arXiv:2303.04514v1 [math.CV] 8 Mar 2023

更新：2023年3月9日

TheMathematics Student，2022年2月。印度数学学会第87届年会论文集，2021年12月。

利德斯通插值 I：单变量

Michel Waldschmidt

Sorbonne Université and Université de Paris, CNRS, IMJ-PRG, F-75005 Paris, France
michel.waldschmidt@imj-prg.fr
http://www.imj-prg.fr/~michel.waldschmidt

Contents

摘要 1关键词 21. 引言 22. 单变量 Lidstone 多项式的定义 33. 微分方程 64. 递推公式 85. 整函数的唯一性 86. 整函数的展开与生成级数 107. Lidstone 多项式的积分公式 148. 有限指数型函数 16参考文献 18

Abstract

根据利德斯通插值理论，指数型为 $< \pi$ 的整函数由其在 0 和 1 处的偶数阶导数确定。这一理论可以推广到多个变量。本文综述单变量情形的理论，并给出完整证明。

这组三篇论文中的第一篇专门讨论单变量利德斯通插值；双变量和多变量利德斯通插值将分别作为另外两篇即将发表的论文的主题。

关键词：Lidstone 多项式、指数型、单变量解析函数。

AMS数学学科分类2020：主要分类：41A58 次要分类：30D15

致谢。本文扩展自作者于2021年12月在印度数学学会第87届年会上所作大会报告的第一部分。报告的第二部分探讨了多变量。本文以及即将发表的另外两篇关于二元和多变量的论文，均完成于印度金奈的数学科学研究所（IMSc）；作者于2021年12月在该所印度-法国数学项目下讲授了一门课程。作者感谢IMSc的热情接待，以及法印国际实验室的支持。

1. Introduction

1930年，在一篇开创性论文中 [3], G. J. Lidstone 引入了一个基$\Lambda_k(z)$ $(k \geq 0)$空间的 $\mathbb{C}[z]$ 单变量多项式，它具有这样的性质：任意多项式 $f \in \mathbb{C}[z]$ 都能有限展开

$$f(z) = \sum_{k\geq 0} f^{(2k)}(0)\Lambda_k(1-z) + \sum_{k\geq 0} f^{(2k)}(1)\Lambda_k(z),$$

其中

$$f^{(2k)} = \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\right)^{2k} f.$$

两年后，H. Poritsky [4]J. M. Whittaker [8]将这些展开推广到指数型整函数 $< \pi$。1936 年，

I.J. Schoenberg [5] 证明，唯一在 0 和 1 两点处连同所有偶数阶导数都为零的有限指数型整函数，是函数 $\sin(k\pi z)$ 的常数系数线性组合，其中 $k \in \mathbb{N}$。这一结果可由 R.C. Buck 在1955 [2]得到的这类函数的一个展开公式推出。

我们回顾单变量 Lidstone 展开的基本事实。本节中，z 和 ζ 属于 $\mathbb{C}$。为便于推广到多变量情形，我们采用一套记号。经典的 Lidstone 多项式 [3, §6 p. 18] $\Lambda_k(z)$ $(k \geq 0)$ 在此记作$\Lambda_{2k,\,1}(z)$，而多项式 $\Lambda_k(1-z)$ 在此记作 $\Lambda_{2k,\,0}(z)$。单变量函数 f 的各阶导数记作f', f'', . . . , $f^{(k)}$。

利德斯通多项式在定理 1中引入。它们是一个微分方程组的解（引理 2）。证明指数型整函数 $< \pi$的展开唯一性（定理 2）很容易，而存在性（定理 3）则需要更多工作——这两个结果均归功于 H. Poritsky 和 J. M. Whittaker。接下来，我们证明利德斯通多项式的积分公式（命题1 和 2），并给出 Buck 的结果（命题 3）和 Schoenberg 的结果（推论2）的证明。

本文内容完整，并给出了完整证明。这是两篇即将发表的论文的导论，[6] 在这篇论文中，我们将理论推广到两个变量； [7] 在另一篇论文中，我们将理论推广到任意多个变量。

2. Definition of the univariate Lidstone polynomials

让我们回顾整函数 f 的级的定义：

$$\varrho(f) = \limsup_{r\to\infty} \frac{\log\log|f|_r}{\log r} \quad \text{where} \quad |f|_r = \sup_{|z|=r} |f(z)|$$

以及 f 的指数型：

$$\tau(f) = \limsup_{r\to\infty} \frac{\log|f|_r}{r}.$$

如果 f 的指数型有限，则 f 的级为 ≤ 1。如果 f 的级为 < 1，则其指数型为 0。利用泰勒级数的系数的柯西估计以及 $n!$ 的斯特林公式，可以推出 [8, 引理 1]：如果 f 具有指数型 $\tau(f)$，那么对于所有 $z_0 \in \mathbb{C}$，

$$\limsup_{n\to\infty} |f^{(n)}(z_0)|^{1/n} = \tau(f).$$

对于 $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$，函数 $e^{\zeta z}$ 的级为 1，指数型为 $|\zeta|$。

我们用 $2\mathbb{N}$ 表示非负偶整数集。利德斯通插值理论以如下内容为起点。

引理 1. 设 f 是满足以下条件的多项式

$$f^{(t)}(0) = f^{(t)}(1) = 0 \ for\ all\ t \in 2\mathbb{N}. \tag{1}$$

那么 $f = 0$。

我们给出这个引理的三种证明，论证略有不同，之后还会再次用到。

证明一。对多项式 f 的总次数使用归纳法。

若 f 的次数为 ≤ 1，即 $f(z) = a_0 z + a_1$，条件 $f(0) = f(1) = 0$ 推出 $a_0 = a_1 = 0$，因此 $f = 0$。

