arXiv:2303.04522v1 [econ.TH] 8 Mar 2023

关于预序的不变扩张的注记

Peter Caradonna 和 Christopher P. Chambers

2023年3月9日

摘要

我们考察这样一个问题：将一个在给定变换族下保持不变的无环二元关系扩张为一种不变偏好。我们证明，当一个变换族为 $commutative$ 时，每个无环且不变的二元关系都可扩张。我们发现，一般而言，扩张集合对于许多关系对的排序是一致的，这些关系对：(i) 未被原关系排定；且 (ii) 不能仅凭不变性或传递性的考量加以排序。我们将这些额外蕴含解释为由不变性产生的样本外预测，并研究其结构。

1 引言

本文旨在研究在有限数据下，各种偏好模型所产生的样本外预测。我们具体考察在底层消费空间的某些变换下保持不变或不变的一类偏好。我们关注的是反事实预测，亦即此类偏好模型根据有限或不完整数据所作出的样本外预测。

形式上，给定一个消费空间 X，我们考虑一组变换 $\mathcal{M}$ of $X \to X$。我们关注的问题是：给定定义在 X 上的二元关系 $\succeq$，何时可以将其扩展为在 $\mathcal{M}$ 中的变换下保持不变的弱序，也就是说，对于所有 $\omega \in \mathcal{M}$，$x \succeq y \iff \omega(x) \succeq \omega(y)$。[1]

这项练习与刻画此类模型的经验内容这一问题密切相关。传统上，要证伪一项理论，就需要某个观测子集产生的含义在数据其他部分被观察到是错误的。就理性选择而言，人们已充分了解，其唯一可检验含义由显示偏好关系的传递闭包给出。在此背景下，我们发现，当要求

[1]请注意，当 $\mathcal{M}$ 仅包含一个元素，即恒等函数 $\mathrm{id}: X \to X$ 时，我们的问题便归结为将二元关系扩展为弱序这一经典问题。

通过不变偏好关系实现可理性化时，即使是简单的有限数据集，也会产生丰富得多的样本外预测。

1.1 相关文献

这一研究方向的一项经典著作是 Dubra 等人（2004）。在这一框架中，个体在彩票之间进行选择，而“理性”被解释为满足独立性公理（以及传递性）。除此之外，该论文还证明，在一小组彩票上满足独立性公理，始终与在所有彩票组成的集合上满足独立性公理相一致。

这一领域的另一项经典参考文献是 Duggan（1999）。他保留了抽象框架，但对“理性”的解释施加了额外限制。他证明，一类相当广泛的理性概念最终都指向同一种观念。只要在备选项的一个子集上满足理性，我们就无法否定它在所有备选项组成的集合上都成立这一假设。

Demuynck（2009）研究了一个极为相关的问题。他的思路是考察应用于偏好关系的闭包算子。[2] 粗略而言，对于某些偏好的代数理论，存在一个满足该性质并包含给定预序的“最小”偏好关系。他为满足特定性质的代数结构提供了一般性的扩张结果。我们的研究也涉及若干闭包算子，不过我们并未使用这些术语。[3]

他的研究似乎首次证明，消费空间上的齐次且单调的预序存在齐次且单调的弱序扩张。我们的主要结果直接推论出，即使不要求单调性，同样的结论仍然成立。

Demuynck (2009) 着重于建立高度一般化的结果：可以有意义地考察任何能够生成封闭性的二元关系性质，并试图找出保证扩张结果成立的封闭性的最小条件。例如，他证明了关于偏好的凸性的结果，而我们的研究无法讨论这一问题。另一方面，这一结果的一般性意味着，对于每一种特定的代数结构，都需要进一步工作来确认其条件是否得到满足。我们的研究聚焦于范围较窄的一类代数性质，但能够推导出可直接应用的结果。

接下来，我们将关注一种相对较新的结构，它最近已被有效应用于显示偏好理论：Freer 和 Martinelli（2021，2022）提出的框架，该框架建立在 Demuynck (2009) 的基础上。这些研究中的经济结构被认为本质上是代数结构。

[2]参见 Ward（1942年），了解封闭性的一般理论。[3]特别是，传递闭包（包含给定关系的最小 m-相容关系），以及这两种封闭性的格论并（包含给定关系的最小传递且 m-相容关系）。

作者假设，偏好满足一种广义的拟线性概念。这里有必要稍作形式化说明。他们设想存在一个变换函数 m，将每个备选项映射到另一个备选项，并希望检验相对于该变换函数具有“相容性”的偏好的理性。其条件属于显示偏好条件，要求不存在某些类型的环。不过，广义 m-相容性这一概念的方法在此首次出现。

我们此前已经提到 Dushnik 和 Miller（1941年）的贡献。经济学领域的多位作者都关注过偏序或预序的帕累托表示。抽象方法包括 Donaldson 和 Weymark（1998年）、Bossert（1999年）、Weymark（2000年）以及 Alcantud（2009年）的研究。

我们的工作不预设任何拓扑学概念，但经济学中许多涉及扩张的研究都非常重视拓扑考量。Aumann（1962年、1964年）、Peleg（1970年）和 Levin（1983年）的研究是经典文献，但此后该理论已有长足发展。特别是，Ok（2002年）如今可被视为一部典范性文献。[4]

在具体的经济环境中，也能找到类似的表示，例如期望效用偏好理论（Dubra 等人（2004）; Gorno（2017年））、对菜单的 Kreps 式偏好（Nehring 和 Puppe（1999年）），或成就排序（Chambers 和 Miller（2018年））。

2 交换族

设 X 为一个集合，且 $\mathcal{M}$ 为一个非空的变换集合 $X \to X$。若二元关系 $\succeq$ 在 X 上满足以下条件，则称其为 $\mathcal{M}$-相容：对于所有 x、$y \in X$ 和$\omega \in \mathcal{M}$,

$$x \succeq y \quad \Longrightarrow \quad \omega(x) \succeq \omega(y)$$

and

$$x \succ y \quad \Longrightarrow \quad \omega(x) \succ \omega(y).$$

如果反向蕴含也成立，则称关系 $\succeq$ 为强相容。如果不存在 $k \geq 2$ 及互不相同的x_1、.....、 $x_k \in X$ 使得 $x_1 \succeq x_2 \succeq \ldots x_k \succ x_1$，则称该关系为无环。

