随机逼近的微分包含极限述评

VIVEK S. BORKAR 和 DHRUV A. SHAH

Abstract. 对于具有不连续动力学的随机逼近算法，本文证明，在适当的分布假设下，插值迭代序列会跟踪极限微分包含的菲利波夫解。此外，我们还针对近期关于与迭代相关的某些极限经验测度的结果 [7] ，提出一种替代性的控制理论方法。

arXiv:2303.04558v2 [math.PR] 1 Sep 2023

1. 引言

分析随机逼近算法的一种常见方法，是考察其极限微分方程，并根据该微分方程的渐近行为来解释算法的时间渐近行为。然而，在许多情况下，极限动力学并非微分方程，而是微分包含。出现这种情况的一个重要原因，是算法的更新方程涉及不连续函数。这会导致微分方程具有不连续右端，因而在经典意义下是不适定的。因此，人们转而采用不同的解概念 [10] ，由此得到微分包含。关于这一方向已有大量研究（下文将概述其中一部分）。本文的贡献有两方面：首先，在适当的附加条件下，将极限微分方程中的集值映射从克拉索夫斯基映射细化为菲利波夫映射；其次，针对近期的一些重要成果 [7], ，提供一种替代性的控制理论方法，并提出一些新的见解。

下一节将回顾随机逼近迭代序列及其微分方程极限（或微分包含极限）的基本事实。第 3 节将介绍我们的主要结果。

2. Stochastic approximation: preliminaries

这里简要回顾随机逼近算法的相关内容。该算法由 Robbins 和 Monro 于 [24], 提出，是一种利用非线性映射 $h\colon \mathcal{R}^d \mapsto \mathcal{R}^d$ 的含噪测量值来求其零点的方法。具体而言，其迭代过程为

$$x(n+1) = x(n) + a(n)(h(x(n)) + M(n+1)),\ n \geq 0, \tag{2.1}$$

其中， $\{M(n)\}$ 是相对于递增的 σ-域的鞅差序列

$$\mathcal{F}_n := \sigma(x(0), M(m), m \leq n), n \geq 0,$$

表示测量噪声，而 $\{a(n)\}$ 是满足以下条件的步长序列

$$a(n) \geq 0\ \forall\ n \geq 0,\ \sum_n a(n) = \infty,\ \sum_n a(n)^2 < \infty. \tag{2.2}$$

通常采用的假设为： h 是利普希茨函数，且 $\{M(n)\}$ 满足以下条件，其中 $K > 0$为某个常数：

$$\sup_n E\left[\|M(n)\|^4\right] < \infty \ \text{ and } \ E\left[\|M(n+1)\|^2 | \mathcal{F}_n\right] \leq K\left(1 + \|x(n)\|^2\right). \tag{2.3}$$

2000 *Mathematics Subject Classification.* 主要分类号：62L20；次要分类号：34A60；34D05。*Key words and phrases.* 随机逼近；不连续动力学；微分包含；Filippov 解；渐近行为。第一作者部分获得了印度政府印度科学与工业研究理事会提供的 S. S. Bhatnagar奖学金。

早期的研究采用概率技术分析（2.1）；自 20 世纪 70 年代以来发展出的另一种方法 [11, 19, 18, 2, 3] 则将（2.1）视为常微分方程的带噪声的欧拉格式（ODE 是“常微分方程”的缩写）。

$$\dot{x}(t) = h(x(t)). \tag{2.4}$$

在适当条件下，可以证明，当 $n \uparrow \infty$ 时，$\{x(n)\}$ 几乎必然（即：相对于底层概率测度 = 几乎必然）跟踪 (2.4) 的渐近行为。论证如下。（详情请参见 [8], 第 2 章。）定义“算法时间尺度” $t(n)$ $n \geq 0$如下： $t(0) := 0, t(n) := \sum_{m=0}^{n-1} a(m)$。于是，由 (2.2) 可得， $t(n) \uparrow \infty$。定义 $\bar{x}(t)$ $t \geq 0$如下： $\bar{x}(t(n)) := x(n)$ $\forall n$，并在每个区间 $[t(n)$ $t(n+1)]$, 上进行线性插值，使其成为一条连续分段线性曲线。固定 $T > 0$，对于 $n \geq 0$，定义 $m(n) := \min\{k : t(k) - t(n) \geq t(n) + T\}$。在区间 $[t(n)$ $t(m(n))]$, 上定义常微分方程

