arXiv:2303.04531v2 [math.RT] 8 Nov 2023

受限分拆与 SL_2-上同调

STEVEN BENZEL、SCOTT CONNER、NHAM NGO 和 KHANG PHAM

Abstract. 本文的目标有两个。首先，我们研究将正整数 m 分拆为至多 n 个部分，且各部分属于给定集合 A的分拆数。我们证明，对于任意 m 以及包含整数幂集合在内的某类集合 A，此类分拆数都不超过第 n 个斐波那契数 $F(n)$。其次，在本文第二部分，我们给出关于单代数群 SL_2 的韦伊模系数上同调界的新结果。

1. Introduction

设 A 是 $\mathbb{Z}^+$ 的子集，且 m 属于 $\mathbb{Z}^+$。一个部分取自 A 的 m 的受限分拆是一个分解

$$m = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_t \tag{1}$$

其中， α_i不一定是 A和 $\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \cdots \leq \alpha_t$中的互不相同元素。每个 α_i称为该分拆的一个部分，而 t 是分拆中的部分数。例如，设 $A_2 = \{2^i : \ i \in \mathbb{N}\}$ 为所有 2 的幂组成的集合。那么，5 在 A_2中有 4 种受限分拆：$1+1+1+1+1$、$1+1+1+2$、$1+2+2$和 $1+4.$。这些称为 5 的二进制分拆。本文关注形式为 (1) 的受限分拆，其中 t 至多为给定正整数 n，记为 n。我们称它们为从 A中选取至多 n 个部分对 m 的分拆，并将此类分拆的数量记为 $P(m, n, A)$。注意，当 $A = \mathbb{Z}^+$时，也就是说，对分拆中的部分没有限制，计算 $P(m, n, A)$是一个经典问题。关于 n 较小取值的一些早期结果可追溯至 19^{th} 世纪，由 Herschel、Cayley 和 Sylvester[WW]取得。近期， [K],[M], 和 [O]取得了一些进展。对于任意集合 A，关于 $P(m, n, A)$的已知结果不多。关于一些相关分拆数量的讨论，可参见 [CW] 和 [A]。在第2节中，我们证明，对于满足温和增长条件的任意集合 A，对所有 m、$n \in \mathbb{Z}^+$， $P(m, n, A)$均不超过第 n个斐波那契数$F(n)$。这个上界具有普适性，因为它不依赖于整数 m。由此，我们的结果给出了对任意正整数 $q \geq 2$，将 m 分拆为至多 n 个部分的 q-进制分拆数量的一个上界。

我们对受限分拆的研究源于对定义在素特征 p 的代数闭域 k 上的单代数群 SL_2 的上同调的研究。需要注意的是，一般而言，代数群的上同调在很大程度上仍是未知的，只有少数情形得到了明确计算；关于该理论的总结，参见 [Jan] 。尽管SL_2 的情形已经得到广泛研究，但仍有一些未解决的问题。例如，对于一个单模（或不可分解模）的上同调维数确定一个闭公式，至今仍是未知的。事实上，为这个数找到一个精确的上界已经是一项颇具挑战性的任务。在过去几年中，第三作者一直致力于估计 $\mathrm{H}^n(SL_2, V(m))$ 的维数，即最高权为 SL_2 的韦伊模 $V(m)$ 的 SL_2-上同调

日期：2023年11月9日。

。这个问题本身具有独立的研究意义，并且有其自身的发展历史 [EHP], [LNZ]。第三作者与 Lux 和 Zhang 一起，成功地将 dim $\mathrm{H}^n(SL_2, V(m))$ 与一个线性方程组的解的数量对应起来，从而得到一个粗略的上界；详细内容参见 [LNZ，第 4] 节。在第3节中，我们利用第2节的结果证明，对于任意 $m, n \in \mathbb{N}$

$$\dim \mathrm{H}^n(SL_2, V(m)) \leq \begin{cases} F(n+1) & \text{if } p \geq 5, \\ F(2n) & \text{if } p = 2, 3 \end{cases}$$

这显著改进了 [LNZ 的推论 4.3、命题 4.4 和定理 4.6] 中的上界。

值得注意的是，人们希望为任意单代数群找到显式的通用上界（仅依赖于次数 n）；关于这一开放问题的综述，参见 [Ben] 。目前，我们无法将结果（针对 SL_2）推广到任意代数群。不过，我们怀疑代数群的上同调维数与受限向量分拆的数量[1] （受限整数分拆的一种推广）之间可能存在某种联系。因此，合理的问题是：后者是否存在通用上界？这将是一个值得未来研究的有趣问题。

