arXiv:2303.04515v1 [physics.geo-ph] 8 Mar 2023

各向异性孔弹性的多孔隙扩展：与微观力学的联系

Filip P. Adamus[1, 2], David Healy[1], Philip G. Meredith[2], 和 Thomas M. Mitchell[2]

[1]地球科学学院，阿伯丁大学，阿伯丁，英国[2]地球科学系，伦敦大学学院，伦敦，英国，

adamusfp@gmail.com *d.healy@abdn.ac.uk* *p.meredith@ucl.ac.uk* *tom.mitchell@ucl.ac.uk*

摘要

我们试图将孔隙弹性理论与微观力学有效介质理论之间的关系形式化。这两种方法的假设各不相同，但通过考察材料的不排水响应，二者可以建立联系；这也是本文的主要关注点。为分析孔隙弹性与微观力学之间的联系，我们并不局限于 Biot 的原始理论。相反，我们考察各向异性孔隙弹性的多孔隙扩展，其中孔隙流体压力可在所研究的主体介质内部发生变化。因此，材料中的任何非均质体不一定彼此连通；相反，它们可能形成由不同孔弹性参数和流体压力描述的孤立孔隙组。我们尝试将有效方法纳入 Biot 类理论中，并研究各种微观结构的孔弹性响应。我们展示了这种实现有效的情形，以及其他似乎存在疑问的情形。在微观力学分析中，我们推导出圆柱横观各向同性的一种特例——这种情况通常被假定用于常规实验室三轴试验——其中的对称性由定向排列裂缝的集合诱导产生。

关键词： 各向异性、微观力学、多重渗透率、多重孔隙度、孔隙弹性。

1 引言

孔隙弹性理论描述固体多孔骨架（或基质）的变形与孔隙或裂缝中流体压力或含量变化之间的耦合作用。Biot 在一系列关于多孔材料固结的论文中推导出了基本方程（Biot, 1941, 1956, 1962），不过“孔隙弹性”这一名称最早由 Geertsma（1957）使用。其正式

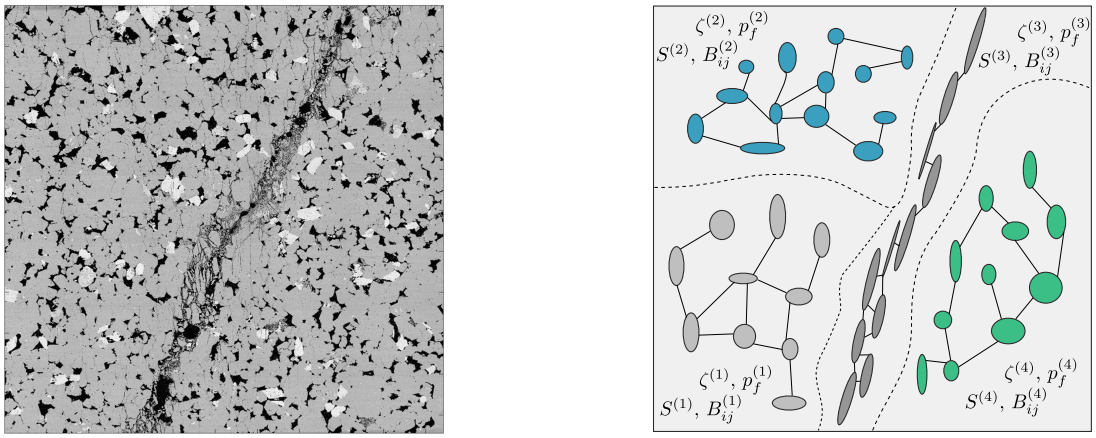
定义依赖于统计均匀连续介质这一假设（即遍历假设）：具体而言，固相是由基质构成的单一连通相，而孔隙空间是容纳流体的单一连通空间。

孔隙弹性之所以重要，是因为大多数岩石，尤其是地球上地壳中可触及的部分，在其生命周期的大部分时间里都处于孔弹性状态：也就是说，岩石被流体饱和并承受应力，会响应自然或人为作用力而收缩和膨胀。随着我们迈入能源转型时代以应对气候紧急状况，我们必须透彻了解孔隙弹性的作用机制，涵盖从颗粒、孔隙和裂缝到整个储层和断层带的不同尺度。这种理解将有助于我们以安全且经济高效的方式，在地下封存二氧化碳、开发地热能并储存氢。

各向同性孔弹性描述的是单一连通孔隙空间不存在优先取向的情况。这一理论已被证明适用于描述多孔颗粒岩（如砂岩）对载荷或流体压力变化的变形响应（例如，Hart and Wang, 1995）。然而，如果孔隙空间由定向排列裂缝构成——这在裂隙岩石中十分常见，尤其是在构造断层带周围，以及承受差异载荷而非静水载荷时——那么各向同性假设就不适用，此时需要采用描述各向异性行为的方程（Cocco and Rice, 2002；Lockner and Stanchits, 2002）。尽管描述各向异性孔隙弹性的理论基础已经相当成熟，但在实验室尺度上的详细实验验证仍相对少见，而且各向同性假设常被误用（例如，Beeler et al., 2000）。

另一个问题涉及孔隙空间中流体运动的时间和长度尺度，以及是否适合（或有必要）将孔隙空间视为单一连通域，并假定孔隙流体压力处处恒定。以图1a所示为例：一种颗粒胶结砂岩在实验室中变形直至发生脆性破坏。孔隙空间（以黑色显示）可分为（至少）两个不同的域：狭窄且优先定向排列的裂缝，以及形状较为等轴（但不规则）的孔隙。关键问题是：这些孔隙空间域（孔隙度簇）之间的连通程度如何？若彼此连通，流体在其间流动的时间尺度又是多少？一种方法是考虑两种端元情形：第一，孔隙和裂缝完全连通，且孔隙流体压力处处相同（Biot, 1941）；第二，它们完全不连通，孔隙流体压力在颗粒、孔隙和裂缝的尺度上发生变化（Kachanov, 1980）。然而，还有一些情景介于这两种端元情形之间。例如，如图1b所示，介质可由彼此孤立或弱连通的不同孔隙度簇（孔隙组）构成。在这种情况下，每个孔隙组内部的流体压力恒定，但在整个材料中，不同孔隙组之间的流体压力可能有所不同。这种

观点凸显了孔隙弹性的多孔隙（或多重孔隙度）推广形式；例如，Berryman（2002）、Mehrabian 和 Abousleiman（2014）以及 Mehrabian（2018）曾针对各向同性和静水围压提出这一推广。由于定向排列裂缝可能显著影响流体压力变化，因此需要采用涉及差应力（而非静水压力）的各向异性表达式。本文探讨各向异性孔隙弹性多孔隙扩展的基本表达式，用以描述包含不同孔隙组和裂缝组的介质的变形，其中每组具有不同的流体压力。此类表达式的推导和讨论详见我们的另一篇同期论文，该论文专门论述“扩展孔隙弹性”（Adamus等人，2023）。



(a) **(b)**

图 1： **(a)** 实验室破坏试验中一块发生断层的霍普曼砂岩试样的扫描电镜背散射图像（Rizzo 等，2018年）。视野宽度约为 20 mm。黑色区域为孔隙空间，浅灰色为长石，中灰色为石英。孔隙空间可分为两类：薄裂缝，在该图像中大多平行于垂直轴分布，并集中在贯穿性断层面周围；以及大小近似等轴的孔隙，分布在断层周围区域。**(b)** 扩展孔隙弹性的示意图。每个孔隙集合均由不同的流体含量变化、孔隙压力、储集系数和斯凯普顿型系数描述。不同颜色分别对应固体基质和孤立集合。

此外，过去一种常见做法是依赖有效弹性（有效介质理论，EMT）的近似，将其作为直接建模方法，或用于解读实验室实验结果（例如，Wong，2017）。EMT采用微观结构方法来描述孔隙和裂缝及其对整体材料性质的影响。然而，孔隙弹性（严格意义上；Biot）与有效弹性之间的正式关系仍不清楚。正如 Gu´eguen 和 Sarout（2009）所指出的，原始孔隙弹性的整体方法（连通孔隙度）与微观力学的个体方法（许多孤立孔隙）之间存在本质区别。从扩展比奥理论的角度来看，这分别对应于集合影响描述和孔隙影响描述。换言之，一个静态整体介质（宏观尺度）中，不同集合（介观尺度）包含各自的孔隙（微观尺度），既可以从孔隙组尺度考察，也可以从孔隙尺度考察。由此产生的问题是，EMT 是否（以及若是，在何种情况下）可以与孔隙弹性表达式结合。在许多

孤立孔隙（例如裂纹）的情况下，Shafiro and Kachanov（1997年）将孔隙流体压力的“极化”定义为有效介质方法中出现的一种现象，即每个孔隙中的压力各不相同：根据 Biot理论，这种情况在形式上不能视为孔隙弹性。因此，本文从微观力学的角度分析孔隙弹性扩展，从而衔接 Biot（1941年）原始的基于连续介质的分析，与 Kachanov 和 Sevostianov（2018年）的微观结构、孤立孔隙及裂纹模型。与 Dormieux等人（2006年）不同，我们假设均匀应力边界条件，并采用额外柔度是干孔隙影响与流体相影响叠加这一概念（Shafiro and Kachanov，1997年）。我们考察了多种微观结构，在这些结构中，有效介质方法在孔隙弹性扩展框架下严格或近似成立。

最后但同样重要的是，在扩展孔隙弹性的微观力学分析中，我们考察一种特殊的有效横向各向同性（TI）情形。具体而言，我们关注嵌入固体基质中的 TI 定向排列硬币形裂纹所诱发的对称性（Sayers 和 Kachanov，1995年）。在实验室实验中，上述有效情形通常称为圆柱横观各向同性（CTI）。自然地，TI 定向裂纹可视为垂直（轴向）裂纹，从水平（径向）平面观察时呈随机分布。不过，我们表明，TI 定向裂纹也可类比为垂直（轴向）定向排列的裂纹；这些裂纹形成若干集合（彼此连通或孤立），并围绕垂直对称轴均匀分布。这种新颖的表述方式使我们能够描述每个集合的几何形态，并可在 CTI 框架下实现扩展孔隙弹性（不同压力）的应用。

下面介绍一些本文中反复使用的概念。我们将能够允许流体流动的连通非均质体定义为孔隙集合或集合。我们还将构成孔隙集合一部分或与集合相同的连通非均质体定义为孔隙子集。此外，孔隙组指多个不一定彼此连通的非均质体。最后，“相同孔隙”指几何形状相同的非均质体，也就是说，它们具有相同的形状、取向和尺寸。由于本文使用的符号数量众多，完整列表见附录A。

2 微观力学视角下的扩展孔隙弹性 S

考虑一种含有连通孔隙的介质，其中流体可以流动。假设某些相互连通的非均质体可以与其他非均质体隔离，形成不同的孔隙组（p）。为描述这种孔弹性介质的变形，我们分别提出描述整个多孔材料应变的方程（ε_{ij}）以及描述每组孔隙中流体含量变化的方程（$\zeta^{(p)}$）。考虑到 n 不同

集合的影响，我
们得到

$$\varepsilon_{ij} = \sum_{k=1}^{3}\sum_{\ell=1}^{3} S_{ijk\ell}\sigma_{k\ell} + \frac{1}{3}\sum_{p=1}^{n} S^{(p)} B_{ij}^{(p)} p_f^{(p)} , \tag{1}$$

$$\zeta^{(p)} = \frac{1}{3} S^{(p)} \sum_{k=1}^{3}\sum_{\ell=1}^{3} B_{k\ell}^{(p)}\sigma_{k\ell} + S^{(p)} p_f^{(p)} , \tag{2}$$

其中， $S_{ijk\ell}$ 表示多孔骨架的柔度， $\sigma_{k\ell}$ 表示施加于介质上的远场均匀应力。特定孔隙组由 $S^{(p)}$、 $B_{ij}^{(p)}$ 和 $p_f^{(p)}$ 描述，分别表示储存系数、类似斯凯普顿的二阶张量和孔隙压力。全文中， $i,\ j \in \{1, 2, 3\}$。按照 Biot (1941) 的惯例，压力与应力的符号相反。