$$\dot{y}^n(t) = h(y^n(t)),\ t \in [t(n), t(m(n))],\ y^n(t(n)) = x(n).$$

若能证明迭代序列几乎必然有界，即 $\sup_n \|x(n)\| < \infty$ 几乎必然成立（这通常需要单独证明），那么由 (2.3) 以及 $\{a(n)\}$ 的平方可和性，可知 $\{\mathcal{F}_n\}$-鞅 $\sum_{m=1}^{n-1} a(m)M(m+1)$ 几乎必然收敛（参见 [20] 第 149 页的命题 VII.2.3(c)）。这一结论与由 (2.2) 可推出的事实 $a(n) \to 0$ 一起，通过格朗沃尔不等式可得

$$\lim_{n\uparrow\infty} \max_{t\in[t(n),t(m(n))]} \|\bar{x}(t) - y^n(t)\| \to 0 \text{ a.s.} \tag{2.5}$$

这里，鞅收敛和趋于零的步长分别使噪声和离散化所导致的误差趋于零。对 $T < 0$ 也可以采用类似的论证。进而可得到 Benaim [2, 3] 关于 $\{x(n)\}$ 渐近行为的如下刻画。

定理 2.1. 几乎必然， $x(n) \to$ 是 (2.4) 的一个非空紧连通内部链传递不变集。

详情请参见同上或 [8] 第 2 章。更一般的情形是随机递归包含，即迭代

$$x(n+1) = x(n) + a(n)(z(n) + M(n+1)),\ z(n) \in H(x(n))\ n \geq 0, \tag{2.6}$$

其中 H： $x \in \mathcal{R}^d \mapsto H(x) \subset \mathcal{R}^d$ 是一个集值映射，而 $\{M(n)\}$ 与上文相同。我们假设 $x \mapsto H(x)$ 是一个取非空紧凸集值的上半连续映射（即，其图 $\{(x, z) : z \in H(x)\}$ 是闭的），并满足线性增长条件

$$\max_{z\in H(x)} \|z\| \leq K'(1 + \|x\|)$$

对于某个 $K' > 0$。此时考察的是微分包含极限，而不是常微分方程。该微分包含为

$$\dot{x}(t) \in H(x(t)). \tag{2.7}$$

继 Benaim、Hofbauer 和 Sorin 的开创性工作之后 [4, 5]，（他们的工作除其他内容外，还为此情形确立了定理 2.1 的对应版本），这一迭代已在文献中得到广泛研究，其中部分研究受到强化学习应用的推动 [7, 13, 14, 22, 23, 27, 28, 29]。上述定理 2.1 的推广如下。

定理 2.2. 几乎必然， $\bar{x}(\cdot)$ 渐近跟踪 (2.7) 的一个解，其意义是 (2.5) 对 $y^n(\cdot)$ 成立： = 是 (2.7) 在 $[t(n)$ $t(m(n))]$ 上的一个解，且 $y^n(t(n)) = x(n)$ $\forall n$。此外， $x(n)$ 是 (2.4) 的一个非空紧连通内部链传递不变集。

这里，不变集是指由点组成的集合 x，使得某个经过 x 的 (2.7) 解在所有时间内都保持在该集合中。

一个值得关注的特殊情形是，当映射 h 不连续，且（2.4）的适定性通常理论不适用时的（2.4）。标准做法（见 [21] 及其参考文献）是通过令 $z(n) = h(x(n))$，将（2.4）视为（2.7）的一个特殊情形，并且

$$H(x) = K_h(x) := \cap_{\delta>0}\overline{co}\left(\{h(y) : \|y - x\| < \delta\}\right).$$

其中任意一条轨线都称为（2.4）的 Krasovskii 解 [17], ，它是不连续向量场驱动的微分方程的众多解概念之一。（关于各种解概念及其相互关系的最新综述，见 [10] 。）