2. Restricted partitions of m into at most n parts

本节中，我们研究各种集合 A 下的数量 $P(m, n, A)$。我们的目标是利用斐波那契数来界定这一数量。为了便于计算，我们首先将这些分拆与某个方程组的整数解对应起来。具体而言，我们写作$A = \{a_1, a_2, \ldots\}$，其中 $0 < a_1 < a_2 < \cdots$。令 $m \in \mathbb{Z}^+$和 a_r为 A 中不超过 m的最大数。于是，每个形如 (1) 的受限分拆都可以改写为

$$m = x_1 a_1 + x_2 a_2 + \cdots + x_r a_r$$

其中 x_i 为非负整数。每个 x_i 都称为该分拆中 a_i 的重数。由于重数可以为零，因此 m 的每个分拆都由满足以下条件的序列 $\{x_i\}$ 唯一确定

$$m = \sum_{i=1}^{\infty} x_i a_i$$

其中，对于足够大的 i（使得 $a_i > m$），$x_i = 0$。因此，m 的受限分拆数等于这类序列 $\{x_i\}$ 的数量。现在，如果要求 m 的每个分拆中的项数至多为 n，那么 $P(m, n, A)$ 实际上等于满足以下条件的非负整数序列 $\{x_i\}$ 的数量

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{\infty} x_i a_i = m, \\ \sum_{i=1}^{\infty} x_i \leq n. \end{cases}$$

方程的解　最后一个方程组本质上与满足条件的元组 $(x_1, x_2, \ldots, x_r)$ 相同　g

$$\begin{cases} x_1 a_1 + x_2 a_2 + \cdots + x_r a_r = m, \\ x_1 + x_2 + \cdots + x_r \leq n \end{cases} \tag{2}$$

[1]向量分拆是指将一个各分量均为非负整数的向量写成其他各分量均为非负整数的向量之和的一种方式，其中加数的顺序无关紧要。

当 r 足够大时。从现在起，我们将 $P(m,n,A)$ 等同于方程组 (2) 的解的数量。

接下来回顾斐波那契数列的定义。设

$$F(1)=1,\quad F(2)=1,\quad F(n)=F(n-1)+F(n-2),$$

对于 $n\geq 2$。我们还假设，对于所有整数 $i\leq 0$，$F(i)=0$。我们的归纳证明将用到斐波那契数列的以下特殊性质。

引理 2.1。对于每个正整数 n，有

$$\sum_{i=0}^{n}F(2i+1)=F(2n+2)\quad and\qquad \sum_{i=0}^{n}F(2i)=F(2n+1)-1.$$

因此，我们总有

$$\sum_{i=0}^{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}F(n-2i)\leq F(n+1).$$

引理的证明很直接。现在我们证明以下结论

定理 2.2. 令 $A=\{a_1,a_2,\ldots\}\subseteq\mathbb{Z}^+$，其中所有 a_is 均按递增顺序排列，并满足

$$2a_{s-1}+4a_{s-2}+6a_{s-3}+\cdots+2(s-1)a_1<a_s \tag{3}$$

对所有 $s\geq 2$ 均成立。则对所有正整数 m、n，$P(m,n,A)\leq F(n)$。

证明。我们对 n 使用归纳法进行证明。显然，$P(m,1,A)=0$ or 1，因此对$n=1$成立。接下来考察情形 $n=2$ [2]。我们还有 $P(m,2,A)\leq 1$，因为对于每个 m 和 a_s，在 A 中满足 $a_s\leq m$ 的最大数，根据条件 (3)，对于任意 $1\leq i$、$j\leq s-1$，a_s 均不等于 $2a_i$ 或 a_i+a_j。假设对于任意满足 $n\geq 3$ 的 $t<n$，均有 $P(m,t,A)\leq F(t)$。现在固定 m，并再次令 a_s 为 A 中满足 $a_s\leq m$ 的最大数。由于 $2a_{s-1}+4a_{s-2}+6a_{s-3}+\cdots+2(s-1)a_1<a_s\leq m$，必有以下情形之一（或多个）成立

$$x_s\geq 1, x_{s-1}\geq 3, x_{s-2}\geq 5,\ldots,x_1\geq 2s-1.$$

（2）的解与 $x_s\geq 1$ 基本上是

$$\begin{cases}x_1a_1+x_2a_2+\cdots+x_{s-1}a_{s-1}+x'_sa_s=m-a_s,\\ x_1+x_2+\cdots+x_{s-1}+x'_s\leq n-1\end{cases}$$