下面讨论上述表达式。这些表达式旨在描述具有任意微观结构（形状、取向和尺寸）的各种 n 孔隙组。如前所述，同一孔隙组内的孔隙彼此连通；但不同孔隙组则视为彼此孤立。因此，流体无法在这些定义的孔隙组之间流动。每种孔隙度都必须单独考虑，因为它会产生特定的流体含量变化 $\zeta^{(p)}$；将其求和即可得到总体积内的总流体含量变化$\zeta_{tot} = \sum_{p=1}^{n} \zeta^{(p)}$。由于各孔隙组彼此孤立，流体压力也不一定恒定。如果各孔隙组的微观结构不同，压力就可能发生变化，这与压力极化效应类似（Shafiro and Kachanov, 1997）。压力变化反过来会影响储存系数和类斯凯普顿系数，因此需要分别计算各孔隙组的这些系数。这是由前述参数的定义所决定的，其中它们与流体压力之间的严格关系显而易见（Cheng, 1997）。与流体含量变化类似，储存系数也可以求和，以得到总体积的总储存系数$S_{tot} = \sum_{p=1}^{n} S^{(p)}$。另一方面，在孔隙组压力或类斯凯普顿张量的语境下，这种求和并无意义。应将它们视为各孔隙组的孔隙弹性特征，仅此而已。以层状介质为例，对孔洞的体积分数或各组分的厚度求和是有意义的，但将各层的弹性张量或密度相加则毫无意义。附录B进一步解释了上述孔隙压力、储存系数和类斯凯普顿系数的性质。正如预期的那样，对于单一孔隙组（$n = 1$），表达式（1）–（2）可简化为原始比奥理论；该理论适用于流体压力恒定、只有一种流体含量变化、一个储存系数和一个斯凯普顿张量的情况（Biot, 1941, 1962; Cheng, 1997）。

从与（扩展）孔隙弹性的微观力学联系这一角度来看，表达式 (1) 至关重要，需要进一步分析。在微观力学中，不考虑流体流动，只给出与 (1) 类似的应变-应力关系。换言之，非均质体被视为干燥或饱和。因此，在两种理论的联系这一背景下，表达式 (2) 似乎

是多余的。然而，正如我们即将进一步说明的，表达式 (2) 的一种特定的不排水（$\zeta^{(p)} = 0$）版本是比较这两种理论所必需的。除孔隙弹性的排水（干燥）或不排水极限情形外，其他情景在微观力学中都没有对应情形。因此，鉴于这对孔隙弹性与微观力学的直接联系并无额外价值，本文不讨论中间状态或时间依赖性。请注意，各向异性孔隙弹性的时间依赖性多孔隙扩展将在我们的姊妹论文中讨论（Adamus 等，2023）。

请注意，与 Mehrabian（2018）等人的推导不同，式（1）–（2）允许材料具有各向异性，且不假设存在围压。在处理非随机孔隙或定向排列裂缝时，各向异性推广至关重要；这些都是常见的地质情景，并可能进而导致孔隙压力变化。此外，表达式（1）也适用于可能出现的情景：孔隙组并非严格隔离，而是彼此之间存在一定的弱连接。不过，这些连接被认为足够弱，因此各组中的压力可以发生变化（例如气藏中的双重孔隙）。为考虑孔隙组之间的连接以及最终导致孔隙压力平衡的时间因素，表达式（2）中应加入额外的耦合项（Adamus 等，2023）。然而，正如研究各向同性孔隙弹性推广的研究人员所指出的（Berryman，2002；Mehrabian 和 Abousleiman，2014；Mehrabian，2018），这些耦合项非常小，因此可以忽略。（此外，连接部分的低渗透率意味着压力平衡所需时间极长。）引入耦合项会使微观力学分析变得不必要地复杂，因此本文不予采用。尽管如此，对于上述弱连接的孔隙组，我们的推导仍可视为近似有效。

我们来考虑两种可简化表达式 (1)–(2) 并帮助我们理解其中所包含物理机制的极限情形。在理想的孔隙组排水条件下，对于每个孔隙组 $p_f^{(p)} = 0$，表达式 (1) 可简化为

$$\varepsilon_{ij} = \sum_{k=1}^{3}\sum_{\ell=1}^{3} S_{ijk\ell}\sigma_{k\ell}\,. \tag{3}$$

因此，上述柔度张量具有如下物理意义：它描述的是含有可排水孔隙组的有效介质的弹性性质。此外，这种介质还可能含有一些封闭空间，其中可以是干燥的，也可以充满流体。因此，$S_{ijk\ell}$ 表示孔隙组排水介质的柔量，但该介质不一定是干燥的。换言之，表达式 (1)–(2) 中的孔隙压力 $p_f^{(p)}$ 对应的仅是能够排水的孔隙。封闭孔隙中的压力已隐含地计入表达式 (3) 的应力张量中。

In t在不排水条件下，对于每个孔隙组， $\zeta^{(p)}=0$，表达式 (2) 化简为 o

$$p_f^{(p)} = -\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{3}\sum_{\ell=1}^{3} B_{k\ell}^{(p)}\sigma_{k\ell}\,. \tag{4}$$

将其代入表达式（1），即可得到不排水有效介质的柔量，

$$\varepsilon_{ij} = \sum_{k=1}^{3}\sum_{\ell=1}^{3}\left(S_{ijk\ell} - \frac{1}{9}\sum_{p=1}^{n} S^{(p)}B_{ij}^{(p)}B_{k\ell}^{(p)}\right)\sigma_{k\ell} = \sum_{k=1}^{3}\sum_{\ell=1}^{3} S_{ijk\ell}^{u}\sigma_{k\ell}\,. \tag{5}$$

因此， $S_{ijk\ell}^{u}$表示不排水柔量。孔隙组中所含流体的效应对应于

$$\Delta_{ijk\ell} := \sum_{p=1}^{n}\Delta_{ijk\ell}^{(p)} = -\frac{1}{9}\sum_{p=1}^{n} S^{(p)}B_{ij}^{(p)}B_{k\ell}^{(p)}\,. \tag{6}$$

图2展示了张量 $\Delta^{(p)}$ 对组排水多孔介质的影响。图中举例说明了本理论扩展所适用的可能微观结构。从现在起，“流体效应”根据上下文指张量 Δ 或 $\Delta^{(p)}$。在后续章节中，我们将把端元应变-应力关系式（3）和（5）与其微观力学应变-应力对应关系进行比较。

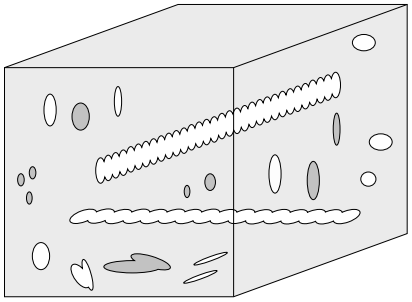
2.1 微观力学分析：未指定微观结构

我们来进行微观力学分析，以进一步深入理解表达式（1）–（2）。我们希望将孔弹性（储集系数和斯凯普顿类）系数转换为柔量。对表达式（1）–（2）进行微观力学描述，有助于实验室测量结果的可重复性研究。首先，我们考虑嵌入固体基质中的单个饱和孔隙——有效介质理论（EMT）将其视为代表性体积单元（REV）——且该单元尺寸远大于孔隙尺寸。其次，我们分析嵌入同一代表性体积单元中的相同孔隙集合。最后，我们讨论孔隙组中形状和取向各异的孔隙这一更一般的情形。本节不指定微观结构，只说明孔隙是否相同。

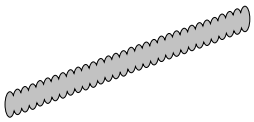
2.1.1 单个不排水孔隙

我们所指的是 Shafiro and Kachanov（1997年）或 Kachanov 和 Sevostianov（2018年）提出的有效方法，该方法专为不排水非均质体设计。对于单个不排水孔隙，上述微观力学研究人员提出

$$\varepsilon_{ij} = \sum_{k=1}^{3}\sum_{\ell=1}^{3}\left[S_{ijk\ell}^{0} + \phi\left(H_{ijk\ell} + \Delta H_{ijk\ell}\right)\right]\sigma_{k\ell}\,, \tag{7}$$



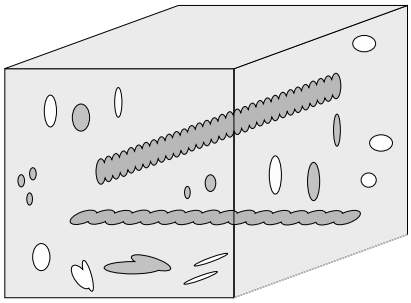
(a) 定排水介质 ($p_f^{(1)} = p_f^{(2)} = 0$)



(b) 第一组 ($\Delta^{(1)}$, 其中 $\zeta^{(1)} = 0$)



(c) 第二组 ($\Delta^{(2)}$, 其中 $\zeta^{(2)} = 0$)



(d) 不排水介质 ($\zeta^{(1)} = \zeta^{(2)} = 0$)

图2： 理论考量示意图。浅灰色表示固体，深灰色表示流体，白色表示空隙。为考虑流体对柔量的影响，我们在定排水骨架**(a)**中加入两组不排水孔隙**(b)** 和**(c)** 。这样，骨架的柔量 $S_{ijk\ell}$ 会因加入张量 $\Delta^{(1)}$ 和 $\Delta^{(2)}$而改变。因此，得到不排水柔量 $S^u_{ijk\ell}$**(d)**。在示意图中，骨架包含干燥和饱和的封闭空间。此外，每组中的孔隙几何形状相同，且彼此略有重叠。

$$p_f = \sum_{k=1}^{3}\sum_{\ell=1}^{3} Q_{k\ell}\sigma_{k\ell}\,, \tag{8}$$

其中， $S^0_{ijk\ell}$ 为固相的柔量， $H_{ijk\ell}$ 为干孔隙引起的额外柔量，$\Delta H_{ijk\ell}$ 为孔隙中的流体引起的额外柔量， ϕ 为孔隙所占的体积分数， Q_{ij} 表示流体极化张量的分量。在这种情况下， ϕ自然也等于所有孔隙所占的总体积分数 ϕ_{tot}。分量 $\Delta H_{ijk\ell}$——我们将其宽泛地称为“饱和柔量”——用干燥超额柔度和流体极化张量表示，即

$$\Delta H_{ijk\ell} = \sum_{m=1}^{3} H_{ijmm} Q_{k\ell}\,, \tag{9}$$

其中

$$Q_{ij} = -\frac{K_d}{1+\delta}\sum_{m=1}^{3} H_{ijmm}\,, \tag{10}$$

and

$$K_d = \left(\sum_{m=1}^{3}\sum_{n=1}^{3} H_{mmnn}\right)^{-1} \tag{11}$$

表示干孔隙的体积模量。 δ 是 O’Connell 和 Budiansky（1974）引入、并由 Shafiro and Kachanov（1997年）推广的因子，即

$$\delta = \frac{\frac{1}{K_f} - \frac{1}{K_0}}{\frac{1}{K_d}} \tag{12}$$

其中， K_f 为流体的体积模量， K_0 为固相的体积模量。将表达式（10）—（12）代入（9）后，得到

$$\Delta H_{ijk\ell} = -\left(\frac{1}{K_d} + \frac{1}{K_f} - \frac{1}{K_0}\right) Q_{ij} Q_{k\ell}\,. \tag{13}$$

对于干孔隙的情况，分量 $\Delta H_{ijk\ell}$ 均为零。

2.1.2 具有相同孔隙的不排水集合

现在考虑嵌入固体基质中的一组 m_1 不排水孔隙（彼此连通或相互隔离）。假设孔隙之间的相互作用可以忽略不计，利用表达式 (7) 可得

$$\varepsilon_{ij} = \sum_{k=1}^{3}\sum_{\ell=1}^{3}\left[S^0_{ijk\ell} + \sum_{c=1}^{m_1}\phi_c\left(H_{ijk\ell_c} + \Delta H_{ijk\ell_c}\right)\right]\sigma_{k\ell}\,, \tag{14}$$

其中引入下标 c 以区分组中的各个孔隙。若孔隙完全相同，则每个孔隙的体积分数和超额柔度也相同。在这种情况下，不再需要下标 c ，式 (14) 可简化为

$$\varepsilon_{ij} = \sum_{k=1}^{3}\sum_{\ell=1}^{3}\left[S^0_{ijk\ell} + m_1\phi\left(H_{ijk\ell} + \Delta H_{ijk\ell}\right)\right]\sigma_{k\ell}\,, \tag{15}$$

其中孔隙的总体积分数为 $\phi_{\mathrm{tot}} = m_1\phi$。因此，无论是将每个相同的孔隙分别处理，还是将整个组视为单个非均质体，都无关紧要；由于 $\sum_{c=1}^{m_1}\phi_c = m_1\phi_c = m_1\phi$ 和 $H_{ijk\ell_c} = H_{ijk\ell} \implies \Delta H_{ijk\ell_c} = \Delta H_{ijk\ell}$，这两种方法是等效的。下文将反复提及这种特殊的等效情况。请注意，式（15）本质上与式（7）相同，只是 ϕ_{tot} 的取值不同。

在 Kachanov 和 Sevostianov（2018）讨论的采用非相互作用近似的有效方法中，介质的力学响应不受孔隙之间可能存在的连通关系影响。组中的每个非均质体都单独处理，并以一种无法区分连通孔隙与孤立孔隙的方式进行描述。这是因为 Kachanov 和 Sevostianov（2018）不考虑流体含量变化；非均质体被视为不排水。然而，在孔隙弹性理论中，流体含量可以变化，因此有必要明确区分孔隙中流体被困住还是可以流动的情况。

