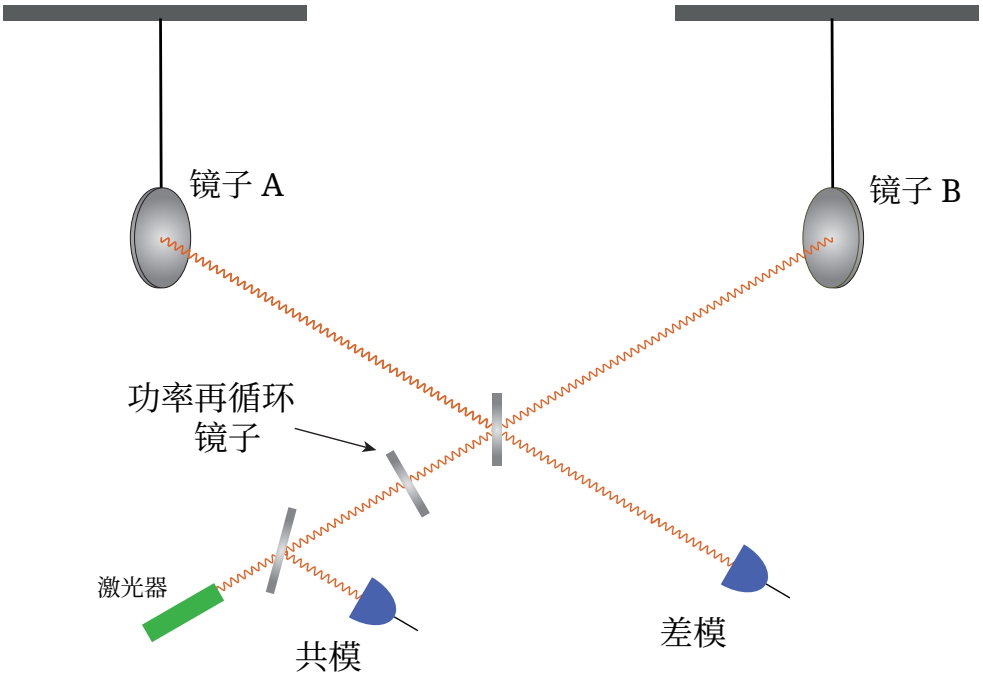

图 13： 功率回收型法布里-珀罗-迈克耳孙干涉仪示意图，假设该干涉仪用于计算两个镜子之间的纠缠。

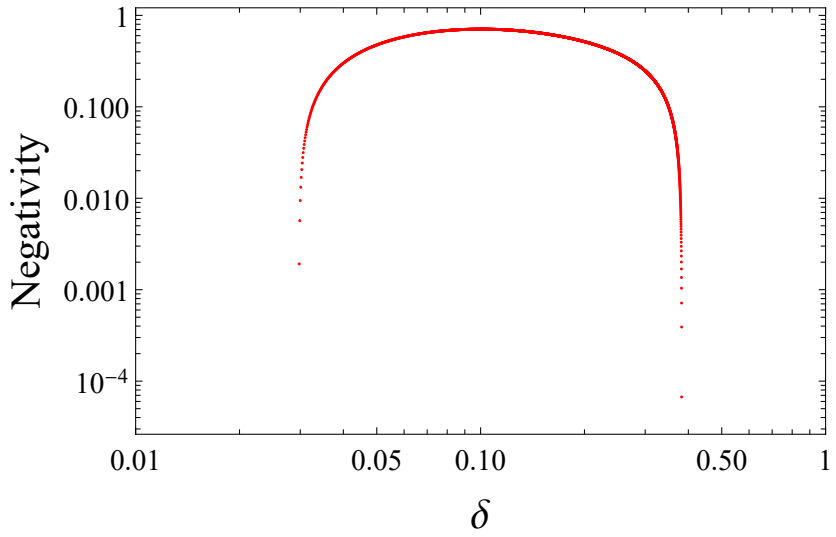

图 14： 两面镜子之间产生的对数负性随归一化失谐 δ 的变化。红色标记表示采用精确双模维纳滤波器得到的结果。值得注意的是，采用单模维纳滤波器、但在计算 $\boldsymbol{V}_c'$ 时忽略转动模极点的贡献，所得结果与红色标记的结果十分吻合。这意味着，通过恰当选择傅里叶空间中的模范围，单模维纳滤波器可以再现双模维纳滤波器的结果。

由法布里-珀罗-迈克耳孙干涉仪中的两个反射镜的共模与差模之间的不对称性。对数负性可以通过两个反射镜的协方差矩阵计算。（定义见参考文献[31] 中的式（63））。图 14 绘出了两个反射镜之间的对数负性随归一化失谐的变化，其中我们假设差模耗散与共模耗散之比参数为 $\kappa_-/\kappa_+ = 3$，且 $\kappa_-(=\kappa)$ 和 $\delta_- = -\Delta/2\kappa_-(=\delta)$。图 14 表明，当 $0.03 < \delta < 0.33$ 时，对数负性为正，这意味着两个反射镜之间产生了纠缠。使用精确的双模维纳滤波器或修正模型 III 即可实现这一点。

V. 总结与结论

我们建立了与腔光耦合的光束模型 [30]，以探究一种精确的理论模型，用于描述能够产生宏观物体量子态、从而检验引力量子本质的光机械系统。该模型可用于描述对悬挂镜进行连续测量和反馈控制时，其运动中的量子涨落；它是对参考文献 [13] 中分析的光机械振子系统的扩展模型。我们针对由摆模和转动模相互耦合所描述的镜子，建立了双模理论。参考文献 [29] 通过展示该模型能够再现与参考文献 [13] 中实验结果一致的品质因数，讨论了双模理论的一些实用之处。在本研究中，我们明确证明，镜子的摆模运动方程中会因光束的内部耗散而产生结构阻尼耗散。随后，我们为镜子的摆模引入了与光束内摩擦所预测结果一致的热噪声，以满足涨落耗散关系，并阐明了通过连续测量和反馈控制能够实现的量子态。我们着重为摆模和转动模的双模理论构建维纳滤波器，并利用该滤波器通过维纳滤波分析评估条件协方差矩阵，从而研究量子态。我们发现，采用先进技术的参数，利用双模理论的维纳滤波器可以产生量子压缩态，而且预计在不久的将来即可实现。换言之，经过正确滤波的协方差被压缩至低于真空涨落。

我们还证明，采用镜子的单模模型（对应于镜子点质量极限）并使用不同维纳滤波器得到的协方差，大于双模模型所预测的结果。我们在参考文献 [31]，中表明，双模滤波器能够达到干涉仪中组成两面反射镜之间生成纠缠所需的纯度，但采用单模滤波器进行简单分析则无法做到。我们还

研究了仅改变单模理论的耗散 Γ 是否能改善双模理论（包含转动模）维纳滤波器得到的协方差，并发现改变单模理论的耗散 Γ 并不能解释镜面转动模。不过，我们还研究了舍弃转动模极点贡献的单模维纳滤波分析，结果发现它能够很好地再现双模维纳滤波器的结果。这表明，当摆模和转动模的频率相距较远时，在傅里叶空间中适当选择模态范围，可以很好地近似再现双模维纳滤波器的结果。这些结果表明，除非在理论预测中充分考虑额外的自由度，否则转动模可能会妨碍通过连续测量和反馈控制生成摆模的量子态。

致谢

感谢 Naoki Yamamoto 和 Yuta Michimura 在本研究中就这一主题展开讨论并提出意见。Y.S. 获得了九州大学量子科学创新者奖学金的资助。K.Y. 获得了日本学术振兴会科学研究费助成事业的资助，项目编号为 JP22H05263 和 JP23H01175。N.M. 获得了日本学术振兴会科学研究费助成事业项目编号 JP19H00671 以及 JST FORESTO 项目编号 JPMJFR202X 的资助。D. M. 获得了日本学术振兴会科学研究费助成事业的资助，项目编号为 JP22J21267。