通过令 $x_s=1+x'_s$ 得到的。这类解的数量为 $P(m-a_s,n-1,A)$。类似地，满足其他条件的（2）的解的数量依次为 $P(m-3a_{s-1},n-3,A)\ldots$，以及 $P(m-(2s-1)a_1,n+1-2s,A)$。因此，我们得到

$$P(m,n,A)\leq P(m-a_s,n-1,A)+P(m-3a_{s-1},n-3,A)+\cdots+P(m-(2s-1)a_1,n+1-2s,A).$$

接下来，应用归纳假设和引理 2.1，我们有

$$P(m,n,A)\leq F(n-1)+F(n-3)+\cdots+F(n+1-2s)\leq F(n),$$

由此完成了我们的归纳证明。 □

[2]由于 $F(1)=F(2)=1$，因此有必要考察 $n=1$、2 这一基础情形；否则，我们便无法判断 $P(m,1,A)$ 是否被 $F(1)$ 或 $F(2)$ 所界定。本文其他归纳证明中也需要进行同样的处理。

我们给出上述定理中集合 A 的一些例子。

定理 2.3. 设 q 是一个大于 3 的整数，并令 $A_q = \{q^i : i \in \mathbb{N}\}$。则 A_q 满足条件 (3)。因此，

$$P(m, n, A_q) \leq F(n).$$

证明. 只需证明，对于任意 $s \geq 1$

$$2q^{s-1} + 4q^{s-2} + \cdots + 2(s-1)q + 2s < q^s.$$

这可以通过对 s 使用归纳法来证明。事实上，容易看出它对 $s = 1$ 成立。现在来证明

$$2q^s + 4q^{s-1} + \cdots + 2sq + 2(s+1) < q^{s+1},$$

注意

$$\begin{aligned}
&2q^s + 4q^{s-1} + \cdots + 2sq + 2(s+1) \\
&\quad = 2q^s + (2q^{s-1} + 4q^{s-2} + \cdots + 2(s-1)q + 2s) + (2q^{s-1} + 2q^{s-2} + \cdots + 2q + 2) \\
&\quad < 2q^s + q^s + 2(q^{s-1} + q^{s-2} + \cdots + q + 1) \text{ by induction} \\
&\quad \leq 3q^s + q^s - 1 < 4q^s \leq q^{s+1} \text{ using } q > 3 \text{ at multiple points.}
\end{aligned}$$

这就完成了归纳证明。其余部分由定理 2.2 立即得出。 □

注记 2.4. 集合 A_2 和 A_3 不满足 (3)。此外，对于 A_2，上述定理中的不等式不成立，因为我们有

$$4 = 1 \cdot 2^2 = 2 \cdot 2 = 2 \cdot 1 + 1 \cdot 2.$$

因此，$P(4, 3, A_2) = 3 > F(3)$。

接下来，我们修改定理 2.2 中关于集合 A的条件，使得 A_2 和 A_3 满足该条件。

定理 2.5. 设 $A = \{a_1, a_2, \ldots\} \subseteq \mathbb{Z}^+$，其中所有 a_is 均按递增顺序排列，且满足

$$a_{s-1} + 2a_{s-2} + 3a_{s-3} + 4a_{s-4} + \cdots + (s-1)a_1 < a_{s+1} \tag{4}$$

对所有 $s \geq 2$均成立。则对于所有正整数 m、n，$P(m, n, A) \leq F(2n-1)$。

证明。容易验证，对于 $n = 1$，2，该结论成立。假设对于任意满足 $n \geq 3$的 $t < n$，均有 $P(m, t, A) \leq F(2t-1)$。现在固定 m，并令 a_{s+1}为 A中满足 $a_{s+1} \leq m$的最大数。根据条件 (4)，以下情况中必有一种（或多种）成立

$$x_{s+1} \geq 1, x_s \geq 1, x_{s-1} \geq 2, x_{s-2} \geq 3, \ldots, x_1 \geq s.$$