关于上面的段落，我们将孤立孔隙的柔量与考虑流体含量发生变化的孔隙的柔量区分开来。因此，我们将非均质体划分为包含孤立孔隙的组（m_0）和包含连通孔隙的集合（$m = m_1 - m_0$），从而得到

$$\varepsilon_{ij} = \sum_{k=1}^{3}\sum_{\ell=1}^{3}\left(S_{ijk\ell} + m\phi\Delta H_{ijk\ell}\right)\sigma_{k\ell}\,, \tag{16}$$

其中

$$S_{ijk\ell} = S^0_{ijk\ell} + m_0\phi\left(H_{ijk\ell} + \Delta H_{ijk\ell}\right) + m\phi H_{ijk\ell}\,. \tag{17}$$

若所有孔隙均相互孤立，则 $m = 0$，由此得到表达式（3）。若所有孔隙均相互连通，则 $m = m_1$。注意，$m\phi$ 对应于单个互连孔隙组所占的体积分数，$\phi^{(p)}$。类似地，$H_{ijk\ell} = H^{(p)}_{ijk\ell}$ 意味着 $\Delta H_{ijk\ell} = \Delta H^{(p)}_{ijk\ell}$、$Q_{ij} = Q^{(p)}_{ij}$ 和 $K_d = K^{(p)}_d$。将（13）代入（16），可得含有干燥或饱和封闭孔隙以及一组相同孔隙的互连孔隙的介质中的应变，即

$$\varepsilon_{ij} = \sum_{k=1}^{3}\sum_{\ell=1}^{3}\left[S_{ijk\ell} - \phi^{(p)}\left(\frac{1}{K^{(p)}_d} + \frac{1}{K_f} - \frac{1}{K_0}\right)Q^{(p)}_{ij}Q^{(p)}_{k\ell}\right]\sigma_{k\ell}\,. \tag{18}$$

Term

$$\phi^{(p)}\left(\frac{1}{K_d^{(p)}}+\frac{1}{K_f}-\frac{1}{K_0}\right)=:S^{(p)} \tag{19}$$

是储存系数的定义（Cheng，1997年）。此外，比较 $n=1$对应的表达式（4）和（8）可知，流体极化张量与类斯凯普顿张量相关，

$$Q_{ij}^{(p)}=-\frac{1}{3}B_{ij}^{(p)}\,, \tag{20}$$

其中

$$B_{ij}^{(p)}:=\frac{3\phi^{(p)}}{S^{(p)}}\sum_{m=1}^{3}H_{ijmm}^{(p)}\,. \tag{21}$$

因此，如果 $n=1$，表达式（18）等价于（5）。换言之，由一组相同孔隙引起的流体效应，

$$\Delta_{ijk\ell}^{(p)}\equiv\phi^{(p)}\Delta H_{ijk\ell}^{(p)}=\sum_{c=1}^{m}\phi_c\Delta H_{ijk\ell_c}\,, \tag{22}$$

可以用孔弹性常数（6）或弹性常数（22）来表示。（22）以及定义（19）和（21）对于 $n>1$ 集合也同样有效。分别考虑每个集合的干燥和饱和超额柔度，可得

$$\varepsilon_{ij}=\sum_{k=1}^{3}\sum_{\ell=1}^{3}\left(S_{ijk\ell}+\sum_{p=1}^{n}\phi^{(p)}\Delta H_{ijk\ell}^{(p)}\right)\sigma_{k\ell}=\sum_{k=1}^{3}\sum_{\ell=1}^{3}\left(S_{ijk\ell}+\sum_{p=1}^{n}\Delta_{ijk\ell}^{(p)}\right)\sigma_{k\ell}\,, \tag{23}$$

其中

$$S_{ijk\ell}=S_{ijk\ell}^{0}+\sum_{c=1}^{n_0}\phi^{(c)}\left(H_{ijk\ell}^{(c)}+\Delta H_{ijk\ell}^{(c)}\right)+\sum_{p=1}^{n}\phi^{(p)}H_{ijk\ell}^{(p)}\,. \tag{24}$$

上述表达式是表达式（16）–（17）的多组推广，其中相同微观结构的孤立孔隙用上标（c）表示。在此，我们允许 $H_{ijk\ell}^{(c)}\neq H_{ijk\ell}^{(p)}$、 $\Delta H_{ijk\ell}^{(c)}\neq\Delta H_{ijk\ell}^{(p)}$和 $n_0\neq n$。注意，表达式（23）–（24）对应于图2所示的情形（其中 $n_0\neq0$和 $n=2$）。

2.1.3 具有非相同孔隙的不排水集合

对几何形状各异的连通孔隙进行微观力学分析并非易事，即使再次假设各非均质体之间不存在相互作用。我们提出两种可能的微观力学描述，如图3所示。一种方法是在微观尺度上分别考虑每个孔隙，并将饱和柔度相加（图3a）；这是 Shafiro and Kachanov（1997年）提出的原始方法。我们称之为孔隙影响方法。另一种设想是将连通孔隙视为一个

大型非均质体（介观尺度），并且每个集合只计算一次饱和柔度（图3b）。我们称之为集合影响方法。正如上一节所示，如果一个集合中的孔隙彼此相同，那么这两种方法等效，即

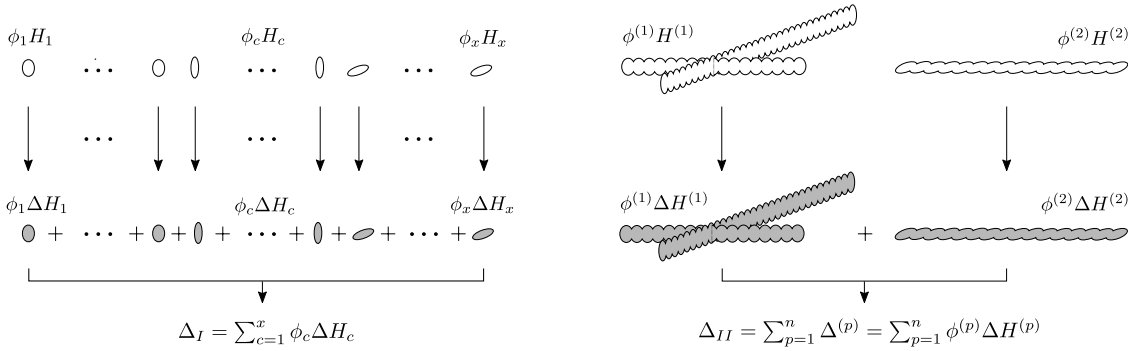
$$\sum_{c=1}^{m} \phi_c \Delta H_{ijk\ell_c} = \phi^{(p)} \Delta H^{(p)}_{ijk\ell} \,. \tag{25}$$

由于孔隙尺寸只影响体积分数，而饱和柔度保持不变，因此上述方程在一组孔隙的孔隙尺寸发生变化时同样成立。将一组孔隙的体积分数重写为 $\sum_{c=1}^{m} \phi_c = m\phi_c =: \phi^{(p)}$ 即可看出这一点，其中上横线表示平均值。然而，除上述两种情况外，方程（25）通常并不成立。

在某些情况下，孔隙影响方法和孔隙组影响方法会预测出近似相等的流体效应。当乘积近似 $\phi_c \Delta H_{ijk\ell_c} \approx \phi_c \, \Delta H_{ijk\ell_c}$ 和关系 $\Delta H_{ijk\ell_c} \approx \Delta H^{(p)}_{ijk\ell}$ 均成立时，就会出现这类情景，即

$$\sum_{c=1}^{m} \phi_c \Delta H_{ijk\ell_c} = m\overline{\phi_c \Delta H_{ijk\ell_c}} \approx m\overline{\phi_c} \; \overline{\Delta H_{ijk\ell_c}} \approx \phi^{(p)} \Delta H^{(p)}_{ijk\ell} \,. \tag{26}$$

当至少一个变量几乎保持不变时（Backus，1962年），或者当两个变量均为随机变量且相互独立分布时，乘积近似成立。另一方面，$\Delta H_{ijk\ell_c} \approx \Delta H^{(p)}_{ijk\ell}$ 在 $\Delta \boldsymbol{H}_c \approx$const 且同时满足乘积近似时成立。因此，对于饱和柔度仅略有变化（从一个孔隙到另一个孔隙）的情况，如果这些柔度对应的非均质体具有几乎相同的形状和取向，则近似式（26）可以成立（Kachanov 和 Sevostianov，2018年）。



(a) 孔隙影响方法（I）　　**(b)** 集合影响方法（II）

图3： 根据两种不同方法（ Δ_I 和 Δ_{II}）对流体总效应的示意图。在此示例中，两个集合嵌入固体基质中。灰色表示流体，白色区域表示干孔隙。

下面举例说明并讨论孔隙影响方法。流体的作用不再与以下孔隙组相关：

因此，除非孔隙具有相同的形状和取向，否则无法定义孔弹性参数 $S^{(p)}$ 和 $B_{ij}^{(p)}$ 。比较扩展比奥描述与微力学方法即可看出这一点，即：

$$\Delta_{ijk\ell}^{(p)} = \sum_{c=1}^{m} \phi_c \Delta H_{ijk\ell_c} \,, \tag{27}$$

可改写为

$$-\frac{1}{9} S^{(p)} B_{ij}^{(p)} B_{k\ell}^{(p)} = -\phi_1 \left(\frac{1}{K_{d_1}} + \frac{1}{K_f} - \frac{1}{K_0} \right) Q_{ij_1} Q_{k\ell_1} - \cdots - \phi_m \left(\frac{1}{K_{d_m}} + \frac{1}{K_f} - \frac{1}{K_0} \right) Q_{ij_m} Q_{k\ell_m} \,. \tag{28}$$

只有当 $\Delta \boldsymbol{H}_c =$ 为常数时，才能仅用超额柔度来定义储集系数和斯凯普顿型系数。从孔隙影响方法的角度来看，集合的几何形状并不重要。每个孔隙都单独处理，并将它们的流体影响相加。因此，采用孔隙影响方法时，可以不考虑这些集合，而是考虑总流体效应，

$$\Delta_{ijk\ell} = \sum_{c=1}^{x} \phi_c \Delta H_{ijk\ell_c} \,, \tag{29}$$

其中， x 表示可能允许流体流动的孔隙总数。因此，一般而言，从扩展孔隙弹性的角度来看，孔隙影响描述并不方便，因为在这种理论中，集合及其孔弹性参数至关重要。此外，根据表达式 (28)，集合中的每个孔隙由于几何形状各异，都由不同的流体极化张量 Q_{ij_c} 描述，这意味着流体压力各不相同。这与扩展比奥观点相矛盾，后者假定集合内压力恒定，因此每个连通孔隙内的压力自然也恒定。这种描述还有一个更实际的缺点：每个孔隙都需要单独考察，而在实验室中测量这一点既困难又耗时，在现场则无法测量。尽管如此，孔隙影响方法符合由 Eshelby (1957) 开创、由 O'Connell and Budiansky (1977) 发展并由 Shafiro and Kachanov (1997) 标准化的有效方法；该方法分别考虑每个孔隙的饱和度。这种方法可用于成功计算孔弹性介质的总流体效应。

为了采用后一种方法（我们称之为"孔隙组影响"方法），我们应将一个孔隙集合视为一个介观非均质体。为此，首先需要用一个体积分数和一个超额柔度张量来表示 $\sum_{c=1}^{m} \phi_c H_{ijk\ell_c}$ 。因此，我们采用

$$\phi^{(p)} H_{ijk\ell}^{(p)} := \sum_{c=1}^{m} \phi_c H_{ijk\ell_c} \,, \tag{30}$$

其中， $\phi^{(p)}$ 是集合中所有孔隙的体积分数。注意，我们可以定义

$$H^{(p)}_{ijk\ell} := \frac{\sum_{c=1}^{m} \phi_c H_{ijk\ell_c}}{\sum_{c=1}^{m} \phi_c} = \overline{H_{ijk\ell_c}} \,. \tag{31}$$

其中，横线表示按体积分数加权的平均值。其次，将 $H^{(p)}_{ijk\ell}$ 代入式（9），得到 $\Delta H^{(p)}_{ijk\ell}$。由此可得 –(11)
集合中的流体效应，

$$\Delta^{(p)}_{ijk\ell} = \phi^{(p)} \Delta H^{(p)}_{ijk\ell} \tag{32}$$

可改写为

$$-\frac{1}{9} S^{(p)} B^{(p)}_{ij} B^{(p)}_{k\ell} = -\phi^{(p)} \left(\frac{1}{K^{(p)}_d} + \frac{1}{K_f} - \frac{1}{K_0} \right) Q^{(p)}_{ij} Q^{(p)}_{k\ell} \,. \tag{33}$$

显然，这种描述与扩展孔弹性描述完全兼容。每个集合只有一个流体极化张量，这意味着压力恒定，符合
预期。表达式（18）仍然成立，各种几何形状也不例外。需要指出的是，从有效介质理论的角度来看，将 –(21)
集合视为一种介观非均质体可能被认为是不一致的。因此，在现阶段，尽管集合影响方法显然具有优势，
但仍应仅将其视为一种猜想。