附录 A：双模理论的维纳滤波器

利用式 (114) 计算 $X_A(\omega)$ 的谱密度，可得

$$S_{X_AX_A}(\omega) = C_{1X_AX_A}\frac{J(\omega)}{|F(\omega)|^2}, \tag{A1}$$

其中定义

$$J(\omega) = |F(\omega)|^2 + \frac{C_{2X_AX_A}}{C_{1X_AX_A}}(\omega^2 - \Delta_{BR}^2)(F(\omega)^* + F(\omega)) + \frac{C_{3X_AX_A}}{C_{1X_AX_A}}(\omega^2 - \Delta_{BR}^2)^2, \tag{A2}$$

and

$$C_{1X_AX_A} = \eta\left\{\left(1 - \frac{2\kappa^2}{\kappa^2+\Delta^2}\right)^2\langle x_{\rm in}^2(\omega)\rangle + \left(\frac{2\kappa\Delta}{\kappa^2+\Delta^2}\right)^2\langle y_{\rm in}^2(\omega)\rangle\right\} + (1-\eta)\langle x_{\rm in}'^2(\omega)\rangle, \tag{A3}$$

$$C_{2X_AX_A} = \eta\frac{4\hbar G_0^2 n_c\Delta\kappa^2}{M(\kappa^2+\Delta^2)^2}\left\{-\left(1 - \frac{2\kappa^2}{\kappa^2+\Delta^2}\right)\langle x_{\rm in}^2(\omega)\rangle + \frac{2\Delta^2}{\kappa^2+\Delta^2}\langle y_{\rm in}^2(\omega)\rangle\right\}, \tag{A4}$$

$$C_{3X_AX_A} = \eta\left[\left\{\frac{4\hbar G_0^2 n_c\Delta\kappa}{M(\kappa^2+\Delta^2)^2}\right\}^2(\kappa^2\langle x_{\rm in}^2(\omega)\rangle + \Delta^2\langle y_{\rm in}^2(\omega)\rangle) + \left(\frac{2G_0\sqrt{n_c}\Delta\sqrt{2\kappa}}{\kappa^2+\Delta^2}\right)^2\frac{\langle\xi_m^2(\omega)\rangle}{M^2}\right].$$

谱密度$S_{X_AX_A}(\omega)$ 由因果 $S^+_{X_AX_A}(\omega)$ 部分和非因果 $S^-_{X_AX_A}(\omega)$ 部分组成，分别表示为

$$S_{X_AX_A}(\omega) = S^+_{X_AX_A}(\omega)S^-_{X_AX_A}(\omega), \quad S^+_{X_AX_A}(\omega) = \sqrt{C_{1X_AX_A}}\frac{F'(\omega)}{F(\omega)}, \quad S^-_{X_AX_A}(\omega) = \sqrt{C_{1X_AX_A}}\frac{F'(\omega)^*}{F(\omega)^*}. \tag{A5}$$

这里，$F'(\omega)$ 是一个因果函数，表示为

$$F'(\omega) = -\omega^4 + \tilde{A}\omega^3 + \tilde{B}\omega^2 + \tilde{C}\omega + \tilde{D} \tag{A6}$$

其中系数 $\tilde{A}$，$\tilde{B}$，$\tilde{C}$，$\tilde{D}$是通过下文所述的过程确定的。具体而言，为了确定系数 $\tilde{A}\sim\tilde{D}$，我们利用以下事实：$F(\omega)'$ 与其复共轭之间满足

$$F'(\omega)F'(\omega)^* = J(\omega). \tag{A7}$$

通过比较式 (A7) 中的系数并求解下列方程，我们得到系数 $\tilde{A}$，$\tilde{B}$，$\tilde{C}$，$\tilde{D}$。

$$
\begin{cases}
-(\tilde{A}+\tilde{A}^*)=0, \\
\tilde{A}\tilde{A}^*-\tilde{B}-\tilde{B}^*=-2\frac{C_{2X_AX_A}}{C_{1X_AX_A}}+\gamma_m^2-2\Delta_{BR}^2-2\omega_{AR}^2, \\
\tilde{A}\tilde{B}^*+\tilde{A}^*\tilde{B}-\tilde{C}-\tilde{C}^*=0, \\
\tilde{B}\tilde{B}^*+\tilde{A}\tilde{C}^*+\tilde{A}^*\tilde{C}-\tilde{D}-\tilde{D}^*=\frac{C_{3X_AX_A}}{C_{1X_AX_A}}-2\gamma_m^2\Delta_{BR}^2+2\Delta_{BR}^2\omega_{AR}^2+(\Delta_{BR}^2+\omega_{AR}^2)^2 \\
\qquad\qquad +\frac{C_{2X_AX_A}}{C_{1X_AX_A}}(4\Delta_{BR}^2+2\omega_{AR}^2)-2\Delta_{AR}^2\omega_{BR}^2, \\
\tilde{B}\tilde{C}^*+\tilde{B}^*\tilde{C}+\tilde{A}\tilde{D}^*+\tilde{A}^*\tilde{D}=0, \\
\tilde{C}\tilde{C}^*+\tilde{B}\tilde{D}^*+\tilde{B}^*\tilde{D}=-2\frac{C_{3X_AX_A}}{C_{1X_AX_A}}\Delta_{BR}^2+\gamma_m^2\Delta_{BR}^4-2\frac{C_{2X_AX_A}}{C_{1X_AX_A}}(\Delta_{BR}^4+2\Delta_{BR}^2\omega_{AR}^2-\Delta_{AR}^2\omega_{BR}^2) \\
\qquad\qquad +2(\Delta_{BR}^2+\omega_{AR}^2)(-\Delta_{BR}^2\omega_{AR}^2+\Delta_{AR}^2\omega_{BR}^2), \\
\tilde{C}\tilde{D}^*+\tilde{C}^*\tilde{D}=0, \\
\tilde{D}\tilde{D}^*=\frac{C_{3X_AX_A}}{C_{1X_AX_A}}\Delta_{BR}^4+2\frac{C_{2X_AX_A}}{C_{1X_AX_A}}\Delta_{BR}^2(\Delta_{BR}^2\omega_{AR}^2-\Delta_{AR}^2\omega_{BR}^2)+(-\Delta_{BR}^2\omega_{AR}^2+\Delta_{AR}^2\omega_{BR}^2)^2.
\end{cases}
$$

由于结果较为复杂，无法用解析形式表示；不过，可以通过数值方法求得解。

接下来，通过计算输出光 $X_A(\omega)$ 与摆模 $\delta q(\omega)$ 的微扰之间的相关性，我们得到

$$S_{X_A\delta q}(\omega)=C_{1X_A\delta q}\frac{K(\omega)}{|F(\omega)|^2}, \tag{A8}$$

其中我们定义

$$K(\omega)=(\omega^2-\Delta_{BR}^2)F(\omega)^*+\frac{C_{2X_A\delta q}}{C_{1X_A\delta q}}(\omega^2-\Delta_{BR}^2)^2, \tag{A9}$$

and

$$C_{1X_A\delta q}=\sqrt{\eta}\frac{\hbar G_0\sqrt{n_c}\sqrt{2\kappa}}{M(\kappa^2+\Delta^2)}\left\{\kappa\left(1-\frac{2\kappa^2}{\kappa^2+\Delta^2}\right)\langle x_{\rm in}^2(\omega)\rangle-\Delta\frac{2\kappa\Delta}{\kappa^2+\Delta^2}\langle y_{\rm in}^2(\omega)\rangle\right\}, \tag{A10}$$

$$C_{2X_A\delta q}=-\sqrt{\eta}\frac{2\hbar^2G_0^3(n_c)^{\frac{3}{2}}(2\kappa)^{\frac{3}{2}}\Delta}{M^2(\kappa^2+\Delta^2)^3}\left(\kappa^2\langle x_{\rm in}^2(\omega)\rangle+\Delta^2\langle y_{\rm in}^2(\omega)\rangle\right)-\sqrt{\eta}\frac{2G_0\sqrt{n_c}\Delta\sqrt{2\kappa}}{\kappa^2+\Delta^2}\frac{\langle\xi_m^2(\omega)\rangle}{M^2}. \tag{A11}$$