对于二元关系 $\succeq$，其扩张是满足 $\succeq \subseteq \succeq'$ 且$\succ \subseteq \succ'$的关系 $\succeq'$。如果二元关系是自反且传递的，则称其为预序；如果它是反对称的预序，则称其为偏序。弱序是完备预序，而线性序是完备偏序。[5] 当 $x \succeq y$ 和 $y \succeq x$均不成立时，我们使用记号$x \parallel y$。

如果满足以下三个假设，我们就称 $\mathcal{M}$ 为交换族：

[4]另请参阅近期关于非传递偏好的进一步推广研究；*e.g.* Evren 和 Ok（2011年）；Nishimura 和 Ok（2016年）等。[5]自反： $x \succeq x$。完备： $x \succeq y$ 或 $y \succeq x$。传递： $x \succeq y$ 且 $y \succeq z$ 蕴含 $x \succeq z$。反对称： $x \succeq y$ 且 $y \succeq x$ 蕴含 $x = y$。

(i) 交换性：对于所有 $\omega, \omega' \in \mathcal{M}$, $\omega \circ \omega' = \omega' \circ \omega$。(ii) 恒等元：映射 id : $X \to X$，定义为 $\mathrm{id}(x) = x$，是 $\mathcal{M}$ 的一个成员。(iii) 封闭性：对于所有 ω, $\omega' \in \mathcal{M}$，它们的复合 $\omega \circ \omega' \in \mathcal{M}$。

鉴于我们考虑的是 $\mathcal{M}$-相容的二元关系，唯一的限制性假设是交换性。如果 $\mathcal{M}$ 不满足 (ii) 和 (iii)，但某个二元关系是 $\mathcal{M}$-相容的，那么将恒等元及所有有限复合都纳入 $\mathcal{M}$ 后，该关系仍然相容。因此，不失一般性，可以假设 $\mathcal{M}$ 是 X上的变换幺半群；在本节中，我们还将假设这个幺半群是可交换的。

我们的第一个结果表明，当 $\mathcal{M}$ 是一个交换族时，每个无环的、$\mathcal{M}$-相容的关系都存在一个 $\mathcal{M}$-相容的弱序扩张。

定理1. 设 $\mathcal{M}$ 是一个交换族，且 $\succeq$ 是一个无环的、 $\mathcal{M}$-相容的二元关系。那么， $\succeq$ 存在一个强 $\mathcal{M}$-相容的弱序扩张。

我们用一个例子来说明这一结果；据我们所知，文献中似乎尚无此例。

例 1. 设 $X = \mathbb{R}^L_+$，并且对每个 $\alpha > 0$，令 $\omega_\alpha(x) = \alpha x$。注意，族 $\mathcal{M} = \{\omega_\alpha\}_{\alpha>0}$ 是一个交换族。当且仅当对每个 x、 $y \in \mathbb{R}^L_+$ 和 $\alpha > 0$，都有 $x \succeq y \iff \alpha x \succeq \alpha y$时，预序 $\succeq$ 才是 $\mathcal{M}$-相容的。这种预序称为齐次的。定理1表明，任意齐次预序都可以扩张为齐次弱序；显然，只要 X 是任意实向量空间中的一个锥，这一结果仍然成立。Demuynck (2009) 证明，每个单调且齐次的预序都存在一个单调且齐次的弱序扩张；这一结论可由我们的定理1推出，只需令 $\succeq$ 为一个包含 $\mathbb{R}^L_+$上通常的逐分量序的齐次关系即可。

例 2。考虑这样一种环境，其中 X 由一族带日期的奖励 $X = Y \times \mathbb{R}_+$ 构成，其中 Y是一个奖励集合；此处的相关文献包括 Fishburn 和 Rubinstein (1982) 以及 Halevy (2015)。一对 (y, t) 表示在日期 t对 y 的消费。在此设定中，平稳性意味着，若 $(y, t) \succeq (y', t')$，则 $(y, t + t'') \succeq (y', t' + t'')$；对于严格偏好，也有相应的表述。

因此，带日期的奖励的平稳性是关于 $\mathcal{M} = \{\omega_t\}_{t\geq 0}$的 M-相容性，其中 $\omega_t(y, t') = (y, t' + t)$。 $\mathcal{M}$ 构成一个交换族，因此根据定理1，每个平稳预序都可扩张为一个平稳弱序。

例3。我们利用定理1，说明如何证明 Dubra 等人（2004）的一个非拓扑类比。设 (Y, Σ) 是某个可测空间，令 $\Delta(Y)$ 为 (Y, Σ) 上所有可列可加概率测度组成的集合。称 $\succeq$ 在 $\Delta(Y)$ 上满足有理独立性，若对于所有 $p, q, r \in \Delta(Y)$ 和 $\alpha \in \mathbb{Q} \cap (0, 1]$, $p \succeq q$，当且仅当 $\alpha p + (1 - \alpha)r \succeq \alpha q + (1 - \alpha)r$。

将 $\succeq$ 扩展到所有有界变差的有符号测度组成的集合，定义如下。称 $\nu \succeq^* \nu'$，当且仅当存在 $\alpha \in \mathbb{Q}$ 使得 $\alpha > 0$，且 $p, q \in \Delta(Y)$ 满足 $p \succeq q$，其中 $(\nu - \nu') = \alpha(p - q)$。

注意，若 $\nu - \nu' = \alpha(p - q) = \beta(r - s)$ 且 $p \succeq q$，则不可能出现 $s \succ r$ (by by $\succeq$ 的有理独立性和传递性)。换言之，$\succeq^*$ （非正式地说）是 $\succeq$ 的扩张。[6] 同样，若 $\nu_1 \succeq^* \nu_2 \succeq^* \nu_3$，则类似地很容易证明 $\nu_1 \succeq^* \nu_3$。