我们来回顾第2.1节的研究成果。首先，我们指出了针对单个孤立孔隙的微观力学分析。由于假设单个孔隙
不允许流体流动，因此我们尚未说明类比奥孔弹性常数之间的关系。相反，我们将推导出的表达式用作多孔
隙情形的基础。我们已表明，相互连通的相同孔隙中流体的作用，等效于通过有效方法（22）获得的饱和
柔量的影响。孔弹性系数可根据这些柔量定义（19）–（21）。同样，也可以考虑流体对具有各种几何形状
的孔隙组的影响。根据所采用的方法，流体效应可表示为（29）或（32）；在特定情况下，这两种方法的
结果近似相等。了解流体影响后，可以用这两种方法描述不排水介质的应变（5）。这两种有效方法不仅可
用于考虑不排水连通孔隙引起的应变，也可用于考虑构成骨架的孤立孔隙， $S_{ijk\ell}$。然而，其中一种方法存
在显著缺陷。若采用孔隙影响方法，则通常无法为一个集合定义孔弹性参数。另一方面，若采用集合影响方
法，则定义（19）–（21）有效。因此，通常只有采用后一种微观力学方法，才能描述基本方程（1）–（2）。

还有两个相关的重要问题有待解决。第一，哪一种流体效应的微观力学描述更准确，适用于何种情形？第二，我们能否利用集合冲击猜想来描述部分饱和介质的应变及由此产生的流体含量变化？要回答这些问题，我们需要开展详尽的实验室实验，并将结果与理论预测进行比较。然而，这超出了本文的范围。本文针对指定的微观结构介绍这两种方法，并通过数值模拟两种方法之间的流体效应差异；所得结果只能提供参考性的答案。

2.2 微观力学分析：指定的微观结构

在上一节中，我们将扩展孔隙弹性与微观力学联系起来，讨论了未指定的超额柔度。这些超额柔度可针对各种几何形状求得，例如裂纹、球体、针状体等，它们均可归类为椭球体（Kachanov 和 Sevostianov, 2018年）。本文将介绍几种地球物理学和构造学中常见的微观结构，它们在扩展孔隙弹性的研究背景下颇有意义。

2.2.1 硬币形裂纹：任意取向

考虑一个含有一组取向各异的硬币形裂纹的介质。在这种情况下，我们采用

$$\sum_{c=1}^{m} \phi_c H_{ijk\ell_c} = \frac{1}{4}\left(\delta_{ik}\alpha_{jl} + \delta_{i\ell}\alpha_{jk} + \delta_{jk}\alpha_{i\ell} + \delta_{j\ell}\alpha_{ik}\right) + \beta_{ijk\ell}\,, \tag{34}$$

其中， δ_{ij} 是克罗内克δ，且

$$\alpha_{ij} := \sum_{c=1}^{m} Z_{T_c} n_{i_c} n_{j_c}\,, \tag{35}$$

$$\beta_{ijk\ell} := \sum_{c=1}^{m} \left(Z_{N_c} - Z_{T_c}\right) n_{i_c} n_{j_c} n_{k_c} n_{\ell_c} \tag{36}$$

表示裂纹密度张量（Kachanov, 1980），其中 n_i 为裂纹面的法线。上述张量包含

$$Z_{T_c} := \frac{32 e_c}{3E}\frac{\left(1-\nu^2\right)}{(2-\nu)}\,, \qquad Z_{N_c} := Z_{T_c}\left(1 - \frac{\nu}{2}\right)\,, \tag{37}$$

with

$$e_c = \frac{a_c^3}{V}\,, \tag{38}$$

其中 V 为介质体积， a_c 为裂纹半径， E 和 ν 分别表示固相的杨氏模量和泊松比。如果我们采用孔隙影响方法，流体效应为

$$\sum_{c=1}^{m} \phi_c \Delta H_{ijk\ell_c} = -\sum_{c=1}^{m} \left(\frac{1}{1+\delta_c} \right) Z_{N_c} n_{i_c} n_{j_c} n_{k_c} n_{\ell_c} \,, \tag{39}$$

其中

$$\delta_c = K_{d_c} \left(\frac{1}{K_f} - \frac{1}{K_0} \right) = \frac{\phi_c}{Z_{N_c}} \left(\frac{1}{K_f} - \frac{1}{K_0} \right) = \frac{\gamma_c \pi E}{4\left(1-\nu^2\right)} \left(\frac{1}{K_f} - \frac{1}{K_0} \right) \tag{40}$$

取决于每条裂纹的长宽比， γ_c。如果采用集合影响方法，将表达式（34）右侧除以后，可得 $H^{(p)}_{ijk\ell}$

$$\phi^{(p)} = \frac{4\pi}{3V} \sum_{c=1}^{m} a_c^3 \gamma_c \,. \tag{41}$$

然后，按照前文所述，我们将 $H^{(p)}_{ijk\ell}$ 代入（9）–（11），得到进入（32）的 $\Delta H^{(p)}_{ijk\ell}$.

2.2.2 硬币形裂纹：正交取向

我们来考虑一个垂直裂纹的简单示例。设有一组相互连通、形状和尺寸都相同的裂纹；也就是说， γ_c, $a_c = \text{const}$ 这意味着 Z_{N_c}， Z_{T_c}， $\delta_c = \text{const}$。假设m_1 裂纹的表面法线沿 x_1轴、 m_2 沿 x_2轴，以及 m_3 沿x_3轴取向，其中裂纹总数为 $m = m_1 + m_2 + m_3$。这样，我们可以定义 $m_1 Z_{N_c} = Z_{N1}$、 $m_2 Z_{N_c} = Z_{N2}$、 $m_3 Z_{N_c} = Z_{N3}$。根据孔隙影响（I）描述，流体效应为（这里只展示非零子式 3×3），

$$\Delta_I = -\frac{1}{S_c} \begin{bmatrix} \frac{1}{m_1} Z_{N1}^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{m_2} Z_{N2}^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{m_3} Z_{N3}^2 \end{bmatrix} = -\frac{1}{1+\delta} \begin{bmatrix} Z_{N1} & 0 & 0 \\ 0 & Z_{N2} & 0 \\ 0 & 0 & Z_{N3} \end{bmatrix} , \tag{42}$$

其中

$$S_c = \phi_c \left(\frac{1}{K_{d_c}} + \frac{1}{K_f} - \frac{1}{K_0} \right) , \qquad \frac{1}{K_{d_c}} = \frac{Z_{N_c}}{\phi_c} \,. \tag{43}$$

孔隙影响方法忽略了裂纹间连接，因此，每个孔隙都可得到类储存系数 S_c。请注意，在每个子集合 m_i 中，裂纹都是相同的，这是一种特殊情况。因此，我们可以不再逐一处理每条裂纹，而是用以下形式重写上述表达式：

孔弹性常数　　对应于三个由相同裂纹构成的子集合（无论是否孤立！）的 s。换言之，　　，

$$\Delta_I = -\frac{1}{9S^{(1)}}\begin{bmatrix} \left(S^{(1)}B_{11}^{(1)}\right)^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \frac{1}{9S^{(2)}}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \left(S^{(2)}B_{22}^{(2)}\right)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \frac{1}{9S^{(3)}}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \left(S^{(3)}B_{33}^{(3)}\right)^2 \end{bmatrix}, \tag{44}$$

其中

$$S^{(i)} = m_i\phi_c\left(\frac{1}{K_{d_c}} + \frac{1}{K_f} - \frac{1}{K_0}\right), \qquad B_{ii}^{(i)} = \frac{3Z_{Ni}}{S^{(i)}}. \tag{45}$$

另一方面，集合影响（II）方法表明

$$\Delta_{II} = -\frac{1}{S}\begin{bmatrix} Z_{N1}^2 & Z_{N1}Z_{N2} & Z_{N1}Z_{N3} \\ Z_{N1}Z_{N2} & Z_{N2}^2 & Z_{N2}Z_{N3} \\ Z_{N1}Z_{N3} & Z_{N2}Z_{N3} & Z_{N3}^2 \end{bmatrix} = -\frac{1}{9S}\begin{bmatrix} S^2B_{11}^2 & S^2B_{11}B_{22} & S^2B_{11}B_{33} \\ S^2B_{11}B_{22} & S^2B_{22}^2 & S^2B_{22}B_{33} \\ S^2B_{11}B_{33} & S^2B_{22}B_{33} & S^2B_{33}^2 \end{bmatrix}, \tag{46}$$

其中

$$S = m\phi_c\left(\frac{1}{K_d^{(p)}} + \frac{1}{K_f} - \frac{1}{K_0}\right), \qquad \frac{1}{K_d^{(p)}} = \frac{1}{K_{d_c}}, \qquad B_{ii} = \frac{3Z_{Ni}}{S}. \tag{47}$$

我们注意到，集合影响方法仅得出一个储存系数和一个 Skempton张量；裂缝被视为彼此连通。在我们的示例中，每个 m_i 子集之间的连接以 Δ_{II}的非零非对角项表示。前一种方法中没有上述项，因为其中的裂缝被分别处理。重要的是，如果每个子集都构成一个独立的集合，那么 Δ_I 保持不变（连接无关紧要），但 Δ_{II} 会简化为 Δ_I （因为各集合包含相同的裂缝）。显然，子集之间的连接会显著影响集合影响（II）描述。

2.2.3 硬币形裂纹：横向各向同性取向

如引言中所述，可通过在各向同性固相中分布横向各向同性取向的硬币形裂纹，得到有效横向各向同性（Sayers 和 Kachanov，1995年）。按照岩石物理学术语，我们将这一特例简称为圆柱横观各向同性（CTI）。通常，导致 CTI 的微观结构被描述为垂直裂纹：它们并非定向排列，而是围绕对称轴随机分布。其超额柔度可用裂缝通用公式（34）表示，其中另外有 $\alpha_{11} = \alpha_{22}$, $\beta_{1111} = \beta_{2222}$ 和 $\beta_{1122} = \beta_{1111}/3$。此外，请注意， α_{ij} 和$\beta_{ijk\ell}$ 在所有指标重排下均保持对称。

由于在水平面上观察到的裂缝取向随机，孔隙几何形状与

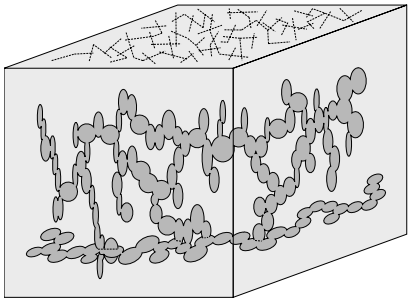
裂纹密度张量之间的联系尚不明确。换言之，难以通过代入每条具体裂纹的半径和表面法线，获得满足CTI关系的裂纹密度张量数值。因此，诱发 CTI 的微观结构被作为一个整体处理——视为一大组垂直裂纹，其中具体裂纹的取向未知。也可以考虑水平裂纹——系数 α_{33} 和 β_{3333} 增大，而 CTI关系仍然成立。如果某些裂缝彼此连通，就能允许流体流动，此时可以采用孔隙弹性理论。如果所有裂缝都相互连通（单一集合），则适用原始比奥理论（一个 Skempton张量和一个储存系数）。孤立的一组水平非均质体（总共两组）的情形，则可通过孔隙弹性扩展来描述（两个类斯凯普顿张量和两个储存系数）。这两种情景如图4a–4b所示。

如果介质具有CTI特性，但垂直裂纹中的孔隙压力并非常数，会怎样？换言之，如果垂直孔隙虽然沿横向各向同性方向排列，却形成了几个或几十个孤立集合，又会怎样？为了构造这种情形，我们提出明确规定每个孔隙的几何形状，并利用这些几何形状重建满足CTI关系的裂纹密度张量。为此，我们假设 n 组定向排列的垂直裂纹嵌入各向同性固相中，并围绕对称轴均匀分布。换言之，每组垂直裂纹彼此隔开，间隔角度为 $\theta = \pi/n$ 弧度。根据Herman理论（Herman，1945年），当四阶张量绕对称轴旋转至少五次后保持不变时，该张量具有横向各向同性。因此，若要满足Herman的要求，围绕对称轴均匀分布的对称面最少为三个。类比而言，如果一个孔隙集合对应一个对称面，那么均匀分布的集合也可能形成横向各向同性对称性。事实上，正如我们在附录C中所证明的，$n \geq 3$ 组裂纹足以形成由定向排列裂纹诱导的横向各向同性对称性，这与Herman理论一致。不过，每组必须包含数量相同、尺寸相同的裂纹；这是必须满足的必要条件。另一方面，两个正交的对称面会形成正交各向异性。正如Schoenberg和Helbig（1997年）所指出的，$n = 2$ 嵌入集合会产生这种对称性，从而支持我们的裂纹组—对称面类比。对于集合诱导的正交各向异性，各集合中的裂纹数量或尺寸不必相同。