3. Main results

我们始终假设

$$\sup_n \|x(n)\| < \infty \text{ a.s.} \tag{3.1}$$

我们用 $\mathcal{P}(S)$ 表示波兰空间 S 上赋有普罗霍罗夫拓扑的概率测度所构成的波兰空间。$C_b(S)$ 表示有界连续函数 $S \mapsto \mathcal{R}$的空间。

本节给出两个结果。首先注意到，如果 $(x(n)\ M(n+1))$ 的分布律是勒贝格连续的，那么对于极限微分方程，我们可以用限制更严格的 Filippov 解 [15] 取代通常使用的 Krasovskii 解。这得益于 [9]中的一个卓越结果。

第二个结果体现了另一项杰出工作的思想 [7]： 该工作刻画了适当取平均的“占用测度” μ（$dxdz|t$）在 $n \to \infty$ 时的极限行为。 [7] 采用 Young 测度和拓扑动力学概念等经典分析工具，而我们则从控制理论视角出发，基于松弛控制以及 Stockbridge 对 Echeverria 定理在受控鞅问题中的推广 [12] 。（进一步的推广见 [6] ； 详细论述见 [1], 第 6 章。）除了得到 [7], 结果的若干变体外，这种方法还带来了一些额外的见解。

3.1. Filippov 解。

令 $\mathcal{N}$ 表示 $\mathcal{R}^d$中的勒贝格零测集全体。方程 (2.4) 的菲利波夫解将上文的 K_h（x）替换为

$$F_h(x) := \cap_{N\in\mathcal{N}} \cap_{\delta>0} \overline{co}\left(\{h(y) : \|y - x\| < \delta\}\backslash N\right).$$

也就是说，我们考虑由下式给出的微分包含极限

$$\dot{x}(t) \in F_h(x(t)). \tag{3.2}$$

消　　除勒贝格测度为零的集合确实会产生影响。例如，考虑以下示例　　e.

例 1：考虑二维情形，其中 h： $\mathcal{R}^2 \mapsto \mathcal{R}^2$ 给定为

$$\begin{aligned} h(x,y) &= [1,-1], \quad y > 0, \\ &= [1,1], \quad y < 0, \\ &= [-1,0], \quad y = 0. \end{aligned}$$

不难看出，Filippov 解将

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= 1, \\ \dot{y}(t) &= -1, \quad y > 0, \\ &= 1, \quad y < 0, \\ &= 0, \quad y = 0. \end{aligned}$$

特别地，令 $[x, y]$ 表示 $\mathcal{R}^2$中的一个一般向量，则对于 $y(t) = 0$, $\frac{d}{dt}[x(t)\ y(t)] = [1, 0] \neq [-1, 0]$。Krasovskii解只能告诉我们，对于 $y(t) = 0$, $\frac{d}{dt}[x(t)\ y(t)] \in \overline{co}\Big([1, -1], [1, 1], [-1, 0]\Big)$。

假设:

(†) 分布 $\mathbf{f}(x(n)\ M(n+1))$ 对所有 n 都相对于勒贝格测度绝对连续 .

例如，若 $x(0)$ 的分布以及在给定 $x(n)$ 的条件下 $M(n+1)$ 的正则条件分布，对所有 n 都相对于勒贝格测度绝对连续（后一种情况下"几乎处处"），则此条件成立。我们的第一个主要结果是:

定理 3.1. 由（2.1）生成的、具有不连续 h 的 $\{x(n)\}$ 将渐近跟踪（3.2）的 Filippov 解，几乎必然成立。

证明。我们使用 [9] 中的以下结果。

引理3.2。设 $f: \mathcal{R}^d \mapsto \mathcal{R}^d$ 可测且局部有界。那么，

(1) 对几乎处处（:相对于勒贝格测度几乎处处） x， $f(x) \in F_f(x)$，且 $F_f(\cdot)$ 是满足此性质的最小闭凸值上半连续集值映射；并且，(2) 存在可测的 $\tilde{f} = f$（几乎处处），使得 $F_f(x) = K_{\tilde{f}}(x)\ \forall x \in \mathcal{R}^d$。