现在注意，对于 $\succeq^*$，对任意有符号测度 ρ，当且仅当 $\nu + \rho \succeq^* \nu' + \rho$ 时，$\nu \succeq^* \nu'$。令 $\mathcal{M}$ 由所有映射 $\omega_\rho(\nu) = \nu + \rho$ 组成，它们显然在 ρ 上彼此可交换。因此，根据定理1，我们可以将其扩张至所有有符号测度上的 $\succeq'$，同时保持 $\mathcal{M}$-相容性，正如所需。

最后请注意，将 $\succeq'$ 限制到 $\Delta(Y)$ 后满足理性独立性：如果 $p \succeq' q$ 且 $\alpha \in \mathbb{Q} \cap (0, 1],$，那么根据传递性以及 $\succeq'$ 相对于每个 m_ρ都可交换这一事实，我们必有 $\alpha p \succeq' \alpha q$。[7] 因此，$\alpha p + (1 - \alpha)r \succeq' \alpha q + (1 - \alpha)r$，严格偏好也有类似结论。

2.1 反事实预测

即使对于交换族的 $\mathcal{M}$-相容性情形，通常也会存在无法仅凭不变性或传递性单独解释的样本外预测。

例 4。设 $X = \{a, b\} \times \mathbb{Z}$，其中 $m(i, z) = (i, z + 1)$。定义 $\mathcal{M} = \{\text{id}, m, m \circ m, \cdots\}$，并令 $\succeq$ 为一个预序，其唯一的非平凡排序是 $(a, z) \succ (b, z + 1)$ 和 $(a, z) \succ (b, z - 1)$。注意，$\succeq$ 确实对交换族 $\mathcal{M}$满足 $\mathcal{M}$-相容性。然而，每个满足 $\mathcal{M}$-相容性的弱序扩张 $\succeq^*$ 都必须有 $(a, 0) \succ^* (b, 0)$。为说明原因，反设存在这样一个扩张，使得 $(b, 0) \succeq^* (a, 0)$。那么 $(b, 0) \succeq^* (a, 0) \succ^* (b, 1) \succeq^* (a, 1) \succ^* (b, 0)$。第三个排序由 $\mathcal{M}$-相容性得出，第二个和第四个则由扩张性质得出。这违反了传递性。反过来，很容易构造满足 $\mathcal{M}$-相容性的扩张，使得 $(a, 0) \succ^* (b, 0)$。

3 非交换族

若不要求 M 具有交换性，则定理1的结论不再成立。如下例所示，究其原因，大致在于对于某些彼此$\succeq$不可比较的选项，可能存在多个相互矛盾的强制集合。

[6]这只是非正式的，因为 $\succeq^*$ 和 $\succeq$ 定义在不同的集合上。[7]这可通过直接的归纳论证得出。例如，我们来证明：若 $p \succeq' q$，则 $(1/2)p \succeq' (1/2)q$。否则，根据完备性，$(1/2)q \succ' (1/2)p$。于是 $q = (1/2)q + (1/2)q \succ' (1/2)q + (1/2)p \succ' (1/2)q + (1/2)q$，其中每一步 $\succ'$ 都由一次 $m_{(1/2)q}$-相容性应用得出。进而由传递性可知 $q \succ' p$，矛盾。

例5。设 $Z = \{a, b, a', b', x, y\}$ 表示一个奖品空间， $X = Z^{\mathbb{N}}$表示所有取值于 Z 的无限期消费流 $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \ldots)$所构成的空间。对于每个 $z \in Z$，定义 $\omega_z(\sigma)$ 为如下消费流：将奖品 z 添加到第一期，并将 σ 中的所有项向后移一期:

$$\omega_z(\sigma) = (z, \sigma_1, \sigma_2, \ldots).$$

令 $\mathcal{M}$ 表示由变换 $\{\omega_z\}_{z \in Z}$ 生成的自由幺半群。[8]这里， $\mathcal{M}-coherency$ 与 Koopmans（1960）的平稳性公理一致。令 $\succeq$ 为由以下关系组成的预序:

$$\begin{aligned} \omega_a(\sigma_x) &\succ \omega_b(\sigma_y) \\ \omega_b(\sigma_x) &\succ \omega_a(\sigma_y) \\ \omega_{a'}(\sigma_x) &\succ \omega_{b'}(\sigma_y) \\ \omega_{b'}(\sigma_x) &\succ \omega_{a'}(\sigma_y) \end{aligned} \tag{1}$$

其中， $\sigma_x = (x, \ldots)$ 和 $\sigma_y = (y, \ldots)$ 表示常值 x 和 y 序列，以及这些关系在 $\mathcal{M}$ 的元素作用下所有向前和向后的“平移”。该关系显然具有传递性，并且按构造满足 $\mathcal{M}$-相干性。然而，不存在满足 $\mathcal{M}$-相干性的扩张：任何此类扩张 $\succeq^*$ 都必须规定 σ_x 与 σ_y 之间的关系；但（1）中的前两个关系排除了 $\sigma_y \succeq^* \sigma_x$，而后两个关系排除了 $\sigma_x \succeq^* \sigma_y$。因此，尽管 $\succeq$ 与 Koopmans 的平稳性公理相容，却不存在将 $\succeq$ 扩张为保持平稳性的偏好关系的方式。

前述例子表明，一般而言，平稳预序并不一定存在平稳弱序扩张。

4 结论

未来的研究将探讨非交换族的更多结构，以及拓扑考量。Ok 和 Riella（2014, 2021）的论文与此相关，其中研究了群而非幺半群所涉及的相关问题。

定理1的证明

引理1. 假设某个无环关系满足 $\mathcal{M}$-相容性。那么它的传递闭包也满足这一性质。

证明。设 $\succeq$ 是满足 $\mathcal{M}$-相容性的无环关系。定义 $\succeq^T$ 为其传递闭包。设 x、$y \in X$ 满足 $x \succeq^T y$。则存在 k ，且