接下来，论证与定理 2.2 非常相似。于是我们得到

$$P(m, n, A) \leq P(m - a_{s+1}, n-1, A) + P(m - a_s, n-1, A) + \cdots + P(m - sa_1, n-s, A$$

接下来，应用归纳假设和引理 2.1，我们有

$$\begin{aligned}
P(m, n, A) &\leq F(2n-3) + F(2n-3) + F(2n-5) + \cdots + F(2n-2s-1) \\
&\leq F(2n-3) + F(2n-2) = F(2n-1),
\end{aligned}$$

从而完成归纳证明。 □

C推论 2.6. 对于 $m, n \in \mathbb{Z}^+$，当 $q \geq 2$ 时，我们有 $P(m, n, A_q) \leq F(2n-1)$.

证明。根据上一个定理，只需证明 A_q 满足条件 (4)，其中$q \geq 2$。事实上，我们断言，对于任意 $r \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{i=1}^{r+1} i \cdot q^{r+1-i} < q^{r+2}.$$

对 r使用归纳法，基础情形 $r = 0$ 显然成立。归纳地假设，对于某个 r，该不等式成立。现在注意到

$$\sum_{i=1}^{r+2} i \cdot q^{r+2-i} = \sum_{i=1}^{r+1} i \cdot q^{r+1-i} + \sum_{j=0}^{r+1} q^{r+1-j} \leq \sum_{i=1}^{r+1} i \cdot q^{r+1-i} + q^{r+2} - 1.$$

根据归纳假设，最后一项小于 $q^{r+2}+q^{r+2}-1 < q^{r+3}$；因此归纳证明完成。□

注 2.7. 由于 $F(n) \leq F(2n-1)$，定理 2.3 立即推出 $q > 3$的推论 2.6。还可以注意到，条件 (4) 弱于条件 (3)，也就是说，任何满足条件 (3) 的集合A 也满足条件 (4)。较弱的条件使得我们可以考虑更多的集合 A，尤其是 A_2 和 A_3，但代价是关于 $P(m,n,A)$的界不如原来的好。

我们以从 q进制分拆的角度来解释本节的结果。所谓 q进制分拆，是指将一个整数拆分为若干个 q的幂。由此可知， $P(m,n,A_q)$表示将 m 拆分为至多含有 n 部分的 q进制分拆的数量。因此，改述上述结果，可得以下结论

推论 2.8. 对于 $m,n \in \mathbb{Z}^+$，将 m 拆分为至多含有 n 部分的 q进制分拆的数量不超过：若 $q \geq 4$，则为 $F(n)$；若 $q = 2$，则为 $F(2n-1)$；或者为 3。

3. Cohomology of SL_2

本节旨在利用上一节的结果，给出 SL_2 上韦伊模的上同调维数的界。关于代数群有理上同调的一般背景，读者可参阅 [Jan]。这里我们只介绍计算所需的材料。我们采用与 [LNZ]相同的记号和约定。特别地，设 k 是特征为素数 $p > 0$的代数闭域。固定一个定义在 k 上的 $G = SL_2$，以及它的一个环面子群 T G。于是，与 T 关联的支配权集合可识别为 $\mathbb{N}$。韦伊模（定义在 SL_2上）是由支配权参数化的不可分解模。具体地，对于每个满足 V的 $m \in \mathbb{N}$，我们将最高权为 m 的韦伊模记作 $V(m)$，其中 $= k$ (0) 是平凡模。

对于 G-模 M和 N，$\mathrm{Ext}^n_G(M,N)$ 是 M 对 N 的 n 次扩张空间。当 $M = k$ 时，该空间称为 G 以 N 为系数的 n 次上同调空间，记为 $\mathrm{H}^n(G,N)$。记号 $\dim \mathrm{H}^n(G,N)$（或 $\dim \mathrm{Ext}^n_G(M,N)$）表示上同调（或扩张）作为 k 上向量空间的维数。我们关注的是估计这些量的上界。

我们回顾 [LNZ 定理 4.2]：若 p 是奇素数，则对于任意整数 m、$n \geq 0$，维数 $\dim \mathrm{H}^n(SL_2, V(m))$ 等于以下方程组的解的个数

$$\begin{cases} 2\sum_{i=1}^{r} a_i + \sum_{j=1}^{r} b_j = n+1, \\ b_1 + \sum_{i=1}^{r-1}(a_i + b_{i+1})p^i + a_r p^r = \dfrac{m}{2} + 1, \end{cases} \tag{5}$$