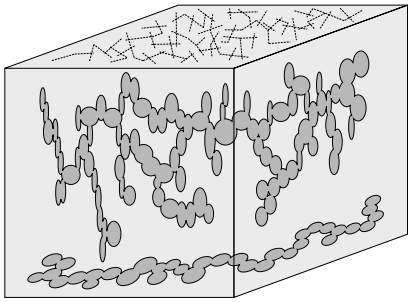
下面举例说明附录C中的一般证明。考虑三组垂直定向裂纹。各组由 $\theta = \pi/3$ 隔开，其表面法线 $\boldsymbol{n}^{(p)}$ 为

$$\boldsymbol{n}^{(1)} = [\cos(\theta),\, \sin(\theta),\, 0]\,, \qquad \boldsymbol{n}^{(2)} = [\cos(2\theta),\, \sin(2\theta),\, 0]\,, \qquad \boldsymbol{n}^{(3)} = [\cos(3\theta),\, \sin(3\theta),\, 0]\,. \tag{48}$$

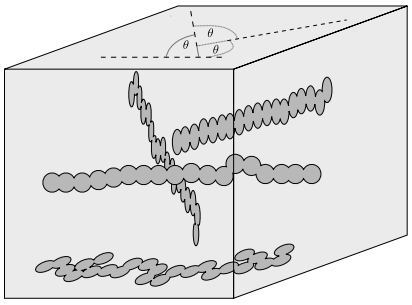
假设各组相同，即每组中的裂缝数量和形状均相同



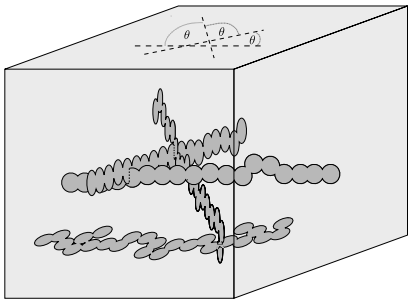
(a) 经典 CTI：连通情形



(b) 经典 CTI：孤立情形



(c) 集合诱导 CTI：孤立情形



(d) 集合诱导 CTI：连通情形

图 4： 图中展示了孔弹性介质的若干 CTI 情景。每种情形中都包含可选的水平裂纹；即使没有水平裂纹，也不会影响有效对称性。前两幅图展示了垂直裂纹取向随机且呈横向各向同性的经典情形。 ***a***) 表示垂直裂缝与水平裂缝相互连通的情形；它们只构成一个集合。 ***b***) 展示了垂直和水平非均质体彼此孤立的情形；它们构成两个不同集合。最后两幅图展示的垂直裂纹并非随机分布，而是沿 $n = 3$ 个方向定向排列。这些排列在水平方向上彼此孤立， θ ，并导致 CTI 诱导。 ***c***) 展示所有集合彼此分离的情景（共 4 个集合），而 ***d***) 展示相互连通的情形（仅一个集合）。在孔隙影响方法或干燥超额柔度的语境下，情形 ***a***) 和 ***c***) 分别等同于情形 ***b***) 和 ***d***)。采用集合影响方法时则会出现差异，因为连通性确实会产生影响。

集合。因此，我们可以得出结论：

$$\sum_{c=1}^{m} Z_{N_c} = Z_N^{(p)} = Z_N \tag{49}$$

and Z_{T_c}也有类似的描述。有效介质的裂纹密度张量 a re

$$\alpha_{ij} = \sum_{p=1}^{n} \alpha_{ij}^{(p)} = Z_T \sum_{p=1}^{n} n_i^{(p)} n_j^{(p)} , \tag{50}$$

$$\beta_{ijk\ell} = \sum_{p=1}^{n} \beta_{ijk\ell}^{(p)} = (Z_N - Z_T) \sum_{p=1}^{n} n_i^{(p)} n_j^{(p)} n_k^{(p)} n_\ell^{(p)} . \tag{51}$$

我们得到

$$\alpha_{11} = Z_T \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + 1 \right) = \frac{3Z_T}{2} , \tag{52}$$

$$\alpha_{22} = Z_T \left(\frac{3}{4} + \frac{3}{4} + 0 \right) = \alpha_{11} , \tag{53}$$

$$\beta_{1111} = (Z_N - Z_T) \left(\frac{1}{16} + \frac{1}{16} + 1 \right) = (Z_N - Z_T) \frac{9}{8} , \tag{54}$$

$$\beta_{2222} = (Z_N - Z_T) \left(\frac{9}{16} + \frac{9}{16} + 0 \right) = \beta_{1111} , \tag{55}$$

$$\beta_{1122} = (Z_N - Z_T) \left(\frac{3}{16} + \frac{3}{16} + 0 \right) = \frac{1}{3} \beta_{1111} , \tag{56}$$

这表明 CTI。请注意，如果各集合并不相同，就不会出现这种对称性。此外，显然 $\alpha_{33} = \beta_{3333} = \beta_{1133} = 0$ 和

$$\alpha_{11}^* = \frac{4}{3} \beta_{1111}^* , \tag{57}$$

其中

$$\alpha_{ij}^* := \sum_{c=1}^{m} n_{i_c} n_{j_c} , \tag{58}$$

$$\beta_{ijk\ell}^* := \sum_{c=1}^{m} n_{i_c} n_{j_c} n_{k_c} n_{\ell_c} \tag{59}$$

可定义为裂缝组构张量（依 Oda，1986）。关系式（57）是任何集合诱导 CTI 的特征，证明如下。对于任意 $n \geq 3$ 垂直组，关系式 $\beta_{1133} = \beta_{1133}^* = 0$ 必定成立。因此，

$$\alpha_{11}^* = \sum_{k=1}^{3} \beta_{11kk}^* = \beta_{1111}^* + \frac{1}{3} \beta_{1111}^* + 0 = \frac{4}{3} \beta_{1111}^* , \tag{60}$$

按要求。

代入式 (50)–(51) i 代入表达式（34），即可得到干燥有效介质的总超额柔度。使用 g

Schoenberg 和 Sayers（1995年）或 Kachanov 和 Sevostianov（2018年）采用的紧凑 6×6 矩阵记法，我们得到

$$\sum_{p=1}^{n}\phi^{(p)}H_{ijk\ell}^{(p)}=\frac{n}{8}\begin{bmatrix}3Z_N+Z_T & Z_N-Z_T & 0 & 0 & 0 & 0\\ Z_N-Z_T & 3Z_N+Z_T & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 4Z_T & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4Z_T & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Z_N+7Z_T\end{bmatrix}, \tag{61}$$

这对 $n\geq3$ 是普适的。

有趣的是，除了 n 垂直组之外，再加入一个水平组，也可以得到 CTI。为便于表示，假设这些水平裂缝完全相同，即 $\sum_{c=1}^{m}Z_{N_c}=Z_{N_H}$。不过，我们允许它们与垂直裂缝不同。由此得到额外的超额柔度，

$$\phi^{(\mathrm{hor})}H_{ijk\ell}^{(\mathrm{hor})}=\begin{bmatrix}0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&Z_{N_H}&0&0&0\\0&0&0&Z_{T_H}&0&0\\0&0&0&0&Z_{T_H}&0\\0&0&0&0&0&0\end{bmatrix}. \tag{62}$$

必要的横向各向同性 关系仍然成立。此外，必须满足条件 $\beta_{1133}=0$。

求出流体效应所对应超额柔度 $\Delta H_{ijk\ell}$ 的步骤，与上一节讨论的正交裂缝情形类似。如果 n 集合彼此孤立，那么由于每个集合中的裂缝完全相同，孔隙影响方法与集合影响方法等效。如果各集合并非彼此孤立，则将它们视为相互连通的子集，共同构成单一孔隙度；两种微观力学方法必然不同。值得注意的是，子集之间可能存在的连通关系不会影响上述干燥情形推导。图4c–4d展示了孤立和非孤立两种情景。

2.2.4 球体

现在考虑形状为球形的孔隙。显然，这种形状会产生各向同性干燥超额柔度（孔隙的取向不会影响 $H_{ijk\ell}$）。反过来，

$$\boldsymbol{H}_c=\text{const}\implies\Delta\boldsymbol{H}_c=\text{const}\implies\Delta H_{ijk\ell_c}=\Delta H_{ijk\ell}^{(p)}. \tag{63}$$

尽管取向和形状相同，但尺寸可以变化， $\phi_c \neq$const。孔隙的流体效应为

$$\Delta_{I_{ijk\ell}} = \sum_{c=1}^{x} \phi_c \Delta H_{ijk\ell_c} = \Delta H^{(p)}_{ijk\ell} \sum_{c=1}^{x} \phi_c = \sum_{p=1}^{n<x} \phi^{(p)} \Delta H^{(p)}_{ijk\ell} = \Delta_{II_{ijk\ell}} \,. \tag{64}$$

换言之，对于任意一组由多个球体组成的集合，两种描述流体影响的方式是等价的。如果不同集合中球体的尺寸和数量不同，那么 $\phi^{(p)} \neq$const $\implies$ $S^{(p)} \neq$const。另一方面，每个集合的斯凯普顿型系数都相同；它们仅受 $\boldsymbol{H}^{(p)} =$ const 的直接影响。

2.2.5 非球状形状

到目前为止，在流体效应和扩展孔隙弹性的背景下，我们描述了几种球状孔隙或裂缝的微观结构。然而，如前所述，椭球体的额外柔度也可以求得；因此，孔隙弹性与有效方法之间的联系同样适用于这些更一般的形状。此外，这种联系也可能适用于非椭球形状。正如 Grechka 和 Kachanov（2006年）所讨论的，能够求得各种裂缝的额外柔度，这些裂缝不一定呈硬币状。对于非平面孔隙，Kachanov 和 Sevostianov（第4.3章，2018年）总结了非椭球体的近似方法。这里我们采用超球体的情形，它们可以代表凹孔隙或凸孔隙。单位半径超球体的表面由 $x_1^{(2k)} + x_2^{(2k)} + x_3^{(2k)} = 1$ 描述，其中参数 k 是凹度因子。对于 $k < 0.5$，形状为凹形；对于 $k > 0.5$，形状为凸形；对于 $k = 1$，形状为球体。对于 $k < 0.2$，额外柔度近似为零。如果 $k \in [0.2,\, 1]$，则得到

$$H_{ijk\ell_c} \approx \frac{5k-1}{4} \frac{V_s}{V_1(k)} H^s_{ijk\ell_c} \,,$$

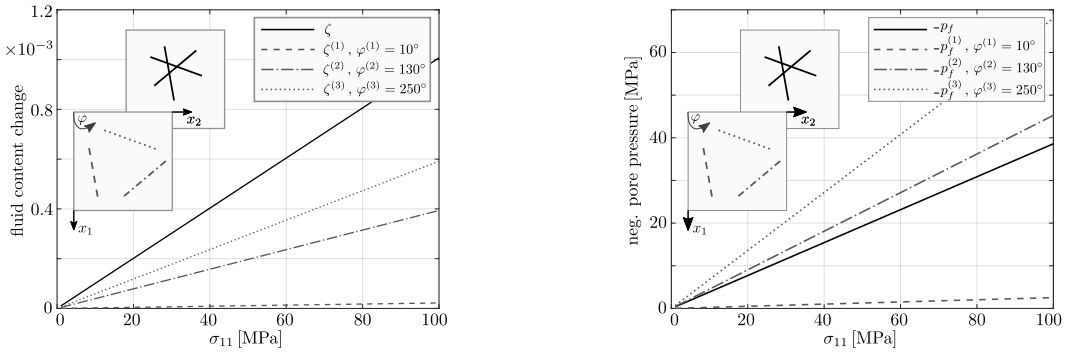
其中， $H^s_{ijk\ell_c}$ 为球体的超额柔度。 V_1 和 V_s 分别表示超球体的体积（公式 4.3.14，Kachanov 和 Sevostianov，2018年）和单位球体的体积。随后即可求得饱和柔度和流体效应。对于 $k < 1$，超额柔度张量近似各向同性，这意味着两种微观力学方法（孔隙影响和孔隙组影响）近似等效。与长宽比对椭球体至关重要一样，凹度因子对超球体也至关重要——它会显著影响孔隙对有效弹性的贡献。Chen 等人（2018年）指出，对于扁球状或长球状超球体，这两种因素的影响可以结合起来。需要注意的是，由于 γ的影响，扁球状或长球状超球体的超额柔度张量并非近似各向同性；因此，两种微观力学方法会得出不同的结果。

3 数值模拟

本节首先展示原始比奥理论与扩展比奥理论的差异，分别将其应用于彼此连通或相互隔离的孔隙子集。我们采用孔隙形状完全相同的情形，因此微观力学描述的选择不会影响相互隔离的情形。其次，我们聚焦于孔隙影响方法与孔隙组影响方法之间的差异。为简化问题，我们假设只有一种孔隙度。在模拟中，我们采用 Beeler 等人（2000年）和 Wong（2017年）报告的贝雷亚砂岩性质，其中固相 $E = 87$吉帕、 $\nu = 0.11$，流体压缩性为$1/K_f = 0.45$吉帕$^{-1}$。此外，在第二部分中，我们将贝雷亚砂岩与固相性质迥异的材料进行比较，其参数为 $E = 125$吉帕和 $\nu = 0.25$，这是玄武岩的典型特征（Ji 等人，2010年）。数值实验的结果不应视为定论，而应视为某些可重复现象的指示。