若 f 的次数为 $\leq d$，且满足 $d \geq 2$ 和这些假设，则 f'' 也满足这些假设，且次数为 $< d$，因此由归纳法可得 $f'' = 0$，从而 f 的次数为 ≤ 1。

引理 1 得证。 □

第二种证明。设 f 是满足 (1) 的多项式。假设 $f^{(t)}(0) = 0$ 对所有 $t \in 2\mathbb{N}$ 成立，意味着 f 是一个奇函数：$f(-z) = -f(z)$。假设 $f^{(t)}(1) = 0$ 对所有 $t \in 2\mathbb{N}$ 成立，意味着 $f(1-z)$ 是一个奇函数：$f(1-z) = -f(1+z)$。由此可得

$$f(z+2) = f(1+z+1) = -f(1-z-1) = -f(-z) = f(z),$$

因此，多项式 f 是周期函数，所以它是一个常数。

由于 $f(0) = 0$，我们得出结论 $f = 0$。 □

第三个证明。 假设（1）。写作

$$f(z) = a_1 z + a_3 z^3 + a_5 z^5 + a_7 z^7 + + \cdots + a_{2m+1} z^{2m+1} + \cdots$$

（有限和）。我们有 $f(1) = f''(1) = f^{(\mathrm{iv})}(1) = \cdots = 0$:

$$\begin{array}{rrrrrrr} a_1 & +a_3 & +a_5 & +a_7 & +\cdots & +a_{2n+1} & +\cdots = 0 \\ & 6a_3 & +20a_5 & +42a_7 & +\cdots & +2m(2m+1)a_{2m+1} & +\cdots = 0 \\ & & 120a_5 & +840a_7 & +\cdots & +\frac{(2m+1)!}{(2m-3)!}a_{2m+1} & +\cdots = 0 \\ & & & & & \ddots & \vdots \end{array}$$

该方程组的矩阵是三角矩阵，且满秩。因此我们得出结论
$a_1 = a_3 = a_5 = \cdots = 0$。 □

该矩阵满秩这一事实意味着，多项式f 由这些数唯一确定

$$f^{(t)}(0) \text{ and } f^{(t)}(1) \text{ for } t \in 2\mathbb{N}.$$

设 $T \geq 0$ 为偶数。多项式空间 $\mathbb{C}[z]_{\leq T+1}$ 中次数为$\leq T+1$ 的多项式维数为 $T+2$。所有元素 $f \in \mathbb{C}[z]_{\leq T+1}$ 都满足$f^{(k)} = 0$ 对 $k \geq T+2$成立。引理 1 表明，线性映射

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}[z]_{\leq T+1} & \longrightarrow & \mathbb{C}^{T+2} \\ f & \longmapsto & \left(f^{(t)}(0),\ f^{(t)}(1)\right)_{0 \leq t \leq T,\ t \in 2\mathbb{N}} \end{array}$$

是单射。因此它是一个同构。

给定数 a_t 和 b_t（$t \in 2\mathbb{N}$），其中除了有限多个之外，其余数都为 0，存在唯一的多项式 f 使得

$$f^{(t)}(0) = a_t \text{ and } f^{(t)}(1) = b_t \text{ for all } t \in 2\mathbb{N}.$$

特别地，对于每个 $t \in 2\mathbb{N}$，都存在唯一的多项式 $\Lambda_{t,\ 0}$ 满足

$$\Lambda_{t,0}^{(\tau)}(0) = \delta_{t,\tau} \text{ and } \Lambda_{t,0}^{(\tau)}(1) = 0 \text{ for } \tau \in 2\mathbb{N}$$

（克罗内克符号），并且存在唯一的多项式 $\Lambda_{t,\ 1}$ 满足

$$\Lambda_{t,1}^{(\tau)}(0) = 0 \text{ and } \Lambda_{t,1}^{(\tau)}(1) = \delta_{t,\tau} \text{ for } \tau \in 2\mathbb{N}.$$

因此:

定理 1（G. J. Lidstone（1930年））。存在两列多项式，$\big(\Lambda_{t,\ 0}(z)\big)_{t\in 2\mathbb{N}}$、$\big(\Lambda_{t,\ 1}(z)\big)_{t\in 2\mathbb{N}}$，使得任意多项式 f 均可写成有限和

$$f(z)=\sum_{t\in 2\mathbb{N}} f^{(t)}(0)\Lambda_{t,0}(z)+\sum_{t\in 2\mathbb{N}} f^{(t)}(1)\Lambda_{t,1}(z). \tag{2}$$

对合 $z\mapsto 1-z$:

$$0\mapsto 1,\quad 1\mapsto 0,\quad 1-z\mapsto z$$

表明 $\Lambda_{t,\ 0}(z)=\Lambda_{t,\ 1}(1-z)$。

此时，我们可以类比泰勒级数，其中多项式 $z^m/m!$ 满足

$$\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}z^k}\left(\frac{z^m}{m!}\right)_{z=0}=\delta_{mk}\ \text{ for }\ m\geq 0\ \text{ and }\ k\geq 0.$$

给定一个复数序列 $(a_m)_{m\geq 0}$，插值问题的唯一解析解（若存在） f

$$f^{(m)}(0)=a_m \text{ for all } m\geq 0$$

由泰勒展开给出

$$f(z)=\sum_{m\geq 0} a_m\frac{z^m}{m!}.$$

Lidstone 展开将单点 0 和全体导数的序列替换为两个点 0 和 1，以及这两个点处的偶数阶导数。

第一个利德斯通多项式为 $\Lambda_{0,1}(z)=z$:

$\Lambda_{0,\ 1}(0)=0,\quad \Lambda_{0,\ 1}(1)=1,\quad \Lambda_{0\,1}^{(t),}(0)=\Lambda_{0\,1}^{(t),}(1)=0$ 对于 $t\in 2\mathbb{N}, t\geq 2.$

下一个引理给出了一种归纳求出所有这些多项式的方法。

3. Differential equation

引理 2。Lidstone 多项式序列 $\big(\Lambda_{t,\ 1}\big)_{t\in 2\mathbb{N}}$ 由 $\Lambda_{0,\ 1}(z)=z$ 和

$$\Lambda_{t,1}''=\Lambda_{t-2,1}\quad for\ \ t\geq 2\ even,$$

满足初始条件$\Lambda_{t,\ 1}(0) = \Lambda_{t,\ 1}(1) = 0$，其中 $t \in 2\mathbb{N},\ \ t \geq 2$。更确切地说，设$\left(L_t\right)_{t\in 2\mathbb{N}}$ 为满足$L_0(z) = z$ 和的多项式序列

$$L_t'' = L_{t-2} \ \ for \ \ t \in 2\mathbb{N},\ t \geq 2,$$

满足初始条件 $L_t(0) = L_t(1) = 0$ 对于 $t \in 2\mathbb{N}, t \geq 2$；则$L_t = \Lambda_{t,\ 1}$ 对于所有 $t \in 2\mathbb{N}$。

注意，假设 $L_0(z) = z$ 不可省略：给定任意多项式 A，都存在唯一的序列$\left(L_t\right)_{t\in 2\mathbb{N}}$ 满足所有其他假设，但满足 $L_0 = A$。

证明。 显然，序列$\left(\Lambda_{t,1}\right)_{t\in 2\mathbb{N}}$ 满足这些条件。现在我们证明唯一性。设$\left(L_t\right)_{t\in 2\mathbb{N}}$ 是一个满足引理 2 条件的多项式序列。根据假设 $L_0(z) = z$。由归纳法，假设对于某个 $t \geq 2$，我们知道 $L_{t-2} = \Lambda_{t-2,1}$。那么差 $g = L_t - \Lambda_{t,1}$ 满足 $g'' = 0$，因此 g 的次数为≤ 1。条件 $L_t(0) = L_t(1) = 0$对于 $t \in 2\mathbb{N}, t \geq 2$ 蕴含$g = 0$。□

对于 $t \in 2\mathbb{N}$，多项式 $\Lambda_{t,\ 1}$ 是奇函数，其次数为 $t + 1$，首项为 $\frac{1}{(t+1)!}\ z^{t+1}$。例如

$$\Lambda_{2,1}(z) = \frac{1}{6}(z^3 - z) = \frac{1}{6}z(z-1)(z+1),$$

$$\Lambda_{2,0}(z) = \Lambda_{2,1}(1-z) = -\frac{z^3}{6} + \frac{z^2}{2} - \frac{z}{3} = -\frac{1}{6}z(z-1)(z-2),$$

$$\Lambda_{4,1}(z) = \frac{1}{120}z^5 - \frac{1}{36}z^3 + \frac{7}{360}z = \frac{1}{360}z(z^2-1)(3z^2-7),$$

and

$$\begin{aligned}\Lambda_{4,0}(z) = \Lambda_{4,1}(1-z) &= -\frac{1}{120}z^5 + \frac{1}{24}z^4 - \frac{1}{18}z^3 + \frac{1}{45}z \\ &= -\frac{1}{360}z(z-1)(z-2)(3z^2-6z-4).\end{aligned} \tag{3}$$

4. Recurrence formula

对于 $t \in 2\mathbb{N}$，多项式 $f_t(z) = z^{t+1}$ 满足

$$f_t^{(\tau)}(0) = 0 \text{ for } \tau \in 2\mathbb{N}, \quad f_t^{(\tau)}(1) = \begin{cases} \frac{(t+1)!}{(t-\tau+1)!} & \text{for } 0 \le \tau \le t, \tau \in 2\mathbb{N} \\ 0 & \text{for } \tau \ge t+2, \tau \in 2\mathbb{N}. \end{cases}$$

由定理 1 可得，对于 $t \in 2\mathbb{N}$,

$$z^{t+1} = \sum_{\substack{0 \le \tau \le t \\ \tau \in 2\mathbb{N}}} \frac{(t+1)!}{(t-\tau+1)!} \Lambda_{\tau,1}(z),$$

这给出了递推公式

$$\Lambda_{t,1}(z) = \frac{1}{(t+1)!} z^{t+1} - \sum_{\substack{0 \le \tau \le t-2 \\ \tau \in 2\mathbb{N}}} \frac{1}{(t-\tau+1)!} \Lambda_{\tau,1}(z). \tag{4}$$

定理 1 的另一个推论是

$$\frac{z^t}{t!} = \Lambda_{t,0}(z) + \sum_{\substack{0 \le \tau \le t \\ \tau \in 2\mathbb{N}}} \frac{1}{(t-\tau)!} \Lambda_{\tau,1}(z) \tag{5}$$

对于 $t \in 2\mathbb{N}$。

5. Unicity for entire functions

根据定理 1，一个多项式由其在两点 0 和 1 处的偶数阶导数值唯一确定。H. Poritsky[4] 和 J. M. Whittaker [8] 证明，对于指数型为 $< \pi$ 的整函数，更一般地也有同样的结论：

定理 2（H. Poritsky、J. M. Whittaker，1932）。设 f 是一个指数型为 $< \pi$ 的整函数，满足 $f_{(t)}(0) = f^{(t)}(1) = 0$，对所有充分大的 $t \in 2\mathbb{N}$ 均成立。那么 f 是一个多项式。