其中所有的 a_is 都属于 $\mathbb{N}$，b_i i 只能是 0 或 1。[3] 这里，r 是关于 m 足够大的整数。注意，如果 m 为奇数，方程组 (5) 无解。因此，在考虑上同调 $\mathrm{H}^n(SL_2, V(m))$ 时，我们只关注 m 为偶数的情形。

设 $N(m,n)$ 为方程组的解的个数

$$\begin{cases} 2\sum_{i=1}^{r} a_i + \sum_{j=1}^{r} b_j = n, \\ b_1 + \sum_{i=1}^{r-1}(a_i + b_{i+1})p^i + a_r p^r = m. \end{cases} \tag{6}$$

由此可推得，对于 $m,n \in \mathbb{N}$，$\dim \mathrm{H}^n(SL_2, V(m)) = N\left(\dfrac{m}{2}+1, n+1\right)$。接下来我们证明本节的主要结果，它强化了 [LNZ 命题 4.4]，因为现在我们能够去掉条件 $n \leq 2p-3$。

定理 3.1。假设 $p \geq 5$。对于所有整数 $m,n \geq 0$，有

$$\dim \mathrm{H}^n(SL_2, V(m)) \leq F(n+1).$$

证明。根据前面的设定，我们需要证明，对于每个整数 $n \geq 0$ 和偶整数 $m \geq 0$，$N\left(\frac{m}{2}+1, n+1\right) \leq F(n+1)$。这又可归结为证明，对于所有正整数 m,n（以 m 替换 $\frac{m}{2}+1$，以 n 替换 $n+1$），$N(m,n) \leq F(n)$。我们再次对 n 作归纳论证。根据 [LNZ 命题 3.6],，最后一个不等式对 $n \leq 8$ 成立。对于任意正整数 $n \geq 9$，假设该不等式对所有不超过 $n-1$ 的值都成立。由于 b_1 只能是 0 或 1，因此 m 模 p 同余于 0 或 1；否则，对于所有 n，$N(m,n) = 0$。若 $m \equiv 1$（模 p），则根据归纳假设，$b_1 = 1$ 且 $N(m,n) = N(m-1, n-1) \leq F(n-1)$。假设 p 整除 m，那么 b_1 必为零。令 s 为使 $p^s \leq m$ 成立的最小整数。于是方程组 (6) 化为

$$\begin{cases} 2\sum_{i=1}^{s} a_i + \sum_{j=2}^{s+1} b_j = n, \\ \sum_{i=1}^{s}(a_i + b_{i+1})p^i = m. \end{cases} \tag{7}$$

令 S 为该方程组的解集。设

$$U = \{(a,b) = (a_1, \ldots, a_s, b_2 \ldots, b_{s+1}) : (a,b) \text{ satifies } (7),\ \exists i_0 \text{ so that } a_{i_0} \geq 1, b_{i_0+1} = 0\}.$$

[3]请注意，此处存在符号滥用。所有的 a_is 现在都不是本文前一部分中的 A 的元素。相反，在此语境下，这些 a_is（以及 b_is）是变量。

那么 S是互不相交的子集 U和 $V = S\backslash U$的并集。现在我们给出每个集合的上界。对于 U中的每个解 (a, b)，我们选取最大的此类 i_0，并作替换$a_{i_0} \mapsto a_{i_0} - 1$ 和 $b_{i_0+1} \mapsto 1$。所得元组是以下方程组的一个解

$$\begin{cases} 2\sum_{i=1}^{s} a_i + \sum_{j=2}^{s+1} b_j = n-1, \\ \sum_{i=1}^{s} (a_i + b_{i+1})p^i = m. \end{cases}$$

这一替换建立了从 U 到上述方程组的解集的一一映射。由归纳假设可知

$$|U| \le N(m, n-1) \le F(n-1).$$

V中的每个解 (a, b) 都满足以下条件：只要 $a_i > 0$，就有 $b_{i+1} = 1$。对所有 $1 \le i \le s$令 $d_i = a_i + b_{i+1}$，可以看出，V中的每个解 (a, b) 都与方程组的一个解 $(d_1, \ldots, d_s)$ 建立一一映射