[8]也就是说， $\mathcal{M}$ 中的一个元素由变换 $\{\omega_z\}_{z \in Z}$ 的有限复合构成。我们可以将这样的变换视为字母表 Z 上的有限字符串。

$x = x_1 \succeq \ldots \succeq x_k = y$。因此，$\omega(x) = \omega(x_1) \succeq \ldots \succeq \omega(x_k) = \omega(y)$，所以对于任意 $\omega \in \mathcal{M}$，都有 $\omega(x) \succeq^T \omega(y)$。

现在进一步假设 $y \succeq^T x$ 不成立。我们要证明，对于任意 $\omega \in \mathcal{M}$，$\omega(y) \succeq^T \omega(x)$ 不成立。

由于 $y \succeq^T x$ 为假而 $x \succeq^T y$ 为真，因此存在一条链$x = x_1 \succeq \ldots x_k = y$，其中 $x_i \succ x_{i+1}$ 对某个 $i, i+1$ 成立（否则，若对所有i都满足 $x_i \sim x_{i+1}$，我们就可以沿着这条链回溯并 $y \succeq^T x$）。因此，$\omega(x_1) \succeq \ldots \succeq \omega(x_k)$，其中对某个 i，$i+1$，$\omega(x_i) \succ \omega(x_{i+1})$。由于 $\succeq$ 是无环的，因此不存在从 $\omega(x_k)$ 到 $\omega(x_1)$ 的链，所以特别地，$\omega(x_k) \succeq^T \omega(x_1)$ 为假。由于 $\omega \in \mathcal{M}$ 是任意的，结论成立。 □

注记。$\succeq$ 的传递闭包是 $\succeq$ 的扩张，当且仅当 $\succeq$ 是无环的。这是 Richter（1966年、1971年）和 Hansson（1968年）中的论证所得到的一个简单推论，而这些论证以 Szpilrajn（1930年）的工作为基础。另见 Suzumura（1976年）以及 Chambers 和 Echenique（2016年）。

引理 2。设 $\mathcal{M}$ 是一个交换族。那么，每个 $\mathcal{M}$-相容预序都有一个强 $\mathcal{M}$-相容的预序扩张。

证明。设 $\succeq$ 是 $\mathcal{M}$-相容的。定义 $\succeq'$ 如下：若存在 ω_1、……、$\omega_k \in \mathcal{M}$使得（$\omega_1 \circ \ldots \omega_k$）$(x) \succeq (\omega_1 \circ \ldots \omega_k)(y)$，则 $x \succeq' y$。

显然 $\succeq \subseteq \succeq'$，现在设 $x \succ y$，并反设 $y \succeq' x$；于是存在 ω_1、……、$\omega_k \in \mathcal{M}$ 使得 $(\omega_1 \circ \ldots \omega_k)(y) \succeq (\omega_1 \circ \ldots \omega_k)(x)$，这与 $\succeq$ 是 $\mathcal{M}$-相容的事实矛盾。因此，$\succeq'$ 是 $\succeq$的扩张。

我们断言 $\succeq'$ 具有传递性。假设 $x \succeq' y \succeq' z$。由于 $x \succeq' y$，存在 $\omega_1, \ldots, \omega_k \in \mathcal{M}$，使得 $(\omega_1 \circ \ldots \circ \omega_k)(x) \succeq (\omega_1 \circ \ldots \omega_k)(y)$。与 $y \succeq' z$ 类似，存在 $\omega'_1, \ldots, \omega'_l \in \mathcal{M}$，使得 $(\omega'_1 \circ \ldots \omega'_l)(y) \succeq (\omega'_1 \circ \ldots \omega'_l)(z)$。根据 $\succeq$ 的相容性以及 $\mathcal{M}$ 的交换性，我们可以得出 $(\omega_1 \circ \ldots \circ \omega_k \circ \omega'_1 \circ \ldots \omega'_l)(x) \succeq (\omega_1 \circ \ldots \circ \omega_k \circ \omega'_1 \circ \ldots \omega'_l)(y)$ 且 $(\omega_1 \circ \ldots \circ \omega_k \circ \omega'_1 \circ \ldots \omega'_l)(y) \succeq (\omega_1 \circ \ldots \circ \omega_k \circ \omega'_1 \circ \ldots \omega'_l)(z)$，因此 $(\omega_1 \circ \ldots \circ \omega_k \circ \omega'_1 \circ \ldots \omega'_l)(x) \succeq (\omega_1 \circ \ldots \circ \omega_k \circ \omega'_1 \circ \ldots \omega'_l)(z)$，从而 $x \succeq' z$。

我们断言 $\succeq'$ 是强相容的。首先证明它是相容的。假设 $x \succeq' y$ 且令 $\omega \in \mathcal{M}$。那么存在 $\omega_1, \ldots, \omega_k \in M$，使得 $(\omega_1 \circ \ldots \omega_k)(x) \succeq (\omega_1 \circ \ldots \omega_k)(y)$。由于 $\mathcal{M}$ 是一个交换族，且根据 $\succeq$的相容性，我们有 $(\omega_1 \circ \ldots \omega_k)\big(\omega(x)\big) \succeq (\omega_1 \circ \ldots \omega_k)\big(\omega(y)\big)$，因此$\omega(x) \succeq' \omega(y)$。假设 $x \succ' y$，并反设存在某个$\omega \in \mathcal{M}$，使得 $\omega(y) \succeq' \omega(x)$。那么根据定义，存在 $\omega'_1, \ldots \omega'_l \in \mathcal{M}$，使得 $(\omega'_1 \circ \ldots \omega'_l)\big(\omega(y)\big) \succeq (\omega'_1 \circ \ldots \omega'_l)\big(\omega(x)\big)$；根据定义，这意味着 $y \succeq' x$，矛盾。由此可知，$\succeq'$ 是相容的。