证明。 我们结合了用于多项式的一些论证，这些论证见˜引理 1 的三个证明。令 $f = f - P$，其中 P 是满足以下条件的多项式

$$P^{(t)}(0) = f^{(t)}(0) \text{ and } P^{(t)}(1) = f^{(t)}(1) \text{ for } t \in 2\mathbb{N}.$$

我们有 $\tilde{f}_{(t)}(0) = \tilde{f}^{(t)}(1) = 0$ 对所有 $t \in 2\mathbb{N}$ 均成立。

~ ~ ~函数 $f(z)$ 和 $f(1-z)$ 都是奇函数，因此 $f(z)$ 是周期为 2 的周期函数。因此，存在一个在 $\mathbb{C}^\times$ 中解析的函数 g，使得$\tilde{f}(z) = g(e^{\pi i z})$。由于 $\tilde{f}(z)$ 的指数型为 $< \pi$，对 g 在˜原点处的洛朗展开系数应用柯西不等式，可得 $f = 0$ 和 $f = P$。□

定理 2在以下两个方面都是最佳的：

- 整函数 $\sin(\pi z)$ 的指数型为 π ，且满足$f_{(t)}(0) = f_{(t)}(1) = 0$，对所有 $t \in 2\mathbb{N}$ 均成立。
- 如果我们只假设 $f_{(t)}(0) = f_{(t)}(1) = 0$对有限集之外的所有偶数 t 均成立，那么结论仍然有效——这可由定理 1和2推出。然而，如果从定理 2的假设中删去无限多个条件，那么结论便不再成立：

引理 3. 设 $\mathcal{E}$ 是 $(t,i) \in 2\mathbb{N} \times \{0,1\}$ 集合的一个无限子集。那么存在不可数多个超越整函数f ，它们的级为零，在原点处的泰勒系数均为有理数，并且$f_{(t)}(i) = 0$ 对所有 $(t,i) \in (2\mathbb{N} \times \{0,1\}) \setminus \mathcal{E}$ 均成立。

证明。设 $(P_m)_{m\geq 0}$ 是属于集合 $\{\Lambda_{t,i} \mid (t,i) \in \mathcal{E}\}$ 的无限多项式序列。设 d_m 是 P_m 的次数。我们假设序列 $(d_m)_{m\geq 0}$ 递增。设 $(c_m)_{m\geq 0}$ 是一个有理数序列，使得

$$|P_m|_r \leq |c_m| r^{d_m}$$

对所有 $r \geq 1$ 和 $m \geq 0$ 均成立。对于 $m \geq 0$，令

$$u_m = \frac{1}{c_m (d_m!)^2}.$$

级数

$$\sum_{m\geq 0} u_m P_m(z)$$

在 $\mathbb{C}$的任意紧子集上一致收敛，其和 $f(z)$是一个零阶整函数。由9的一致收敛性

级数可得，对所有 $t \in 2\mathbb{N}$ 和 $i \in \{0,1\}$,

$$f^{(t)}(i) = \begin{cases} u_m & \text{if } P_m = \Lambda_{t,i}, \\ 0 & \text{if } P_m \neq \Lambda_{t,i}. \end{cases}$$

引理 3 的结论得证。 □

6. Expansion of entire functions and generating series

多项式的Lidstone有限展开（2）已在[4, 8] 推广为指数型整函数的无穷展开$< \pi$ 如下:

定理 3 (H. Poritsky, J.M. Whittaker 1932)。 展开式 (2)适用于任意指数型整函数 f ，其中指数型为 $< \pi$；对于每个 $z \in \mathbb{C}$，级数

$$\sum_{t\in 2\mathbb{N}} f^{(t)}(0)\Lambda_{t,0}(z) \quad and \quad \sum_{t\in 2\mathbb{N}} f^{(t)}(1)\Lambda_{t,1}(z)$$

绝对收敛。

注意，定理 2 是定理 3的推论。

我们将从定理 3 推导出以下两个生成级数的显式公式:

$$M_1(\zeta, z) := \sum_{t\in 2\mathbb{N}} \Lambda_{t,1}(z)\zeta^t \quad \text{and} \quad M_0(\zeta, z) := \sum_{t\in 2\mathbb{N}} \Lambda_{t,0}(z)\zeta^t.$$

推论 1. 对于 $|\zeta| < \pi$，我们有

$$M_1(\zeta, z) = \frac{\sinh(\zeta z)}{\sinh(\zeta)} \tag{6}$$

and

$$M_0(\zeta, z) = \cosh(\zeta z) - \sinh(\zeta z)\coth(\zeta). \tag{7}$$

由于 $\Lambda_{t,\ 0}(z) = \Lambda_{t,\ 1}(1-z)$，因此我们有 $M_0(\zeta, z) = M_1(\zeta, 1-z)$, 以及三角关系

$$\sinh(z_1 - z_2) = \sinh(z_1)\cosh(z_2) - \cosh(z_1)\sinh(z_2)$$

说明这两个公式（6）和（7）是等价的。

由定理 (6) 的证明可由定理 3 推出。设 $\zeta \in \mathbb{C}$ 满足 $|\zeta| < \pi$。我们对函数 $f_\zeta(z) = \mathrm{e}^{\zeta z}$ 使用定理 3 和公式（2）。由于 $f_{(t)\zeta}(0) = \zeta^t$ 且 $f_{(t)\zeta}(1) = \mathrm{e}^{\zeta}\zeta^t$，我们推得

$$\mathrm{e}^{\zeta z} = \sum_{t\in 2\mathbb{N}} \Lambda_{t,0}(z)\zeta^t + \mathrm{e}^{\zeta} \sum_{t\in 2\mathbb{N}} \Lambda_{t,1}(z)\zeta^t. \tag{8}$$

