一类新型 a-T-可容许的自由群扩张自由群 S

弗朗索瓦·戈特罗

Abstract. 我们证明，群 $G^{\sigma}_{n,k} := F_n \rtimes_{\sigma} \mathbb{F}_k$，其中 $\mathbb{F}_n$ 和 $\mathbb{F}_k$ 分别是秩为 n 和秩为 k 的自由群，且 σ: $\mathbb{F}_k \hookrightarrow$ Aut($\mathbb{F}_n$) 是单同态，使得 $\sigma(\mathbb{F}_k)$ 是一个完全由 $\mathbb{F}_n$的多项式增长自同构组成的子群；若 $\sigma(\mathbb{F}_k)$ 的某个有限指数幺幂子群具有一个满足两项额外组合性质的Bestvina-Feighn-Handel代表，则该群可在一个有限维 CAT(0) 方复形上适当地等距作用。为此，我们构造了一个符合 Haglund-Paulin 意义下的适当墙空间结构。特别地，任何此类群 $G^{\sigma}_{n,k}$都是 Gromov 意义下的 a-T-可容许群（等价地，具有 Haagerup性质）。

arXiv:2303.04540v1 [math.GR] 8 Mar 2023

Introduction

Haagerup性质是群上的一种分析性质，由 [11], 引入，涉及存在一个适当的条件负定函数:

定义 1。 拓扑群 G 上的条件负定函数 是一个函数 f: $G \to \mathbb{R}$，满足：对于任意正整数 n、任意 λ_1、$\cdots$、$\lambda_n \in \mathbb{R}$，若$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 0$，以及任意属于 G 的 g_1、$\cdots$、g_n，都有

$$\sum_{i,j} \lambda_i \lambda_j f(g_i^{-1} g_j) \leq 0.$$

拓扑群 G上的函数 f: $G \to \mathbb{R}$ 若满足当$\lim_{g_i \to \infty} f(g_i) = \infty$，则称其为适当的。

在拓扑群 G 中，元素序列 $(g_i)_{i \in \mathbb{N}} \subset G$ 随 i趋于无穷，当且仅当对于任意紧集 $K \subset G$，存在 $N \geq 0$，使得对于任意 $i \geq N$， g_i 都不属于 K。在本文中，我们将研究离散群，即赋予字长的具有离散拓扑的群：若 G 是一个以 S为生成集的群，则相对于 S的字长 $\gamma \in G$，记为 $|\gamma|_S$，是定义元素 γ的 $S \cup S^{-1}$ 中各词的长度的最小值。于是，说序列 $(g_i)_{i \in \mathbb{N}} \subset G$随 i 趋于无穷，就意味着 g_i的字长随 i趋于无穷。

在 [11]，自由群被证明具有Haagerup性质。后来，Gromov的工作重新提出了这一性质，并以*a-T-*可容性这一术语出现。这一术语的由来在于：一方面，任何可和群都满足这一性质；另一方面，它是对Kazhdan的T性质的一种弱逆命题：同时满足这两种性质的任何群都是紧群（在离散情形下为有限群）。

定义 2 ([11, 7, 1])。 群 G 具有 Haagerup性质，或者是 a-T-可容许群，当且仅当 G 上存在一个适当的条件负定函数。

日期：2023年3月9日。2000年数学主题分类。20E22、20F65、20E05。关键词和短语。Haagerup性质、a-T-可容性、自由群、半直积、改进的相对轨道跟踪映射。

关于这一性质的详细背景和历史，请参阅 [7] 。值得注意的是，目前人们对 a-T-可容性在扩张下是否保持知之甚少：虽然任意半直积（a-T-可容许）$\rtimes$（可和）都是 a-T-可容许的 [13], ，但半直积（a-T-可容许）$\rtimes$（a-T-可容许）却并非如此。例如，$\mathbb{Z}^2 \rtimes SL(2,\mathbb{Z})$ 具有（可和）$\rtimes$（a-T-可容许）的形式，因为 $SL(2,\mathbb{Z})$ 含有一个有限指数自由子群（a-T-可容性会从群的有限指数子群传递到群本身），但它具有相对性质（T），因而不是 a-T-可容许的（任意条件负定函数在 $\mathbb{Z}^2$ 上都有界，见 [8] ——事实上，对于 $SL(2,\mathbb{Z})$ 的任意自由子群 $\mathbb{F}_k$， $\mathbb{Z}^2 \rtimes \mathbb{F}_k$ 都不是 a-T-可容许的——见 [5]）。特别地，目前尚不清楚任意自由群扩张的自由群是否都是 a-T-可容许的。

在 [9] 中，我们展示了第一类非线性的（非阿贝尔自由群）-（非阿贝尔自由群）形式的群，称为 *Formanek-Procesi* 群，它们是 a-T-可容许的。更准确地说，Formanek-Procesi 群是一个半直积 $\mathbb{F}_n \rtimes_\sigma \mathbb{F}_{n-1}$，其中：

- $\mathbb{F}_n = \langle x_1, \cdots, x_n \rangle$ 和 $\mathbb{F}_{n-1} = \langle t_1, \cdots, t_{n-1} \rangle$ 分别是秩为 n 和 $n-1$的非阿贝尔自由群，

- 令 Aut($\mathbb{F}_n$) 表示 $\mathbb{F}_n$ 的自同构群，则 σ: $\mathbb{F}_{n-1} \hookrightarrow$ Aut($\mathbb{F}_n$) 是由以下方式定义的单同态： $\sigma(t_j)(x_i) = x_i$对任意 $i = 1, \cdots, n-1$ 和$j = 1, \cdots, n-1$；而 $\sigma(t_j)(x_n) = x_n x_j$对 $j = 1, \cdots, n-1$成立。

$\sigma(\mathbb{F}_{n-1})$中的自同构具有线性增长：这是多项式增长的一种特殊情况，其中多项式函数的次数为一：

定义 3. 设 G 是一个具有有限生成集 S的群。自同构 α 属于 G，当且仅当存在一个多项式函数 P，使得对于 G中的任意γ，以及任意 $m \in \mathbb{Z}$， $|\alpha^m(\gamma)|_S \leq P(m)|\gamma|_S$。

$\alpha \in$ Aut($\mathbb{F}_n$)的增长性质只取决于它在α 中的等价类；α 是 $\mathbb{F}_n$的外自同构群，记作 Out($\mathbb{F}_n$)。回顾一下，Out($\mathbb{F}_n$) =Aut($\mathbb{F}_n$)/Inn($\mathbb{F}_n$)，其中 Inn($\mathbb{F}_n$)是内自同构 α_w ($w \in \mathbb{F}_n$)：α_w对于任意 $x \in \mathbb{F}_n$，$(x) = w^{-1}xw$ 。

定义 4. 设 G是一个具有有限生成集 S的群。G 的外自同构具有多项式增长，当且仅当该等价类中的某个（因此也是任意一个）自同构具有多项式增长。

本文旨在证明， [9]的结果是一个稍微更一般现象的特例。在陈述定理之前，我们先回顾一下：半直积 $\mathbb{F}_n \rtimes_\sigma \mathbb{F}_k$ 在同构意义下只取决于 Out($\mathbb{F}_n$) 中 $\sigma(\mathbb{F}_k)$ 的共轭类。我们的构造依赖于 Bestvina-Feighn-Handel [3]关于多项式增长自同构子群的深刻结构定理，尽管我们只用到了该理论中最基本的结果。对我们而言，重要的特点是 $\sigma(\mathbb{F}_k)$ 含有一个有限指数的幺幂子群，它由一对 $(\mathcal{F}, \Gamma)$ 表示，其中 Γ 是一个过滤图，而 $\mathcal{F}$ 是一个过滤同伦等价集合（*BFH* 代表$(\mathcal{F}, \Gamma)$）：参见第 1.2 小节。我们引入一类特殊的（遗憾的是限制颇多的）多项式增长自同构的幺幂子群（见定义 1.12），并证明以下定理：

定理 1. 设 k、n 是两个正整数，并分别令 $\mathbb{F}_n$、$\mathbb{F}_k$ 表示秩为 n 和秩为 k 的自由群。令 $\mathrm{Out}(\mathbb{F}_n)$ 表示 $\mathbb{F}_n = \langle x_1, \cdots, x_n \rangle$ 的外自同构群。若 σ: $\mathbb{F}_k \hookrightarrow \mathrm{Out}(\mathbb{F}_n)$ 是一个单同态，且 $\sigma(\mathbb{F}_k)$ 含有一个由 $\mathbb{F}_n$ 的外自同构构成的关联的单侧幺幂子群，则群 $\mathbb{F}_n \rtimes_\sigma \mathbb{F}_k$ 在某个有限维 *CAT(0)* 方复形上适当地等距作用。特别地，按照 *Gromov* 的意义，它是 *a-T-*可容许的。

我们立即强调，上述在立方复形上的作用不一定是余紧的。我们在引理 6.15 中给出了立方复形维数的精确最小上界。立方复形 是一种度量多面体复形，其中每个胞腔都与欧几里得立方体 $[0,1]^n$ 同构，且粘合映射均为等距映射。若立方体上由欧几里得度量诱导的度量使其成为 CAT(0) 度量空间（见 [4]），则称该立方复形为 $CAT(0)$ 。为证明上述结论，我们证明了存在一种由 Haglund 和 Paulin[12] 引入的墙空间 结构。Chatterji-Niblo [6] 或 Nica [15] 的定理（关于其他情形中的类似构造，另见 [14], [16] 或 [10]）给出了所述的 CAT(0) 方复形作用：这些内容将在第 3 节中简要回顾。我们所构造结构的一个关键点，是在第5节中引入所谓的“对角墙”，这需要存在特定的 BFH 代表。

1. Graphs and free group automorphisms

1.1. 图与自由群：一般性。图 Γ 是一个一维 CW复形。若一个图的胞腔数量有限，则该图是有限的 。0-胞腔称为顶点。每个 1-胞腔有两种不同的定向：我们用 $E^+(\Gamma)$ 表示选定某种定向的 1-胞腔集合，称为正向定向边；而（定向）边 则指赋予两种定向中任意一种定向的 1-胞腔。若 e表示一条边，则 e^{-1} 表示与其定向相反的边。我们用$i(e)$（分别用 $t(e)$）表示边 e的起始（分别为终止）顶点。任意边集通过忘去定向，自然唯一确定一个 1-胞腔集；而任意 1-胞腔集都与相应的有向边集一一对应，因此，关于 1-胞腔的术语也用于边，反之亦然。图 Γ 中顶点 v 的度 是以 v 为起始顶点的边的数量。我们的图没有度为 2 的顶点。图 Γ 的子图 U 是包含在 Γ 中的任意一维 CW复形（特别是，这意味着若 U包含一个 1-胞腔 e，则它也包含与 e 相连的两个 0-胞腔）。

拓扑空间 X 中的路径（分别地，环路）是从区间（分别地，圆）到 X 的连续映射的像。如果该映射是局部单射的，则路径是约化的。如果该映射是嵌入，则环路是简单的。图中的边路径是图中两个顶点之间的一条路径，且在边的内部不发生回溯，即该映射在像位于边内部的点处是局部单射的。它唯一确定了其所经过的定向边的有序序列，反之亦然。图映射是图上的连续映射，它将顶点映射到顶点，并将边映射为边路径；当边的像是.....时，它是约化的。

树是可缩图，其端点是度为 1 的顶点。在树 $\mathcal{T}$ 中，任意两点之间都存在唯一的局部单射路径，称为测地线。特别地，这意味着任意一个 1-胞腔 E 都将树切割为两个连通分支： E 的左侧（分别地， E 的右侧）是包含相关有向边的初始（分别地，终止）顶点的连通分支。更一般地：

定义 1.1。设 $\mathcal{T}$ 是一棵树， E 是 $\mathcal{T}$ 中的一个 1-胞腔， $\mathcal{E}$ 是 $\mathcal{T}$ 中一组 1-胞腔。相对于 $\mathcal{E}$ 的 左侧 （分别为相对于 $\mathcal{E}$ 的 右侧 ）是 $\mathcal{T}$ 中所有胞腔的并集，这些胞腔可由一条测地线与有向边 E 所对应的起始顶点相连，且该测地线穿过 $\mathcal{E}$ 中偶数（分别为奇数）个胞腔。若边路径 p 位于 $\mathcal{T}$ 中，且其起始顶点和终止顶点分别属于 E（相对于 $\mathcal{E}$）的不同侧，则称该边路径 跨越 E （相对于 $\mathcal{E}$）。

有限图的万有覆盖 Γ是一棵无限树 $\mathcal{T}$，其覆盖映射π_Γ为： $\mathcal{T} \to \Gamma$。我们始终假设覆盖映射保持定向，

也就是说，为图 Γ 的一个提升 $\mathcal{T}$的边选择定向，相当于为 Γ的边选择定向。

我们将记

- 为 T^q q叉树，即恰有一个度为 q 的顶点 v_0、恰有 q 个端点v_1，$\cdots$，v_q，且有 q 条边 e_i，在 $E^+(T^q)$ 中从 v_0 指向 v_i （T^q 同胚于以 $\{v_1,\cdots,v_q\}$ 为底的锥），
- 为 R_q 带有 q 个花瓣的玫瑰图，即恰有一个 $2q$ 度顶点v_0，并且有 q 条边位于 $E^+(R_q)$ 中，且 v_0 同时是初始顶点和终止顶点，
- 为 T_q^∞ 的万有覆盖，即无限的 $2q$ 度树。

有限图的基本群是有限秩自由群 $\mathbb{F}_n$，因此 Γ 的万有覆盖配备了一个自由、余紧的 $\mathbb{F}_n$左作用，其中自由群就是该覆盖的覆盖变换群。更准确地说，我们把 Γ 中包含 Γ 所有顶点的树称为 T 的极大树。于是有如下