为说明它是强相容的，先假设 $\omega(x) \succeq' \omega(y)$；那么存在 $\omega_1, \ldots, \omega_k \in \mathcal{M}$，使得 $(\omega_1 \circ \ldots \omega_k \circ \omega)(x) \succeq (\omega_1 \circ \ldots \omega_k \circ \omega)(y)$，根据定义，这意味着 $x \succeq' y$。再假设 $\omega(y) \succeq' \omega(x)$ 不成立。反证，假设 $y \succeq' x$。那么同样存在$\omega_1, \ldots, \omega_k$，使得 $(\omega_1 \circ \ldots \omega_k)(y) \succeq (\omega_1 \circ \ldots \omega_k)(x)$。根据 $\succeq$的相容性，$(\omega \circ$

$\omega_1 \ldots \omega_k)(y) \succeq (\omega \circ \omega_1 \ldots \omega_k)(x)$。根据 $\mathcal{M}$ 的交换性，$(\omega_1 \circ \ldots \omega_k)\big(\omega(y)\big) \succeq (\omega_1 \circ \ldots \omega_k)\big(\omega(x)\big)$，因此 $\omega(y) \succeq' \omega(x)$，矛盾。 □

引理 3. 设 $\mathcal{M}$ 是一个交换族。设 $\succeq$ 是一个 $\mathcal{M}$-相容预序，并设 $w, z \in X$ 满足 $w \parallel z$（尤其是 $w \neq z$）。那么存在 $\succeq$ 的一个无环、 $\mathcal{M}$-相容扩张 $\succeq'$，使得 w 与 z 可比较。

证明。利用交换性， $\mathcal{M}$ 中函数的任意有限复合串都可以表示为：

$$f_1^{n_1} \circ f_2^{n_2} \circ \cdots \circ f_L^{n_L},$$

其中 $\{f_1, \ldots, f_L\} \subseteq \mathcal{M}$，且 $n_1, \ldots, n_L \in \mathbb{N}$.[9] 给定这样的表达式，定义 $\mathsf{f}\colon \mathcal{M} \to \mathbb{N}_0$ 为满足以下条件的唯一函数： $f_l \mapsto n_l$，并且 $g \mapsto 0$ 当且仅当 $g \notin \{f_1, \ldots, f_L\}$。

现在，为了导出矛盾，假设不存在能比较 w 与 z 的 $\succeq$ 的无环、 $\mathcal{M}$-相容扩张。那么，每个使 w 与 z 可比较的 $\mathcal{M}$-相容扩张都包含某个环；特别地，通过添加 $w \succ' z$ 和对与 $\mathcal{M}$ 中某个有限复合相对应的所有 f 添加 $\mathsf{f}(w) \succ' \mathsf{f}(z)$、通过添加 $z \succ' w$ 和对所有 f 添加 $\mathsf{f}(z) \succ' \mathsf{f}(w)$，或通过添加 $z \sim' w$ 和对所有 f 添加 $\mathsf{f}(z) \sim' \mathsf{f}(w)$ 而得到的最小扩张，都必须包含某个环。首先考虑 $\succeq' = \succeq \cup \succeq^*$，其中 $\succeq^*$ 包含所有形如 $w \succ^* z$ 的关系，以及对 $\mathcal{M}$ 中所有有限复合所对应的 f，形如 $\mathsf{f}(w) \succ^* \mathsf{f}(z)$ 的关系。因此，存在一个由以下两种形式的关系构成的环：

$$\begin{aligned} x &\succeq \mathbf{a}^1(w) & \mathbf{a}^1(w) &\succ^* \mathbf{a}^1(z) \\ \mathbf{a}^1(z) &\succeq \mathbf{a}^2(w) & \mathbf{a}^2(w) &\succ^* \mathbf{a}^2(z) \\ &\vdots & &\vdots \\ \mathbf{a}^{I-1}(z) &\succeq \mathbf{a}^I(w) & \mathbf{a}^I(w) &\succ^* \mathbf{a}^I(z) \\ \mathbf{a}^I(z) &\succeq x, \end{aligned} \tag{2}$$

对于某个 $x \in X$，其中左列仅包含 $\succeq$ 中的关系，右列则仅包含 $\succeq' \setminus \succeq$中的关系。注意， $I \geq 2$，且不失一般性，假设每个 $\mathbf{a}^i$ 都不相同。[10]

类似地，如果 $\succeq' = \succeq \cup \succeq^*$，其中 $\succeq^*$ 包含所有形如 $z \succ^* w$ 的关系，并且对于有限复合 f，$\mathsf{f}(z) \succ^* \mathsf{f}(w)$，那么就存在一个形式如下的环：

[9]不过请注意，一般而言，我们无法保证这种形式的表示是唯一的。例如，假设 $f\colon X \to X$ 是双射，并且 $\{f, f^{-1}\} \subseteq \mathcal{M}$。[10]如果 $I = 1$，那么我们有 $\mathsf{a}^1(z) \succeq x$ 和 $x \succeq \mathsf{a}^1(w)$，因此 $\mathsf{a}^1(z) \succeq \mathsf{a}^1(w)$。由于 $\succeq$ 是强 $\mathcal{M}$-相干的，这意味着 w 和 v 是 $\succeq$-相关的。

其形式为:

$$\begin{aligned} x' &\succeq \mathbf{b}^1(z) & \mathbf{b}^1(z) &\succ^* \mathbf{b}^1(w) \\ \mathbf{b}^1(w) &\succeq \mathbf{b}^2(z) & \mathbf{b}^2(z) &\succ^* \mathbf{b}^2(w) \\ &\vdots & &\vdots \\ \mathbf{b}^{J-1}(w) &\succeq \mathbf{b}^J(z) & \mathbf{b}^J(z) &\succ^* \mathbf{b}^J(w) \\ \mathbf{b}^J(w) &\succeq x', \end{aligned}$$

对于某个 $x' \in X$，其中左栏仍由 $\succeq$ 中的关系组成，右栏则仅由 $\succeq' \setminus \succeq$, $J \geq 2$ 中的关系组成，并且每个 $\mathbf{b}^j$ 都是唯一的。