证明见命题2，第231-234, [9], 页。事实上，容易看出，若考虑卷积 $f^\delta := f * \varphi^\delta$，其中 $\varphi^\delta, \delta > 0$ 是原点处狄拉克测度的光滑逼近，且其支集包含在以原点为中心、半径为 $\delta > 0$ 的球内，那么在 f [16] 的所有勒贝格点处都有 $f = \lim_{\delta \downarrow 0} f^\delta$，因此在 f 的所有勒贝格点处都有 $f(x) \in F_f(x)$。

由上述引理，存在一个可测的 $\tilde{h}: \mathcal{R}^d \mapsto \mathcal{R}^d$，使得 $\tilde{h} = h$ 几乎处处成立，且 $F_h(\cdot) = K_{\tilde{h}}(\cdot)$。因此，该迭代

$$\tilde{x}(n+1) = \tilde{x}(n) + a(n)(\tilde{h}(x(n)) + M(n+1)),\ n \geq 0,$$

满足 $\tilde{x}(0) = x(0)$ 几乎必然成立；由归纳法可知，结合（†），有 $\tilde{x}(n) = x(n)$ 几乎必然成立。但根据随机递归包含的标准理论（参见例如 [4] 或 [8]的第 5 章），$\{\tilde{x}(n)\}$ 几乎必然渐近跟踪微分包含

$$\dot{x}(t) \in K_{\tilde{h}}(x(t)) = F_h(x(t)),$$

鉴于上述论述，$\{x(n)\}$也具有同样的性质。结论得证。 □

3.2. 极限经验测度。本节从控制理论视角考察（2.7）。设 $f_i: \mathcal{R}^d \mapsto \mathcal{R}, i \geq 1$ 是一个可数的有界二次连续可微函数族，其一阶和二阶偏导数有界，并经过选取，使其构成 $\mathcal{P}(\mathcal{R}^d)$的一个收敛决定类。注意，对于每个$i \geq 1$,

$$\xi_i(n) := \sum_{m=0}^{n-1} a(m)\langle \nabla f_i, M(m+1)\rangle,\ n \geq 1,$$

是关于 $\{\mathcal{F}_n\}$ 的平方可积鞅。

引理 3.3. $\xi_i(n)$ 几乎必然收敛，当 $n \to \infty$, $\forall i$。

证明。由 (3.1)， $\{\xi_i(n)$ 的二次变差过程 $\{\langle \xi \rangle_n\}\}$ 满足

$$\langle \xi_i \rangle_n \leq K_i \sum_{m=0}^{n-1} a(m)^2 E\left[\|M(m+1)\|^2 | \mathcal{F}_m\right] \leq K_i K \sum_n a(n)^2(1 + \|x(n)\|^2) < \infty \text{ a.s.}$$

对于适当的界 K_i，关于 $\|\nabla f_i(\cdot)\|$ 和 K，如式 (2.3) 所示。根据 [20] 第 149 页的命题 VII.2.3(c)， $\xi_i(n)$ 几乎必然收敛。 □

同样，我们有：

引理 3.4. $\sum_n a(n)^2\|M(n+1)\|^2 < \infty$ 几乎必然。

证明。令

$$Z(n) := \sum_{m=0}^{n-1} a(n)^2 \left(\|M(m+1)\|^2 - E\left[\|M(m+1)\|^2|\mathcal{F}_m\right]\right),\ n \geq 1.$$

根据假设 (2.3)，$\sup_n E\left\|M(n)\right\|^4] < \infty$. 由此及 (2.2) 可知，$\{Z_n\}$ 的二次变差过程$\langle Z\rangle_n$ 在均方意义下是一致有界的，因此几乎必然有界。进而，由此及 [20]，第 149 页的命题 VII.2.3(c)可知，当 $n \uparrow \infty$ 时，$Z(n)$ 几乎必然收敛。由于

$$\sum_{m=0}^{n-1} a(n)^2 E\left[\|M(m+1)\|^2|\mathcal{F}_m\right] \leq K \sum_{m=0}^{n-1} a(n)^2 \left(1 + \|x(m)\|^2\right) < \infty$$