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{s} d_i \le n, \\ \sum_{i=1}^{s} d_i p^i = m, \end{cases} \tag{8}$$

s s，其中该不等式是将（7）的第一个方程改写为 $\sum d_i = n - \sum a_i$ 后得到的。$i=1$ $i=1$考虑以下几种情况。

- If $\sum_{i=1}^{s} a_i \le 2$ then $d_i \le a_i + 1 \le 3 < p$ for all $1 \le i \le s$ (recall that $p \ge 5$). Hence, the sum $\sum_{i=1}^{s} d_i p^i$ must be the p-adic expansion of m and so there is at most one solution to the system (8) for the case when $n - 2 \le \sum_{i=1}^{s} d_i \le n$.
- If $\sum_{i=1}^{s} a_i \ge 3$ then $\sum_{i=1}^{s} d_i = n - \sum_{i=1}^{s} a_i \le n - 3$. By Theorem 2.3, the number of solutions to (8), restricted to this case, is bounded by $F(n-3)$.

将两种情况相加，得到 $|V| \le 1 + F(n-3) \le F(n-2)$。因此，我们得到

$$N(m, n) = |S| = |U| + |V| \le F(n-1) + F(n-2) = F(n),$$

这就完成了我们的归纳证明。 □

我们认为该定理对 $p = 3$也成立。遗憾的是，我们的方法不适用于这个较小的素数。要处理这种情况，或许需要采用不同的方法。沿用上一节中的相同思路，我们只能证明以下结论

命题3.2. 若 $p = 3$，则对所有整数 $m \ge 0, n \ge 1$，有

$$\dim \mathrm{H}^n(SL_2, V(m)) \le F(2n).$$

证明。与上一定理的证明采用相同的方法，我们只需证明，对于所有整数 $m \geq 1, n \geq 2$, $N(m,n) \leq F(2n-2)$。回顾一下， $N(m,n)$ 是方程组 (7) 的解的个数。同样，根据 [LNZ，命题3.6], ，该不等式对$n \leq 4$成立。对于 $n \geq 5$，我们假设该不等式对直至 $n-1$ 的情形均成立。若要使 (7) 有解，必须满足以下条件中的一个（或多个）：

$$a_s + b_{s+1} \geq 1, a_{s-1} + b_s \geq 2, a_{s-2} + b_{s-1} \geq p+1, a_{s-3} + b_{s-2} \geq p+2,$$
$$a_{s-4} + b_{s-3} \geq p^2 - p + 1, a_{s-5} + b_{s-4} \geq p^2 + 1, a_{s-6} + b_{s-5} \geq p^3 + 1,$$

并且对所有 $i \geq 6$，都有 $a_{s-i} + b_{s-i+1} \geq p^{\lfloor \frac{i}{2} \rfloor} + 1$。否则，我们将有

$$\sum_{i=1}^{s} (a_i + b_{i+1}) p^i \leq 2(p^{s-1} + p^{s-2} + \cdots + 1) \leq p^s - 1 < p^s \leq m.$$

设 N_i 分别表示在这些条件下，方程组 (7) 的解的数量。于是容易看出， $N(m,n)$ 不超过所有这些 N_i 的总和。接下来我们分别考察每个 N_i。

若 $a_s + b_{s+1} \geq 1$，则有两种情况：

- $b_{s+1} = 0$ 和 $a_s \geq 1$。于是方程组 (7) 可改写为

$$\begin{cases} 2\sum_{i=1}^{s-1} a_i + \sum_{j=2}^{s} b_j = n - 2a_s, \\ \sum_{i=1}^{s-1} (a_i + b_{i+1}) p^i = m - a_s p^s. \end{cases}$$

  因此，根据归纳假设，这种情况下的解的数量为

$$\sum_{a_s=1}^{\lceil \frac{m}{p^s} \rceil} N(m - a_s p^s, n - 2a_s) \leq \sum_{a_s=1}^{\lceil \frac{m}{p^s} \rceil} F(2n - 4a_s - 2).$$

- $b_{s+1} = 1$ 和 $a_s \geq 0$。于是，方程组 (7) 可改写为

$$\begin{cases} 2\sum_{i=1}^{s-1} a_i + \sum_{j=2}^{s} b_j = n - 1 - 2a_s, \\ \sum_{i=1}^{s-1} (a_i + b_{i+1}) p^i = m - p^s - a_s p^s. \end{cases}$$