微扰 $\delta q(\omega)$ 的维纳滤波器 $H_{\delta q}(\omega)$ 为

$$
\begin{aligned}
H_{\delta q}(\omega)&=\frac{1}{S^+_{X_AX_A}(\omega)}\left[\frac{S_{X_A\delta q}(\omega)}{S^-_{X_AX_A}(\omega)}\right]_+ \\
&=\frac{C_{1X_A\delta q}}{C_{1X_AX_A}}\frac{F(\omega)}{F'(\omega)}\left[\frac{F(\omega)^*}{F'(\omega)^*}\frac{K(\omega)}{F(\omega)F(\omega)^*}\right]_+ \\
&=\frac{C_{1X_A\delta q}}{C_{1X_AX_A}}\frac{F(\omega)}{F'(\omega)}\left[\frac{\tilde{E}'\omega^3+\tilde{F}'\omega^2+\tilde{G}'\omega+\tilde{H}'}{F'(\omega)^*}+\frac{\tilde{E}\omega^3+\tilde{F}\omega^2+\tilde{G}\omega+\tilde{H}}{F(\omega)}\right]_+ \\
&=\frac{C_{1X_A\delta q}}{C_{1X_AX_A}}\frac{F(\omega)}{F'(\omega)}\frac{\tilde{E}\omega^3+\tilde{F}\omega^2+\tilde{G}\omega+\tilde{H}}{F(\omega)} \\
&=\frac{C_{1X_A\delta q}}{C_{1X_AX_A}}\frac{\tilde{E}\omega^3+\tilde{F}\omega^2+\tilde{G}\omega+\tilde{H}}{F'(\omega)}
\end{aligned}
\tag{A12}
$$

系数 $\tilde{E}$，$\tilde{F}$，$\tilde{G}$，$\tilde{H}$，$\tilde{E}'$，$\tilde{F}'$，$\tilde{G}'$，$\tilde{H}'$。在上述推导中，我们忽略了与 $1/F'(\omega)^*$ 成正比的项，因为 $[Z(\omega)]_+$ 是一个取因果函数的运算，而项 $1/F'(\omega)^*$ 是一个非因果函数。这些系数满足

$$K(\omega)=(\tilde{E}'\omega^3+\tilde{F}'\omega^2+\tilde{G}'\omega+\tilde{H}')F(\omega)+(\tilde{E}\omega^3+\tilde{F}\omega^2+\tilde{G}\omega+\tilde{H})F'(\omega)^*, \tag{A13}$$

由此可得

$$\begin{cases} 0 = -(\tilde{E} + \tilde{E}'), \\ -1 = \tilde{A}^* \tilde{E} - \tilde{F} - \tilde{F}' - i\tilde{E}'\gamma_m, \\ i\gamma_m = \tilde{B}^* \tilde{E} + \tilde{A}^* \tilde{F} - \tilde{G} - \tilde{G}' - i\tilde{F}'\gamma_m + \tilde{E}'(\Delta_{BR}^2 + \omega_{AR}^2), \\ \frac{C_{2X_A\delta q}}{C_{1X_A\delta q}} + 2\Delta_{BR}^2 + \omega_{AR}^2 \\ \quad = \tilde{C}^* \tilde{E} + \tilde{B}^* \tilde{F} + \tilde{A}^* \tilde{G} - \tilde{H} - \tilde{H}' - i\tilde{G}'\gamma_m + i\tilde{E}'\gamma_m \Delta_{BR}^2 + \tilde{F}'(\Delta_{BR}^2 + \omega_{AR}^2), \\ -2i\gamma_m \Delta_{BR}^2 \\ \quad = \tilde{D}^* \tilde{E} + \tilde{C}^* \tilde{F} + \tilde{B}^* \tilde{G} + \tilde{A}^* \tilde{H} - i\tilde{H}'\gamma_m + i\tilde{F}'\gamma_m \Delta_{BR}^2 + \tilde{G}'(\Delta_{BR}^2 + \omega_{AR}^2) \\ \qquad + \tilde{E}'(-\Delta_{BR}^2 \omega_{AR}^2 + \Delta_{AR}^2 \omega_{BR}^2), \\ -2\frac{C_{2X_A\delta q}}{C_{1X_A\delta q}} \Delta_{BR}^2 - \Delta_{BR}^4 - 2\Delta_{BR}^2 \omega_{AR}^2 + \Delta_{AR}^2 \omega_{BR}^2 \\ \quad = \tilde{D}^* \tilde{F} + \tilde{C}^* \tilde{G} + \tilde{B}^* \tilde{H} + i\tilde{G}'\gamma_m \Delta_{BR}^2 + \tilde{H}'(\Delta_{BR}^2 + \omega_{AR}^2) + \tilde{F}'(-\Delta_{BR}^2 \omega_{AR}^2 + \Delta_{AR}^2 \omega_{BR}^2), \\ i\gamma_m \Delta_{BR}^4 = \tilde{D}^* \tilde{G} + \tilde{C}^* \tilde{H} + i\tilde{H}'\gamma_m \Delta_{BR}^2 + \tilde{G}'(-\Delta_{BR}^2 \omega_{AR}^2 + \Delta_{AR}^2 \omega_{BR}^2), \\ \frac{C_{2X_A\delta q}}{C_{1X_A\delta q}} \Delta_{BR}^4 + \Delta_{BR}^4 \omega_{AR}^2 - \Delta_{AR}^2 \Delta_{BR}^2 \omega_{BR}^2 = \tilde{D}^* \tilde{H} + \tilde{H}'(-\Delta_{BR}^2 \omega_{AR}^2 + \Delta_{AR}^2 \omega_{BR}^2). \end{cases}$$

$\tilde{E}$, $\tilde{F}$, $\tilde{G}$, $\tilde{H}$, $\tilde{E}'$, $\tilde{F}'$, $\tilde{G}'$, $\tilde{H}'$通过求解上述方程，可以得到系数。然而，显式表达式相当复杂，因此我们通过数值方法求解。

动量的维纳滤波器 $H_{\delta p}(\omega)$ 动量 δp (ω) 可以用同样的方法求得，因为 δp $(\omega) = -iM\omega\delta q(\omega)$

$$S_{X_A\delta p}(\omega) = -iM\omega S_{X_A\delta q}(\omega), \tag{A14}$$

$$\begin{aligned} H_{\delta p}(\omega) &= \frac{1}{S_{X_A X_A}^+(\omega)} \left[\frac{S_{X_A\delta p}(\omega)}{S_{X_A X_A}^-(\omega)} \right]_+ \\ &= \frac{C_{1X_A\delta q}}{C_{1X_A X_A}} \frac{F(\omega)}{F'(\omega)} \left[\frac{F(\omega)^*}{F'(\omega)^*} \frac{-iM\omega K(\omega)}{F(\omega)F(\omega)^*} \right]_+ \\ &= \frac{C_{1X_A\delta q}}{C_{1X_A X_A}} \frac{F(\omega)}{F'(\omega)} \left[\frac{\tilde{I}'\omega^3 + \tilde{J}'\omega^2 + \tilde{K}'\omega + \tilde{L}'}{F'(\omega)^*} + \frac{\tilde{I}\omega^3 + \tilde{J}\omega^2 + \tilde{K}\omega + \tilde{L}}{F(\omega)} \right]_+ \\ &= \frac{C_{1X_A\delta q}}{C_{1X_A X_A}} \frac{F(\omega)}{F'(\omega)} \frac{\tilde{I}\omega^3 + \tilde{J}\omega^2 + \tilde{K}\omega + \tilde{L}}{F(\omega)} \\ &= \frac{C_{1X_A\delta q}}{C_{1X_A X_A}} \frac{\tilde{I}\omega^3 + \tilde{J}\omega^2 + \tilde{K}\omega + \tilde{L}}{F'(\omega)} \end{aligned} \tag{A15}$$

wi $\tilde{I}$, $\tilde{J}$, $\tilde{K}$, $\tilde{L}$阶系数，这些系数通过数值计算得到，方法与上述描述类似 .