3.1 原始孔隙弹性与扩展孔隙弹性

假设有三个垂直裂缝子集，每个子集包含 $m = 100$ 个裂缝，且尺寸和形状相同，其中 $e_c = 1/3m$和 $\gamma_c = 0.01$。设这些子集围绕垂直轴均匀分布。这样便诱导出CTI对称性。我们假设这些子集与坐标轴略有错位；相对于 x_1轴，裂缝方位角分别为 $\varphi^{(1)} = 10°$、 $\varphi^{(2)} = 130°$和 $\varphi^{(3)} = 250°$。已知应力后，对多孔介质行为的描述可能因子集之间的连接方式不同而有显著差异。



(a) 应力与流体含量变化的关系　　**(b)** 应力与压力的关系

图5： 由三个诱导出CTI对称性的子集得到的原始孔隙弹性与扩展孔隙弹性之间的差异。若子集相互连接，则可采用原始比奥理论（实线）。若子集彼此孤立，则需要采用扩展理论（非实线）。图中示意了这两种情况的二维视图。虚线表示方位角为 $\varphi^{(1)} = 10°$的垂直集合，点划线表示 $\varphi^{(2)} = 130°$，点线表示 $\varphi^{(3)} = 250°$。我们考虑集合排水**(a)** 和不排水**(b)** 条件。

如果所有子集彼此连通，它们就构成单一孔隙度，并采用原始比奥理论。使用集合影响方法，我们得到一个储存系数 $S \approx 0.0261$吉帕$^{-1}$ 和非零的斯凯普顿分量 $B_{11} = B_{22} \approx 1.16$， $B_{33} \approx 0.01$。因此，我们可以将流体含量变化 ζ（排水情形）或孔隙压力 p_f （不排水情形）描述为应力的函数，如图5a–5b中的实线所示。

如果所有子集彼此孤立，它们就形成三个不同的孔隙度簇，必须采用扩展理论。我们得到 $S^{(1)} = S^{(2)} = S^{(3)} \approx 0.0087$吉帕$^{-1}$ 和

$$\boldsymbol{B}^{(1)} \approx \begin{bmatrix} 1.36 & -2.27 & 0 \\ -2.27 & 0.96 & 0 \\ 0 & 0 & 0.01 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{B}^{(2)} \approx \begin{bmatrix} 2.04 & 1.48 & 0 \\ 1.48 & 0.28 & 0 \\ 0 & 0 & 0.01 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{B}^{(3)} \approx \begin{bmatrix} 0.08 & 0.79 & 0 \\ 0.79 & 2.24 & 0 \\ 0 & 0 & 0.01 \end{bmatrix}. \tag{65}$$

如预期，在图5a–5b中，有三条（非实线）曲线描绘了流体含量变化或孔隙压力与 σ_{11} 应力分量之间的关系。由于长宽比低，这些参数的数值强烈依赖于子集的取向（对于球体，取向不会产生影响）。当裂纹长轴几乎垂直于应力方向时，流体含量变化和压力最大。与此类似，当裂纹长轴几乎平行于应力方向时，数值最小。因此，在图5a–5b中，子集 $\varphi^{(3)} = 250°$ 的 $\zeta^{(p)}$ 和 $p_f^{(p)}$ 数值最大。此处，裂缝轴与 x_2 仅相差 $20°$。子集 $\varphi^{(1)} = 10°$ 的 $\zeta^{(p)}$ 和 $p_f^{(p)}$ 数值最低。此处，裂缝轴与 x_1 仅相差 $10°$。剩余子集$\varphi^{(2)} = 130°$ 由于与 x_1 轴和 x_2 轴的排列方向偏差相对较大，流体含量变化和孔隙压力均处于中等水平。请注意，在不排水条件下

$$S = \sum_{p=1}^{n} S^{(p)} \tag{66}$$

and

$$B_{ij} = \overline{B_{ij}^{(p)}} \implies p_f = \overline{p_f^{(p)}}. \tag{67}$$

如附录B所示，方程（66）在任何情况下都成立。另一方面，由于$K_d^{(p)}$ 在各集合中保持恒定，（67）才得以成立，而这通常并非如此。在我们的情形中，孔隙组的体积模量保持恒定，是形状相同的孔隙所致（$\gamma_c =$ const）——这是诱导横向各向同性的要求。此外，在这一特定情形的排水条件下，每个孔隙组的体积分数保持恒定，导致 $S^{(p)}$ =const，这意味着 $\zeta = \sum_{p=1}^{n} \zeta^{(p)}$ （见附录B）；如图5a所示。

3.2 孔隙影响与孔隙组影响方法

为检验两种微观力学描述之间的差异，我们针对不同数量的 m 孔隙组成单个集合的情况进行了多次模拟，其中 $m = 3 \times y$, $y \in [1, 1000]$, $y \in \mathbb{N}$。对于每个 m，我们将上述差异量化为孔隙影响与集合影响之间的相对差异（R）

方法，

$$R_I^f := \frac{||\Delta_I - \Delta_{II}||}{||\Delta_I||} \times 100\%\,, \tag{68}$$

其中，$||\cdot||$ 表示弗罗贝尼乌斯范数，上标 f 表示流体的影响。我们考虑孔隙的不同形状（长宽比 γ_c）、取向和尺寸（密度 $e_c = a_c^3/V$）。孔隙集合中的每项特征可以相同（i）、略有变化（s）、随机变化（r），也可以呈现某种模式（p）。例如，形状相同、取向随机且尺寸非随机的孔隙情况记为 irp，其中第一个字母始终表示形状，第二个表示取向，第三个表示孔隙尺寸。按照上述规则，我们模拟了九种可能情况，分别记为 iii、sss、rrr、rii、iri、iir、pii、ipi、iip。为获得相同的特征（例如形状），我们从均匀分布中随机选取第一个孔隙的特征值（例如 $\gamma_1 = 0.1$），然后将同一数值赋给其余孔隙。为使形状或尺寸略有变化，我们随机选取相对于第一个孔隙、变化幅度不超过10%的数值。为使取向略有变化，我们模拟一条随机旋转轴，并将该轴旋转一定角度，角度变化幅度同样不超过10%。为获得随机特征，我们再次使用均匀分布抽取第一个孔隙的特征值，并将这种随机模拟重复 m 次。模式p 表示随机选取一项特征，将其数值复制给 $m/3$ 个孔隙，为另外 $m/3$ 个孔隙重新抽取数值，最后为其余孔隙抽取该特征值。上述所有步骤都必须循环执行，以改变 m。换言之，需要重复1000次，直到涵盖 m 的每一种可能情况。模拟出特定的形状 γ_c、取向和密度 e_c后，我们使用这些数值计算 $H_{ijk\ell_c}$ 和 ϕ_c。为此，我们遵循 Kachanov 和 Sevostianov（2018）总结的有效介质理论。请注意，干燥超额柔度受形状和取向影响，而孔隙体积分数则受形状和尺寸影响。得到 $H_{ijk\ell_c}$ 和 ϕ_c后，我们使用本文中的方程求得 Δ_I 和 Δ_{II}，进而得到 R_I^f。模拟的目的是确认等价关系（25）或近似关系（26）成立的情况，并展示哪些特征对 R_I^f 的影响最大。

为进行测试，除固相和流体压缩性外，我们还需要定义形状和尺寸范围。我们选择了两个不同的孔隙形状范围。范围 $\gamma_c \in (0,\ 2)$ 同时考虑扁球体和长球体，而 $\gamma_c \in (0,\ 0。2)$ 仅对应裂缝状孔隙。我们选择 $e_c \in (0,\ 3/m)$，使得一个集合的最大体积分数

$$\phi^{(p)} = \frac{4\pi\gamma_c m e_c}{3} \tag{69}$$

对于任何 m 都相等，并且可以达到约 25%（如果 $\gamma_c \approx 2$）。在模拟过程中发现，尺寸范围的选择对 R_I^f 几乎没有影响。下面讨论表 1 中给出的结果。我们注意到，随机特征和模式化特征都会导致显著差异，最高可达 88%（ppp）。

一般而言，随机孔隙会产生较高的均值 R_I^f，但其结果的变化幅度不像图案的情况那么大。 rrr 与 ppp 的比较也见图 6。显然，孔隙数量对 ppp 影响可以忽略不计，但会显著减少 rrr的 R_I^f 振荡。 sss 的结果支持近似式 (26)。换句话说，如果集合中的孔隙微结构变化幅度不超过 10%，那么 R_I^f 就非常小。考察 rii、iri和 iir （或者 pii、 ipi、 iip），即可评估各项特征对 R_I^f 的影响。例如， rii 可以体现形状的影响，因为相同的取向和尺寸不会造成差异。我们注意到，形状或取向会显著影响 R_I^f，而尺寸的影响可以忽略不计，这与理论考量（等价关系 (25)）的预期一致。此外，结果很大程度上取决于 γ_c 范围的选择，而受固体基质选择的影响较小。

表 1： 所选微观结构情景及对应的 R_I^f（%）。生成的孔隙（密度为 $e_c = 3/m$）嵌入贝雷亚砂岩（$E = 87$ 吉帕 $\nu = 0.11$）或玄武岩（$E = 125$ 吉帕 $\nu = 0.25$）中。文中给出了均值、最大偏差及标准差。

	贝雷亚砂岩						玄武岩		
	$\gamma \in$ (0,2)			$\gamma \in$ (0,0.2)			$\gamma \in$ (0,0.2)		
case	mean	max	sd	mean	max	sd	mean	max	sd
rrr	9.71	25.76	1.77	49.13	70.48	1.89	53.78	81.11	1.95
ppp	10.01	82.15	16.25	34.76	85.94	17.94	38.64	88.75	19.72
sss	0.23	3.59	0.44	0.95	4.09	0.78	1.03	4.01	0.83
rii	15.27	34.95	6.79	22.46	32.05	1.69	29.17	50.44	1.69
iri	7.54	50.86	13.00	42.40	59.81	6.31	44.62	58.01	4.82
iir	$< 10^{-12}$	$< 10^{-12}$	$< 10^{-13}$	$< 10^{-12}$	$< 10^{-12}$	$< 10^{-13}$	$< 10^{-12}$	$< 10^{-12}$	$< 10^{-13}$
pii	10.89	80.98	16.81	15.37	48.99	12.10	18.63	61.92	14.73
ipi	5.31	75.69	11.15	30.31	73.00	16.51	32.56	71.88	16.90
iip	$< 10^{-11}$	$< 10^{-11}$	$< 10^{-11}$	$< 10^{-11}$	$< 10^{-11}$	$< 10^{-11}$	$< 10^{-11}$	$< 10^{-11}$	$< 10^{-11}$

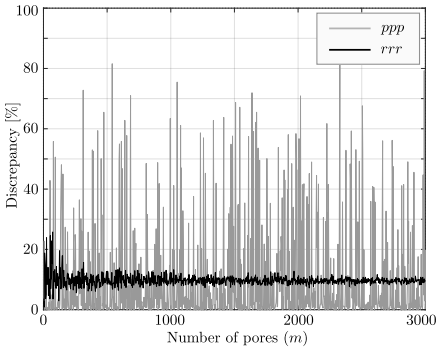


图 6： 基于每个 m 的多次模拟，孔隙影响方法与集合影响方法之间的差异。黑色对应随机几何结构的情形（rrr），灰色则表示具有非随机模式的几何结构（ppp）。贝雷亚砂岩， $\gamma_c \in$ (0,2), 以及 $e_c = 3/m$。

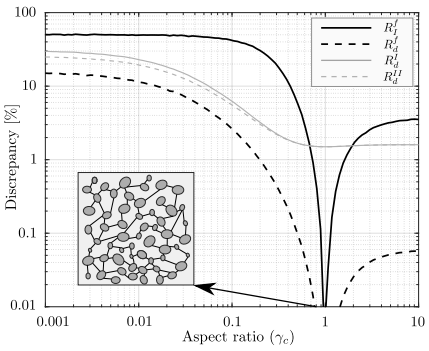


图 7： 长宽比与各种特征之间的差异（$m = 100$）。孔隙取向和尺寸均为随机生成（irr）。黑色实线表示 R_I^f，黑色虚线表示 R_d^f，灰色实线表示 R_d^I，灰色虚线表示 R_d^{II}。贝雷亚砂岩和 $e_c = 3/m$。

尽管流体效应之间的相对偏差可能很大，但将其与干孔隙的影响联系起来是有益的。或许在某些情况下，R_I^f 很大，但孔隙的超额柔度可以忽略不计；此时，选择哪种微力学方法都无关紧要。因此，我们还建议采用

$$R_d^f := \frac{||\Delta_I - \Delta_{II}||}{||\sum_{c=1}^{x} \phi_c \boldsymbol{H}_c||} \times 100\% \qquad R_d^I := \frac{||\Delta_I||}{||\sum_{c=1}^{x} \phi_c \boldsymbol{H}_c||} \times 100\% \qquad R_d^{II} := \frac{||\Delta_{II}||}{||\sum_{c=1}^{x} \phi_c \boldsymbol{H}_c||} \times 100\% \,, \quad (70)$$