定义 1.2. $\mathbb{F}_n$-树 $\mathcal{T}$是有限图 Γ的万有覆盖，附带$\tilde{}$极大树 T 在 Γ中的一个提升 T_e，以及一个从 Γ 到R_n的同伦等价，它将 T收缩，并将 T中不属于该树的正向定向边映射到 R_n的正向定向边；这些边称为本质正向边。$\mathcal{T}$的本质 1-胞腔 是 Γ 的本质 1-胞腔的提升$\tilde{}$，而 $\mathcal{T}$中的极大树 T_w 是 Γ中极大树 T 的提升。若 $\mathcal{T}$ 中的一个 1-胞腔是某个将 Γ 分成两个连通分支的 1-胞腔的提升，则称其为例外的 。 $\mathcal{T}$ 的*EoE* 胞腔 是本质或例外的 1-胞腔。我们用 $EoE(\Gamma)$表示 Γ中 EoE 胞腔的数量。

由此，我们通过考察任意$\tilde{}$ $\tilde{}$轨道 $\{g.v\}_{g\in\mathbb{F}_n}$、 $v\in V(T_e)$，得到 $\mathcal{T}$的一个顶点子集与 $\mathbb{F}_n$ 之间的对应，并令 $g.T_e=T_g$。不同的 $\mathbb{F}_n$-顶点轨道数等于 Γ中的顶点数。因此， $\mathcal{T}$ 中的每个顶点都继承一个 $\mathbb{F}_n$-标签，同一提升 T_g 中的所有$\tilde{}$顶点都带有相同的标签 g。

注意，在有限图 Γ 的万有覆盖 $\mathcal{T}$ 中，边路径 $p=E_{j_1}^{\epsilon_1}E_{j_2}^{\epsilon_2}\cdots E_{j_r}^{\epsilon_r}(\epsilon_i=\pm1, E_{j_i}\in E^+(\mathcal{T}))$ 也可以通过考虑 Γ 中的边路径 $\pi_\Gamma(p)=e_{j_1}^{\epsilon_1}e_{j_2}^{\epsilon_2}\cdots e_{j_r}^{\epsilon_r}$，用 Γ 的边来描述；不过要注意，在通过 $\pi_\Gamma(p)$ 进行这种描述时， p 仅在左侧 $\mathbb{F}_n$-平移意义下定义。Γ 的边是 $\mathcal{T}$ 中边路径 p 的 Γ-标签。若边路径 p 从 g 出发（称 p 为出射）或在 g 结束（称 p 为入射），则称其与 $g\in\mathbb{F}_n$ 相接。边路径 p 通过考察其经过的本质边的有序序列，唯一确定 $\mathbb{F}_n$ 的一个元素，因为每条本质边都由 $\mathbb{F}_n$ 的一个生成元 $\{x_1^{\pm1},\cdots,x_n^{\pm1}\}$ 标记。我们有时将 $\mathcal{T}$ 中一条约化边路径称为 $\mathbb{F}_n$-生成元，若它在 Γ 上的投影是一条简单环路，且只包含一条本质边；该边的标签就是 $\mathbb{F}_n$-生成元的标签。$\mathcal{T}$ 中一个 1-胞腔的标签（在 Γ 或 $\mathbb{F}_n$ 中）是对应两条边的标签之并。

定义 1.3。设 $\pi_\Gamma\colon\ \mathcal{T}\to\Gamma$ 为某个 $\mathbb{F}_n$-树。

(1) 若一个本质 1-胞腔与子图 U 相交（分别地，入射于、出射于），则称它与（分别地，在） $\mathcal{T}$ 相交（分别地，入射于、出射于），如果它与（分别地，在）$g\in\mathbb{F}_n$ 相交（分别地，入射于、出射于），其中 $g\in\mathbb{F}_n$ 是某个 $v\in V$（U）的标签，且它不包含在 U 中。所有与 U 相交的本质胞腔构成 U 的冠,—记作 $Cr(U)$。子图 U 的完备化（记作U）是包含 U 的最小树，且它与 U 的冠的并也是一棵树。

(2) 若 U 的冠中的两个本质胞腔，一个入射、另一个出射，且它们具有相同的 $\mathbb{F}_n$-标签，则称它们相容。若此外，从入射本质胞腔的起始顶点到出射本质胞腔的终止顶点的边路径的 $\mathbb{F}_n$-标签是它们的 $\mathbb{F}_n$-标签的幂，则称它们为孪生对。(3) 在相容对 $\{\gamma, \gamma'\}$ 处的平移 $h_{\gamma,\ \gamma'}$ 是将 γ 映到 γ' 的左平移。

引理 1.4。设 $\mathcal{T}$ 是一棵 $\mathbb{F}_n$-树，U 是 $\mathcal{T}$ 的一个子树。那么，每个 $\gamma \in Cr(U)$ 恰有一个孪胞腔，记作 γ^{tw}。所有本质胞腔对 $\{\gamma, \gamma^{tw}\} \subset Cr(U)$ 的集合是唯一的（相差一个定向），并定义了 $Cr(U)$ 的一个划分。

推论 1.5。沿用引理 *1.4* 中的记号和假设，设 $\mathbb{F}_n = \langle x_1, \cdots, x_n \rangle$。对于任意 $\gamma \in Cr(U)$，平移 $h_{\gamma,\ \gamma^{tw}}\colon\ \gamma \mapsto \gamma^{tw}$ 有唯一确定的定义，并且共轭于某个 x_i，$1 \le i \le n$ 的幂。

1.2. An invariant tree f或 un ipotent sub群的 f $\mathrm{Out}(\mathbb{F}_n)$.

W们回顾一下 Bestvina-Feighn-Handel 理论中所需的概念和结果 .

定义 1.6 ([3])。$\mathbb{F}_n$ 的外自同构是幺幂的，当且仅当它在 $H_1(\mathbb{F}_n; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}^n$ 上诱导的自同构是幺幂的。

引理 1.7 ([2],推论5.7.6)。$\mathrm{Out}(\mathbb{F}_n)$ 中任意多项式增长外自同构子群都含有一个有限指数幺幂子群。

定义 1.8([3])。

(1) $\mathbb{F}_n$ 的过滤图是一个图 Γ，其基本群与 $\mathbb{F}_n$ 同构，并配备一个过滤 $\emptyset = \Gamma_0 \subsetneq \Gamma_1 \subsetneq \cdots \subsetneq \Gamma_i \subsetneq \Gamma_{i+1} \subsetneq \cdots \subsetneq \Gamma_r = \Gamma$；对于每个 $i = 0,\ \cdots,\ r-1$，Γ_{i+1} 都是由 Γ_i 和一个1-胞腔 e_i 组成的并集。(2) 过滤图 Γ 的同伦等价映射 f 称为过滤的，若它是图映射，且对于 Γ 中的任意边 e_i，$i = 1,\ \cdots r$，$f(e_i) = v_{i-1} e_i u_{i-1}$，其中 v_{i-1}，u_{i-1} 是包含在 Γ_{i-1} 中的环路。

显然，定义 1.8 给出的过滤在 Γ 的 1-胞腔上诱导出一个次序，从而在万有覆盖中的 1-胞腔上诱导出一个偏序。这些次序和偏序将称为 1-胞腔的高度。一组 1-胞腔 的高度 是这些胞腔的最大高度。若 $\{f_1, \cdots, f_k\}$ 是 Γ 的一组 k 过滤同伦等价，则 Γ 的一个 1-胞腔 e_j（或其在万有覆盖中的任意提升）若仅出现在 $f_i(e_j)$ 中，且不是其他任何 1- 胞腔在 f_i 下的像，则称其为 i-最上层；若对每个 $i \in \{1, \cdots, k\}$，它都是 i-最上层，则称其为最上层。

定义 1.9。若在按定义 1.2 所述选定基本群与 $\mathbb{F}_n$ 的一个同一化后，每个本质胞腔都高于具有相同 $\mathbb{F}_n$ 标签的唯一简单环路中的任意 1-胞腔，则 $\mathbb{F}_n$ 的过滤图称为构造良好。

引理 1.10。任意过滤图都存在一棵极大树和一组本质胞腔，使其构造良好。

证明。假设边按从低到高的顺序编号。从 e_1 开始，取边的极大序列 $e_1 < e_2 < \cdots < e_l$，使它们的并构成一片森林，将这些边放入极大树中，并将随后遇到的第一条边 e_{l+1} 定义为本质边。然后用 e_{l+2} 替换 e_1，重复上述过程。□

注意，过滤图 Γ of $\mathbb{F}_n$ 的过滤同伦等价会固定 Γ的每个顶点。我们假定已固定 $\mathbb{F}_n$在 Γ上的一棵树的选取。过滤同伦等价由此自然定义了 $\mathbb{F}_n$的一个外自同构。所有

过滤同伦等价在相对于 Γ的顶点的同伦意义下（配以复合运算）构成一个群（[3][引理 6.1]），记作 $\mathcal{F}$。对过滤图 Γ of $\mathbb{F}_n$，任意选取一组 k过滤同伦等价，都会定义 $\mathcal{F}$ 的一个子群 $\langle f_1, \cdots, f_r \rangle$，从而也定义 Out($\mathbb{F}_n$) 的一个子群 $\mathcal{U}$。

定理 1.11 ([3])。对于任意整数 $n \geq 2$ 和 $k \geq 1$，对于 $\mathrm{Out}(\mathbb{F}_n)$ 的任意秩为 k 的幺幂自由子群 $\mathcal{U}$，都存在一个由 $\mathbb{F}_n$ 的过滤图 Γ 以及 Γ 的一族约化过滤同伦等价 $\mathcal{F}$ 组成的 $\mathcal{U}$ 的 BFH 代表 $(\mathcal{F}, \Gamma)$，它定义了 $\mathcal{U}$。

至此，我们回顾完 Bestvina-Feighn-Handel 理论。现在给出我们将要研究的多项式增长自同构的特定自由子群的定义：

定义 1.12。设 $(\mathcal{F}, \Gamma)$ 是一个构造良好的 BFH 代表。设 $\{F_i\}_{i=1,\cdots,k}$ 是 $\mathcal{F}$ 中过滤同伦等价到 Γ 的万有覆盖 $\mathcal{T}$ 的约化提升。

对于 $\mathcal{T}$ 中的任意 1-胞腔 E，我们用 E^i_{top} 表示 $F_i(E)$ 中具有相同标签的唯一 1-胞腔。令 Bt_i（分别为 Bt）表示 $\mathcal{T}$ 上的映射，它将一个 EoE 胞腔 E（见定义 1.2）对应到所有满足 $F_i(E')$ 包含 E^i_{top} 的 1-胞腔 E'（分别对应到所有满足存在某个 $i \in \{1, \cdots, k\}$，使得 $F_i(E')$ 包含 E^i_{top} 的 1-胞腔 E'）。

(1) 若对于任意 EoE 胞腔 E，$Bt(E)$ 都包含在 E 的同一侧，则 BFH 代表 $(\mathcal{F}, \Gamma)$ 称为单侧。（2）若对于任意 EoE 胞腔 E，都存在 E-关联集 $I_E \subset \{1, \cdots, k\}$，使得

- E 对于任意 $j \notin I_E$ 都是 j-最上层的，
- 若 R 表示从 E 到 $\partial Bt(E)$ 的一条测地线，则要么没有任何 $F_i(R)$ 包含 E^i_{top}，要么对于每个 $i \in I_E$ F_i，$R(R)$ 都包含 E^i_{top}。

（3）Out($\mathbb{F}_n$) 的一个幺幂自由子群若存在关联的（分别为单侧的）BFH 代表，则称为关联的（分别为单侧的）。

引理 1.13。在定义 *1.12* 的假设和记号下，设$(\mathcal{F}, \Gamma)$是单侧的。若 E、X 是 $\mathcal{T}$ 中的两个1-胞腔，且 $F_i(X)$ 包含 E^i_{top}，则相对于 E，当且仅当连接 E 与 X 的测地线穿过 $Bt_i(E)$ 中偶数个胞腔时，X^i_{top} 与 X 位于 E^i_{top} 的另一侧。

证明。令 R 为 E 与 X 之间唯一的测地线，并假设它不穿过 $Bt_i(E)$中的任何胞腔。由于 $F_i(X)$包含 E^i_{top} 且是约化的，$F_i(X)$包含 $F_i(R)$。因此，X 高于 R 中的任何胞腔，所以 X^i_{top} 不属于 $F_i(R)$。同理，它也不属于 $F_i(E)$。由于 R 不穿过 $Bt_i(E)$中的任何胞腔，且 F_i 是约化的，$F_i(X)$终止于 E^i_{top}的另一侧。由此可得，X^i_{top} 位于 E^i_{top}的另一侧。推广到 R 穿过 $Bt_i(E)$中偶数个胞腔的情形是显然的。□

由此得到以下结论

推论 1.14。设 $(\mathcal{F}, \Gamma)$ 是一个单侧 *BFH* 代表，且令 $\{F_i\}_{i=1,\cdots,k}$ 为 $\mathcal{F}$ 中这些过滤同伦等价的约化提升，它们映至 Γ的万有覆盖 $\mathcal{T}$。对于 $t \in \mathbb{F}_k$，令 $F_t \in \langle F_1, \cdots, F_k \rangle$ 表示映射 $\sigma(t)$；对于任意 1-胞腔 E，令 E^t_{top} 为 $F_t(E)$中与 E 具有相同标签的唯一 1-胞腔。

令 E 为 $\mathcal{T}$ 中任意一个 *EoE* 胞腔，并令 R 为从 E 到 ∂Bt（E）的一条测地线段，它至少穿过 Bt（E）中的一个胞腔。那么，相对于 E，位于 E^t_{top} 与 R 相反一侧的 F_t（R）的任何子测地线都不包含 Bt（E^t_{top}）中的元素。

当然，如果基本区域中 $\mathbb{F}_n$ 的作用所要求的定义 1.12 中的性质对 EoE 胞腔 E 成立，那么它们对 E 的所有左 $\mathbb{F}_n$-平移也成立。在论文的后文中，我们以另一种等价的方式引入映射 Bot_i 和 Bot，它们与 Bt_i 和 Bt 非常相似。

2. Free by free groups, suspensions

本节旨在描述 BFH 代表（$\mathcal{F}$, Γ）的悬挂（见下文 2.2）的万有覆盖，以及其称为（$\mathcal{F}$, Γ）的万有覆盖映射柱。

定义 2.1。设 $\mathbb{F}_n$, $\mathbb{F}_k$ 是秩 n 和秩 k 的自由群，且设 σ: $\mathbb{F}_k \hookrightarrow \mathrm{Out}(\mathbb{F}_n)$ 是一个单同态。