然后，通过估算输出光 X_A 与镜面转动的微扰 $\delta\Phi(\omega)$ 之间的相关性，我们得到：

$$S_{X_A\delta\Phi}(\omega) = C_{1X_A\delta q} \frac{L(\omega)}{|F(\omega)|^2}, \tag{A16}$$

其中我们定义了

$$L(\omega) = -\omega_B^2 F(\omega)^* - \omega_{BR}^2 \frac{C_{2X_A\delta q}}{C_{1X_A\delta q}} (\omega^2 - \Delta_{BR}^2). \tag{A17}$$

镜面转动微扰 $\delta\Phi(\omega)$的维纳滤波器 $H_{\delta\Phi}(\omega)$为

$$\begin{aligned}
H_{\delta\Phi}(\omega) &= \frac{1}{S^{+}_{X_A X_A}(\omega)}\left[\frac{S_{X_A\delta\Phi}(\omega)}{S^{-}_{X_A X_A}(\omega)}\right]_{+} \\
&= \frac{C_{1X_A\delta q}}{C_{1X_AX_A}}\frac{F(\omega)}{F'(\omega)}\left[\frac{F(\omega)^*}{F'(\omega)^*}\frac{L(\omega)}{F(\omega)F(\omega)^*}\right]_{+} \\
&= \frac{C_{1X_A\delta q}}{C_{1X_AX_A}}\frac{F(\omega)}{F'(\omega)}\left[\frac{\tilde{M}'\omega^3+\tilde{N}'\omega^2+\tilde{O}'\omega+\tilde{P}'}{F'(\omega)^*}+\frac{\tilde{M}\omega^3+\tilde{N}\omega^2+\tilde{O}\omega+\tilde{P}}{F(\omega)}\right]_{+} \\
&= \frac{C_{1X_A\delta q}}{C_{1X_AX_A}}\frac{F(\omega)}{F'(\omega)}\frac{\tilde{M}\omega^3+\tilde{N}\omega^2+\tilde{O}\omega+\tilde{P}}{F(\omega)} \\
&= \frac{C_{1X_A\delta q}}{C_{1X_AX_A}}\frac{\tilde{M}\omega^3+\tilde{N}\omega^2+\tilde{O}\omega+\tilde{P}}{F'(\omega)},
\end{aligned} \tag{A18}$$

其中，$\tilde{M}$、$\tilde{N}$、$\tilde{O}$、$\tilde{P}$ 是通过数值方法得到的，与上述描述类似。

与镜面转动 $\delta\Pi_\Phi(\omega)$共轭的动量扰动的维纳滤波器也可以类似地获得，因为 $\delta\Pi_\Phi(\omega) = -iJ\omega\delta\Phi(\omega)$,

$$S_{X_A\delta\Pi_\Phi}(\omega) = -iJ\omega S_{X_A\delta\Phi}(\omega), \tag{A19}$$

$$\begin{aligned}
H_{\delta\Pi_\Phi}(\omega) &= \frac{1}{S^{+}_{X_A X_A}(\omega)}\left[\frac{S_{X_A\delta\Pi_\Phi}(\omega)}{S^{-}_{X_A X_A}(\omega)}\right]_{+} \\
&= \frac{C_{1X_A\delta q}}{C_{1X_AX_A}}\frac{F(\omega)}{F'(\omega)}\left[\frac{F(\omega)^*}{F'(\omega)^*}\frac{-iJL(\omega)}{F(\omega)F(\omega)^*}\right]_{+} \\
&= \frac{C_{1X_A\delta q}}{C_{1X_AX_A}}\frac{F(\omega)}{F'(\omega)}\left[\frac{\tilde{Q}'\omega^3+\tilde{R}'\omega^2+\tilde{S}'\omega+\tilde{T}'}{F'(\omega)^*}+\frac{\tilde{Q}\omega^3+\tilde{R}\omega^2+\tilde{S}\omega+\tilde{T}}{F(\omega)}\right]_{+} \\
&= \frac{C_{1X_A\delta q}}{C_{1X_AX_A}}\frac{F(\omega)}{F'(\omega)}\frac{\tilde{Q}\omega^3+\tilde{R}\omega^2+\tilde{S}\omega+\tilde{T}}{F(\omega)} \\
&= \frac{C_{1X_A\delta q}}{C_{1X_AX_A}}\frac{\tilde{Q}\omega^3+\tilde{R}\omega^2+\tilde{S}\omega+\tilde{T}}{F'(\omega)},
\end{aligned} \tag{A20}$$

其中，系数 $\tilde{Q}$、$\tilde{R}$、$\tilde{S}$、$\tilde{T}$ 是通过数值方法得到的。

附录 B：点粒子镜的维纳滤波器

我们在此回顾一项先前研究中提出的维纳滤波器 [14] ，并将结果与我们的光束模型所得结果进行比较。值得注意的是，参考文献 [14]中的镜子被视为点粒子，这与本研究中采用的刚体不同。本附录中的公式与参考文献 [14], 中所述的基本相同，但我们采用有量纲量进行表述，这有助于与双模理论的结果进行比较。

1. 模型与系统

We 考虑由镜子和腔内光子组成的系统的哈密顿量，该系统由.....描述 y

$$H = \frac{1}{2M}p_m^2 + \frac{1}{2}M\Omega^2 q_m^2 + \frac{\hbar\Delta}{2}(x_m^2+y_m^2) - \hbar G_0\sqrt{n_c}x_m q_m, \tag{B1}$$

其中，q_m 和 p_m 分别是角频率为 Ω 的镜子振子的位移和正则动量。 x_m 和 y_m 分别是光腔内光子的振幅正交分量和相位正交分量。根据海森堡方程，可以推导出如下运动方程。采用微扰方法并设

$q_m = \bar{q}_m + \delta q_m(t)$、 $p_m = \delta p_m(t)$、 $x_m = \bar{x}_m + \delta x_m(t)$和 $y_m = \bar{y}_m + \delta y_m(t)$，我们可以写出微扰量的朗之万方程:

$$\delta\dot{q}_{\rm m} = \frac{1}{M}\delta p_m, \tag{B2}$$

$$\delta\dot{p}_{\rm m} = -M\Omega^2\delta q_{\rm m} - \Gamma\delta p_{\rm m} + \xi + \hbar G_0\sqrt{n_c}\delta x_{\rm m} - \int_{-\infty}^{\infty} ds g_{\rm FB}(t-s)X_{\rm m}(s)\sqrt{\frac{\hbar M\Omega}{2}}, \tag{B3}$$

$$\delta\dot{x}_{\rm m} = -\kappa\delta x_{\rm m} + \Delta\delta y_{\rm m} + \sqrt{2\kappa}x_{\rm in}, \tag{B4}$$

$$\delta\dot{y}_{\rm m} = -\kappa\delta y_{\rm m} - \Delta\delta x_{\rm m} + \sqrt{2\kappa}y_{\rm in} + 2G_0\sqrt{n_c}\delta q_{\rm m}, \tag{B5}$$