将 ζ 替换为 $-\zeta$，得到

$$\mathrm{e}^{-\zeta z} = \sum_{t\in 2\mathbb{N}} \Lambda_{t,0}(z)\zeta^t + \mathrm{e}^{-\zeta} \sum_{t\in 2\mathbb{N}} \Lambda_{t,1}(z)\zeta^t.$$

因此

$$\mathrm{e}^{\zeta z} - \mathrm{e}^{-\zeta z} = (\mathrm{e}^{\zeta} - \mathrm{e}^{-\zeta}) \sum_{t\in 2\mathbb{N}} \Lambda_{t,1}(z)\zeta^t.$$

这就证明了（6）。 □

由（6）可直接推出以下关系 [8, 方程（3.5）]当 $t \in 2\mathbb{N}$时,

$$\Lambda_{t,1}(z) = \frac{2^{t+1}}{(t+1)!} B_{t+1}\left(\frac{1+z}{2}\right),$$

Lidstone 多项式与伯努利多项式之间；后者定义如下:

$$t\frac{\mathrm{e}^{tz}-1}{\mathrm{e}^{t}-1} = \sum_{n=1}^{\infty} B_n(z)\frac{t^n}{n!}.$$

由推论 1可得 $M_1(\zeta, z+1) - M_1(\zeta, z-1) = 2\cosh(\zeta z)$，这意味着

$$\Lambda_{t,1}(z+1) - \Lambda_{t,1}(z-1) = 2\frac{z^t}{t!}.$$

这个关系也可以由函数方程推出

$$B_n(z+1) - B_n(z) = nz^{n-1}$$

伯努利多项式的。

我们下面对定理 3 的证明将基于（6），因此我们需要直接证明它。

(6)的直接证明。 我们从以下公式开始

$$\mathrm{e}^{\zeta z} = \frac{\sinh(\zeta(1-z))}{\sinh(\zeta)} + \mathrm{e}^{\zeta}\,\frac{\sinh(\zeta z)}{\sinh(\zeta)}, \tag{9}$$

该公式适用于 $\zeta \in \mathbb{C}, \zeta \notin \pi\mathrm{i}\mathbb{Z}$ 以及 $z \in \mathbb{C}$。对于 $\zeta \in \mathbb{C}, \zeta \notin \pi\mathrm{i}\mathbb{Z}$，整函数

$$f(z) = \frac{\sinh(\zeta z)}{\sinh(\zeta)} = \frac{\mathrm{e}^{\zeta z} - \mathrm{e}^{-\zeta z}}{\mathrm{e}^{\zeta} - \mathrm{e}^{-\zeta}}$$

满足

$$f'' = \zeta^2 f, \quad f(0) = 0, \quad f(1) = 1,$$

因此 $f_{(t)}(0) = 0$ 且 $f_{(t)}(1) = \zeta^t$ 对所有 $t \in 2\mathbb{N}$ 成立。

对于 $z \in \mathbb{C}$ 和 $|\zeta| < \pi$，令

$$F(\zeta, z) = \frac{\sinh(\zeta z)}{\sinh(\zeta)}$$

其中 $F(0, z) = z$。固定 $z \in \mathbb{C}$。映射 $\zeta \mapsto F(\zeta, z)$ 在圆盘 $|\zeta| < \pi$ 内解析，且为偶函数： $F(-\zeta, z) = F(\zeta, z)$。考虑其在原点处的泰勒展开:

$$F(\zeta, z) = \sum_{t \in 2\mathbb{N}} c_t(z) \zeta^t$$

其中 $c_0(z) = z$。对于固定的 $z \in \mathbb{C}$，此泰勒级数在圆盘 $|\zeta| < \pi$的任意紧子集上绝对且一致收敛。我们有 $F(\zeta, 0) = 0$、 $F(\zeta, 1) = 1$, 并且

$$F(\zeta, z) = \frac{\mathrm{e}^{\zeta z} - \mathrm{e}^{-\zeta z}}{\mathrm{e}^{\zeta} - \mathrm{e}^{-\zeta}}.$$

From

$$c_t(z) = \frac{1}{t!} \left(\frac{\partial}{\partial \zeta} \right)^t F(0, z)$$

由此可知， $c_t(z)$ 是一个多项式。根据

$$\left(\frac{\partial}{\partial z} \right)^2 F(\zeta, z) = \zeta^2 F(\zeta, z)$$

我们推得

$$c_t'' = c_{t-2} \quad \text{for} \quad t \in 2\mathbb{N}, \ t \geq 2.$$

由于 $c_t(0) = c_t(1) = 0$ 对于 $t \in 2\mathbb{N}$, $t \geq 2$, 由引理2可推得 $c_t(z) = \Lambda_{t,\ 1}(z)$。

这就完成了（6）的证明，从而完成了对所有 $\zeta \in \mathbb{C}$满足 $|\zeta| < \pi$ 的（□

我们将借助拉普拉斯变换来证明定理 3。拉普拉斯变换是 R.C. Buck 核展开法的一个特例[2]；另请参见 [1, 第 I 章 §3]。设

$$f(z) = \sum_{k\geq 0} \frac{a_k}{k!} z^k$$

是一个指数型为 $\tau(f)$ 的整函数。f 的拉普拉斯变换，即

$$F(\zeta) = \sum_{k\geq 0} a_k \zeta^{-k-1}, \tag{10}$$

在定义域 $\{\zeta \in \mathbb{C} \mid |\zeta| > \tau(f)\}$ 内解析。由柯西留数定理可得，对于 $r > 0$,

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{|\zeta|=r} \mathrm{e}^{\zeta z} \zeta^{-k-1} \mathrm{d}\zeta = \frac{z^k}{k!}. \tag{11}$$