其中，下标 d 表示干孔隙的影响。在图 7 中，我们在 γ_c的背景下使用这些附加指标。我们对 $m = 100$ 模拟 irr ，并展示固定长宽比如何影响偏差。尽管对于 γ_c ，当长宽比达到 ~ 0.4时， $R_I^f > 10\%$ 的偏差仍然存在，但只有在长宽比非常低时，选择 Δ_I 还是 Δ_{II} 才至关重要。请注意，对于 γ_c ，当长宽比达到 ~ 0.02 时，偏差为 $R_d^f > 10\%$。因此，只有针对裂纹，流体效应的计算方法才至关重要。一般而言，如果长宽比不低，流体效应（无论是 Δ_I 还是 Δ_{II}）都不太重要。对于 γ_c ，当长宽比达到 ~ 0.04 或 ~ 0.05时，偏差分别为 $R_d^I > 10\%$和 $R_d^{II} > 10\%$。如果我们模拟 ipp 而非 irr，偏差会更低。正如第 2.2.4 节所述， $\gamma_c = 1$意味着 $\Delta_I = \Delta_{II}$；因此，对于准球形孔隙， R_I^f 和 R_d^f 趋于零。

总之，我们的模拟表明， R_I^f 主要取决于以下因素（按重要性由高到低排列）。

1. 形状和取向——影响很大，尤其是在长宽比较小时。
2. 孔隙数量——仅在形状和取向随机时才重要。
3. 固相——影响很小。
4. 孔隙尺寸——即使有影响，也微乎其微。

此外，对于长扁形孔隙形状，无需考虑流体效应。另一方面，通常只有在裂纹情况下，微力学方法的选择才有影响。

4 讨论

本文提出的各向异性孔隙弹性理论扩展，在多孔固体中存在孤立裂缝组的情况下尤其有用。尽管可以将各组完全隔离视为一种理想化情形，但各组之间存在弱连接的情形似乎并非不可能（例如，见图1a）。这可能导致在较短时间尺度上观察到孔隙压力变化。因此，我们预计，在实验室实验中处于不排水或准不排水条件时，将会遇到压力变化的问题。我们计划在不久的将来进行此类实验，以便

对此进行检验。

此外，我们可以预期在大场尺度上应用这一扩展，此时假设处于准静态、低频条件。这类条件在深层储层、地震测量或断层带的应力状态中十分典型。所谓的双重孔隙度扩展（两组彼此隔离的各向同性孔隙组）已用于研究储层降压期间流体的流动模式（Berryman，2002）。遵循 Backus（1962）的思路，地震波长足够长，因此可将薄层视为有效各向异性介质。类比而言，我们可以将此类材料视为具有多个彼此隔离、但会影响整体响应的孔隙组。类似地，若假设断层带中存在低频应力，不同集合可能导致不同的流体含量变化。

对孔弹性介质的微观力学描述可以采用整体方式（孔隙组影响），也可以逐个孔隙进行描述（孔隙影响）。前一种方法描述连通孔隙，其中孔隙之间的连接本身对力学性质影响可忽略，但会使同一孔隙组内的压力均匀。后一种方法假设孔隙之间不存在连接，因此孔隙尺度上的压力会有所不同（压力极化）。采用这两种方法计算出的有效弹性可能不同，但这种差异只有在存在裂缝状孔隙时才会产生影响。孔隙组影响方法可能与有效介质理论的观点不一致（关注介观尺度而非微观尺度），但始终能提供所需的孔弹性系数。我们认为，只要与孔隙影响方法不存在严重矛盾，就可以自由使用该方法。如果两者存在矛盾，且研究对象包含裂缝，我们建议谨慎处理；在这种情况下，应通过实验室实验验证孔隙组影响方法的正确性。对于表明压力存在差异的常规三轴试验，我们建议采用使用孔隙影响方法的诱导横向各向同性对称性。

如果通过假设不排水情形，将孔弹性系数与微观结构联系起来，那么我们推测，这些系数可以用于表达式 (1)–(2)，其中考虑的是任意情形（不一定是不排水情形）。换言之，微观力学或许能够间接关联到中间孔隙弹性状态，在这些状态中，时间依赖性会发挥作用。关于表达式 (1)–(2) 之外更全面的时间依赖性考量（其中纳入了变化的渗透率和孔隙组间流体流动），请参见我们的姊妹论文（Adamus 等，2023）。

5 结论

我们提出了各向异性孔隙弹性理论的一种扩展，其中考虑了孔隙连通的各种情景。原先关于单个相互连通的非均质体集合的方法，被推广到彼此隔离的多个集合（孔隙度簇）。流体含量变化可能因集合而异

；对其求和即可得到有效介质的总流体含量变化。每个集合由一个独特的储存系数和类斯凯普顿张量描述。各集合的储存系数相加可得总储存系数，而类斯凯普顿系数则应仅视为特定集合的孔隙弹性特征。我们扩展理论的构想源自所谓孔隙压力极化的概念。此外，我们采用了关于流体对孔隙影响的经典微观力学描述，其中每个孔隙都被单独处理（孔隙影响方法）。我们表明，只有当一个集合中的孔隙具有相同的形状和取向时，才能成功运用孔隙影响方法求得类斯凯普顿系数和储存系数。若情况并非如此，我们则提出另一种描述方法（集合影响方法），该方法总能得到这些系数。由此，我们在微观力学（有效方法）与孔隙弹性（扩展比奥理论）之间搭建了桥梁。尽管经典的微观力学描述通常无法纳入比奥理论，但它可作为流体效应参照（Δ_I 与 Δ_{II}相比）。我们通过数值计算展示了这两种方法之间的差异。微观力学方法的选择至关重要，尤其是在涉及裂缝的情况下。我们的讨论假设采用非相互作用近似。当孔隙浓度较高时，这可能导致误差。因此，本文给出的表达式应仅视为适用于中等孔隙密度的情形，或作为今后研究相互作用情形的基础。

此外，我们证明，通过插入$n \geq 3$ 垂直（轴向）且定向排列的裂缝组，并使其围绕对称轴均匀分布，可以得到横向各向同性超额柔度张量（CTI对称性）。组诱导对称性是CTI的一种特例，此时必须满足 $\beta_{1133} = 0$ 。此外，也可以插入水平（径向）裂缝组，但这不会影响对称性条件。

致谢

本研究获得英国自然环境研究理事会（NERC）资助，资助项目为“受应力岩石中孔隙弹性各向异性的量化”，项目编号 NE/N007826/1 和 NE/T00780X/1。

参考文献

Adamus, F. P., Healy, D., Meredith, P. G., Mitchell, T. M., 和 Stanton-Yonge, A.（2023年）。各向异性孔隙弹性的多孔扩展：固结及相关系数。《地球物理研究杂志：固体地球》，（待投稿）。

Backus, G. E.（1962年）。水平层理产生的长波弹性各向异性。《地球物理研究杂志》，67:4427–4440。Beeler, N. M., Simpson, R. W., Hickman, S. H., 和 Lockner, D. A.（2000年）。孔隙流体压力、表观摩擦与库仑破坏。《地球物理研究杂志：固体地球》，105:25533–25542。Berryman, J. G.（2002年）。将孔隙弹性分析扩展至双重孔隙材料：微观地质力学的新技术。《工程力学杂志》，128:840–847。Biot, M. A.（1941年）。三维固结的一般理论。《应用物理学杂志》，12:155–164。Biot, M. A.（1956年）。多孔材料弹性与固结方程的一般解。《应用力学杂志》，78:91–96。Biot, M. A.（1962年）。多孔介质中的变形力学与声传播。《应用物理学杂志》，33:1482–1498。Chen, F., Sevostianov, I., Giraud, A., 和 Grgic, D.（2018年）。孔隙凹度与长宽比对多孔材料弹性性质的综合影响。《国际固体与结构杂志》，134:161–172。Cheng, A. H.-D.（1997年）。各向异性孔隙弹性的材料系数。《国际岩石力学与采矿科学杂志》，34:199–205。Cocco, M. 和 Rice, J. R.（2002年）。地震相互作用库仑应力分析中的孔隙压力与孔隙弹性效应。《地球物理研究杂志》，107:1–17。Dormieux, L., Kondo, D., 和 Ulm, F.-J.（2006年）。微孔力学。Wiley。Eshelby, J. D.（1957年）。椭球形夹杂弹性场的确定及相关问题。《英国皇家学会学报 *A*辑》，241:376–396。Geertsma, J.（1957年）。流体压力下降对多孔岩石体积变化的影响。《美国采矿、冶金和石油工程师协会石油学报》，210:331–340。Grechka, V. 和 Kachanov, M.（2006年）。裂隙岩石的有效弹性：研究进展一览。《地球物理学》，71:W45–W58。Gu´eguen, Y. 和 Sarout, J.（2009年）。地壳岩石中的裂纹诱导各向异性：预测的干燥及流体饱和Thomsen参数。《地球物理与行星内部》，172:116–124。Hart, D. J. 和 Wang, H. F.（1995年）。贝雷亚砂岩和印第安纳石灰岩完整孔隙弹性模量集合的实验室测量。《地球物理研究杂志》，100:17741–17751。

Herman, B.（1945）。各向异性介质理论的一些定理。苏联科学院学报´（*Doklady*），48：89–92。Ji, S., Sun, S., Wang, Q. 和 Marcotte, D.（2010）。地壳和上地幔中常见岩石的 Lam´é 参数。《地球物理研究杂志》，115(B6)：1–15。Kachanov, M.（1980）。含裂纹介质的连续介质模型。《工程力学杂志》，106：1039–1051。Kachanov, M. 和 Sevostianov, I.（2018）。《材料微观力学及其应用》。Springer。Lockner, D. A. 和 Stanchits, S. A.（2002）。砂岩对偏应力变化的不排水孔隙弹性响应。《地球物理研究杂志：固体地球》，107：1–14。Mehrabian, A.（2018）。多重孔隙固体的孔弹性常数。《国际工程科学杂志》，132：97–104。Mehrabian, A. 和 Abousleiman, N. A.（2014）。广义Biot理论与多重孔隙度、多重渗透率孔隙弹性的Mandel问题。《地球物理研究杂志：固体地球》，119：2745–2763。O'Connell, R. J. 和 Budiansky, B.（1974）。干燥和饱和裂纹固体中的地震波速度。《地球物理研究杂志》，79：5412–5426。O'Connell, R. J. 和 Budiansky, B.（1977）。流体饱和裂纹固体的黏弹性性质。《地球物理研究杂志》，82：5719–5736。Oda, M.（1986）。非连续地质材料的组构张量。《土壤与基础》，22：96–108。Rizzo, R. E., Healy, D., Heap, M. J. 和 Farrell, N. J.（2018）。利用二维小波分析检测不同有效压力下变形砂岩中的应变局部化起始。《地球物理研究杂志：固体地球》，123：460–478。Sayers, C. 和 Kachanov, M.（1995）。脆性岩石中微裂纹诱导的弹性波各向异性。《地球物理研究杂志》，100：4149–4156。Schoenberg, M. 和 Helbig, K.（1997）。正交各向异性介质：垂直裂缝地层中的弹性波行为建模。《地球物理学》，62：1954–1974。Schoenberg, M. 和 Sayers, C. M.（1995）。裂隙岩石的地震各向异性。《地球物理学》，60：204–211。Shafiro, B. 和 Kachanov, M.（1997）。具有各种形状流体充填孔隙的材料：有效弹性性质与流体压力极化。《国际固体与结构杂志》，34：3517–3540。Wong, T. F.（2017）。含裂纹岩石中的各向异性孔隙弹性。《地球物理研究杂志：固体地球》，122：1–15。

符号列表

希腊字母

标量
γ := 长宽比
δ := 流体因子
ζ := 流体含量变化
θ := 垂直裂缝组之间的夹角
ν := 固相的泊松比
ϕ := 体积分数
φ := 方位角ψ := 非零角

张量
α_{ij} := 2^{nd} 秩裂纹密度张量
$\beta_{ijk\ell}$:= 4^{th} 秩裂纹密度张量
$\Delta_{ijk\ell}$:= 流体效应
δ_{ij} := 克罗内克δ
ε_{ij} := 应变张量
σ_{ij} := 应力张量

罗马字母

标量
I := 孔隙影响方法
II := 集合影响方法
a := 圆形裂纹的比率
c := 闭合或连通孔隙
d := 干孔隙
E := 固相的杨氏模量
e_c := 单裂纹密度
K_0 := 固相的体积模量K_d := 干孔隙的体积模量K_f := 流体相的体积模量m := 集合（或子集）中的孔隙数量n := 集合（或子集）的数量
p := 特定集合（或子集）p_f := 孔隙压力
R := 相对偏差（误差）S := 储集系数u := 不排水实体V := 介质体积x := 介质中的孔隙总数x_i := 坐标轴y := 未知量或常数Z := 裂纹超额柔度