其中，噪声 ξ、 $x_{\rm in}$ 和 y_{in} 均考虑了方差，其中 $\langle x_{\rm in}^2\rangle = \langle y_{\rm in}^2\rangle = 2N(\omega_c) + 1$ 和 $\langle\xi^2\rangle \simeq \hbar M\Omega\Gamma\langle p_{\rm in}^2\rangle$ 满足 $\langle p_{\rm in}^2\rangle = 2k_{\rm B}T_0/\hbar\Omega + 1$。式 (B3) 的最后一项表示反馈冷却。输出光记为 $X_{\rm m}(t)$，满足以下输入输出关系:

$$X_{\rm m} = \sqrt{\eta}x_{\rm m,out} + \sqrt{1-\eta}x_{\rm in}^{'}, \quad x_{\rm m,out} = x_{\rm in} - \sqrt{2\kappa}\delta x_{\rm m}, \tag{B6}$$

其中， $\eta \in [0,1]$ 是探 测效率，而 $x^{'}$ 中的 是由于不完全探测而引入的。假设绝热 近似（$\kappa \gg \omega$）， 式 (B4) 和 (B5) 可解得

$$\delta x_m = \frac{\sqrt{2\kappa}}{\kappa^2+\Delta^2}(\kappa x_{\rm in} + \Delta y_{\rm in}) + \frac{2\Delta G_0\sqrt{n_c}}{\kappa^2+\Delta^2}\delta q_m, \quad \delta y_m = \frac{\sqrt{2\kappa}}{\kappa^2+\Delta^2}(\kappa y_{\rm in} - \Delta x_{\rm in}) + \frac{2\kappa G_0\sqrt{n_c}}{\kappa^2+\Delta^2}\delta q_m. \tag{B7}$$

利用上述方程，朗之万方程可总结为

$$\delta\dot{q}_{\rm m} = \frac{1}{M}\delta p_{\rm m}, \tag{B8}$$

$$\delta\dot{p}_{\rm m} = -M\left(\Omega^2 - \frac{2\hbar G_0^2 n_c\Delta}{M(\kappa^2+\Delta^2)}\right)\delta q_{\rm m} - \gamma_m\delta p_m + \xi_{\rm m} + \frac{\hbar G_0\sqrt{2\kappa}\sqrt{n_{\rm c}}}{\kappa^2+\Delta^2}(\kappa x_{\rm in} + \Delta y_{\rm in}), \tag{B9}$$

$$X_{\rm m} = \sqrt{\eta}\left\{\left(1 - \frac{2\kappa^2}{\kappa^2+\Delta^2}\right)x_{\rm in} - \frac{2\kappa\Delta}{\kappa^2+\Delta^2}y_{\rm in} - \frac{2\Delta G_0\sqrt{2\kappa}\sqrt{n_{\rm c}}}{\kappa^2+\Delta^2}\delta q_{\rm m}\right\} + \sqrt{1-\eta}x_{\rm in}^{'}. \tag{B10}$$

这里，反馈冷却项被耗散 γ_m 替代，涨落力 ξ 被改为 $\xi_{\rm m}$，其中 $\langle\xi_{\rm m}^2\rangle = \hbar M\Omega\gamma_{\rm m}\langle p_{\rm in}^{\prime 2}\rangle$ 和 $\langle p_{\rm in}^{\prime 2}\rangle = 2k_{\rm B}T_0\Gamma/\hbar\Omega\gamma_{\rm m} + 1$。

2. 谱密度与维纳滤波器

我们在傅里叶空间中求解了上述方程，并计算谱密度以获得维纳滤波器。傅里叶空间中的朗之万方程可解为

$$\delta q_{\rm m}(\omega) = \frac{1}{MF_m(\omega)}\left\{\xi_m(\omega) + \frac{\hbar G_0\sqrt{n_c}\sqrt{2\kappa}}{\kappa^2+\Delta^2}(\kappa x_{\rm in}(\omega) + \Delta y_{\rm in}(\omega))\right\}, \tag{B11}$$

$$\delta p_{\rm m}(\omega) = -i\omega M\delta q_{\rm m}(\omega) = -\frac{i\omega}{F_m(\omega)}\left\{\xi_m(\omega) + \frac{\hbar G_0\sqrt{n_c}\sqrt{2\kappa}}{\kappa^2+\Delta^2}(\kappa x_{\rm in}(\omega) + \Delta y_{\rm in}(\omega))\right\}, \tag{B12}$$

$$\begin{aligned} X_{\rm m}(\omega) = \sqrt{\eta}\Big[&- \left(\frac{\kappa^2-\Delta^2}{\kappa^2+\Delta^2} + \frac{4\kappa^2\Delta\hbar G_0^2 n_c}{MF_{\rm m}(\omega)(\kappa^2+\Delta^2)^2}\right)x_{\rm in}(\omega) - \left(\frac{2\kappa\Delta}{\kappa^2+\Delta^2} + \frac{4\kappa\Delta^2\hbar G_0^2 n_c}{MF_{\rm m}(\omega)(\kappa^2+\Delta^2)^2}\right)y_{\rm in}(\omega) \\ &- \frac{2\Delta G_0\sqrt{2\kappa}\sqrt{n_c}}{MF_{\rm m}(\omega)(\kappa^2+\Delta^2)}\xi_{\rm m}(\omega)\Big] + \sqrt{1-\eta}x_{\rm in}^{'}(\omega). \end{aligned} \tag{B13}$$

我们将 $F_{\rm m}(\omega)$ 和 $\omega_{\rm m}$ 定义为

$$F_{\rm m}(\omega) = \omega_m^2 - i\gamma_m\omega - \omega^2, \quad \omega_{\rm m} = \sqrt{\Omega^2 - \frac{2\hbar G_0^2 n_c\Delta}{M(\kappa^2+\Delta^2)}}. \tag{B14}$$

相对于 $X_{\mathrm{m}}(\omega)$ 的谱密度 $S_{X_{\mathrm{m}}X_{\mathrm{m}}}(\omega)$ 为:

$$S_{X_{\mathrm{m}}X_{\mathrm{m}}}(\omega)=C_{1X_{\mathrm{A}}X_{\mathrm{A}}}\frac{J_{\mathrm{m}}(\omega)}{|F_{\mathrm{m}}(\omega)|^2}, \tag{B15}$$

其中我们定义了

$$J_{\mathrm{m}}(\omega)=|F_{\mathrm{m}}(\omega)|^2+\frac{C_{2X_{\mathrm{A}}X_{\mathrm{A}}}}{C_{1X_{\mathrm{A}}X_{\mathrm{A}}}}(F_{\mathrm{m}}(\omega)+F_{\mathrm{m}}^*(\omega))+\frac{C_{3X_{\mathrm{A}}X_{\mathrm{A}}}}{C_{1X_{\mathrm{A}}X_{\mathrm{A}}}}, \tag{B16}$$

$J_{\mathrm{m}}(\omega)=\omega^4+\alpha\omega^2+\beta$，系数 α 和 β 定义为

$$\alpha=-2\frac{C_{2X_{\mathrm{A}}X_{\mathrm{A}}}}{C_{1X_{\mathrm{A}}X_{\mathrm{A}}}}+\gamma_{\mathrm{m}}^2-2\omega_{\mathrm{m}}^2,\quad \beta=\frac{C_{3X_{\mathrm{A}}X_{\mathrm{A}}}}{C_{1X_{\mathrm{A}}X_{\mathrm{A}}}}+2\frac{C_{2X_{\mathrm{A}}X_{\mathrm{A}}}}{C_{1X_{\mathrm{A}}X_{\mathrm{A}}}}\omega_{\mathrm{m}}^2+\omega_{\mathrm{m}}^4. \tag{B17}$$