$\mathbb{F}_n$ 在 σ 上由 $\mathbb{F}_k$ 作用的悬挂，记作 $G^{\sigma}_{n,\,k}$，是群

$$G^{\sigma}_{n,k} := \mathbb{F}_n \rtimes_{\sigma} \mathbb{F}_k.$$

正规子群 $\mathbb{F}_n$ 称为 $G^{\sigma}_{n,\,k}$ 的水平子群，而子群$\mathbb{F}_k$ 是垂直子群。

定义 2.2。设 Γ 是一个图，且设 $\mathcal{F} = \{f_1, \cdots, f_k\}$ 是 Γ 的一族连续映射。

Γ 的悬挂按 $\mathcal{F}$，记作 $K_{(\mathcal{F},\Gamma)}$，是二维复形

$$K_{(\mathcal{F},\Gamma)} := (\Gamma \times T^k)/((x, v_j) \sim (f_j(x), v_0)),$$

Γ 在 $\mathcal{F}$ 下的映射柱是悬挂 Γ 按 $\mathcal{F}$ 的万有覆盖 π_K: $\mathcal{K}_{(\mathcal{F},\Gamma)} \to K_{(\mathcal{F},\Gamma)}$。

在 Γ上，覆盖子图 U 的 j-圆柱是二维复形

$$((U \times [0,1]) \sqcup f_j(U))/\sim \text{ with } (x,1) \in (U \times [0,1]) \sim f_j(x) \in f_j(U)$$

假设定义 2.2 中的映射 f_i 是同伦等价，因此在 Γ 的基本群上诱导外自同构 α_i。若后者是 $\mathbb{F}_n$，则悬挂的基本群是半直积 $\mathbb{F}_n \rtimes_{\sigma} \mathbb{F}_k$，其中态射 σ: $\mathbb{F}_k \hookrightarrow \mathrm{Out}(\mathbb{F}_n)$ 的像是由 α_i 生成的子群。特别地：

引理 2.3。设 σ: $\mathbb{F}_k \hookrightarrow \mathrm{Out}(\mathbb{F}_n)$ 是一个单同态，使得 $\sigma(\mathbb{F}_k)$ 是一个幺幂子群。设 $(\mathcal{F}, \Gamma)$ 是 $\sigma(\mathbb{F}_k)$ 的 *BFH* 代表。那么， $\mathbb{F}_n$ 按 $\mathbb{F}_k$在 σ 上的悬挂，是 Γ 按 $\mathcal{F}$ 的悬挂的基本群：

$$G^{\sigma}_{n,k} = \pi_1(K_{(\mathcal{F},\Gamma)}).$$

在下面的引理中，我们描述悬挂复形的胞腔。本引理是在引理 2.3 的假设下陈述的；实际上我们唯一真正需要的假设是，用来构造悬挂的映射 f_i 将顶点映到顶点。由于过滤同伦等价固定每个顶点，这一假设得以满足。

引理 2.4。采用引理 *2.3* 中的记号和假设，令 $\mathcal{F} = \{f_i\}_{i=1,\,\cdots,\,k}$:

- $K_{(\mathcal{F},\,\Gamma)}$ 的1骨架是 $\Gamma \times \{v_0\}$ 与对 Γ 的各顶点 v 取。的并集。

- 如果 Γ 有 l 1-胞腔，那么在 $K(\mathcal{F},\Gamma)$ 中恰有 $k.l$ 2-胞腔 $(c_{i,j})_{i=1\,\cdots\,l}^{j=1\,\cdots\,k}$,,,,,。定向 *2*-胞腔 $c_{i,j}$ 的边界 $\partial c_{i,j}$ 按 $E^+(R_k) \cup E^+(\Gamma)$ 的标签读取边路径 $e_i t_j f_j(e_i)^{-1} t_j^{-1}$。特别地，$\partial c_{i,j}$ 在 Γ 的顶点 v 上的 $\{v\} \times R_k$ 的并集中恰含两个 *1*-胞腔，而在 $\Gamma \times \{v_0\}$ 中含有一个 *1*-胞腔，它连接 $E^+(R_k)$ 各副本中相关边的初始顶点。

引理 2.4 使我们能够确立以下定义：

定义 2.5。 沿用引理 2.4 的记号和假设：

- $\Gamma \hookrightarrow K_{(\mathcal{F},\ \Gamma)}$ 中的 1-胞腔称为水平 1-胞腔。 $K_{(\mathcal{F},\ \Gamma)}$ 中 R_k 的副本里的 1-胞腔称为垂直 1-胞腔。2-胞腔称为方格。设 c 是一个 p.o.方形，其边界在$E^+(R_k) \cup E^+(\Gamma)$的标签中读作 $e_i t_j f_j (e_i)^{-1} t_j^{-1}$ 。
- 边 e_i 是 c的底边。 $f_j(e_i)^{-1}$ 中的边的并集是 c的顶边。
- 边 t_j 和 t_j^{-1} 在 ∂c中，称为 t_j-胞腔，构成其 垂直边界； c， c 具有垂直 j-边界，而 c 是一个 j-方格。

上述所有术语都提升到映射柱 π_K： $\mathcal{K}_{(\mathcal{F},\Gamma)} \to K_{(\mathcal{F},\Gamma)}(\mathcal{F},\ \Gamma)$。

以下引理是定理 1.11 和引理 2.8 的第 (3) 项的直接推论：

引理 2.6。 设 $\sigma\colon\ \mathbb{F}_k \hookrightarrow \mathrm{Out}(\mathbb{F}_n)$ 是一个单同态，且 $\sigma(\mathbb{F}_k)$ 是一个幺幂子群。设 $(\mathcal{F}, \Gamma)$ 是 $\sigma(\mathbb{F}_k)$ 的 ***BFH*** 代表，并令 $\mathcal{F} = \{f_i\}_{i=1,\cdots,k}$。设 E是 $\mathcal{K}_{(\mathcal{F},\Gamma)}$的任意水平 1-胞腔。

(1) $\mathcal{K}_{(\mathcal{F},\Gamma)}$ 中任何以 E 为底边的方格 C，其顶边恰好包含一个1-胞腔，该胞腔具有与 E相同的 Γ-标签。*(2)* 对任意 $i \in \{1, \cdots, k\}$，存在唯一一个 $\mathcal{K}_{(\mathcal{F},\Gamma)}$ 中的 i-方格 C，其底边是一个具有与 E相同的 Γ-标签的1-胞腔。*(3)* 顶边包含 E 的 i-方格的数量，等于 E 的标签在 Γ 的边经 $f_i \in \mathcal{F}$映射所得像的并集中出现的次数。两个不同的此类 i-方格可能具有相同的底边标签。

定义 2.7。 沿用引理 2.6 的记号和假设：

(1) 引理 2.6 第 (1) 项给出的 1-胞腔记为 E^i_{top}，如果 C 是一个 i-正方形。引理 2.6 第 (2) 项给出的 1-胞腔记为 E^i_{bot}，如果 C 是一个 i-正方形。(2) 我们将映射 Bot_i 记为：它将给定的 1-胞腔 E 映射为引理 2.6 第 (3) 项给出的所有 i-正方形的底边之并；并将由 $Bot_i^*(E) = Bot_i(E) \setminus \{E\}$ 定义的映射记为 Bot_i^*。(3) (i, E)-提升 是左平移 $\mathcal{L}_{i,E}\colon\ E \mapsto E^i_{top}$，由 $G^\sigma_{n,k}$-元素将 E 映射到 E^i_{top}。

根据引理 2.3，悬挂群 $G^\sigma_{n,\ k}$ 是万有覆盖 π_K: $\mathcal{K}_{(\mathcal{F},\Gamma)} \to K_{(\mathcal{F},\Gamma)}$的覆盖变换群：$G^\sigma_{n,\ k}\widetilde{\ }$与每个 i-胞腔轨道之间存在一一对应关系。与图的情形一样，我们固定极大树 T 在 Γ 中的一个提升 T_e，从而得到 $\widetilde{G^\sigma_{n,\ k}}$ 与每个 $G^\sigma_{n,\ k}\cdot v$, $v \in V(T_e)$ 之间的对应。

引理 2.8. 采用引理 *2.3* 和 *2.4* 的记号与假设，我们用$\sim F_j$ 表示 f_j 到 $\mathcal{T}$（Γ的万有覆盖）上的提升，该提升满足 $F_j \circ \pi_\Gamma = \pi_\Gamma \circ f_j$；用 T_e 表示所选的 Γ中极大树的提升。

于是存在一个满射连续映射 π_k^∞: $\mathcal{K}_{(\mathcal{F},\Gamma)} \to T_k^\infty$，称为轨道映射，它从$\mathcal{K}_{(\mathcal{F},\Gamma)}$映到垂直子群 F_k 的凯莱图 T_k^∞，并满足以下性质：

- 每个顶点的原像 $w \in \mathbb{F}_k$ 是 $\mathcal{T}$ 的一个副本 $\mathcal{T}_w$，按照约定， $\widetilde{\mathcal{T}_e}$该副本包含提升 T_e （它对应于 $e \in G^\sigma_{n,\ k}$）。其 1 胞腔是水平1胞腔。

- 任意一条从 w 到 wt_j 的闭边的原像 $\mathcal{K}_{w,\ wt_j}$ 同胚于 $\mathcal{T}$ 上的j圆柱。$\mathcal{K}_{w,\ wt_j}$内部在 π_k下投影到 T_k^∞的 1 胞腔的 1 胞腔，是 $\mathcal{K}_{(\mathcal{F},\ \Gamma)}$的竖直 1 胞腔。 $\mathcal{K}_{(\mathcal{F},\ \Gamma)} \setminus \mathcal{K}_{w,\ wt_j}$的闭包恰由两个连通分支组成，其并集包含 $\mathcal{K}_{(\mathcal{F},\ \Gamma)}$的所有顶点。

- 任意 *p.o.*方形 $C_{i,j} \in \pi_K^{-1}\ (c_{i,j})$ （见引理 *2.4*）在 $\mathcal{K}_{w,wt_j} \subset \mathcal{K}_{(\mathcal{F},\Gamma)}$ 的边界给出一条形如 $E_i t_j F_j (E_i^{-1}) t_j^{-1}$ 的边路径，其标签取自 $E^+(\mathcal{T}) \cup E^+(R_k)$。

此外：

(1) 顶点在 $G_{n,k}^\sigma$ 的垂直子群 $\mathbb{F}_k$ 的右作用下所成的轨道，是轨道映射下经过该顶点的 T_k^∞的提升。*(2)* 对任意 w、 $w' \in \mathbb{F}_k$、 $w.\mathcal{T}_{w'} = \mathcal{T}_{ww'}$ 和 $\mathcal{T}_{w'}.w = \mathcal{T}_{w'w}$， 它们都是自由左作用和右作用。*(3)* 对任意 $w \in \mathbb{F}_k$ 和圆柱 $\mathcal{K}_{w',w't_j}$: $w.\mathcal{K}_{w',w't_j} = \mathcal{K}_{ww',ww't_j}$ 是自由左作用。*(4)* 对于左作用和右作用， $\mathcal{T}_w$ 与 $\mathcal{K}_{w',w't_j}$ 的稳定子均为水平子群。

3. Space with walls structure

墙空间是在 [12] 中引入的，旨在检验 Haagerup性质。给定集合 X， X 的一面墙是 X 的一个划分 w ，分成两个非空类，也称为 w的两侧。设 X中的 x、 y 为任意两点。当且仅当 x 和 y 属于 w的不同侧时， w 的墙 X 分隔 x和 y 。给定一族墙$\mathcal{W}$, 分隔两点 x和 y的 $\mathcal{W}$中墙的数量记为 $\mu_{\mathcal{W}}(x,y)$，称为 x 与 y 之间的墙距离（原则上可能为无穷大）。若 X 包含在弧连通拓扑空间 Y中，那么 Y 内连接 X 中两点的一条路径 p 若满足 w 分隔 p的端点，则称该路径跨越一面墙 w 。墙空间是一个有序对$(X,\mathcal{W})$, 其中X 是一个集合， $\mathcal{W}$ 是一族墙，并且对于 X中任意两个不同的点 x、 y ，均有$\mu_{\mathcal{W}}(x,y) < \infty$。若一个离散群在墙空间$(X,\mathcal{W})$上适当地作用，即它保持 $\mathcal{W}$不变，且对某个（从而也对任意） $x \in X$，函数 $g \mapsto \mu_{\mathcal{W}}(x,gx)$在 G上是适当的。

定理 3.1 ([12])。 在墙空间上适当地作用的离散群 G 是 *a-T-*可容许的。

注 3.2。 设 $\mathbb{F}_k$ 为秩为 k 的自由群， T_k^∞为其相对于一个自由基的凯莱图。若 T_k^∞的任意一个 1-胞腔为 E ，且 w_- 和 w_+ 分别表示 E 的左侧和右侧，那么 $(w_-,\ w_+)$ 是 $\mathbb{F}_k$的一个经典 j-墙。 树 T_k^∞连同所有经典墙构成一个墙空间， $\mathbb{F}_k$ 在其上适当地作用。

为了得到定理 1，我们需要以下（更强的）结果（类似的陈述可参见 [15] ）。

定义 3.3。 设 $(X,\ \mathcal{W})$ 是一个墙空间。若两个墙 $(u,\ u^c) \in \mathcal{W}$和 $(v,\ v^c) \in \mathcal{W}$ 交叉，则四个交集 $u \cap v$、 $u \cap v^c$、 $u^c \cap v$ 和 $u^c \cap v^c$ 均非空。

定理 3.4 ([6])。 设 G 是一个在墙空间$(X,\mathcal{W})$上适当地作用的离散群。那么 G 在某个 *CAT(0)* 方复形 $Cb(\mathcal{W})$ 上适当地等距作用，其维数等于两两交叉的墙所组成的有限集合基数的上确界（该上确界可能为无穷大）。特别地， G是 *a-T-*可容许的。

第4 节至7节（含）的记号：

σ: $\mathbb{F}_k \hookrightarrow \mathrm{Out}(\mathbb{F}_n)$ **是一个单同态，使得** $\sigma(\mathbb{F}_k)$ **是一个关联的单侧幺幂子群（见定义 1.12）。**