最后，假设 $\succeq' = \succeq \cup \succeq^*$，其中 $\succeq^*$ 包含所有形如 $z \sim^* w$ 的关系，以及对于有限复合 $\mathbf{f}$，$\mathbf{f}(z) \sim^* \mathbf{f}(w)$ 的关系。根据假设，存在如下形式的环:

$$\begin{aligned} x'' &\succeq \mathbf{c}^1(x_1) & \mathbf{c}^1(x_1) &\sim^* \mathbf{c}^1(y_1) \\ \mathbf{c}^1(y_1) &\succeq \mathbf{c}^2(x_2) & \mathbf{c}^2(x_2) &\sim^* \mathbf{c}^2(y_2) \\ &\vdots & &\vdots \\ \mathbf{c}^{K-1}(y_{K-1}) &\succeq \mathbf{c}^J(x_K) & \mathbf{c}^K(a_K) &\sim^* \mathbf{c}^J(y_K) \\ \mathbf{c}^J(y_K) &\succeq x'', \end{aligned}$$

其中左栏中至少有一个关系是严格的，$K \geq 2$，每个 $\mathbf{c}^k$ 都是唯一的，并且对于所有 $k = 1, \ldots, K$, $\{x_k, y_k\} = \{w, z\}$。

定义:

$$\begin{aligned} \mathbf{p}^i &= \mathbf{a}^{i+1} - \mathbf{a}^i \\ \mathbf{q}^j &= \mathbf{b}^{j+1} - \mathbf{b}^j \\ \mathbf{r}^k &= \mathbf{c}^{k+1} - \mathbf{c}^k, \end{aligned}$$

其中我们定义指标 $I+1, J+1, K+1 \equiv 1$。注意，每个 $\mathbf{p}^i$、$\mathbf{q}^j$ 和 $\mathbf{r}^k$ 都不等于零函数 $\mathbf{0}$，并且:

$$\sum_{i=1}^{I} \mathbf{p}^i = \sum_{j=1}^{J} \mathbf{q}^j = \sum_{k=1}^{K} \mathbf{r}^k = \mathbf{0}.$$

考虑以下集合:

$$\begin{aligned} \tilde{A}_{wz} &= \left\{ \mathbf{r}^k \mid y_k = w,\ x_{k+1} = z \right\} \\ \tilde{A}_{zw} &= \left\{ \mathbf{r}^k \mid y_k = z,\ x_{k+1} = w \right\} \\ \tilde{A}_{ww} &= \left\{ \mathbf{r}^k \mid y_k = w,\ x_{k+1} = w \right\} \\ \tilde{A}_{zz} &= \left\{ \mathbf{r}^k \mid y_k = z,\ x_{k+1} = z \right\}. \end{aligned}$$

显然，这些集合覆盖 $\{\mathbf{r}^1, \ldots, \mathbf{r}^K\}$。定义：

$$\begin{aligned} A_{wz} &= \tilde{A}_{wz} \\ A_{zw} &= \tilde{A}_{zw} \setminus \tilde{A}_{wz} \\ A_{ww} &= \tilde{A}_{ww} \setminus \tilde{A}_{zw} \setminus \tilde{A}_{wz} \\ A_{zz} &= \tilde{A}_{zz} \setminus \tilde{A}_{ww} \setminus \tilde{A}_{zw} \setminus \tilde{A}_{wz}, \end{aligned}$$

如果这些集合非空，则如此；如果为空，则将其定义为 $\{\mathbf{0}\}$。根据假设，至少有一些集合必须包含非零元素。请注意，$\{\mathbf{r}^1$、.....、$\mathbf{r}^K\}$ 中的每个元素都恰好属于集合族 $\{A_{wz}, A_{zw}, A_{ww}, A_{zz}\}$ 中的一个集合。令 $\{\mathbf{s}_{wz}^m\}_{m=1}^{|A_{wz}|}$（分别为 $\{\mathbf{s}_{zw}^m\}_{m=1}^{|A_{zw}|}$、$\{\mathbf{s}_{ww}^m\}_{m=1}^{|A_{ww}|}$ 和 $\{\mathbf{s}_{zz}^m\}_{m=1}^{|A_{zz}|}$）表示 A_{wz}（分别为 A_{zw}、A_{ww} 和 A_{zz}）的枚举。

现在我们将证明矛盾：说明 $\succeq$ 包含一个环，这与我们关于它是预序的假设相矛盾。令 $\mathbf{h}$ 表示一个足够大的、具有有限支撑的映射 $M \to \mathbb{N}_0$。[11]

我们将依次考虑两种情况。

情况 1：$|A_{wz}| + |A_{zw}| > 0$。

为了构造我们的环，我们先在 $\succeq$ 中定义两条链，它们对于我们的构造至关重要。[12]

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{h}}(z) &\succeq (\bar{\mathbf{h}} + \mathbf{p}^1)(w) \\ &\succeq (\bar{\mathbf{h}} + \mathbf{p}^1 + \mathbf{s}_{wz}^1)(z) \\ &\quad\vdots \\ &\succeq \left(\bar{\mathbf{h}} + |A_{wz}| \sum_{i=1}^{I} \mathbf{p}^i + I \sum_{m=1}^{|A_{wz}|} \mathbf{s}_{wz}^m\right)(z) \\ &\quad\vdots \\ &\succeq \left(\bar{\mathbf{h}} + J\,|A_{wz}| \sum_{i=1}^{I} \mathbf{p}^i + IJ \sum_{m=1}^{|A_{wz}|} \mathbf{s}_{wz}^m\right)(z). \end{aligned}$$