谱密度 $S_{X_{\mathrm{m}}X_{\mathrm{m}}}(\omega)$ 由因果$S^+_{X_{\mathrm{m}}X_{\mathrm{m}}}(\omega)$和非因果$S^-_{X_{\mathrm{m}}X_{\mathrm{m}}}(\omega)$部分组成。

$$S_{X_{\mathrm{m}}X_{\mathrm{m}}}(\omega)=S^+_{X_{\mathrm{m}}X_{\mathrm{m}}}(\omega)S^-_{X_{\mathrm{m}}X_{\mathrm{m}}}(\omega),\quad S^+_{X_{\mathrm{m}}X_{\mathrm{m}}}(\omega)=\sqrt{C_{1X_{\mathrm{A}}X_{\mathrm{A}}}}\frac{F'_{\mathrm{m}}(\omega)}{F_{\mathrm{m}}(\omega)},\quad S^-_{X_{\mathrm{m}}X_{\mathrm{m}}}(\omega)=\sqrt{C_{1X_{\mathrm{A}}X_{\mathrm{A}}}}\frac{F'_{\mathrm{m}}(\omega)^*}{F_{\mathrm{m}}(\omega)^*}, \tag{B18}$$

其中 $F'_{\mathrm{m}}(\omega)$ 是一个因果函数，表示如下:

$$F'_{\mathrm{m}}(\omega)=\Omega'^2-i\Gamma'\omega-\omega^2 \tag{B19}$$

其系数为 $\Gamma'=\sqrt{\alpha+2\sqrt{\beta}}$ 和 $\Omega'^2=\sqrt{\beta}$。输出光 $X_{\mathrm{m}}(\omega)$ 与质心位置 $\delta q_{\mathrm{m}}(\omega)$ 之间的相关性表示为

$$S_{X_{\mathrm{m}}\delta q_{\mathrm{m}}}(\omega)=C_{1X_{\mathrm{A}}\delta q}\frac{K_{\mathrm{m}}(\omega)}{|F_{\mathrm{m}}(\omega)|^2}, \tag{B20}$$

$$K_{\mathrm{m}}(\omega)=F_{\mathrm{m}}^*(\omega)+\frac{C_{2X_{\mathrm{A}}\delta q}}{C_{1X_{\mathrm{A}}\delta q}}\equiv\tilde{\Omega}^2-i\gamma_{\mathrm{m}}\omega-\omega^2,\quad \tilde{\Omega}^2=\omega_{\mathrm{m}}^2+\frac{C_{2X_{\mathrm{A}}\delta q}}{C_{1X_{\mathrm{A}}\delta q}}. \tag{B21}$$

随后，关于 $\delta q_{\mathrm{m}}(\omega)$ 的维纳滤波器计算如下:

$$\begin{aligned}
H_{\delta q_{\mathrm{m}}}(\omega)&=\frac{1}{S^+_{X_{\mathrm{m}}X_{\mathrm{m}}}(\omega)}\left[\frac{S_{X_{\mathrm{m}}\delta q_{\mathrm{m}}}(\omega)}{S^-_{X_{\mathrm{m}}X_{\mathrm{m}}}(\omega)}\right]_+\\
&=\frac{C_{1X_{\mathrm{A}}\delta q}}{C_{1X_{\mathrm{A}}X_{\mathrm{A}}}}\frac{F_{\mathrm{m}}(\omega)}{F'_{\mathrm{m}}(\omega)}\left[\frac{F_{\mathrm{m}}(\omega)^*}{F'_{\mathrm{m}}(\omega)^*}\frac{K_{\mathrm{m}}(\omega)}{F_{\mathrm{m}}(\omega)F_{\mathrm{m}}(\omega)^*}\right]_+\\
&=\frac{C_{1X_{\mathrm{A}}\delta q}}{C_{1X_{\mathrm{A}}X_{\mathrm{A}}}}\frac{F_{\mathrm{m}}(\omega)}{F'_{\mathrm{m}}(\omega)}\left[\frac{\tilde{E}'_{\mathrm{m}}\omega+\tilde{F}'_{\mathrm{m}}}{F'_{\mathrm{m}}(\omega)}+\frac{\tilde{E}_{\mathrm{m}}\omega+\tilde{F}_{\mathrm{m}}}{F_{\mathrm{m}}(\omega)}\right]_+\\
&=\frac{C_{1X_{\mathrm{A}}\delta q}}{C_{1X_{\mathrm{A}}X_{\mathrm{A}}}}\frac{F_{\mathrm{m}}(\omega)}{F'_{\mathrm{m}}(\omega)}\frac{\tilde{E}_{\mathrm{m}}\omega+\tilde{F}_{\mathrm{m}}}{F_{\mathrm{m}}(\omega)}\\
&=\frac{C_{1X_{\mathrm{A}}\delta q}}{C_{1X_{\mathrm{A}}X_{\mathrm{A}}}}\frac{\tilde{E}_{\mathrm{m}}\omega+\tilde{F}_{\mathrm{m}}}{F'_{\mathrm{m}}(\omega)}.
\end{aligned} \tag{B22}$$

此处，系数 $\tilde{E}_{\mathrm{m}}$，$\tilde{F}_{\mathrm{m}}$ 表示为

$$\tilde{E}_{\mathrm{m}}=i\frac{(\gamma_{\mathrm{m}}+\Gamma')(\omega_{\mathrm{m}}^2-\tilde{\Omega}^2)}{(\Gamma'\omega_{\mathrm{m}}^2+\gamma_{\mathrm{m}}\Omega'^2)(\gamma_{\mathrm{m}}+\Gamma')+(\omega_{\mathrm{m}}^2-\Omega'^2)^2},\quad \tilde{F}_{\mathrm{m}}=\frac{(\omega_{\mathrm{m}}^2-\gamma_{\mathrm{m}}^2-\gamma_{\mathrm{m}}\Gamma'-\Omega'^2)(\omega_{\mathrm{m}}^2-\tilde{\Omega}^2)}{(\Gamma'\omega_{\mathrm{m}}^2+\gamma_{\mathrm{m}}\Omega'^2)(\gamma_{\mathrm{m}}+\Gamma')+(\omega_{\mathrm{m}}^2-\Omega'^2)^2}. \tag{B23}$$

由于 $\delta p_{\mathrm{m}}(\omega) = -iM\omega\delta q_{\mathrm{m}}(\omega)$，因此相对于 δp_{m} 的维纳滤波器也可以类似地得到。

$$S_{X_{\mathrm{m}}\delta p_{\mathrm{m}}}(\omega) = -iM\omega S_{X_{\mathrm{m}}\delta q_{\mathrm{m}}}(\omega), \tag{B24}$$

$$\begin{aligned} H_{\delta p_{\mathrm{m}}} &= \frac{1}{S^{+}_{X_{\mathrm{m}}X_{\mathrm{m}}}(\omega)}\left[\frac{S_{X_{\mathrm{m}}\delta p_{\mathrm{m}}}(\omega)}{S^{-}_{X_{\mathrm{m}}X_{\mathrm{m}}}(\omega)}\right]_{+} \\ &= \frac{C_{1X_{\mathrm{A}}\delta q}}{C_{1X_{\mathrm{A}}X_{\mathrm{A}}}}\frac{F_{\mathrm{m}}(\omega)}{F'_{\mathrm{m}}(\omega)}\left[\frac{F_{\mathrm{m}}(\omega)^{*}}{F'_{\mathrm{m}}(\omega)^{*}}\frac{-iM\omega K_{\mathrm{m}}(\omega)}{F_{\mathrm{m}}(\omega)F_{\mathrm{m}}(\omega)^{*}}\right]_{+} \\ &= \frac{C_{1X_{\mathrm{A}}\delta q}}{C_{1X_{\mathrm{A}}X_{\mathrm{A}}}}\frac{F_{\mathrm{m}}(\omega)}{F'_{\mathrm{m}}(\omega)}\left[\frac{\tilde{I}'_{\mathrm{m}}\omega+\tilde{J}'_{\mathrm{m}}}{F'_{\mathrm{m}}(\omega)}+\frac{\tilde{I}_{\mathrm{m}}\omega+\tilde{J}_{\mathrm{m}}}{F_{\mathrm{m}}(\omega)}\right]_{+} \\ &= \frac{C_{1X_{\mathrm{A}}\delta q}}{C_{1X_{\mathrm{A}}X_{\mathrm{A}}}}\frac{F_{\mathrm{m}}(\omega)}{F'_{\mathrm{m}}(\omega)}\frac{\tilde{I}_{\mathrm{m}}\omega+\tilde{J}_{\mathrm{m}}}{F_{\mathrm{m}}(\omega)} \\ &= \frac{C_{1X_{\mathrm{A}}\delta q}}{C_{1X_{\mathrm{A}}X_{\mathrm{A}}}}\frac{\tilde{I}_{\mathrm{m}}\omega+\tilde{J}_{\mathrm{m}}}{F'_{\mathrm{m}}(\omega)}, \end{aligned} \tag{B25}$$