$(\mathcal{F}, \Gamma)$ **是** $\sigma(\mathbb{F}_k)$ **的有约束的单侧 BFH 代表（见定理 1.11 和定义 1.12）），其中** $\mathcal{F} = \{f_i\}_{i=1, \cdots, k}$ **是** Γ **的约化过滤同伦等价集合（见定义 1.8），提升到** $\{F_i\}_{i=1, \cdots, k}$**，即** $\mathcal{T}$ **的约化图映射集合，其中** π_Γ: $\mathcal{T} \to \Gamma$ **是** Γ **的万有覆盖。我们假设** Γ **构造良好（见定义 1.9 和引理 1.10）。**

$G^\sigma_{n,\ k} = \mathbb{F}_n \rtimes_\sigma \mathbb{F}_k$ **是** σ **上由** $\mathbb{F}_k$ **作用于** $\mathbb{F}_n$ **得到的悬挂。**

$\mathcal{K}_{(\mathcal{F},\Gamma)}$ **是** Γ **在** $\mathcal{F}$ **下的映射柱（见定义 2.2）。**

π^∞_k: $\mathcal{K}_{(\mathcal{F},\Gamma)} \to T^\infty_k$**是轨道映射（见引理 2.8）。**

4. Vertical walls

4.1. **定义与稳定子。**

根据引理 2.8，对于 $T^\infty_k(\pi^\infty_k)^{-1}(E)$ 的任意 1-胞腔 E，它是一个以 $\mathcal{T}$ 为底的圆柱，将 $\mathcal{K}_{(\mathcal{F},\Gamma)}$ 切成两个连通分支，其并集包含 $\mathcal{K}_{(\mathcal{F},\Gamma)}$ 的所有顶点。这使我们可以给出以下定义

定义 4.1. 一个垂直 j-墙（$j \in \{1, \cdots, k\}$）是任意一对 $((\pi^\infty_k)^{-1}(w_-), (\pi^\infty_k)^{-1}(w_+))$，其中 (w_-, w_+) 是垂直子群 $\mathbb{F}_k$ 的一个经典 j-墙（见注 3.2）。竖直墙集由所有垂直 j-墙组成。

注记 4.2. 根据定义和引理 2.8，对于任意 $j = 1, \cdots, k$，垂直 j-墙与以 $\mathcal{T}$ 为底的 j-圆柱一一对应。

引理 4.3. 所有垂直 j-墙构成的集合在$G^\sigma_{n,k}$ 对 $\mathcal{K}_{(\mathcal{F},\Gamma)}$的左作用下不变。水平子群是任意垂直$j$-墙的左右稳定子。

证明. G^σ_n中的任意元素 g ,k 都可唯一分解为 hv，其中 h （分别为 v）属于水平（分别为垂直）子群。若 $\mathcal{W} = ((\pi^\infty_k)^{-1}(w_-),(\pi^\infty_k)^{-1}(w_+))$是一个垂直 j-墙，则$g.\mathcal{W} = (hv.(\pi^\infty_k)^{-1}(w_-)\ hv.(\pi^\infty_k)^{-1}(w_+))$。由引理 2.8 的第 (3) 和 (4) 项，$g.\mathcal{W} = ((\pi^\infty_k)^{-1}(v.w_-), (\pi^\infty_k)^{-1}(v.w_+))$。由于$(w_-, w_+)$是 $\mathbb{F}_k$的一个经典 j-墙，$v.(w_-, w_+) = (v.w_-, v.w_+) = (w'_-, w'_+)$是 $\mathbb{F}_k$的一个经典 j-墙。因此，$g\mathcal{W} = ((\pi^\infty_k)^{-1}(w'_-),(\pi^\infty_k)^{-1}(w'_+))$是$G^\sigma_n$的一个垂直 j-墙，k，故垂直墙集具有$G^\sigma_{n,k}$-不变性。引理 2.8 的第 (4) 项表明，水平子群是任意垂直 j-墙的左右稳定子。□

4.2. **有限性。**

引理 4.4. 对于$G^\sigma_{n,k}$中的任意两个元素 $g = hv$ 和 $g' = h'v'$，轨道映射在分隔 g 与 g' 的垂直墙和 $\mathbb{F}_k$中位于 v 与 v'之间的经典墙之间诱导出一个双射。

证明。 根据定义，$\mathbb{F}_k$ 与 v 和 v' 之间的经典墙，与将 v 和 v'分隔开的 1-胞腔一一对应。根据注记 4.2，垂直墙与

在 $\mathcal{T}$ 上方的圆柱一一对应。对于 $G^{\sigma}_{n,k}$ 中任意的水平元素 h, h' 和垂直元素 v, v'，当且仅当某个在 v 和 v' 之间分隔开一个 1-胞腔的原像时，$\mathcal{T}$ 上方的圆柱才会将 hv 与 $h'v'$ 分隔开。由于水平子群稳定 $\mathcal{T}$ 上方的圆柱，这意味着，将 hv 与 $h'v'$ 分隔开的垂直墙，与垂直子群 $\mathbb{F}_k$ 中将 v 与 v' 分隔开的经典墙一一对应，引理得证。□

作为这一引理的直接推论，我们得到以下结果

命题 4.5。$G^{\sigma}_{n,k}$ 中任意两个元素都能被有限条垂直墙分隔。

5. Diagonal walls

回顾一下，我们已经选定了 $G^{\sigma}_{n,k}$ 与 $\mathcal{K}_{(\mathcal{F},\Gamma)}$ 中某个固定提升里的顶点轨道之间的一个对应，其中该提升是 Γ 中一棵极大树的提升。我们还要回顾一下，我们所研究的 BFH 代表构造良好。这尤其意味着，一个 $\mathbb{F}_n$- 生成元的像中，同一标签的本质胞腔至多出现一次。由于这些对角墙的定义涉及一些繁琐的定义，我们先概述整个构造：

5.1. 对角墙构造概要。当然，先前定义的垂直墙无法分隔水平子群 $\mathbb{F}_n \lhd G^{\sigma}_{n,k}$，因此我们现在的目标是为水平子群构造一个适当的墙空间结构。下面的讨论将以 BFH 代表的图为玫瑰图的情形为例，说明这一构造。

$\mathbb{F}_n$ 的经典墙由（例外的）1-胞腔切开。考虑这样一个 1-胞腔 E。若它位于最上层，那么取它在由各种提升生成的子群下的所有像，很容易得到一个切割系统，该系统为 $G^{\sigma}_{n,\ k}$定义了一堵墙。接下来考虑 E 不在最上层的情形。这意味着至少存在一个正方形 C，它属于 $\mathcal{K}_{(\mathcal{F},\Gamma)}$，包含顶边上的 E，且其底边具有不同且更高的标签。这样的正方形允许我们在不经过 E的情况下连接 E 的两个顶点。因此，像前面那样，取 E 在由各种提升生成的子群下的所有像，并不能将 $\mathcal{K}_{(\mathcal{F},\Gamma)}$断开。我们必须“补全”这第一组切割。处理这些非最上层胞腔（“一般”情形）的策略是添加垂直切割，使每个正方形的边界都包含偶数条切割。一旦满足这一性质，便可以根据从 $g \in G^{\sigma}_{n,\ k}$ 到相关有向边的初始元素的边路径中所包含切割的奇偶性，定义 E-墙的两侧。

请注意，若希望由提升生成的子群下 E 的左平移成为切口，那么为了使方格的边界上至多有两个切口，就不能选择哪一条垂直边界作为切口。现在请读者参阅图 1。

一旦将 ∂C 中的这条垂直边界定义为一条切口，就必须通过水平元素的左平移传播这些切割；最终，这些平移将属于墙的稳定子群。这里存在一个障碍：C 左（分别为右）边界上的一条垂直切割，也是相邻正方形 C' 右（分别为左）边界上的一条垂直切割，而该相邻正方形的底边具有相同的标签。因此，不可能沿着 C 的底边进行平移。解决办法是将 C' 顶边上 E 的副本 E' 定义为第二条水平切割。然而，若不在边界上产生含有奇数条割线的方格，就不可能添加 E' 的提升：这便引出了定义 5.5 中阶梯的定义。这些元素

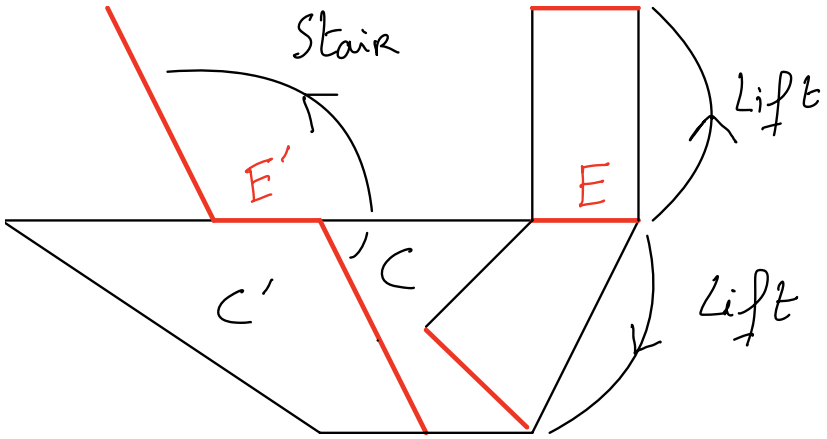

FIGURE 1. 构造模型

的定义是：使垂直切割位于相对于 E' 而言的 E 另一侧（见图 1）。

在一般情形下，BFH 代表的图不是玫瑰图，因此需要更加谨慎地定义：对于一个给定的像（如上文中，C 底边的像跨越了 E），水平生成元的像跨越它意味着什么。这正是 5.1 中定义 $Top(E)$、$Bot(E)$ 和 $B(E)$，以及引入E-跨越孪生对 这一概念的目的。顶点的颜色 在定义 5.4 中引入；切口随后在 5.15 中定义为起始顶点具有正颜色的垂直偏序边。定义 5.5 中的c-底部、c-顶和块 是 5.1 中顶边和底边的着色版本。定义 5.8 中的双块 则是将上文中从正方形 C 到其与上方 C' 的并集的过程推广而来。

只要在构造开始时，我们选择将初始水平切口在由提升生成的子群作用下的轨道中的所有 1-胞腔都定义为切口，作用的适当性便显而易见。然而，由于包含顶边上本质 1-胞腔的正方形，其底边可能是特殊 1-胞腔，因此必须人为地将特殊 1-胞腔加入水平切口中。值得注意的是，必须将初始水平切口的整个提升都纳入切口集合，这一限制是我们必须将范围限定为相连单侧子群的主要原因之一。

5.2. **顶部、底部与颜色**。

定义 5.1. 设 E 是 $\mathcal{K}_{(\mathcal{F},\Gamma)}$ 的一个水平 EoE 胞腔（见定义 1.2）。

(1) 我们用 $Bot(E)$ 表示对 $i \in \{1,\cdots,k\}$ 取并得到的 $Bot_i(E^i_{top})$。树 $Top_i(E)$ 是包含 $Bot(E)$ 的最小树上的 i-圆柱的顶边，并令

$$Top(i,E) = \bigcup_{j=1}^{k} (\mathcal{L}_{i,E} \circ \mathcal{L}^{-1}_{j,E})(Top_j(E))$$

。 E-顶边 $Top(E)$ 表示 $\mathcal{L}^{-1}_{i\,E,}$ $(Top(i,\ E))$。 E-底边 $B(E)$ 是集合 $V(Top(i,\ E)$ $t_i^{-1})$ 关于 $i \in \{1,\cdots,k\}$ 的并集的完备化。

(2) 设 I 是 $\{1,\cdots,k\}$ 的一个子集。$Cr(B(E))$ 中的一对孪生对称为 E-生成的，如果它生成了某个 $i \in \{1,\cdots,k\}$ 的 $Bot^*_i(E^i_{top})$；如果对任意 $i \in I$ 都成立且对其他任何一个都不成立，则称其为 $(I,\ E)$-生成的。

注 5.2。 根据定义，上文构造的 E-底部 $B(E)$ 包含所有 $Top(i,\ E)$ 中所有顶点的原像，$i \in \{1, \cdots, k\}$。因此，在论文后文中，我们“块”（定义 5.5）的一切左平移都互不相交。不过，这并非绝对必要：我们真正需要的只是，我们“初等切割”（定义 5.15）的一切左平移不属于同一个双块（定义 5.8）。

引理 5.3. 设 E 是 $\mathcal{K}_{(\mathcal{F},\Gamma)}$ 的一个水平 *EoE*-胞腔。假设给定 $B(E)$ 的一对孪生对 $\{X, Y\}$，并将分别从 E（因此不穿过 E）到 X 和 Y 的唯一测地线记为 $p_{E,X}$、$p_{E,Y}$。那么：

> *(1)* 集合 $\{1, \cdots, k\}$ 分解为互不相交的子集 I_X、I_Y、$I_{X、Y}$、$N_{X、Y}$，它们分别定义为满足以下条件的指标集合：对于每个 $i \in I_X$，仅 $p_{E、X}$ 张成 Bot_i（E^i_{top}）；对于每个 $i \in I_Y$，仅 $p_{E、Y}$ 张成 Bot_i（E^i_{top}）；对于每个 $i \in I_{X、Y}$，$p_{E、X}$ 与 $p_{E、Y}$ 都张成 Bot_i（E^i_{top}）；对于每个 $i \in N_{X、Y}$，$p_{E、X}$ 和 $p_{E、Y}$ 都不张成 Bot_i（E^i_{top}）。*(2)* 按照第 *(1)* 项的记号，孪生对 $\{X, Y\}$ 是 *($I_X \cup I_Y$, E)*-张成的。*(3)* 孪生对 $\{X, Y\}$ 张成了 Bot^*_i（E^i_{top}）中在 $p_{E、X}$ 里对于 $i \in I_X$ 最高的胞腔，以及 Bot^*_i（E^i_{top}）中在 $p_{E、Y}$ 里对于 $i \in I_Y$ 最高的胞腔。特别地，X 和 Y 高于 $p_{E、X} \cup p_{E、Y}$ 中 Bot^*_i（E^i_{top}）的任何胞腔。