张量
B_{ij} := Skempton张量
$H_{ijk\ell}$:= 干燥超额柔量张量
$\Delta H_{ijk\ell}$:= 饱和柔量张量
n_i := 裂纹面的法线
Q_{ij} := 压力极化张量
S_{ijkl} := 多孔骨架的柔度张量
S^0_{ijkl} := 固相的柔度张量

B 孔弹性参数的性质

下面讨论 $S^{(p)}$、 $B^{(p)}_{ij}$ 、 $p^{(p)}_f$ 和 $\zeta^{(p)}$ 的一些关键性质；这些孔弹性参数描述介观尺度上的不同集合。本文将展示这些参数与其整体对应参数之间的关系；后者描述的是具有单一孔隙度（而非多重孔隙度）的介质，这正是原始的比奥情形。

在不排水条件下，储存系数不依赖于孔隙压力——该压力在集合中必须保持恒定，但在介质中可以变化。因此，该系数不必像类斯凯普顿张量或显然如前所述的压力那样，严格地与某个孔隙集合关联，而是可以

在单个孔隙或整体介质等其他尺度上进行考察。换言之，储存系数是一个与孔隙间连接关系无关的标量。因此，我们可以结合定义（19）和（11），将总储存系数 S_{tot} 表示为

$$S_{tot}=\sum_{p=1}^{n}S^{(p)}=\sum_{p=1}^{n}\phi^{(p)}{K_d^{(p)}}^{-1}+\sum_{p=1}^{n}\phi^{(p)}\left(K_f^{-1}-K_0^{-1}\right)=\sum_{p=1}^{n}\left(\phi^{(p)}\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}H_{iijj}^{(p)}\right)+\sum_{p=1}^{n}\phi^{(p)}\left(K_f^{-1}-K_0^{-1}\right). \tag{B.1}$$

参照表达式（30），我们可以类似地定义多个集合的干燥超额柔度与整个有效介质的干燥超额柔度之间的关系， $H_{ijk\ell}$。可写为

$$\phi_{tot}H_{ijk\ell}=\sum_{p=1}^{n}\phi^{(p)}H_{ijk\ell}^{(p)}\,. \tag{B.2}$$

利用上述结果，可将（B.1）改写为

$$S_{tot}=\phi_{tot}\left(\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}H_{iijj}+K_f^{-1}-K_0^{-1}\right)=\phi_{tot}\left(K_d^{-1}+K_f^{-1}-K_0^{-1}\right)=:S\,. \tag{B.3}$$

我们看到， S_{tot} 等价于具有一个连通孔隙度的介质的储存系数， S。

相反，类斯凯普顿张量和孔隙压力必须与孔隙连通相关联。它们分别与各个集合相关，因此必须视为集合的属性；所以，不引入上述参数的总值。尽管如此，我们仍可比较针对具有一个连通孔隙度的介质计算得出的整体斯凯普顿张量（或压力），以及针对同一介质但具有分离孔隙组时得到的各集合斯凯普顿系数（或压力）。整体连通斯凯普顿系数可表示为

$$B_{ij}:=\frac{3\sum_{k=1}^{3}H_{ijkk}}{K_d^{-1}+K_f^{-1}-K_0^{-1}}=\frac{3\phi_{tot}\sum_{k=1}^{3}H_{ijkk}}{S}=\frac{3\sum_{p=1}^{n}\left(\phi^{(p)}\sum_{k=1}^{3}H_{ijkk}^{(p)}\right)}{\sum_{p=1}^{n}S^{(p)}}\,, \tag{B.4}$$

wh此处我们利用了关系式（B.2）。如果 $K_d^{(p)}$ 在各集合间保持恒定，那么 B_{ij} 可简化为

$$B_{ij}=\frac{3\sum_{p=1}^{n}\left(\phi^{(p)}\sum_{k=1}^{3}H_{ijkk}^{(p)}\right)}{\phi_{tot}\left({K_d^{(p)}}^{-1}+K_f^{-1}-K_0^{-1}\right)}=\frac{\sum_{p=1}^{n}\phi^{(p)}B_{ij}^{(p)}}{\phi_{tot}}=\overline{B_{ij}^{(p)}}\,, \tag{B.5}$$

其中，上横线表示按各孔隙集合的体积分数加权的平均值。根据关系式 (4)，关于连通孔隙压力 p_f 和孔隙组压力 $p_f^{(p)}$ 也可得出相同结论——当$K_d^{(p)}$ =为常数时，我们得到 $p_f=p_f^{(p)}$ 。

在排水条件下，总流体含量变化（加和标量）可写为

$$\zeta_{tot} = \sum_{p=1}^{n} \zeta^{(p)} = \frac{1}{3} \sum_{p=1}^{n} \left(S^{(p)} \sum_{k=1}^{3} \sum_{\ell=1}^{3} B_{k\ell}^{(p)} \sigma_{k\ell} \right) = \frac{n}{3} \sum_{k=1}^{3} \sum_{\ell=1}^{3} \overline{S^{(p)} B_{k\ell}^{(p)}} \sigma_{k\ell} \,. \tag{B.6}$$

此处，上横线表示算术平均值。如果 $S^{(p)}$ 在各集合中保持恒定——也就是说， $\phi^{(p)}$ 和 $K_d^{(p)}$ 均保持恒定——则有

$$\zeta_{tot} = \frac{n}{3} S^{(p)} \sum_{k=1}^{3} \sum_{\ell=1}^{3} \overline{B_{k\ell}^{(p)}} \sigma_{k\ell} = \frac{1}{3} S \sum_{k=1}^{3} \sum_{\ell=1}^{3} B_{k\ell} \sigma_{k\ell} =: \zeta \tag{B.7}$$

这相当于单一连通孔隙度的流体含量变化。

注意， $K_d^{(p)}$ 仅取决于孔隙形状。利用定义（11）和（31），可写为

$$K_d^{(p)} = \left(\sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} \frac{\sum_{c=1}^{m} \phi_c H_{iijj_c}}{\sum_{c=1}^{m} \phi_c} \right)^{-1} , \tag{B.8}$$

根据干态超额柔度的定义（Kachanov 和 Sevostianov，2018年），每个分量 $H_{ijk\ell_c}$ 都取决于长宽比和孔隙取向。不过，由于分量求和，张量（以及孔隙）的取向并不重要。因此，从一个集合到另一个集合

$$K_d^{(p)} = \text{const} \implies \frac{\sum_{\mathrm{c}=1}^{\mathrm{m}} \phi_{\mathrm{c}} \gamma_{\mathrm{c}}}{\sum_{\mathrm{c}=1}^{\mathrm{m}} \phi_{\mathrm{c}}} = \text{const} \,. \tag{B.9}$$

总之，如果每个集合中的孔隙形状组成相同，则 B_{ij} （或 p_f）是 $B_{ij}^{(p)}$ （或 $p_f^{(p)}$ ）与 $\zeta = \zeta_{tot}$ 的加权平均值。在典型的地质情景中，孔隙形状因集合而异（$K_d^{(p)}$ ≠为常数），这会导致 $S = S_{tot}$、 $p_f \neq p_f^{(p)}$ 、 $B_{ij} \neq B_{ij}^{(p)}$ 和 $\zeta \neq \zeta_{tot}$。 ——

C $n \geq 3$ 垂直组的 CTI 诱导证明

定理 C.1. 考虑嵌入各向同性固相中的 $n \geq 3$ $(n \in \mathbb{N})$ 组完全相同、定向排列的干燥圆形裂缝。若每组裂缝均为垂直方向，且彼此之间被水平角$\theta = \pi/n$隔开，则会诱导出具有垂直对称轴的横向各向同性 ***(TI)***。

证明。 不失一般性，假设 x_3 是垂直轴。每个集合中的垂直裂纹均为定向排列，

这意味着它们的表面法线与 p 集合的法线相同，

$$\boldsymbol{n}^{(p)} = [\cos(p\theta)\,,\, \sin(p\theta)\,,\, 0]\,. \tag{C.1}$$

TI超额柔度矩阵 $\boldsymbol{H}$ 是有效介质成为横向各向同性的充分条件。若裂纹密度张量的分量

$$\alpha_{11} = \alpha_{22}\,, \qquad \beta_{1111} = \beta_{2222}\,, \qquad \beta_{1111} = 3\beta_{1122}\,. \tag{C.2}$$

上述条件定义了 TI对称性的一种特例，即所谓的圆柱横观各向同性（CTI）。如果每个集合都相同，也就是说，每个集合中的裂缝数量、尺寸和形状都相同，则可将式 (35)–(36) 改写为

$$\alpha_{ij} := \sum_{c=1}^{m} Z_{T_c} n_{i_c} n_{j_c} = Z_T \sum_{p=1}^{n} n_i^{(p)} n_j^{(p)}\,, \tag{C.3}$$

$$\beta_{ijk\ell} := \sum_{c=1}^{m} \left(Z_{N_c} - Z_{T_c}\right) n_{i_c} n_{j_c} n_{k_c} n_{\ell_c} = \left(Z_N - Z_T\right) \sum_{p=1}^{n} n_i^{(p)} n_j^{(p)} n_k^{(p)} n_\ell^{(p)}\,. \tag{C.4}$$

因此，条件 (C.2) 对应于

$$\sum_{p=1}^{n} \cos^2(p\theta) = \sum_{p=1}^{n} \sin^2(p\theta)\,, \qquad \sum_{p=1}^{n} \cos^4(p\theta) = \sum_{p=1}^{n} \sin^4(p\theta)\,, \qquad \sum_{p=1}^{n} \cos^4(p\theta) = 3\sum_{p=1}^{n} \cos^2(p\theta)\sin^2(p\theta)\,. \tag{C.5}$$

To 要证明集合诱导 CTI对称性，我们需要证明条件 (C.5) 成立。

引理C.2。 如果将定理 *C.1* 中的 n 个集合嵌入固相中，则条件 *(C.5)* 成立。

证明。 拉格朗日三角恒等式指出

$$\sum_{p=1}^{n} \cos(p\psi) = -\frac{1}{2} + \frac{\sin\left[\left(n + \frac{1}{2}\right)\psi\right]}{2\sin\left(\frac{\psi}{2}\right)} \tag{C.6}$$

对于 $\psi \neq 2k\pi\,(k = 0$、1、2、.....)。因此，若 $\psi = 2\theta = 2\pi/n$，则有

$$\sum_{p=1}^{n} \cos(2p\theta) = 0\,. \tag{C.7}$$

若 $\psi = 4\theta = 4\pi/n$，则有

$$\sum_{p=1}^{n} \cos(4p\theta) = 0 \tag{C.8}$$

这对 $n = 2$ 并不成立。我们可以将关系式 (C.7) 改写为

$$\begin{aligned}
\sum_{p=1}^{n} \cos^2(p\theta) &= \frac{n}{2} \\
\sum_{p=1}^{n} \cos^2(p\theta) &= n - \sum_{p=1}^{n} \cos^2(p\theta) \\
\sum_{p=1}^{n} \cos^2(p\theta) &= \sum_{p=1}^{n} \left[1 - \cos^2(p\theta)\right] \\
\sum_{p=1}^{n} \cos^2(p\theta) &= \sum_{p=1}^{n} \sin^2(p\theta)
\end{aligned} \tag{C.9}$$

或者写成

$$\begin{aligned}
\sum_{p=1}^{n} \cos^4(p\theta) &= n - 2\sum_{p=1}^{n} \cos^2(p\theta) + \sum_{p=1}^{n} \cos^4(p\theta) \\
\sum_{p=1}^{n} \cos^4(p\theta) &= \sum_{p=1}^{n} \left[1 - \cos^2(p\theta)\right]^2 \\
\sum_{p=1}^{n} \cos^4(p\theta) &= \sum_{p=1}^{n} \sin^4(p\theta)\,.
\end{aligned} \tag{C.10}$$

假设最后一个条件成立，即

$$\sum_{p=1}^{n} \cos^4(p\theta) = 3\sum_{p=1}^{n} \cos^2(p\theta)\sin^2(p\theta) \tag{C.11}$$

可改写为

$$\begin{aligned}
4\sum_{p=1}^{n} \cos^4(p\theta) &= 3\sum_{p=1}^{n} \cos^2(p\theta) \\
n + 2\sum_{p=1}^{n} \cos(2p\theta) + \sum_{p=1}^{n} \cos^2(2p\theta) &= 3\sum_{p=1}^{n} \cos^2(p\theta) \\
\sum_{p=1}^{n} \cos(2p\theta) + \sum_{p=1}^{n} \cos(4p\theta) &= 0\,.
\end{aligned} \tag{C.12}$$

根据关系式 (C.7) 和 (C.8)，假设 (C.11) 对 $n \geq 3$ 必须成立。 □

□