~ ~其中，系数 I_{m}， J_{m} 由下式给出

$$\tilde{I}_{\mathrm{m}} = -iM\omega_m^2\tilde{E}_{\mathrm{m}}, \quad \tilde{J}_{\mathrm{m}} = M\frac{\Omega'^2-\omega_{\mathrm{m}}^2}{\Gamma'+\gamma_{\mathrm{m}}}\tilde{E}_{\mathrm{m}}. \tag{B26}$$

3. 单模条件协方差

采用单模模型得到的输出光 $S^{+}_{X_{\mathrm{m}}X_{\mathrm{m}}}(\omega)$ 谱密度的因果部分由公式（B18）给出；将镜子视为质点时，通过应用滤波器 $H_{\delta q_{\mathrm{m}}}(\omega)$ $H_{\delta p_{\mathrm{m}}}(\omega)$，可计算得到以下 $G_{\delta q_m}(\omega)$ 和 $G_{\delta p_m}(\omega)$

$$G_{\delta q_m}(\omega) = H_{\delta q_{\mathrm{m}}}(\omega)S^{+}_{X_{\mathrm{A}}X_{\mathrm{A}}}(\omega) = \frac{C_{1X_{\mathrm{A}}\delta q}}{\sqrt{C_{1X_{\mathrm{A}}X_{\mathrm{A}}}}}\frac{F'(\omega)}{F(\omega)}\frac{\tilde{E}_{\mathrm{m}}\omega+\tilde{F}_{\mathrm{m}}}{F'_{\mathrm{m}}(\omega)}, \tag{B27}$$

$$G_{\delta p_m}(\omega) = H_{\delta p_{\mathrm{m}}}(\omega)S^{+}_{X_{\mathrm{A}}X_{\mathrm{A}}}(\omega) = \frac{C_{1X_{\mathrm{A}}\delta q}}{\sqrt{C_{1X_{\mathrm{A}}X_{\mathrm{A}}}}}\frac{F'(\omega)}{F(\omega)}\frac{\tilde{I}_{\mathrm{m}}\omega+\tilde{J}_{\mathrm{m}}}{F'_{\mathrm{m}}(\omega)}. \tag{B28}$$

由此，将镜子视为质点时，维纳滤波器的条件方差矩阵为

$$\boldsymbol{V}_{\mathrm{cm}} = \begin{pmatrix} V_{\delta q_m\delta q_m} & V_{\delta q_m\delta p_m} \\ V_{\delta q_m\delta p_m} & V_{\delta p_m\delta p_m} \end{pmatrix}, \tag{B29}$$

其中，分量 $V_{\delta q_m\delta q_m}$、 $V_{\delta q_m\delta p_m}$ 和 $V_{\delta p_m\delta p_m}$ 由下式得到

$$V_{\delta q_m\delta q_m} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{Re}[S_{\delta q_m\delta q_m}(\omega) - |G_{\delta q_m}(\omega)|^2)]d\omega, \tag{B30}$$

$$V_{\delta p_m\delta p_m} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{Re}[S_{\delta p_m\delta p_m}(\omega) - |G_{\delta p_m}(\omega)|^2]d\omega, \tag{B31}$$

$$V_{\delta q_m\delta p_m} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{Re}[S_{\delta q_m\delta p_m}(\omega) - G_{\delta q_m}(\omega)^{*}G_{\delta p_m}(\omega)]d\omega. \tag{B32}$$

这里，我们使用以下方程:

$$S_{\delta q_m\delta q_m}(\omega) = \frac{1}{M^2|F_m(\omega)|^2}\left\{\langle\xi_m^2(\omega)\rangle + \frac{2\hbar^2G_0^2n_c\kappa}{\kappa^2+\Delta^2}(\kappa^2\langle x_{\mathrm{in}}^2(\omega)\rangle + \Delta^2\langle y_{\mathrm{in}}^2(\omega)\rangle)\right\}, \tag{B33}$$

$$S_{\delta p_m\delta p_m}(\omega) = M^2\omega^2S_{\delta q_m\delta q_m}(\omega), \tag{B34}$$

$$S_{\delta x_m\delta p_m}(\omega) = iM\omega S_{\delta q_m\delta q_m}(\omega). \tag{B35}$$

条件协方差 V_{cm} 与参考文献 [14]中推导出的相同。

4. 双模模态的单模维纳滤波器条件协方差 **1**

这里我们展示一种系统模型不完善的情况。考虑这样一种情形：对于光束模型中得到的光$X_A(\omega)$，采用基于仅包含摆模的单模理论的其他维纳滤波器 $H_{\delta q_m}(\omega)$ $H_{\delta p_m}(\omega)$。在这种情况下，其他维纳滤波器 $H_{\delta q_m}(\omega)$ 和 $H_{\delta p_m}(\omega)$ 并非最优估计。因此，回到真实值与估计值之间的均方差表达式，可得

$$\langle|\delta q(\omega)-\delta q_{\rm em}(\omega)|^2\rangle \;=\; S_{\delta q\delta q}(\omega)-H^*_{\delta q_m}(\omega)S_{X_A\delta q}(\omega)-H_{\delta q_m}(\omega)S_{\delta qX_A}(\omega)+|H_{\delta q_m}(\omega)|^2S_{X_AX_A}(\omega), \tag{B36}$$

其中我们使用

$$\delta q_{\rm em}(\omega) \;\equiv\; H_{\delta q_m}(\omega)X_A(\omega) \tag{B37}$$
$$S_{X_A\delta q}(\omega) \;=\; S^*_{\delta qX_A}(\omega). \tag{B38}$$

类似地，对于镜子质心动量的微扰 $\delta p(\omega)$，真实值与估计值之间的均方差 $\langle|\delta p(\omega)-\delta p_{\rm em}(\omega)|^2\rangle$ 为

$$\langle|\delta p(\omega)-\delta p_{\rm em}(\omega)|^2\rangle \;=\; S_{\delta p\delta p}(\omega)\;-H^*_{\delta p_m}(\omega)S_{X_A\delta p}(\omega)\;-H_{\delta p_m}(\omega)S_{\delta pX_A}(\omega)+|H_{\delta p_m}(\omega)|^2S_{X_AX_A}(\omega), \tag{B39}$$

其中我们使用

$$\delta p_{\rm em}(\omega) \;\equiv\; H_{\delta p_m}(\omega)X_A(\omega) \tag{B40}$$
$$S_{X_A\delta p}(\omega) \;=\; S^*_{\delta pX_A}(\omega). \tag{B41}$$