证明。 条目 (1) 是一个恒真命题，条目 (2) 则是定义的直接推论。我们来证明条目 (3)。由于 E 是一个 EoE 胞腔，X 和 Y 位于 E的同一侧，不失一般性，我们假设 $p_{E,X}$ 和 $p_{E,Y}$ 都位于 E的右侧。如果 I_X非空，那么对任意 $i \in I_X$，$F_i(p_{E,X})$终止于 E^i_{top} 的左侧，而$F_i(p_{E,Y})$终止于右侧。这意味着从 X 到 Y 的测地线 q 包含 $Bot^*_i(E^i_{top})$中奇数个胞腔。根据过滤同伦等价的定义，从 E 到 q的测地线上任意一个都高于其他任意一个。关于X和 Y的断言源自 $(\mathcal{F}, \Gamma)$构造良好这一事实。□

定义 5.4。 设 T 是 $\mathcal{K}_{(\mathcal{F},\Gamma)}$的一棵水平子树。

(1) 关于 T 中某个 1-胞腔子集 $\mathcal{E}$ 的 $\mathcal{E}$-颜色，是一个映射 χ：$V(T) \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$，满足：对于 $V(T)$ 中属于同一个 1-胞腔 E' 的任意两个不同的 v、w，$\chi(v)+\chi(w) =$模 2，当且仅当 $E' \in \mathcal{E}$。(2) T 上的 k-颜色是一个映射 χ：$V(T) \to (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^k$，其中每个 i- 坐标 χ_i 都是关于 T 中某个 1- 胞腔集合 $\mathcal{E}_i$ 的 $\mathcal{E}_i$- 颜色映射。(3) $\mathcal{K}_{(\mathcal{F},\Gamma)}$ 中互不相交的水平树 T_i 的并上的 k-颜色，是一个映射 χ：$V(\bigcup_i T_i) \to (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^k$，它在每个 T_i 上的限制都是一个 k-颜色，并且满足：如果 h 是连接两个互不相交的 T_i 的水平测地线，那么 h 端点上的颜色相同。

5.3. **块**。

定义 5.5。 设 E 是 $\mathcal{K}_{(\mathcal{F},\Gamma)}$的一个水平 EoE-胞腔。设 $I = \emptyset$ 或 $I = I_E$（E-关联集），并设 $\epsilon \in \pm$。

(1) (ϵ，I，E)-*c*-顶，以 E 为 (ϵ，I)-核，表示配备如下定义的k-颜色映射的 $Top(E)$：

- 对于任意 $i \in I$，i-坐标是 E-颜色；当 $\epsilon = +$（分别为 $\epsilon = -$）时，该颜色在 E 的左（分别为右）顶点上为正。
- 对于任意 $l \notin I$，l 坐标是 $Bot^*_l(E^l_{top})$ 颜色，该颜色在 E 的两个顶点处均为零。(2) (ϵ，I，E)-*c*-底，其中 E 作为 (ϵ，I)-中心，表示配备如下定义的 k 颜色映射的 $B(E)$：

• 若 $I=\emptyset$，对于任意 $l\in\{1,\cdots,k\}$， l 坐标是 $Bot_l^*(E_{top}^l)$ 颜色，该颜色在 E 的两个顶点处均为零。若 $I\neq\emptyset$:

• 对于任意 $i\in I$， i-坐标是 $Bot_i(E_{top}^i)$-颜色；当 $\epsilon=+$ （分别为 $\epsilon=-$）时，它在 E 的左（分别为右）顶点处严格为正。

• 对于任意 $l\notin I$， l-坐标是消失颜色。

(3) $(\epsilon,\ I,\ E)$-块 $\mathfrak{M}(\epsilon,\ I,\ E)$ 是 $(\epsilon,\ I,\ E)$-c-底与以下部分的并集:

• 若 $I=I_E$，则对每个 $i\in I$，$(-\epsilon,\ I,\ E_{top}^i)$-c-顶，

• 若 $I=\emptyset$，则对每个 $l\in\{1,\cdots,k\}$，$(\epsilon,\ \emptyset,\ E_{top}^l)$-c-顶。

$(\epsilon,\ \emptyset,\ E)$-c-顶（分别为 $(\epsilon,\ \emptyset,\ E)$-块）称为白色 E-*c*-顶 （分别为白色E-块）。

附带 c-顶、c-底或块的 k-颜色映射称为容许颜色。更一般地，在一族两两不相交的底部 $B(.)$ 或顶部 $Top()$ 的并集上定义的 k-颜色映射，若其在每个这样的子集上的限制都使其成为 c-顶或 c-底，则称为容许颜色 。

(4) $\mathfrak{M}(\epsilon,I,E)$的块提升是任意一个 (l,E_{bot}^l)-提升 $\mathcal{L}_{l,E_{bot}^l}$， 其中 $l\notin I$。

(5) 给定（入射、出射）孪生对 (X^-,X^+)，它们属于 (ϵ,I,E)-c-底且张成 E；再给定孪生对 (X_i^-,X_i^+)，它们张成对应 c-顶的冠中 E_{top}^i， 其中 $i\in I$。我们将把元素 $\mathcal{S}_{+,i,E}$ 的左平移称为左 (i,E)-阶梯（右 (i,E)-阶梯），该平移将 X_i^+ 映至 X^-（分别将X_i^- 映至 X^+）。块阶梯指上述任一种阶梯。整数l,i 是所考虑的提升或阶梯的指标。

引理 5.6. 沿用定义 *5.5* 中的假设和记号:

(1) 块提升保持容许颜色。*(2)* 对每个 $i\in I$，块阶梯 $\mathcal{S}_{\epsilon,\ i,\ E}$ 下 $(-\epsilon,I,E_{top}^i)$ -*c*-顶的像，与 (ϵ,I,E) -*c*-底之间恰好隔着一个本质胞腔。*(3)* 假设 $I=I_E\neq\emptyset$。若考虑每个 $(-\epsilon,I,E_{top}^i)$- *c*-顶在块阶梯 $\mathcal{S}_{\epsilon,\ i,\ E}$下的像，对于 $i\in I_E$， 此胞腔两端点的容许颜色一致，因此可以在该块与其在这些块阶梯下的像的并集上定义容许颜色。

证明。 这只是仔细阅读定义 5.5 的结果。 □

定义 5.7。 设 E 是 $\mathcal{K}_{(\mathcal{F},\Gamma)}$ 的一个水平 EoE-胞腔，且 $\mathfrak{M}$ 是白色的 E-块。设 $Z=h_{\gamma,\ \gamma^{tw}}.E$，其中 $\{\gamma,\gamma^{tw}\}$ 是一个 E-生成对，而 γ^{tw} 的 E-生成指标集合（称为 Z-桥）非空。 $\mathfrak{M}$ 的 Z-伴随块 是块 $\mathfrak{M}(\epsilon,\ I_E,\ ,\ Z_{top}^i)$，其中选择 ϵ，使得对于 $i\in I_E$，容许颜色的 i-坐标在与 Z-桥位于 Z 同一侧的 Z 顶点上为正。

5.4. **双块**。

定义 5.8。 设 E 是 $\mathcal{K}_{(\mathcal{F},\Gamma)}$ 的一个水平 EoE-胞腔，并令 $\mathfrak{M}(E)$ 表示白色 E-块。 E-双块 $\mathfrak{P}(E)$ 表示:

(1) 若某个 $Bot_i^*(E_{top}^i)$ 至少包含一个非例外胞腔，则取 $\mathfrak{M}(E)$ 与一个伴随块的并集的完备化，其中该伴随块的桥具有最大高度。(2) 否则，取块 $\mathfrak{M}(E)$。

E-双块的两个块之间的桥称为主桥。 E-双块与水平树的交集是一个 E-簇。

引理 5.9。 设 E 是 $\mathcal{K}_{(\mathcal{F},\Gamma)}$的一个水平 *EoE*-胞腔。构成 E-双块 $\mathfrak{P}(E)$ 的两个块的容许颜色定义了 $\mathfrak{P}(E)$的一个容许颜色。

证明。 这只需检查 $\mathfrak{M}$ 及其伴随对象的容许颜色在主桥的端点处，以及连接两者的任何其他水平测地线的端点处是否一致。根据白色块和容许颜色的定义，由于 $(\mathcal{F},\Gamma)$ 相关联， I_E是主桥上 $\mathfrak{M}$的容许颜色的正坐标集合，而其他坐标均为零。因此，容许颜色在主桥的端点处一致。由于 $(\mathcal{F},\Gamma)$ 是单侧的，推论 1.14 表明，连接一个块与另一个块的任何其他水平测地线的端点处的容许颜色也一致。□

引理 5.9 为以下定义提供了依据。

定义 5.10。 设 E 是 $\mathcal{K}_{(\mathcal{F},\Gamma)}$的一个水平 EoE-胞腔。设 (X^+,X^-) 是 $\mathfrak{P}(E)$ 中某个 c-顶或 c-底的冠内的（入射，出射）相容对。若 $i(X^-)$ 上的容许颜色等于 $t(X^+)$ 上的容许颜色，则称 (X^+,X^-) 或平移 h_{X^+,X^-} 为已启用 。在此情况下，该容许颜色称为$(,X^-)$ 的容许颜色，或 h_{X^+,X^-} 的容许颜色。否则，称 (X^+,X^-) 或 h_{X^+,X^-} 为已禁用。

引理 5.11。 采用定义 *5.10* 中的假设和记号：

(1) 除了跨越 $\mathfrak{P}(E)$ 中伴随块的核、某个 *c*-底的中心，或包含一条不同于 E-双块主桥的桥的孪生对外，任何孪生对都已启用。*(2)* 在 $\mathfrak{P}(E)$ 中伴随块内包含一条桥的所有（入射，出射）孪生对 (X^+,X^-) 的集合，与在 $\mathfrak{P}(E)$ 中白色块内包含一条桥的所有（入射，出射）孪生对 (Y^+,Y^-) 的集合之间，存在一个保标签双射，该双射满足以下性质：

- $t(X^+)$ 处的容许颜色（分别是 $i(X^-)$处的容许颜色）与 $i(Y^-)$ 处的容许颜色（分别是 $t(Y^+)$处的容许颜色）相同。
- 在$(t(X^+)\ i(Y^-))$ 和$(i(X^-)\ t(Y^+))$ 这两个相容对中，恰有一个的容许颜色不为零。

证明。 这是容许着色以及 $(\mathcal{F},\ \Gamma)$ 是关联的单侧对象这一事实的推论。□

定义 5.12。 沿用引理 5.11 中条目 (2) 的假设和记号：我们将与相容对 $(t(X^+)\ i(Y^-))$ 或 $(i(X^-)\ t(Y^+))$ 相关联的平移称为镜像 。

5.5. **对角子群与切割**。

定义 5.13。 设 E 是 $\mathcal{K}_{(\mathcal{F},\Gamma)}$ 的一个水平 EoE-胞腔。

(1) E-水平子群 $\mathfrak{H}(E)$ 是由具有非零容许颜色的 E-双块的所有已启用平移生成的子群：它们称为 E-水平生成元。若 $\mathcal{C}$ 是 $\mathfrak{P}(E)$ 的某个 E-簇，我们用 $\mathfrak{H}_{\mathcal{C}}(E)$ 表示 $\mathfrak{H}(E)$ 的由 E-水平生成元中 $\mathcal{C}$ 的平移生成的子群。(2) E-对角子群 $\mathfrak{D}(E)$ 是由所有 E-水平生成元和块阶梯生成的子群：它们称为 E-对角生成元。(3) E-复制子群 $\mathfrak{R}(E)$ 是由所有块提升以及所有 E-对角生成元生成的子群。

下面这个简单的引理刻画了 $\mathfrak{R}(E)$ 中稳定水平树$\mathcal{T}_{\pi_k^\infty(E)}$ 的子群 $\mathcal{K}_{(\mathcal{F},\Gamma)}$:

引理 5.14。 在定义 *5.13* 的假设和记号下： $\mathfrak{R}$（E）中$\mathcal{T}_{\pi_k^\infty(E)}$ 的稳定子，称为水平 E-稳定子，是水平子群 $\mathbb{F}_n$ 的子群，由元素 $L_1^{-l}hL_2^l$ 生成；其中，对 $\mathfrak{H}$（E）的任意一个水平 E-生成元 h，以及任何一对指标相同的块阶梯或提升 L_1、L_2，均成立。

定义 5.15。 设 E 是 $\mathcal{K}_{(\mathcal{F},\Gamma)}$ 的一个水平 EoE-胞腔。
初等 E-切割 由以下部分组成：**(1)** E-双块的所有核；**(2)** 所有从容许颜色为正的顶点出发的 p.o. t_i-胞腔。

（水平、竖直） E-切割 是初等（水平、竖直） E-切割的左 $\mathfrak{R}$（E）-平移。

命题 5.16。 设 E 是 $\mathcal{K}_{(\mathcal{F},\Gamma)}$ 的一个水平 *EoE*-胞腔。 $\mathcal{K}_{(\mathcal{F},\Gamma)}$中每个正方形的边界上都有偶数个 E-切割。

证明。
引理 5.17。 设 E 是 $\mathcal{K}_{(\mathcal{F},\Gamma)}$ 的一个水平 *EoE*-胞腔，并设 $\mathcal{C}$ 是$\mathfrak{P}$（E）中的某个 E-簇（见定义 *5.8*）：
(1) 任意两个左 $\mathfrak{H}_{\mathcal{C}}(E)$ 平移像 $\mathcal{C}$ 互不相交。对于 $h \in \mathfrak{H}_{\mathcal{C}}(E)$， $h.\mathcal{C}$ 与 $\mathfrak{H}_{\mathcal{C}}(E).\mathcal{C}$ 中每个最近的簇恰好被一个同时属于两个冠的水平本质胞腔隔开。两个相邻的左 $\mathfrak{H}_{\mathcal{C}}(E)$ 平移像 $\mathcal{C}$（即恰好被一个水平本质胞腔隔开）满足以下两种断言之一：