这条链的第一部分，即到 $\left(\bar{\mathbf{h}} + |A_{wz}| \sum_{i=1}^{I} \mathbf{p}^i + I \sum_{m=1}^{|A_{wz}|} \mathbf{s}_{wz}^m\right)(z)$ 为止，按如下方式构造。对于每个 $l = 1, \ldots, I|A_{wz}|$，每个形如 $(\bar{\mathbf{h}} + \ldots + \mathbf{p}^l)(w)$ 的项后面都接着一个形如 $(\bar{\mathbf{h}} + \ldots + \mathbf{p}^l + \mathbf{s}_{wz}^l)(z)$ 的项；对于每个 $l = 0, \ldots, I|A_{wz}| - 1$，每个形如 $(\bar{\mathbf{h}} + \ldots + \mathbf{s}_{wz}^l)(z)$ 的项后面都接着一个形如 $(\bar{\mathbf{h}} + \ldots + \mathbf{p}^l + \mathbf{s}_{wz}^{l+1})(w)$ 的项，其中，$\mathbf{p}$ 上的 l 指标对 I 取模，而 s_{wz} 上的指标对 $|A_{wz}|$ 取模。

[11] 这里的“充分”仅指下列序列中的每个向量都保持非负。[12] 第一条链以 $|A_{wz}|$ 为索引，第二条链以 $|A_{zw}|$ 为索引；如果其中任一项为零，这些链便为空。

这条链的第二部分，即到$\left(\bar{\mathbf{h}} + J|A_{wz}|\sum_{i=1}^{I}\mathbf{p}^i + IJ\sum_{m=1}^{|A_{wz}|}\mathbf{s}_{wz}^m\right)(z)$为止，可通过将前 $I|A_{wz}|$ 步额外迭代 $|J|-1$ 次得到。

类似地，存在一条链：

$$\begin{aligned}
\bar{\mathbf{h}}(z) &\succeq (\bar{\mathbf{h}} + \mathbf{s}_{zw}^1)(w) \\
&\succeq (\bar{\mathbf{h}} + \mathbf{s}_{zw}^1 + \mathbf{q}^1)(z) \\
&\quad\vdots \\
&\succeq \left(\bar{\mathbf{h}} + J\sum_{m=1}^{|A_{zw}|}\mathbf{s}_{wz}^m + |A_{zw}|\sum_{j=1}^{J}\mathbf{q}^j\right)(z) \\
&\quad\vdots \\
&\succeq \left(\bar{\mathbf{h}} + IJ\sum_{m=1}^{|A_{zw}|}\mathbf{s}_{wz}^m + I|A_{zw}|\sum_{j=1}^{J}\mathbf{q}^j\right)(z).
\end{aligned}$$

将这些链首尾相接，便得到一条链：

$$\bar{\mathbf{h}}(z) \succeq \cdots \succeq \left(\bar{\mathbf{h}} + I|A_{zw}|\sum_{j=1}^{J}\mathbf{q}^j + J|A_{wz}|\sum_{i=1}^{I}\mathbf{p}^i + IJ\sum_{m=1}^{|A_{wz}|}\mathbf{s}_{wz}^m + IJ\sum_{m=1}^{|A_{zw}|}\mathbf{s}_{wz}^m\right)(z).$$

现在考虑对这条链进行如下修改：在第一个 $\mathbf{f}(z) \succeq \mathbf{g}(w)$ 关系之后，立即应用 IJ 次 A_{ww} 中的每个变换。类似地，在第一个 $\mathbf{f}(w) \succeq \mathbf{g}(z)$ 关系之后，插入 IJ 次 A_{zz} 中每个变换的重复。所得结果是一条链：

$$\bar{\mathbf{h}}(z) \succeq \cdots \succeq \left(\bar{\mathbf{h}} + I|A_{zw}|\sum_{j=1}^{J}\mathbf{q}^j + J|A_{wz}|\sum_{i=1}^{I}\mathbf{p}^i + IJ\sum_{k=1}^{K}\mathbf{r}^k\right)(z).$$

然而，由于 $\sum_i \mathbf{p}^i = \sum_j \mathbf{q}^j = \sum_k \mathbf{r}^k = \mathbf{0}$，这条链实际上是一个环。此外，由于左栏 $(*)$ 中的每个关系都出现在这个环中，其中至少包含一个严格关系，这与 $\succ$ 是预序的假设相矛盾。因此，存在一个 $\succeq$ 的 $\mathcal{M}$-相容扩张，使其比较 w 和 z。

情形 2：$|A_{wz}| + |A_{zw}| = 0$。

遵循情况 1 的思路，不过这里我们先构造一条如下形式的链：

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{h}}(z) &\succeq (\bar{\mathbf{h}} + \mathbf{p}^1)(w) \\ &\succeq (\bar{\mathbf{h}} + \mathbf{p}^1 + \mathbf{q}^1)(z) \\ &\vdots \\ &\succeq \left(\bar{\mathbf{h}} + J\sum_{i=1}^{I}\mathbf{p}^i + I\sum_{j=1}^{J}\mathbf{q}^j\right)(z)\end{aligned}$$

现在考虑对这条链作如下修改：在第一个 $\mathbf{f}(z) \succeq \mathbf{g}(w)$ 关系之后，立即依次应用 A_{ww} 中的每个变换。同样，在第一个 $\mathbf{f}(w) \succeq \mathbf{g}(z)$ 关系之后，插入依次应用 A_{zz} 中每个变换的步骤。结果得到一条链：

$$\bar{\mathbf{h}}(z) \succeq \cdots \succeq \left(\bar{\mathbf{h}} + I\sum_{j=1}^{J}\mathbf{q}^j + J\sum_{i=1}^{I}\mathbf{p}^i + \sum_{k=1}^{K}\mathbf{r}^k\right)(z).$$

与情况 1 类似地得出结论。

□

证明的其余部分采用标准的超限归纳论证。给定我们的 $\mathcal{M}$-相干预序。若 $\succeq_1$ 扩张了 $\succeq_2$，则称 $\succeq_1 \rhd \succeq_2$。根据引理 2，不失一般性地假设 $\succeq^*$ 是一个强 $\mathcal{M}$-相干预序。首先，对于任意由强 M-相干预序扩张构成的链 $\{\succeq_\lambda\}_\Lambda$，可得 $\overline{\succeq} = \bigcup_\Lambda \succeq_\lambda$ 也是一个强 $\mathcal{M}$-相干预序扩张。这是标准的：若 $x \succeq^* y$，则同样有 $x\overline{\succeq}y$；并且若再有 $x \succ^* y$，则不存在λ 使得 $y \succeq_\lambda x$。因此 $x\overline{\succ}y$。传递性是标准的。