  同样，根据归纳假设，这种情况下解的数量为

$$\sum_{a_s=0}^{\lceil \frac{m}{p^s} \rceil} N(m - p^s - a_s p^s, n - 1 - 2a_s) \leq \sum_{a_s=0}^{\lceil \frac{m}{p^s} \rceil} F(2n - 4a_s - 4).$$

现在将这两种情况相加并使用引理 2.1，可得

$$N_1 \leq \sum_{i=2}^{\lceil \frac{m}{p^s} \rceil} F(2n - 2i) \leq F(2n-3).$$

如果 $a_{s-1}+b_s\geq 2$，那么 $a_{s-1}\geq 1$。现在用 $a'_{s-1}+1$ 替换 a_{s-1}，并令 $a'_{s-1}\geq 0$，则（7）可改写为

$$\begin{cases} 2\sum_{i=1}^{s-2} a_i + 2a'_{s-1} + 2a_s + \sum_{j=2}^{s+1} b_j = n-2, \\ \sum_{i=1}^{s-2}(a_i+b_{i+1})p^i + (a'_{s-1}+b_s)p^{s-1} + (a_s+b_{s+1})p^s = m - p^{s-1}. \end{cases}$$

因此，在这种情况下，有 $N_2 = N(m-p^{s-1}, n-2)$ 个解。类似的论证可以用来得到

- $N_3 = N(m-p^{s-1}, n-2p)$
- $N_4 = N(m-p^{s-2}-p^{s-3}, n-2p-2)\cdots$
- $N_s = N(m-p^{\lfloor \frac{s}{2}\rfloor}, n-2p^{\lfloor \frac{s}{2}\rfloor})$.

现在利用归纳假设和引理 2.1，我们得到

$$\begin{aligned} N(m,n) &\leq F(2n-3)+F(2n-6)+F(2n-4p-2)+\cdots+F(2n-4p^{\lfloor \frac{s}{2}\rfloor}-2) \\ &\leq F(2n-2), \end{aligned}$$

从而完成归纳证明。 □

注 3.3。定理 3.1 对于 $p=2$ 不成立。事实上，根据 [EHP、推论 3.2，2],对于任意 m，$n\in\mathbb{N}$，$\mathrm{H}^n(SL_2, V(m))$ 的维数等于满足方程组的解 $(a_1,\ldots,a_r)\in\mathbb{N}^r$ 的数量

$$\begin{cases} a_1+a_2+\cdots+a_r = n+1, \\ a_1 2 + a_2 2^2 + \cdots + a_r 2^r = \frac{m}{2}+1. \end{cases} \tag{9}$$

在 c 中 当 $m=286$、$n=4$ 时，方程组（9）有如下 6 个解 ws

- $1\cdot 2^4 + 4\cdot 2^5 = 144$
- $3\cdot 2^4 + 1\cdot 2^5 + 1\cdot 2^6 = 144$
- $2\cdot 2^3 + 2\cdot 2^5 + 1\cdot 2^6 = 144$
- $2\cdot 2^2 + 1\cdot 2^3 + 2\cdot 2^6 = 144$
- $4\cdot 2^2 + 1\cdot 2^7 = 144$
- $2\cdot 2^1 + 1\cdot 2^2 + 1\cdot 2^3 + 1\cdot 2^7 = 144$。

因此，$\dim \mathrm{H}^4(SL_2, V(286)) = 6 > F(5)$。另一方面，对于 $p=3$ 的情形，我们可以得到如下相同的界。

推论 3.4. 如果 $p=2$，那么对于所有整数 $m\geq 0$、$n\geq 1$

$$\dim \mathrm{H}^n(SL_2, V(m)) \leq F(2n).$$

证明。根据推论 2.6，可以直接得到

$$\dim \mathrm{H}^n(SL_2, V(m)) \leq P\left(\frac{m}{2}+1, n+1, A_2\right) \leq F(2n+1).$$