- 它们之一是另一个在 $\mathfrak{H}_{\mathcal{C}}(E)$ 中某个 a E-水平生成元的共轭作用下的像；此时两者之间的本质胞腔称为连接，
- 或者它们被白色 E-块中某个桥的像隔开；此时两者之间的本质胞腔称为桥。

(2) $\mathcal{T}_{\pi_k^\infty(\mathcal{C})} \setminus \mathfrak{H}_{\mathcal{C}}(E).\mathcal{C}$ 由以下部分组成：

- 以 $\partial\mathcal{C}$ 中容许颜色消失的顶点为基点的树的左 $\mathfrak{H}_{\mathcal{C}}(E)$ 平移像。
- 对于任意禁用的孪生对，以 $\partial\mathcal{C}$ 中容许颜色不消失的顶点为起点、包含在其 $\mathbb{F}_n$-轴中的射线的左 $\mathfrak{H}_{\mathcal{C}}(E)$ 平移像。

证明。 $\mathfrak{H}_{\mathcal{C}}(E)$ 中任意一个 E-水平生成元都是一个平移，它将 $Cr(\mathcal{C})$ 中的一个入射胞腔映到一个出射胞腔，反之亦然。因此，$h_{\gamma,\ \gamma'}.\mathcal{C}$ 与 $\mathcal{C}$ 不相交，并由本质胞腔 γ'与之相连。此外，若我们将 $h_{\gamma_j^-,\ \gamma_j^+}$、 $j = 1,\ 2, \ldots$记作水平生成元，那么所有的 γ_j^- 和 γ_j^+ 都互不相同，因为它们的对属于引理 1.4 给出的 $Cr(\mathcal{C})$ 的划分。结论 (1) 得证。结论 (2) 直接由定义得出。□

引理 5.18。 在命题 *5.16* 的假设和记号下，令 $m(\mathcal{F}、\Gamma)$表示在 F_i 的作用下， $\mathbb{F}_n$ 生成元的约化像中，标签相同的 $\mathbb{F}_n$-生成元连续出现的最大次数。那么， $\mathfrak{P}(E)$ 中任意 $\mathcal{C}$-顶的本质核，在 $\mathcal{C}$-顶两侧各至少被 $m(\mathcal{F}、\Gamma) - 1$ 个标签相同的本质胞腔环绕。

证明。 这是 $Top(E)$ 定义的直接推论。 □

引理 5.19。 在命题 *5.16* 的假设和记号下：

(1) 对任意连接或桥 X （见引理 *5.17*）及任意垂直元素 $t \in \mathbb{F}_k$， $t^{-1}Xt$ 和 tXt^{-1} 均不包含块阶梯或提升的某个轨道中核的像。*(2)* 对于 $\mathfrak{P}(E)$ 中某个块 $\mathfrak{M}$ 的 *c*-顶的任意平移 h ，以及同一块 $\mathfrak{M}$ 的 *c*-底的任意平移 h' ， $h.\mathfrak{M}$ 和 $h'.\mathfrak{M}$ 不相交。*(3)* 对于 *c*-底或 *c*-顶的平移与 $\mathfrak{P}(E)$ 的镜像，或 $\mathfrak{P}(E)$ 的两个不同镜像，同样的断言也成立。*(4)* $\mathfrak{P}(E)$ 的容许着色可扩展为 $\mathfrak{H}(E).\mathfrak{P}(E)$（ $\mathfrak{H}(E).\mathfrak{P}(E)$ 的完备化）的左 $\mathfrak{H}(E)$-不变容许着色。

证明。 我们来证明第一项。对于桥，这只是推论 1.14 的直接结果。考虑白色块或其伴随块在 $\mathfrak{P}(E)$ 中孪生对处平移所产生的连接。对于提升轨道中的核，这是因为这些平移总是被一座桥与该轨道隔开；又由于 $(\mathcal{F}, \Gamma)$ 是单侧的，因此推论 1.14 适用。对于阶梯轨道中的核，注意到它们是本质的。因此，根据引理 5.18，若考虑由平移张成的顶点 g 的轨道，则在相应的水平树中， $t^{-1}gt$和 tgt^{-1} 都会与阶梯中最近的核至少被 $m(\mathcal{F}, \Gamma)$ 个具有相同标签的本质胞腔隔开。根据 $m(\mathcal{F}, \Gamma)$ 的定义，这就排除了 $t^{-1}Xt$和 tXt^{-1} 包含核的可能。第 (1) 项得证。

第（2）项由第（1）项以及两个平移分别位于核或中心的不同侧这一事实得出。第（3）项源于它们之间至少隔着一座桥；并且由于 $(\mathcal{F}, \Gamma)$ 是单侧的，推论 1.14 适用。第（4）项源于所考虑的平移均已启用，并且每座桥恰有一个镜像具有非零颜色（见引理 1.4）。□

引理 5.20。 在命题 *5.16* 的假设和记号下：

（*1*）由所有 E-阶梯生成的子群中的元素对 $\mathfrak{P}(E)$ 作左平移所得的集合两两不交，且与 $\mathfrak{H}(E).\mathfrak{P}(E)$ 不相交。（*2*）存在一种定义在 $\mathfrak{D}(E).\mathfrak{P}(E)$ 上的左 $\mathfrak{D}(E)$-不变容许颜色。

证明。 这是由定义和引理 5.18 得出的。只需注意，$\mathfrak{D}(E)$ 是由 $\mathfrak{H}(E)$ 和 $St(E)$ 生成的子群。□

引理 5.21。 沿用命题 *5.16* 中的假设和记号，考虑 $\mathfrak{P}(E)$ 中的白色 E-块 $\mathfrak{M}$ 。设 h 是一条水平测地线，从 $\mathfrak{M}$ 的块提升中的一个核出发，通向 $\mathfrak{R}(E).\mathfrak{P}(E)$ 中距离最近的核；该核来自 $\mathfrak{P}(E)$ 中伴随块里的一个核。若将 h 的端点染成与 $\mathfrak{P}(E)$ 中初始核的端点相同的颜色，则这些容许颜色一致。

证明。 这是由 $(\mathcal{F}, \Gamma)$ 关联、单侧以及推论 1.14 得出的。□

现在我们陈述一个引理，它用切割来描述“基本”的 E-双块：

引理 5.22。 沿用命题 *5.16* 和定义 *5.15* 中的假设与记号：除去底边为白色块 $\mathfrak{M}$ 的 *c*-顶的核的 i-方格，圆柱中位于 E-双块上方的任何 i-正方形都属于以下类型之一：

（*1*）其边界中有两个竖直初等切口，水平边界中没有初等切口。

（2）其边界中恰好有一个水平初等切口和一个竖直初等切割。（3）其边界中没有初等切割。

下面的引理可由引理 5.22、5.6 以及各种提升和阶梯的定义直接推出：

引理 5.23. 在命题 *5.16* 和定义 *5.15* 的假设与记号下：

(1) 白色块中 c-顶的核 E^l_{top}, $l \in \{1, \cdots, k\}$ 为底边的 i-方格，其顶边包含 E^l_{top} 在块提升 $\mathcal{L}_{i,E^l_{top}}$ 下的像；该像是一个切口，且方格的边界上没有垂直初等切割。白色块中 c-底的中心 E 为底边的 l-方格，其顶边包含核 E^l_{top}，其底边是 E^l_{top} 在块提升 $\mathcal{L}_{i,E}$ 的逆下的像，因此是一个切口；其边界上没有垂直切割。*(2)* 若考虑引理 *5.6* 中块阶梯下 $\mathfrak{P}(E)$ 的像，则任何底边位于 $\mathfrak{P}(E)$ 的冠内且具有 $i \in I_E$ 的 i-方格，只要属于一个颜色非零的可激活孪生对，其边界上恰有两个垂直切割，水平边界上则没有切割。任何底边位于 $\mathfrak{P}(E)$的冠内且属于一个跨越中心或核的孪生对的 2-胞腔，要么满足相同性质，要么其边界上没有垂直切割。*(3)* 若考虑一个底边为 E-双块和 $i \in I_E$ 的桥的 i-方格，则它从相应的镜像或其逆中继承两个位于其边界上的垂直切割。

现在我们完成命题 5.16 的证明。引理 5.20 给出了在 $\mathfrak{D}(E).\mathfrak{P}(E)$ 上左 $\mathfrak{D}(E)$-不变的容许颜色。此外，引理 5.21 允许我们以等变的方式，将这种容许颜色延拓到 $\mathfrak{D}(E)$ $.\mathfrak{P}(E)$ 的提升上。但这并不意味着此时在 $\mathfrak{R}(E).\mathfrak{P}(E)$ 上存在左不变的容许颜色，因为将这些提升加入先前子群的生成元中，会在水平 E-稳定子$\mathfrak{S}_{hor}(E)$ 中加入元素（见引理 5.14）。

考虑 $\mathfrak{P}(E)$ 的伴随块的核。由于 $(\mathcal{F}, \Gamma)$ 是单侧的，在该块的块提升下，水平测地线 h（如引理 5.21 所示）在相应的 c-顶上的像，会从容许颜色消失的一侧离开 c-顶。若考虑白色块的核，那么在该块的块提升下，水平测地线 h （如引理 5.21 所示）在 c-底上的像，会从没有 $Bot(E^l_{top})$ $(l \in \{1, \cdots, k\})$ 元素的一侧离开 c-底，因此容许颜色也在该侧消失。

现在我们必须检查：对于从块提升轨道中的一个核（的像）到块阶梯轨道的任意两条水平测地线 h_0, h_1，其中一条都不包含另一条末端的核（的像）。白色块 $\mathfrak{M}$ 的一个核与其伴随块，或与该伴随块的相邻镜像 $\mathfrak{M}'$ 之间的水平测地线具有如下形式：考虑连接二者的桥 X，不失一般性地假设其方向为从 $\mathfrak{M}$ 到 $\mathfrak{M}'$，且位于 $\mathfrak{M}$的 c-底边中心的右侧。从白色块 $\mathfrak{M}$ 的 c-底边到 $\mathfrak{M}'$ 的 c-底边的测地线写作 RXR'，其中 $R' = R^{-1}$ 是一条边路径。于是， F_i（RXR'）的约化是连接 $\mathfrak{M}$的核 E^i_{top} 与 $\mathfrak{M}'$的对应核的测地线 h 。它按以下方式分解：

- h 以 E^i_{top}之后的 $F_i(R)$的子测地线 h_1 开始：这条子路径包含某个Y^i_{top}，其 $Y \in Bot^*_i(E)$因此严格高于 E。

- h_1 后接 $F_i(X)$，其中恰好包含一次最高的 1-胞腔 X^i_{top}，因为根据引理 5.3， X 是 RXR'的最高 1-胞腔。
- $F_i(X)$后接着 h_2，并且再次根据引理 5.3， h_1 或 h_2 包含 R 所读出的边路径在 $Bot^*_i(E)$中的最高胞腔（这可能是一个与 X标签相同的 1-胞腔）。

最后，考虑 F_t 下 $t \in \mathbb{F}_k$的约化像或原像 h_t，其中 $t \in \mathbb{F}_k$的长度大于 1，则需在下述描述所得的像（或原像）中加入 $m(\mathcal{F}, \Gamma)$的约化乘以 E的像；特别地，对于 t 长度每增加 1，该像都包含$m(\mathcal{F}, \Gamma)$乘以一个与 E标签相同的胞腔。

由此描述可知，考虑同一 c-顶中，或白色块的 c-底中，两条不同水平测地线 h_t, $h_{t'}$ 经块提升后的像， h_t 和 $h_{t'}$ 要么在某处发生分歧，要么彼此相等；若彼此相等，则末端的两个核被识别，但二者都不可能包含另一方末端的核。因此，等变地扩展容许颜色并无障碍，于是我们得到以下

引理 5.24。 在命题 *5.16* 的假设和记号下：

(1) 在 $\mathfrak{R}(E).\mathfrak{P}(E)$ 上存在一个关于左 $\mathfrak{R}(E)$ 不变的容许颜色。*(2)* 除了初等切割之外， $\mathfrak{P}(E)$ 中不存在其他切口。

引理 5.22 和 5.23 表明，在各应用一次提升并按照引理 5.6 应用阶梯生成元后，圆柱中由E-双块及其对应的冠所构成的并集的每个 2-胞腔，都使其边界继承零个或两个切口。引理 5.24 的第 (1) 项保证每个 2-胞腔中垂直切割数量保持不变。同一引理的第 (2) 项保证水平切割数量保持不变。□

.