由于右端级数在 (10) 的 $|\zeta| = r$ 上绝对且一致收敛，因此对于 $r > \tau(f)$，有

$$f(z) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{|\zeta|=r} \mathrm{e}^{\zeta z} F(\zeta) \mathrm{d}\zeta$$

and

$$f^{(t)}(z) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{|\zeta|=r} \zeta^t \mathrm{e}^{\zeta z} F(\zeta) \mathrm{d}\zeta.$$

定理 3 的证明。设 f 是一个指数型为$\tau(f$ 的整函数，且满足 $\tau(f) < \pi$。设 r满足 $\tau(f) < r < \pi$。由于级数 (8 在紧集 $\{\zeta \in \mathbb{C} \mid |\zeta| = r\}$上一致收敛，可得

$$f(z) = \sum_{t\in 2\mathbb{N}} \left(\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{|\zeta|=r} \zeta^t F(\zeta) \mathrm{d}\zeta \right) \Lambda_{t,0}(z) + \sum_{t\in 2\mathbb{N}} \left(\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{|\zeta|=r} \zeta^t \mathrm{e}^{\zeta} F(\zeta) \mathrm{d}\zeta \right) \Lambda_{t,1}(z),$$

因此（Poritsky–Whittaker公式（2），适用于指数型整函数 $< \pi$）

$$f(z) = \sum_{t\in 2\mathbb{N}} f^{(t)}(0) \Lambda_{t,0}(z) + \sum_{t\in 2\mathbb{N}} f^{(t)}(1) \Lambda_{t,1}(z),$$

其中两个级数均绝对收敛。

定理 3 的证明至此完成。 □

7. Integral formulae for Lidstone polynomials

利用柯西留数定理，由式（6）可推出以下积分公式 [8,(4.1)]:

命题 1. 对于 $z \in \mathbb{C}$, $t \in 2\mathbb{N}$ 和 $K \geq 0$，有

$$\Lambda_{t,1}(z) = (-1)^{t/2}\frac{2}{\pi^{t+1}}\sum_{k=1}^{K}\frac{(-1)^{k+1}}{k^{t+1}}\sin\bigl(k\pi z\bigr) + \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{|\zeta|=(2K+1)\pi/2}\zeta^{-t-1}\frac{\sinh(\zeta z)}{\sinh(\zeta)}\mathrm{d}\zeta.$$

证明. 设 $z \in \mathbb{C}$。在圆盘 $\{\zeta \in \mathbb{C} \mid |\zeta| \leq (2K+1)\pi/2\}$ 内，函数 $\zeta \mapsto \zeta^{-t-1}$双曲正弦函数~~(ζ)双曲~~正弦函数(ζ) 在 $\zeta = 0$ 处有一个 $t+1$ 级极点，并且仅在满足 $k \in \mathbb{Z}, 0 < |k| \leq K$ 的 $\zeta = k\pi\mathrm{i}$ 处有简单极点。在 0 处的留数为$\Lambda_{t,1}(z)$，而对于 $k \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$，在 $k\pi\mathrm{i}$ 处的留数为

$$(-1)^k\mathrm{i}^{-t}(k\pi)^{-t-1}\sin\bigl(k\pi z\bigr). \tag{12}$$

由于 t 是偶函数，该函数为奇函数，且在 $k\pi\mathrm{i}$ 和在$-k\pi\mathrm{i}$ 处的留数相同。□

特别地，当 $K = 1$ 时，我们有 [8, (4.3)]

$$\Lambda_{t,1}(z) = (-1)^{t/2}\frac{2}{\pi^{t+1}}\sin(\pi z) + \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{|\zeta|=3\pi/2}\zeta^{-t-1}\frac{\sinh(\zeta z)}{\sinh(\zeta)}\mathrm{d}\zeta.$$

由于对于 $|\zeta| = 3\pi/2$, |双曲正弦函数(ζ)| ≥ 1，因此可推出，对于 $t \geq 0$和 $r > 0$,

$$\begin{cases}\left|\Lambda_{t,1}(z) - (-1)^{t/2}\dfrac{2}{\pi^{t+1}}\sin(\pi z)\right| \leq \left(\dfrac{2}{3\pi}\right)^t \mathrm{e}^{3\pi r/2},\\ \left|\Lambda_{t,0}(z) - (-1)^{t/2}\dfrac{2}{\pi^{t+1}}\sin(\pi z)\right| \leq \mathrm{e}^{3\pi/2}\left(\dfrac{2}{3\pi}\right)^t \mathrm{e}^{3\pi r/2}.\end{cases} \tag{13}$$

这些估计使 Whittaker [8, 定理 1] 能够如下求解 Lidstone 插值问题。设 $(a_t)_{t\in 2\mathbb{N}}$ 和 $(b_t)_{t\in 2\mathbb{N}}$ 是两个复数序列。如果级数

$$\sum_{t\in 2\mathbb{N}}(-1)^{t/2}\frac{a_t}{\pi^t} \quad \text{and} \quad \sum_{t\in 2\mathbb{N}}(-1)^{t/2}\frac{b_t}{\pi^t}$$

收敛，那么

$$\sum_{t\in 2\mathbb{N}} a_t \Lambda_{t,0}(z) + \sum_{t\in 2\mathbb{N}} b_t \Lambda_{t,1}(z) \tag{14}$$

在 $\mathbb{C}$ 的任意紧集上一致收敛，其和 $f(z)$ 是满足下述条件的整函数

$$f^{(t)}(0) = a_t \text{ and } f^{(t)}(1) = b_t \text{ for all } t \in 2\mathbb{N}.$$