现在证明 $\overline{\succeq}$ 具有相容性。假设 $(x, y) \in \overline{\succeq}$。那么存在$\lambda \in \Lambda$ 使得 $x \succeq_\lambda y$；由于 $\succeq_\lambda$ 是 $\mathcal{M}$-相容的，我们得出 $\omega(x) \succeq_\lambda \omega(y)$，进而得到 $\omega(x)\overline{\succeq}\omega(y)$。同样，若 $x\overline{\succ}y$，则对所有 λ，都有 $(y, x) \notin \succeq_\lambda$，因此，由于强 $\mathcal{M}$-相容性，$(\omega(y)\ \omega(x)) \notin \succeq_\lambda$。所以 $\omega(x)\overline{\succ}\omega(y)$。

最后，我们要证明 $\overline{\succeq}$ 也具有强相容性；因此，设 $x, y \in X$和 $\omega \in \mathcal{M}$ 满足 $\omega(x)\overline{\succeq}\omega(y)$。那么存在 λ 使得 $\omega(x) \succeq_\lambda \omega(y)$，因此，根据 $\succeq_\lambda$的强相容性，$x \succeq_\lambda y$。此外，若 $\omega(x)\overline{\succ}\omega(y)$，则不存在 λ 使得 $\omega(y) \succeq_\lambda \omega(x)$。根据每个 $\succeq_\lambda$的相容性，不存在 λ 使得 $y \succeq_\lambda x$，因此 $x\overline{\succ}y$。

根据佐恩引理，存在一个极大强相容预序扩张$\succeq'$。我们声称它是完备的。反设存在 z、w 彼此不可比较。根据引理 3，存在 $\succeq'$ 的一个无环、 $\mathcal{M}$-相容扩张，使 z 和 w严格排序。根据引理1，该扩张的传递闭包满足 $\mathcal{M}$-相容性，并且由于无环而构成预序扩张。最后，根据引理 2，存在该关系的一个强 $\mathcal{M}$-相容预序扩张，该扩张随后将 z 和 w 排序，因此扩张了 $\succeq'$，这与 $\succeq'$的极大性相矛盾。

参考文献

Alcantud, J. C. (2009)：“条件序扩张”，《经济理论》，39，495–503。Aumann, R. J. (1962)：“没有完备性公理的效用理论”，《计量经济学》，30，445–462。——— (1964)：“没有完备性公理的效用理论：一则更正”，《计量经济学》，32，210–212。Bossert, W. (1999)：“交准序：一种备选证明”，《序》，16，221–225。Chambers, C. P. and F. Echenique(2016)：《显示偏好理论》，第56卷，剑桥大学出版社。Chambers, C. P. and A. D. Miller (2018)：“基准比较”，《理论经济学》，13，485–504。Demuynck, T. (2009)：“一个一般扩张结果及其在凸性、齐次性和单调性中的应用”，《数学社会科学》，57，96–109。Donaldson, D. and J. A. Weymark (1998)：“准序是若干序的交集”，《经济理论杂志》，78，382–387。Dubra, J., F. Maccheroni, and E. A. Ok (2004)：“没有完备性公理的期望效用理论”，《经济理论杂志》，115，118–133。Duggan, J. (1999)：“二元关系的一般扩张定理”，《经济理论杂志》，86，1–16。Dushnik, B. and E. W. Miller (1941)：“偏序集”，《美国数学杂志》，63，600–610。.Evren, O. and E. A. Ok (2011)：“偏好关系的多效用表示”，《数理经济学杂志》，47，554–563。Fishburn, P. C. and A. Rubinstein (1982)：“时间偏好”，《国际经济评论》，23，677–694。Freer, M. and C. Martinelli (2021)：“一般显示偏好的效用表示定理”，《数学社会科学》，111，68–76。——— (2022)：“显示偏好的代数方法”，《经济理论》，1–26。Gorno, L.(2017)：“严格期望多效用定理”，《数理经济学杂志》，71，92–95。

Halevy, Y. (2015年)：«时间一致性：平稳性与时间不变性»，《计量经济学》，83，335–352。Hansson, B. (1968年)：«选择结构与偏好关系»，《综合》，443–458。Koopmans, T. C. (1960年)：«平稳序数效用与不耐心»，《计量经济学》，28，287–309。Levin, V. L. (1983年)：«闭预序与字典序预序的可测效用定理»，《苏联数学文摘》，27，639–643。Nehring, K. and C. Puppe (1999年)：«机会评估的多重偏好方法»，《社会选择与福利》，16，41–63。Nishimura, H. and E. A. Ok (2016年)：«不完备且非传递偏好关系的效用表示»，《经济理论杂志》，166，164–185。Ok, E. A. (2002年)：«不完备偏好关系的效用表示»，《经济理论杂志》，104，429–449。Ok, E. A. and G. Riella (2014年)：«平移不变预序的拓扑闭包»，《运筹学数学》，39，737–745。——— (2021年)：«完全可预序群»，《序》，38，127–142。Peleg, B. (1970年)：«偏序拓扑空间上的效用函数»，《计量经济学》，38，93–96。Richter, M. K. (1966年)：«显示偏好理论»，《计量经济学》，34，635–645。——— (1971年)：《理性选择》，Harcourt Brace Jovanovich，纽约，29–58。Suzumura, K. (1976年)：«理性选择与显示偏好»，《经济研究评论》，43，149–158。Szpilrajn, E.(1930年)：«关于偏序的扩张»，Fundamenta mathematicae，16，386–389。Ward, M. (1942年)：«格的闭包算子»，《数学年刊》，191–196。Weymark, J. A. (2000年)：«穆兰帕累托扩张定理的推广»，《数学社会科学》，39，235–240。