以下推论是命题 5.16 的直接结果 :

推论 5.25。 设 E 是 $\mathcal{K}_{(\mathcal{F},\Gamma)}$ 的一个水平 *EoE*-胞腔。若 $VH_R(E)$（分别地， $VH_L(E)$）表示 $\mathcal{K}_{(\mathcal{F},\Gamma)}$ 中所有通过一条边路径与 E 的右顶点相连、且该路径经过偶数（分别为奇数）个切口的顶点的集合，则 $(VH_L(E)\ VH_R(E)$ 是 $\mathcal{K}_{(\mathcal{F},\Gamma)}$ 的顶点以及 $G^{\sigma}_{n,\ k}$ 的元素的一个划分，将其分成两个不相交且非空的连通分支。

5.6. **定义与稳定子**。

引理 5.26。 推论 *5.25* 给出的划分是左 $G^{\sigma}_{n,\ k}$-不变的。

证明。白色 E-块的构造仅取决于集合 $Bot^i(E)$，而显然有 $Bot^i(g.E) = g.Bot^i(E)$。在 E-双块的构造中，唯一的选择是选择一条最高桥，这相当于选择一个镜像。由于复制子群中存在所有其他具有正容许颜色的镜像，因此这一选择不会改变 $\mathfrak{R}(E).\mathfrak{P}(E)$。□

定义 5.27。 设 E 是 $\mathcal{K}_{(\mathcal{F},\Gamma)}$ 的一个水平 EoE-胞腔。对角 E-墙 $W(E)$ 是由推论 5.25 给出的划分 $(VH_L(E)\ VH_R(E))$。所有对角墙的集合 表示在 $\mathcal{K}_{(\mathcal{F},\Gamma)}$ 中所有 EoE-胞腔上取并集所得的所有对角E-墙的并集。 $W(E)$ 的标签 是 E 的标签。

引理 5.28. 在定义 *5.27* 的假设和记号下： $W(E)$ 的左稳定子是 E-复制子群 $\mathfrak{R}(E)$。

证明。 $W(E)$ 的两侧由一组 E-切口隔开，该组切口在左 $\mathfrak{R}(E)$-不变。□

5.7. **有限性**。

命题 5.29。 $G^{\sigma}_{n,k}$ 中任意两个元素都由有限个对角墙隔开。

证明。由于任意 $g \in G^{\sigma}_{n}$ 都通过一条有限边路径与 e 相连，因此只需证明任意 EoE 胞腔只跨越有限条对角墙。由于墙的集合是 G^{σ}_{nk}-不变的，任意 EoE 胞腔都是给定基本区域中某个 EoE 胞腔的左 G^{σ}_{nk}-平移；对于 G^{σ}_{nk} 的作用而言，这样的 1-胞腔只有有限多个。此外，一个 1-胞腔 E' 跨越一面对角 E-墙，当且仅当 E' 是某个初等 E-切割的左 g-平移，其中 $g \in \mathfrak{N}(E)$，而这样的初等 E-切割只有有限多个。假设 E' 跨越无限多条对角墙。于是我们得到元素 $g_{i_j} \in G^{\sigma}_{nk}$ 和胞腔 E_{i_j} 的一个无限序列，使得 $E' = g_{i_j} E_{i_j}$，其中 E_{i_j} 属于集合 S；该集合由基本区域中所有 EoE 胞腔 E 的全部初等 E-切割的并集构成。但这个集合 S 是有限的。因此，由于序列 (g_{i_j}) 被假设为无限的，我们得到两个不同的元素 g_{i_l} g_{i_m} 以及一个满足 $g_{i_l}.E_0 = g_{i_m}.E_0 = E'$ 的初等切割 E_0。这意味着 $g_{i_m}^{-1}.g_{i_l}.E_0 = E_0$。然而，这是不可能的，因为 $\mathcal{K}_{(\mathcal{F},\Gamma)}$ 中的 1-胞腔对于左 G^{σ}_{nk}-作用具有平凡稳定子。□

6. Conclusion for suspensions of unipotent free subgroups of Out($\mathbb{F}_n$)

定义 6.1. $\mathcal{K}_{(\mathcal{F},\Gamma)}$ 的垂直-对角墙集是由定义 4.1 给出的垂直墙集与定义 5.27 给出的对角墙集的并集。

引理 4.3、5.28 与命题 4.5 和 5.29 分别给出以下结论

命题 6.2. 若 $\mathcal{W}$ 是 $\mathcal{K}_{(\mathcal{F},\Gamma)}$的垂直-对角墙集，$(\mathcal{K}_{(\mathcal{F},\Gamma)}, \mathcal{W})$ 是 $G^{\sigma}_{n,k}$ 对 $\mathcal{K}_{(\mathcal{F},\Gamma)}$的左作用下的墙空间结构。

现在我们证明以下结果：

命题 6.3. 若 $\mathcal{W}$ 是 $\mathcal{K}_{(\mathcal{F},\Gamma)}$的垂直-对角墙集，则左侧的 $G^{\sigma}_{n,k}$-作用在墙空间结构 $(\mathcal{K}_{(\mathcal{F},\Gamma)}, \mathcal{W})$ 上是适当的。

证明。 任意 $g \in G^{\sigma}_{n,\ k}$ 都可以唯一地写成 $h.v$，其中 $h \in \mathbb{F}_n$ 是一个水平元素，而$v \in \mathbb{F}_k$ 是一个垂直元素。

引理 6.4。 设 $h_i v_i \in G^{\sigma}_{n,\ k}$ 是一个无限元素序列，且 v_i 的长度随 i趋于无穷大。那么，将e 与 $h_i v_i$ 分隔开的垂直-对角墙的数量也随 i趋于无穷大。

证明。 垂直墙构成垂水平墙的一个子集，它们是竖直自由群 $\mathbb{F}_k$的经典墙，因此结论成立。□

因此，只需证明：对于任意水平元素无限序列 h_i in$G^{\sigma}_{n,\ k}$，若其长度随 i趋于无穷大，则分隔e 与 h_i 的垂直-对角墙数量也随 i趋于无穷大。任意水平元素 h_i 都由 $\mathcal{K}_{(\mathcal{F},\Gamma)}$ 的 1-骨架中的一条水平测地线表示，该测地线从 e 出发并读取 h_i。

引理 6.5. 设(h_l) 是任意无限的水平元素序列，(ω_l) 是从 e 出发的相应水平测地线序列。由(h_l) 张成的垂直-对角墙数量，随着(ω_l)张成的垂直-对角墙数量增加而趋于无穷。

证明. 若 C 是基本区域的直径，则任何长度为 C 的测地线至少穿过一个 EoE 胞腔。此外，根据命题 5.16，水平测地线穿过的 E 切口数量的奇偶性仅取决于其定义的元素，因为每个关系子在其边界上都包含两个切口。因此得证。□

现在我们将证明，由一条水平测地线张成的对角墙数量，至少是该测地线长度的某个常数倍。容易处理的情形是最顶层对角墙：

引理 6.6。设 E 是一个 ***EoE*** 胞腔。若 E 是最上层的，则同一水平树中， $W(E)$ 这面对角墙没有其他切口。特别地，任何包含最上层 ***EoE*** 胞腔 E 的水平测地线都会张成对角墙 $W(E)$ ，从而也张成一面垂水平墙。

证明。若 E 是最上层的，则 $W(E)$ 唯一的水平初等切口是 E，而 $W(E)$ 的稳定子是复制子群 $\mathfrak{R}(E)$，它由 (i, E)-提升生成，每个 $i \in \{1, \cdots, k\}$ 恰对应一个。由于每个提升都具有 $h_i t_i$ 的形式，引理得证。□

引理 6.7。设 E 是一个 ***EoE*** 胞腔，对于某个 $i \in \{1, \cdots, k\}$，它不是最上层的 i-顶边胞腔。那么，E 与 $W(E)$ 的任何其他水平 E-切口之间，都隔着一个严格高于 E 的 ***EoE*** 胞腔。

证明。这是因为所有 E-水平生成元都被一座高度大于 E 的桥与 E 隔开。对于 $\mathfrak{S}_{hor}(E)$ 的其他生成元，这一点显而易见。□

引理 6.8。存在一个常数 $C \geq 1$ ，使得若 ω 是一条长度大于 C 、首个 ***EoE*** 胞腔为 E 的水平测地线，那么，如果从 ω 中的 E 开始、长度为 C 的测地线子段不包含严格高于 E 的 ***EoE*** 胞腔，则 ω 横跨对角墙 $W(E)$。

证明。令 C 为所有 E-块直径的最大值，其中 EoE 胞腔 E 取遍 $G^{\sigma}_{n,k}$ 作用的一个基本区域。假设 ω 中长度为 C 的初始段不包含严格高于 E 的 EoE 胞腔。那么，引理 6.8 直接由引理 6.7 得出。□

现在我们完成命题 6.3 的证明。令 C 为引理 6.8 给出的常数。设 ω 是一条水平测地线，其第一个 EoE 胞腔为 E。由引理 6.8 可知，要么在 ω 中距 E至多 $EoE(\Gamma).C$ 处找到某个最顶端切口 E' ，要么在 ω中距 E至多 $(EoE(\Gamma) - 1).C$ 处找到一个 EoE 胞腔 E'，使得在 ω中，距离小于 C的范围内不存在更高的 EoE 胞腔。在第一种情形下，由引理 6.6 可知 ω 跨越 $W(E')$；在第二种情形下，引理 6.8 给出相同结论。接着，我们考察 E' 之后的第一个 EoE 胞腔，它不是 E 与 E'之间所穿过的墙的切口，并以此迭代。我们可以在 ω中找到这样的一个切口，其与 E' 的距离至多为 $EoE(\Gamma).C$ 。因此最终可得， ω所跨越的对角墙总数，也就是其端点之间的垂水平墙距离，至少为 $1/(2EoE(\Gamma).C)$ 乘以 ω的长度，即其端点之间的距离。由引理 6.5 以及引理 6.4 可得命题 6.3，其中引理 6.4 给出了关于垂直$\mathbb{F}_k$-距离的垂水平墙距离的类似结论。□

命题 6.2 和 6.3 合起来给出以下结论

定理 6.9。有限秩自由群被一个由带结的单侧幺幂有限秩自由子群构成的外自同构群悬挂后，按照 *Gromov* 的意义是 ***a-T***-可容许的。

命题 6.10。 设$(\mathcal{K}_{(\mathcal{F},\Gamma)}, \mathcal{W})$ 是由命题 *6.2* 给出的 $G^{\sigma}_{n,k}$ 的墙空间结构。那么 $dim(Cb(\mathcal{W}))$ $< \infty$ （见定理 *3.4*）。

证明。

引理 6.11. 一组两两相交的垂水平墙中，至多包含一面垂直墙和一面最顶层对角墙。

证明。 垂直墙在每棵垂直树中只有一个切口，而最顶层对角墙在每棵水平树中只有一个切口，因此结论成立。□

因此，我们只需处理由非最顶层 EoE- 胞腔定义的对角墙组。

引理 6.12. 假设两面标签相同的非最顶层对角墙 W_1, W_2 相交，但它们与某棵水平树 $\mathcal{T}_w$ 的交集 $W_i \cap \mathcal{T}_w$ 在 $\mathcal{T}_w$ 中不相交。那么，任何第三面不同的同标签墙 W_3 ，只要 $\{W_1, W_2, W_3\}$ 是一组两两相交的墙，就满足 W_3 和 W_i, $i = 1,2$ 在任意水平树中相交。

证明。 不妨对指标作置换。由于 $W_1 \cap \mathcal{T}_w$ 和 $W_2 \cap \mathcal{T}_w$ 在 $\mathcal{T}_w$ 中不相交，存在 W_1 的一个切口 E_1 ，使得 W_2 在 $\mathcal{T}_w$ 中的所有切口都位于 E_1 的同一侧。由于对角墙 W_1 和 W_2 具有相同的标签，且它们在 $\mathcal{K}_{(\mathcal{F},\Gamma)}$ 中相交，这意味着一个切口的阶梯轨道与另一个切口的提升轨道相交。若 E 表示这个切口，则只有一面墙的 E 提升轨道是一组切口（墙 $W(E)$），也只有一面墙的 E 阶梯轨道是一组切口。因此，若第三面不同的墙 W_3 同时与 W_1 和 W_2 相交，则 W_3 和 W_i $(i = 1,2)$ 在任意水平树中相交。□

引理 6.13. 同一个水平树中，具有相同 Γ 标签且两两相交的非最顶层对角墙的最大数量是有限的。

.

证明. 考虑 $\mathcal{T}_w$ 中两个具有相同 Γ 标签的非最顶层 EoE 胞腔 E_0 和 E_1 。假设墙 $W_i = W(E_i)$ 、 $i = 0, 1$ 在 $\mathcal{T}_w$ 中相交。那么，存在 W_i 的切口 c_i^1， c_i^2，位于某条水平测地线 u 上，使得在交换 W_0 和 W_1 的次序后，$u = c_0^1 \cdots c_1^1 \cdots c_0^2 \cdots c_1^2$。假设 c_0^2 不是 c_0^1 的左 $\mathfrak{S}_{hor}(E_0)$ 平移，且 c_1^2 不是 c_1^1 的左 $\mathfrak{S}_{hor}(E_1)$ 平移。这意味着连接它们的测地线位于某些桥上：这类测地线只包含高度等于该桥高度（也就是测地线高度）的 2-胞腔。因此，可能出现这种测地线重叠的墙的最大数量是有限的。现在假设存在 $i \in \{0, 1\}$，使得 c_i^2 是 c_i^1 的左 $\mathfrak{S}_{hor}(E_i)$ 平移。由于 $\mathfrak{S}_{hor}(E_i)$ 是有限生成的，因而是拟凸的，故通过 $\mathfrak{S}_{hor}(E_i)$ 中的一个元素作左平移，可将 c_i^2 移至 c_{i+1}^2 双块的有界邻域内，其中指标按模 2 书写。由于双块是有限的，可能的墙也只有有限多个。□

由于墙的不同 Γ标签数量等于 $EoE(\Gamma)$，因此是有限的，结合引理 6.12 和引理 6.13 可知，一族两两相交的垂水平墙中，非最顶层对角墙的数量有限。再结合引理 6.11，即得命题 6.10。□

命题 6.2、6.3 和 6.10 与定理 3.4 一起给出以下结论

定理 6.14. 有限秩自由群通过一个由关联的、单侧幂零有限秩自由外自同构子群构成的悬挂 $G^{\sigma}_{n,\ k}$ 在某个有限维立方复形 $Cb(\mathcal{W})$ 上适当地作用，其中 $(\mathcal{K}_{(\mathcal{F},\Gamma)}, \mathcal{W})$ 是由命题 *6.2* 给出的墙空间结构。

我们 以一个关于上述立方复形最小维数的引理作结 :

引理 6.15. 设 $(\mathcal{K}_{(\mathcal{F},\Gamma)},\mathcal{W})$ 是由命题 *6.2* 给出的 $G^{\sigma}_{n,k}$ 的墙空间结构。若 M 是同一桥同一侧共享的 ***EoE*** 胞腔的最大数量，则 $dim(Cb(\mathcal{W})) \geq 2M+2$。这个下界是紧的。

证明。 根据定理 3.4， $dim(Cb(\mathcal{W}))$ 是两两相交的墙族的基数上确界。根据构造，存在两面被同一个非最上层 EoE 胞腔 E 穿过的墙：墙 $W(E)$ 和墙 $W(E')$，其中 E' 是白色 E-块的伴随块的核。这两面墙相交：这一点很容易验证，正如很容易验证与同一座桥关联的所有切口两两相交一样。现在添加一面由与包含前述所有水平胞腔的水平树相邻的垂直单元所定义的垂直墙，以及由该桥定义的墙，便得到一个两两相交的墙族，因此引理得证。这个数不可能增加，因为例如考虑由 $\alpha(x_1) = x_1$ 和 $\alpha(x_2) = x_2x_1$ 定义的自同构 α 时，就可以达到该数值。□