如果其中一个级数

$$\sum_{t\in 2\mathbb{N}} (-1)^{t/2} \frac{a_t}{\pi^t}, \quad \sum_{t\in 2\mathbb{N}} (-1)^{t/2} \frac{b_t}{\pi^t}$$

不收敛，那么对于任何非整数值的 z，14式都不可能收敛。

（13）的另一个推论是，对于 $t \in 2\mathbb{N}$ 和 $r \geq 0$,

$$|\Lambda_{t,1}|_r \leq 2\pi^{-t} \mathrm{e}^{3\pi r/2} \text{ and } |\Lambda_{t,0}|_r \leq 2\mathrm{e}^{3\pi/2} \pi^{-t} \mathrm{e}^{3\pi r/2}. \tag{15}$$

现在我们证明多项式 $\Lambda_{t,\ 0}$ 的另一个积分公式。

命题 2。对于 $t \in 2\mathbb{N}$ 和 $K \geq 0$，有

$$\Lambda_{t,0}(z) = \frac{z^t}{t!} + (-1)^{t/2} \frac{2}{\pi^{t+1}} \sum_{k=1}^{K} \frac{1}{k^{t+1}} \sin\bigl(k\pi z\bigr) - \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{|\zeta|=(2K+1)\pi/2} \zeta^{-t-1} \sinh(\zeta z) \coth(\zeta) \mathrm{d}\zeta.$$

证明。命题 2 与命题 1 等价，只需将变量 z 换成 $1 - z$即可。我们重复命题 1证明中的相同论证，给出另一种证明。在圆盘 $\{\zeta \in \mathbb{C} \ |\zeta| \leq (2K+1)\pi/2\}$内，函数 $\zeta \mapsto \zeta^{-t-1}$双曲正弦函数$(\zeta z)$ $\coth(\zeta)$ 仅在 $k\pi\mathbf{i}$ 处有简单极点，其中 $k \in \mathbb{Z}$，$|k| \leq K$。由（7）可得，$\zeta = 0$ 处的留数为

$$\frac{z^t}{t!} - \Lambda_{t,0}(z),$$

而对于 $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$，$k\pi\mathbf{i}$ 处的留数为

$$\mathrm{i}^{-t} (k\pi)^{-t-1} \sin\bigl(k\pi z\bigr). \tag{16}$$

由于 t是偶函数，我们要积分的函数是奇函数，因此在$k\pi\mathbf{i}$ 和 $-k\pi\mathbf{i}$ 处的留数相同。□

8. Functions of finite exponential type

我们沿用 [2]。令 $K \geq 1$。函数 $\zeta \mapsto$ 双曲正弦函数~~(ζz)~~ 双曲正弦函数(ζ) 是偶函数，且只有简单极点，位于 $k\pi\mathrm{i}$ 处，其中 $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$，其留数由 (12) 给出，其中 $t = -1$，即 $(-1)^k \mathrm{i} \sin(k\pi z)$。在 k和 $-k$ 处的留数之和为 0，因此有[1]

$$\frac{(-1)^k \mathrm{i} \sin(k\pi z)}{\zeta - k\pi\mathrm{i}} - \frac{(-1)^k \mathrm{i} \sin(k\pi z)}{\zeta + k\pi\mathrm{i}} = 2\pi(-1)^{k+1} \frac{k \sin(k\pi z)}{\zeta^2 + k^2\pi^2}.$$

因此，由下式定义的函数 $G_K(\zeta, z)$

$$\frac{\sinh(\zeta z)}{\sinh(\zeta)} = 2\pi \sum_{k=1}^{K} \frac{(-1)^{k+1} k \sin(k\pi z)}{\zeta^2 + k^2\pi^2} + G_K(\zeta, z) \tag{17}$$

在定义域 $\left\{(\zeta, z) \in \mathbb{C}^2 \mid |\zeta| < (K+1)\pi\right\}$ 内解析。注意，对于 $|\zeta| < k\pi$ 和 $k \geq 1$，我们有

$$\frac{1}{\zeta^2 + k^2\pi^2} = \sum_{t \in 2\mathbb{N}} \frac{(\mathrm{i}\zeta)^t}{(k\pi)^{t+2}}.$$

函数 $z \mapsto G_K(\zeta, z)$ 是奇函数。由于函数 $\zeta \mapsto G_K(\zeta, z)$ 是偶函数，它在原点处的泰勒展开可写为

$$G_K(\zeta, z) = \sum_{t \in 2\mathbb{N}} g_t(z) \zeta^t$$

其中，函数 $g_t(z)$ 是奇整函数。对于任意紧子集上的 ζ，此泰勒级数在圆盘 $\{\zeta \in \mathbb{C} \mid |\zeta| < (K+1)\pi\}$ 内绝对且一致收敛。泰勒系数 $g_t(z)$ 是$\Lambda_{t,\ 1}(z)$ 与一个指数型为$\leq K\pi$的有限三角和之和，即

$$g_t(z) = \Lambda_{t,1}(z) + 2(-1)^{t/2} \sum_{k=1}^{K} (-1)^k (k\pi)^{-t-1} \sin(k\pi z).$$

利用（9），我们可推出，对于 $|\zeta| < (K+1)\pi$,

$$\mathrm{e}^{\zeta z} = \sum_{t \in 2\mathbb{N}} g_t(1-z)\zeta^t + \mathrm{e}^{\zeta} \sum_{t \in 2\mathbb{N}} g_t(z)\zeta^t + 2\pi \sum_{k=1}^{K} \frac{k \sin(k\pi z)}{\zeta^2 + k^2\pi^2} \left(1 + (-1)^{k+1} \mathrm{e}^{\zeta}\right). \tag{18}$$