对于镜子重心位置的微扰 $\delta q(\omega)$ 与其动量的微扰 $\delta p(\omega)$ 之间的相关性 $\langle(\delta q(\omega)-\delta q_{\rm em}(\omega))^\dagger(\delta p(\omega)-\delta p_{\rm em}(\omega))+(\delta p(\omega)-\delta p_{\rm em}(\omega))(\delta q(\omega)-\delta q_{\rm em}(\omega))^\dagger\rangle$，可写为：

$$\begin{aligned}&\langle(\delta q(\omega)-\delta q_{\rm em}(\omega))^\dagger(\delta p(\omega)-\delta p_{\rm em}(\omega))+(\delta p(\omega)-\delta p_{\rm em}(\omega))(\delta q(\omega)-\delta q_{\rm em}(\omega))^\dagger\rangle\\ &\quad=S_{\delta q\delta p}(\omega)-H^*_{\delta q_m}(\omega)S_{X_A\delta p}(\omega)-H_{\delta p_m}(\omega)S_{\delta qX_A}(\omega)+H^*_{\delta q_m}(\omega)H_{\delta p_m}(\omega)S_{X_AX_A}(\omega).\end{aligned} \tag{B42}$$

将这些量进行逆傅里叶变换到实空间，可得到条件协方差 $\boldsymbol{V}'_{\rm c}$，其表达式如下：

$$\boldsymbol{V}'_{\rm c}=\begin{pmatrix}V'_{\delta q\delta q} & V'_{\delta q\delta p}\\ V'_{\delta q\delta p} & V'_{\delta p\delta p}\end{pmatrix}, \tag{B43}$$

其中

$$V'_{\delta q\delta q} \;=\; \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}d\omega{\rm Re}[S_{\delta q\delta q}(\omega)-H^*_{\delta q_m}(\omega)S_{X_A\delta q}(\omega)-H_{\delta q_m}(\omega)S_{\delta qX_A}(\omega)+|H_{\delta q_m}(\omega)|^2S_{X_AX_A}(\omega)], \tag{B44}$$
$$V'_{\delta p\delta p} \;=\; \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}d\omega{\rm Re}[S_{\delta p\delta p}(\omega)-H^*_{\delta p_m}(\omega)S_{X_A\delta p}(\omega)-H_{\delta p_m}(\omega)S_{\delta pX_A}(\omega)+|H_{\delta p_m}(\omega)|^2S_{X_AX_A}(\omega)], \tag{B45}$$
$$V'_{\delta q\delta p} \;=\; \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}d\omega{\rm Re}[S_{\delta q\delta p}(\omega)-H^*_{\delta q_m}(\omega)S_{X_A\delta p}(\omega)-H_{\delta p_m}(\omega)S_{\delta qX_A}(\omega)+H^*_{\delta q_m}(\omega)H_{\delta p_m}(\omega)S_{X_AX_A}(\omega)]. \tag{B46}$$

---

[1] M. Aspelmeyer, T. J. Kippenberg, 和 F. Marquardt, Rev. Mod. Phys. **86**, 1391 (2014)。 [2] W. P. Bowen 和 G. J. Milburn, Quantum Optomechanics (CRC Press, 2016年)。 [3] Y. Chen, J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys. **46** 104001 (2013)。 [4] Y. Michimura 和 K. Komori, Eur. Phys. J. D **74** 6, 126 (2020年)。 [5] M. Croquette 等, AVS Quantum Science, **5**, 014403 (2023年) [6] C. F. Ockeloen-Korppi, E. Damsk¨agg, J. -M. Pirkkalainen, M. Asjad, A. A. Clerk, F. Massel, M. J. Woolley, 和 M. A. Sillanp¨a¨a, 大质量机械振子的稳定纠缠, 《科学》**556**, 478 (2018年)。

[7] S. Kotler, G. A. Peterson, E. Shojaee, F. Lecocq, K. Cicak, A. Kwiatkowski, S. Geller, S. Glancy, E. Knill, R. W. Simmonds, J. Aumentado, and J. D. Teufel, 对确定性宏观纠缠的直接观测, 《科学》372, 622 (2021年)。 [8] L. Mercier de L´epinay, C. F. Ockeloen-Korppi, M. J. Woolley, and M. A. Sillanp¨a¨a, 机械振子中的无量子力学子系统, 《科学》372, 625 (2021年)。 [9] R. P. Feynman, F. M. Morinigo, and W. G. Wagner, 《费曼引力讲义》（Westview Press，博尔德，1995年）。 [10] D. Carney, P. C. E. Stamp, and J. M. Taylor, 《经典与量子引力》 36 034001 (2019 年)。 [11] S. Bose, A. Mazumdar, G. W. Morley, H. Ulbricht, M. Toroˇs, M. Paternostro, A. A. Geraci, P. F. Barker, M. S. Kim, and G. Milburn, 《物理评论快报》 119, 240401 (2017年)。 [12] C. Marletto and V. Vedral, 《物理评论快报》119, 240402 (2017年)。 [13] N. Matsumoto, S. B. Catan˜o-Lopez, M. Sugawara, S. Suzuki, N. Abe, K. Komori, Y. Michimura, Y. Aso, and K. Edamatsu, 《物理评论快报》 122, 071101 (2019年)。 [14] N. Matsumoto and N. Yamamoto, arXiv:2008.10848。 [15] C. Meng, G. A. Brawley, J. S. Bennett, and W. P. Bowen, 《物理评论快报》125, 043604 (2020年)。 [16] A. A. Balushi, W. Cong, and R. B. Mann, 《物理评论A辑》98 043811 (2018年)。 [17] H. Miao, D. Martynov, H. Yang, and A. Datta, 《物理评论A辑》101 063804 (2020年)。 [18] A. Matsumura and K. Yamamoto, 《物理评论D辑》102 106021 (2020年)。 [19] T. Krisnanda, G. Y. Tham, M. Paternostro, and T. Paterek, npj Quantum Inf. 6, 12 (2020年)。 [20] A. Datta and H. Miao, Quantum Sci. Technol. 6, 045014 (2021年)。 [21] D. Miki, A. Matsumura, and K. Yamamoto, 《物理评论D辑》105, 026011 (2022年)。 [22] C. Genes, D. Vitali, P. Tombesi, S. Gigan, and M. Aspelmeyer , 《物理评论A辑》77 033804 (2008年)。 [23] D. Vitali et al., 《物理评论快报》98 030405 (2007年)。 [24] H. Miao, S. Danilishin, H. M¨uller-Hbhardt, and Y. Chen, 《新物理学杂志》12, 083032 (2010年)。 [25] N. Wiener, 《平稳时间序列的外推、插值与平滑》（麻省理工学院出版社，1964年）。 [26] H. I. Nurdin and N. Yamamoto, 《线性动态量子系统：分析、综合与控制》（施普林格，2017年）。 [27] J. Schm´ole, M. Dragosits, H. Hepach, and M. Aspelmeyer, 《经典与量子引力》33, 125031 (2016年)。 [28] S. B. Catan˜o-Lopez, J. G. Santiago-Condori, K. Edamatsu, and N. Matsumoto, 《物理评论快报》124, 221102 (2020年)。 [29] Y. Sugiyama, T. Shichijo, N. Matsumoto, A. Matsumura, D. Miki, and K. Yamamoto, 《物理评论A辑》107 033515 (2023年)。 [30] G. I. Gonzalez and P. R. Saulson, J. Acoust. Soc. Am. 96, 207 (1994年)。 [31] D. Miki, N. Matsumoto, A. Matsumura, T. Shichijo, Y. Sugiyama, K. Yamamoto, and N. Yamamoto, 《物理评论A辑》107 032410 2023( )。 [32] C. K. Law, 《物理评论A辑》51 2537 (1995年)。 [33] C. Whittle, et al. 《科学》372 6548, 1333-1336 (2021年)。 [34] V. Giovannetti and D. Vitali, 《物理评论A辑》63, 023812 (2001年)。 [35] R. G. Brown, P. Y. C, Hwang, *Introduction to Random Signals and Applied Kalman Filtering* (1996年，纽约：约翰·威立父子公司)