7. Conclusion for suspensions of free subgroups of outer automorphisms of $\mathbb{F}_n$ admitting a tied, one-sided finite-index unipotent subgroup

引理 7.1. 给定任意两个群 G 和 H，以及一个单同态 $\sigma\colon G \hookrightarrow \mathrm{Out}(H)$，若 G_0 是 G 的有限指数子群，则 $H \rtimes_\sigma G_0$ 是$H \rtimes G$的有限指数子群。

证明。 $H \rtimes_\sigma G$ 的任意元素都能唯一写成 gh, $g \in G$ 和 $h \in H$。由于 G_0在 G中的指数有限，存在有限多个元素 $g_1, \cdots, g_r$，使得任意$g \in G$ 都属于某个左陪类 g_iG_0。于是，对于 $H \rtimes_\sigma G$中的任意元素 gh，都存在某个 i 使得 $gh \in g_iG_0h$。 G_0h 中的任意元素都属于半直积 $H \rtimes_\sigma G_0$，故得结论。□

引理 7.2。 如果 G 是一个群，且有一个有限指数子群 G_0 在某个有限维 ***CAT(0)***方复形上适当地等距作用，那么 G也具有这样的作用，且作用在维数相同的方复形上。

证明。 一个 j 维 CAT(0) 方复形的有限覆盖是一个 j 维 CAT(0) 方复形。通过提升给定的 G_0 作用，即可得到此引理。□

定理 *1* 的证明。 我们考虑群 $G^{\sigma}_{n,\,k} := \mathbb{F}_n \rtimes_\sigma \mathbb{F}_k$，其中 $\sigma(\mathbb{F}_k)$ 是 $\mathrm{Out}(\mathbb{F}_n)$ 的一个子群，且包含一个有联系的单侧有限指数幺幂子群 $\mathcal{U}$。根据引理 7.1，由于 $\mathcal{U}$ 在 $\mathbb{F}_k$中具有有限指数，$\mathbb{F}_n \rtimes \mathcal{U}$ 在 $G^{\sigma}_{n,\,k}$中也具有有限指数。根据定理 6.9，由于 a-T-可容性在有限指数下保持，$G^{\sigma}_{n,\,k}$ 是 a-T-可容许的。根据定理 6.14，$\mathbb{F}_n \rtimes \mathcal{U}$ 在某个有限维立方复形上适当地等距作用。于是，引理 7.1 和 7.2 给出 $G^{\sigma}_{n,\,k}$ 在维数相同的立方复形上的作用（并且引理 6.15 给出了该立方复形维数的精确最小界）。□

8. Examples

8.1. 带有 $n = 3$ 的 Formanek-Procesi 群。其定义已在引言中回顾。一个 BFH 代表是具有 3 个花瓣的玫瑰图 $\mathcal{R}_3$，其中每个花瓣都与一个不同的生成元 x_i 对应。过滤由 $\{x_1\} \subset \{x_1, x_2\} \subset \{x_1, x_2, x_3\}$ 给出（这里只列出过滤中每个图的边，每个图都包含 $\mathcal{R}_3$ 的唯一顶点）。过滤同伦等价由如下方式得到：令 f_j（x_i）为读取 σ（t_j）（x_i）所得的边路径。

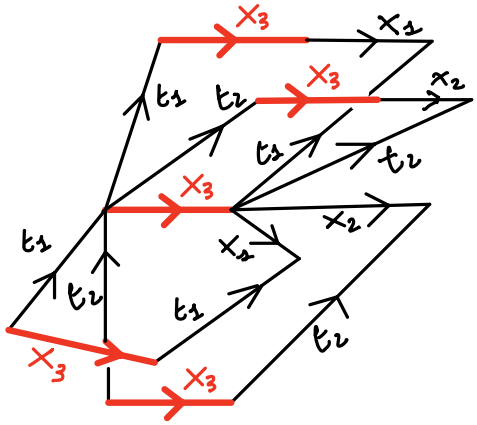

FIGURE 2. 为 FP 群中标签为 x_3 的对角墙定义的切割

最上层边恰有一条：边 x_3。图2展示了标签为 x_3 的一段对角墙的切割。粗边即为切口。

此外，还有 x_2 作为第1最高边，以及 x_1 作为2-顶层边。关于标签为 x_1的墙的切割示意图，请参见图3。

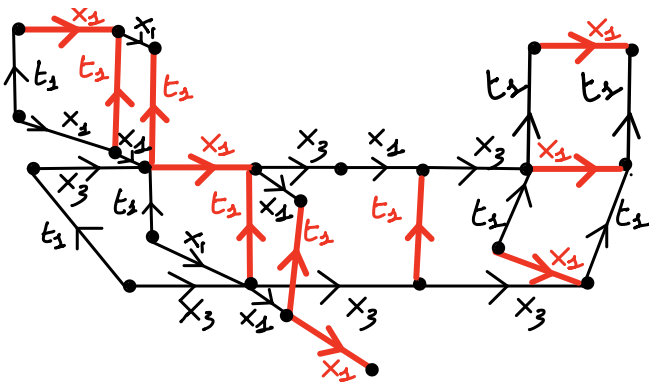

FIGURE 3. 为 FP 群中标签为 x_1 的对角墙定义的切割

在第一幅图中，我们没有表示由（ t_2的共轭元）左平移得到的切割，也没有表示伴随白色块中切割的左平移（这些切割位于图的左侧），后者是由（ x_2的共轭元）左平移得到的。读者可以在图5（白色块由 t_2的共轭元平移得到）和图4（伴随块由 t_2 和 x_2的共轭元平移得到）中看到这些其他左平移。

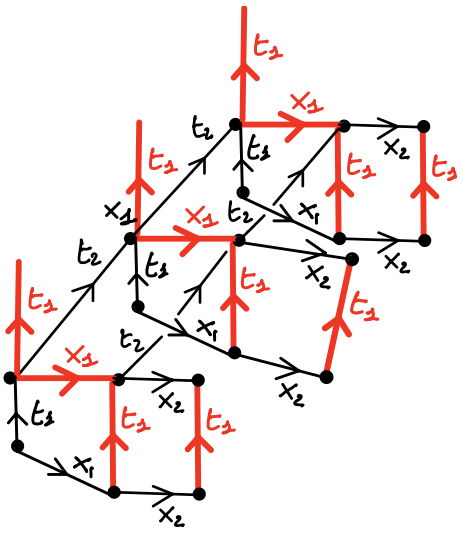

FIGURE 4. 伴随块切口的平移

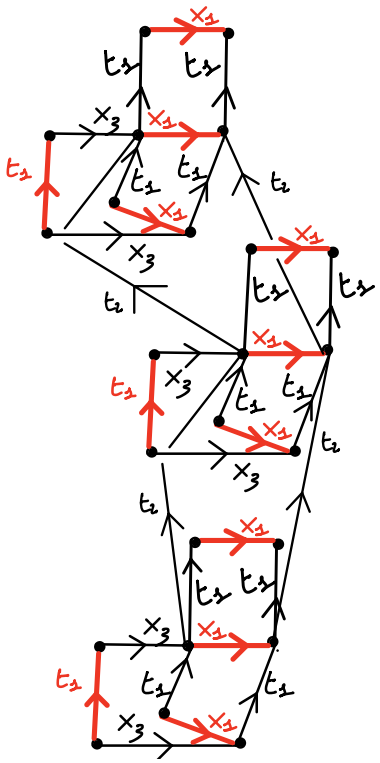

FIGURE 5. 白色块切口的平移

8.2. 的扩张 $\mathbb{F}_4$。这里 $G = \mathbb{F}_4 \rtimes_\sigma \mathbb{F}_2$ 含有 $\mathbb{F}_4 = \langle x_1, x_2, x_3, x_4 \rangle$、$\mathbb{F}_2 = \langle t_1, t_2 \rangle$和 $\alpha_i := \sigma(t_i)$ 定义如下:

$$\begin{array}{cccccccccccc} \alpha_1 & : & x_4 & \mapsto & x_4x_1 & & \alpha_2 & : & x_4 & \mapsto & x_4x_3x_2x_1 \\ & & x_3 & \mapsto & x_3x_1 & & & & x_3 & \mapsto & x_3x_2x_1 \\ & & x_2 & \mapsto & x_2 & & & & x_2 & \mapsto & x_2 \\ & & x_1 & \mapsto & x_1 & & & & x_1 & \mapsto & x_1 \end{array}$$

如同前一个例子，BFH 代表是玫瑰图，其花瓣分别对应生成元 x_i。这是一个多项式增长自同构的单侧关联子群

。1-顶层边为 x_2、x_3、x_4，而唯一的 2-顶层边是x_4。图 6 展示了看起来像是白色块和伴随块（的一部分）的结构。

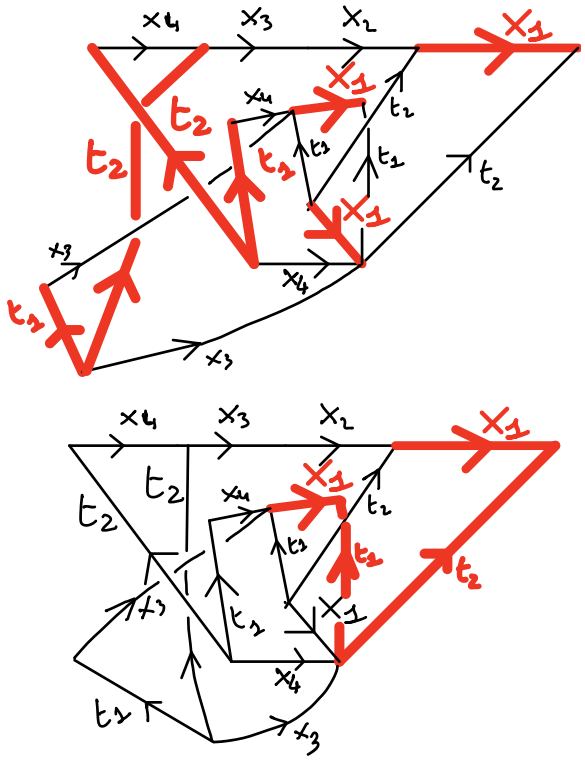

FIGURE 6. 白色块及其标签为 x_1 的伴随块（ $\mathbb{F}_4$示例）

致谢：作者谨向 P.A. Cherix（Universit´e de Gen`eve，日内瓦）致以诚挚谢意，是他让作者初识 Haagerup性质。G.N. Arzhantseva（Universit¨at Wien，维也纳）和 P.A. Cherix 提出了自由群扩张自由群及自由群扩张曲面群的 a-T- 可容性问题。当时在日内瓦，W. Pitsch（巴塞罗那自治大学，巴塞罗那）对这一问题的兴趣给了作者动力。因此，作者理应感谢他们三人。此外，作者还要感谢 G.N. Arzhantseva 告知他自由群扩张自由群的 a-T-可容性问题。最后，也衷心感谢 I. Chatterji（Universit´e Cˆote d'Azur，尼斯）的耐心倾听，她聆听了作者为取得更一般的结果所做的无数次尝试。

REFERENCES

[1] Charles A. Akemann 和 Martin E. Walter。无界负定函数。加拿大数学杂志。*Journal Canadien de Math´ematiques*，33(4):862–871，1981年。[2] Mladen Bestvina、Mark Feighn 和 Michael Handel。Out(F_n) 的 Tits 替代定理。I. 指数增长自同构的动力学。数学年刊，151(2):517–623，2000年。[3] Mladen Bestvina、Mark Feighn 和 Michael Handel。Out(F_n) 的 Tits 替代定理。II. AKolchin 型定理。数学年刊，161(1):1–59，2005年。[4] Martin R. Bridson 和 Andr´e Haefliger。非正曲率度量空间，《数学科学基础丛书》第319卷，*Grundlehrender Mathematischen Wissenschaften [FundamentalPrinciplesofMathematicalSci-ences]*。施普林格出版社，柏林，1999年。[5] M. Burger。SL(3,Z) 的 Kazhdan 常数。*Journal f¨ur die Reine und Angewandte Mathematik*，413:36–67，1991年。

[6] Indira Chatterji 和 Graham Niblo。从墙空间到 CAT(0) 方复形。《代数与计算国际期刊》，15(5-6):875–885，2005年。[7] Pierre-Alain Cherix、Michael Cowling、Paul Jolissaint、Pierre Julg 和 Alain Valette。具有 *Haagerup*性质的群，《数学进展》第197卷。Birkh¨auser Verlag，巴塞尔，2001年。[8] Pierre de la Harpe 和 Alain Valette。局部紧群的 Kazhdan 性质（´(´)，附 Marc Burger 的附录）。$Ast´erisque$，(175):158，1989年。[9] F. Gautero。一个具有 Haagerup性质的非平凡自由群扩张的自由群示例。《群、几何与动力学》，2012年。[10] Erik Guentner 和 Nigel Higson。CAT(0)立方群的弱可约性。《几何学纪事》，148:137–156，2010年。[11] Uffe Haagerup。一个具有度量逼近性质的非核 C^*-代数示例。《数学发明》，50(3):279–293，1978/79年。[12] Fr´ed´eric Haglund 和 Fr´ed´eric Paulin。负曲率空间自同构群的单纯性。载于《*Epstein*生日文集》，第1卷，《几何与拓扑专著》，第181–248页（电子版）。Geom. Topol. Publ.，考文垂，1998年。[13] Paul Jolissaint。Borel余循环、逼近性质与相对性质T。《遍历理论与动力系统》，20(2):483–499，2000年。[14] Graham A. Niblo 和 Martin A. Roller。作用于方复形上的群与 Kazhdan 性质(T)。《美国数学学会会刊》，126(3):693–699，1998年。[15] Bogdan Nica。带墙空间的立方化。《代数与几何拓扑》，4:297–309（电子版），2004年。[16] Michah Sageev。群对的端与非正曲率立方复形。《伦敦数学学会会刊》，71(3):585–617，1995年。

François Gautero, Université Côte d'Azur, CNRS, LJAD (UMR CNRS 7351), Parc Valrose, 06108 Nice Cedex 2, France电子邮件地址: Francois.Gautero@univ-cotedazur.fr