[1]缺少一个因子 2，见 [2, 第795]和 [1, 第一章 §第15]。16

命题3（R.C. Buck，1955年）。设 K 是一个正整数。设 f 是一个有限指数型为 $\tau(f) < (K+1)\pi$ 的整函数，并设 $F(\zeta)$ 是 f 的拉普拉斯变换。那么对于 $z \in \mathbb{C}$，我们有

$$f(z) = \sum_{t\in 2\mathbb{N}} f^{(t)}(0) g_t(1-z) + \sum_{t\in 2\mathbb{N}} f^{(t)}(1) g_t(z) + \sum_{k=1}^{K} C_k \sin(k\pi z),$$

其中级数绝对收敛，且

$$C_k = -k\mathrm{i} \int_{|\zeta|=r} \frac{1+(-1)^{k+1}\mathrm{e}^{\zeta}}{\zeta^2+k^2\pi^2} F(\zeta)\mathrm{d}\zeta \quad (1 \le k \le K) \tag{19}$$

对于范围 $\tau(f) < r < (K+1)\pi$ 内的任意 r。

证明。令 r 满足 $\tau(f) < r < (K+1)\pi$。由右侧级数在 $|\zeta| = r$ 上绝对且一致收敛可知（18），我们得到

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_{|\zeta|=r} \mathrm{e}^{\zeta z} F(\zeta)\mathrm{d}\zeta \\ &= \sum_{t\in 2\mathbb{N}} g_t(1-z) \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_{|\zeta|=r} \zeta^t F(\zeta)\mathrm{d}\zeta + \sum_{t\in 2\mathbb{N}} g_t(z) \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_{|\zeta|=r} \zeta^t \mathrm{e}^{\zeta} F(\zeta)\mathrm{d}\zeta \\ &\qquad + \sum_{k=1}^{K} C_k \sin(k\pi z), \end{aligned}$$

with

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_{|\zeta|=r} \zeta^t F(\zeta)\mathrm{d}\zeta = f^{(t)}(0) \quad \text{and} \quad \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_{|\zeta|=r} \zeta^t \mathrm{e}^{\zeta} F(\zeta)\mathrm{d}\zeta = f^{(t)}(1).$$

□

例子。$f(z) = \sin(\pi z)$ 的拉普拉斯变换为 $F(\zeta) = \frac{\pi}{\zeta^2+\pi^2}$，且对于 $\pi < r < 2\pi$，我们有

$$\int_{|\zeta|=r} \frac{1+\mathrm{e}^{\zeta}}{(\zeta^2+\pi^2)^2}\mathrm{d}\zeta = \frac{\mathrm{i}}{\pi},$$

因此，对于此函数 f，我们有

$$C_1 = -\mathrm{i} \int_{|\zeta|=r} \frac{1+\mathrm{e}^{\zeta}}{\zeta^2+\pi^2} F(\zeta)\mathrm{d}\zeta = -\mathrm{i}\pi \int_{|\zeta|=r} \frac{1+\mathrm{e}^{\zeta}}{(\zeta^2+\pi^2)^2}\mathrm{d}\zeta = 1,$$

正如预期。

在 [6]和 [7], 中，我们需要使用（17）的以下变体。函数 $H_K(\zeta, z)$ 定义为

$$\sinh(\zeta z)\coth(\zeta) = -2\pi \sum_{k=1}^{K} \frac{k\sin(k\pi z)}{\zeta^2 + k^2\pi^2} + H_K(\zeta, z), \qquad (20)$$

在定义域中解析 $\{(\zeta, z) \in \mathbb{C}^2 \mid |\zeta| < (K+1)\pi\}$。映射$\zeta \mapsto H_K(\zeta, z)$ 为偶映射，而映射 $z \mapsto H_K(\zeta, z)$ 为奇映射。将 z替换为 $1 - z$ 于（17）中可得

$$H_K(\zeta, z) = \cosh(\zeta z) - G_K(\zeta, 1 - z).$$

推论 2（I.J. Schoenberg，1936）。设 f 是一个有限指数型 $\tau(f)$ 的整函数，满足 $f^{(t)}(0) = f^{(t)}(1) = 0$ 对所有 $t \in 2\mathbb{N}$ 均成立。则

$$f(z) = \sum_{k=1}^{K} C_k \sin(k\pi z).$$

其中 $K \le \tau(f)/\pi$，且常数 $C_1, \ldots, C_K$由下式给出 (19)。

一个附带结果是，满足推论 2 的假设的函数 f的指数型 $\tau(f)$ 是 π的整数倍。

References

[1] Ralph Philip Boas, Jr. 和 Robert Creighton Buck，《解析函数的多项式展开》，数学及其边界领域成果，新系列第 19 卷，Academic Press，纽约，1964 年。MR Zbl[2] Robert Creighton Buck，《整函数的 n点展开》。美国数学学会会刊 6（1955年），793–796。MR Zbl[3] George James Lidstone，《关于将艾特肯定理（多项式插值）推广至埃弗里特型的注记》。爱丁堡数学学会会刊，第二辑（2）2，16–19（1930年）。JFM[4] Hillel Poritsky，《关于解析函数的某些多项式及其他逼近》。美国数学学会汇刊 34:2（1932），274–331。MR Zbl[5] Isaac Jacob Schoenberg，《关于有限指数型整函数的某些两点展开》。美国数学学会通报 42（1936），284–288。MR Zbl[6] Michel Waldschmidt，《利德斯通插值 II：两个变量》。已提交。

[7] Michel Waldschmidt. 利德斯通插值 III：多个变量。已投稿。[8] John Macnaghten Whittaker, “论 Lidstone 级数与解析函数的两点展开”

伦敦数学会会刊 (2) **36** (1934), 451–469. MRZbl