事实上，推论 2.6 意味着

$$\sum_{i=0}^{n} \dim \mathrm{H}^n(SL_2, V(m)) \leq F(2n+1).$$

可以将 $\dim H^n(SL_2, V(m))$ 的下界降低至 $F(2n)$。确实，令 $M(\frac{m}{2}+1, n+1)$ 表示方程组 (9) 的解的个数。可以采用与定理 2.5 的证明中类似的归纳论证来证明

$$M(m,n) \leq F(2n-2)$$

对所有整数 $m \geq 1$、$n \geq 2$，这足以证明该推论。 □

注 3.5. 对于 [LNZ，采用与定理 5.4] 完全相同的证明，并用定理 3.1 替代[LNZ，命题 4.4]（由此可去掉条件 $n \leq 2p-3$），我们可以证明，对于 $p \geq 5$

$$\dim \mathrm{Ext}^n_{SL_2}(V(m_2), V(m_1)) \leq F(n+1) + (s-1)F(n).$$

对于 m_1、m_2、$n \in \mathbb{N}$，以及满足 $m_2 < p^s$ 的最小正整数 s。这个界并不显著，因为即使对于较低次数 n，它也不是紧的。例如，我们有

$$\dim \mathrm{Ext}^n_{SL_2}(V(m_2), V(m_1)) \leq n$$

对于 $n \leq 3$，详情参见 [LNZ 第 5.1] 节。对于较大的 n，要找到这些扩张空间的紧界仍是一个未解决的问题。我们提出如下

猜想 3.6. 对于 m_1、$m_2 \in \mathbb{N}$ 和 $p \geq 3$，我们有

$$\dim \mathrm{Ext}^n_{SL_2}(V(m_2), V(m_1)) \leq F(n+1).$$

注 3.7. 与 [LNZ 第 6 节2] 中相同的论证可以证明，在$p \geq 5$的情形下，$\dim H^n(SL_2, L)$ 和 $\dim H^n(SL_2(\mathbb{F}_{p^s}) L')$ 均由 $(2n+7)F(n)$ 界定，其中 L （分别为 L'）是 SL_2 （分别为任意 $s \geq 1$ 下的李型有限群 $SL_2(\mathbb{F}_{p^s})$）上的任意单模。同样，这改进了 [LNZ 第 6 节2], 中的结果，但即使 n取较小值，这也不是一个紧的上界。

ACKNOWLEDGEMENT

我们感谢 Sergey Fomin 提出的宝贵建议，这些建议使稿件得以改进。我们也感谢匿名审稿人指出早期版本中的错误，并对论文的写作和组织提出了许多有益意见。

References

[A] N. Alon，《受限整数分拆函数》，Integers，2013（2014），228–236。[Ben] Bendel、C.P. 等，《有理上同调群维数的上界》。载于：Mason, G.、Penkov, I.、Wolf, J.A.（编），《李理论的发展与回顾》。Developments in Mathematics，第 38 卷（2014）。Springer，Cham。[CW] E.R. Canfield、H.S. Wilf，《受限整数分拆函数的增长》。载于：Alladi K.、Garvan F.（编），《分拆、q 级数与模形式》。Developments in Mathematics，第 23 卷（2012）。Springer，纽约州纽约市。[EHP] K. Erdmann、K.C. Hannabuss 和 A. Parker，《 SL_2的高阶扩张的有界性与无界性》，J. Algebra，389（2013），98–118。[Jan] J. C. Jantzen，《代数群的表示》，第二版，《数学调查与专著》，第 107 卷，美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，2003。[K] B. Kim，《将 n 分拆为 k 个不同部分的分拆数》，《数论杂志》，132（2012）1306–1313。[LNZ] K. Lux、N.V. Ngo 和 Y. Zhang，《 SL_2 及相关结构的上同调》，Comm. Algebra，46（2018），979–1000。[M] M. Merca，《分拆为给定数量部分的分拆数的新上界》，《数论杂志》，142（2014），298–304。

[O] A.Y. Oruc, 《关于将整数分拆为固定数量正整数的方法数》, 《数论杂志》, 159（2016）, 355–369。[WW] R. Wilson 和 J. Watkins, 《组合学：古代与现代》, 第一版, 牛津大学出版社, 2013。

Department of Mathematics, University of North Georgia–Gainesville, Oakwood, GA 30566, USA电子邮件地址：Steven.Benzel@ung.eduDepartment of Mathematics, University of North Georgia–Gainesville, Oakwood, GA 30566, USA电子邮件地址：SKCONN5042@ung.eduDepartment of Mathematics, University of North Georgia–Gainesville, Oakwood, GA 30566, USA电子邮件地址：nvngo@ung.eduDepartment of Mathematics, University of North Georgia–Gainesville, Oakwood, GA 30566, USA电子邮件地址：KVPHAM6466@ung.edu