几乎必然（其中 $K > 0$ 如 (2.3) 中所述），结论得证。 □

接下来，令 B, D为 $\mathcal{R}^d$ 的闭凸子集。我们定义 $\mathcal{U}$:=为可测映射 $[0,\infty) \mapsto \mathcal{P}(B \times D)$ 的空间，并赋予使映射连续的最粗拓扑

$$\mu(dxdy|\cdot) \in \mathcal{U} \mapsto \int_s^t g(y) \int_{B\times D} f(x,u)\mu(dxdu|y)dy,\ f \in C(B \times D), g \in L_2[s,t], t > s \geq 0.$$

这是一个紧的可度量化拓扑，因此 $\mathcal{U}$ 是波兰空间（例如参见 [8] 的第 71—73 页）。事实上，这是 L. C. Young 为松弛控制（或“颤振”控制）引入的标准拓扑的一个特例，后来促成了变分法中更一般的“Young 测度”概念 [30]。

令 Φ := 为一个零概率集合，在该集合之外，(3.1) 以及引理 3.3 和 3.4 的结论均成立。定义一个取值于 $\mathcal{P}((\mathcal{R}^d)^2)$ 的过程 $\mu(dxdz|t)$ $t \in [0,\infty)$，如下：

$$\mu(dxdz|t) := \delta_{(x(n),z(n))}(dxdz),\ t(n) \leq t < t(n+1), n \geq 0,$$

其中，$\{t(n)\}$ 按前一节中的定义给出，而 $\delta_{(x',z')}(dxdz)$ 表示集中于 (x', z') 的狄拉克测度。在 Φ^c 中固定一个样本点。选取 $B, D \subset \mathcal{R}^d$，使得 $(x(n)\ h(x(n))) \in B \times D\ \forall n$。根据 (3.1) 以及 $F_h(\cdot)$ 上的线性增长条件，这是可能的。定义 $\breve{}\mu(dxdz|\cdot) \in \mathcal{U}$ 如下：

$$\int f(x,z)\breve{\mu}(dxdz|t) := \frac{1}{t}\int_0^t \int f(x,z)\mu(dxdz|s)ds$$

二阶连续可微 $f \in C_b(B \times D)$，且其一阶和二阶偏导数有界。特别地，

$$\frac{1}{t(n)}\int_0^{t(n)} \int \langle \nabla f_i(x), z\rangle \mu(dxdz|t)dt = \frac{\sum_{k=0}^{n-1} a(k)\langle \nabla f_i(x(k)), z(k)\rangle}{\sum_{k=0}^{n-1} a(k)}.$$

注意，我们考虑的是一条固定的样本路径，因此集合 B、D 虽然依赖于样本路径，但都是固定的。

定理 3.5. 对于所选取的样本路径，当 $t \uparrow \infty$ 时，$\mu(dxdz|t+\cdot)$ 在 $\mathcal{U}$ 中的任意极限点都具有 $\mu^*(dxdz)$ 的形式，且满足，

(1) μ^* 支撑在 $K_h(\cdot)$的图上；若（†）成立，则支撑在 $F_h(\cdot)$的图上；并且，(2) 存在平稳过程（$X(\cdot)$ $Z(\cdot)$)满足 $X(t) = Z(t)$，且（$X(t)$ $Z(t)$)的边缘分布为 μ^*，对所有 t均成立。此外，可以将控制 $Z(\cdot)$视为对应于某个可测 $v:\ x \in \mathcal{R}^d \mapsto \mathcal{P}(K_h(x))$、$(v:\ x \in \mathcal{R}^d \mapsto \mathcal{P}(F_h(x))$（若（†）成立）的平稳马尔可夫松弛控制 $v(X(\cdot))$；也就是说，$v(X_t)$是 Z_t 的分布，对所有 $t \geq 0$均成立。

证明。回顾上一节中 $t(n)$ $n \geq 0$和 $\bar{x}(\cdot)$的定义。由于 $t(n)$ $\to \infty$ 且 $t(n+1)$ $-t(n)$ $\to 0$，只需考虑沿着 $\{t(n)\}$ 的一个子序列，当 $n \uparrow \infty$时。对于 $i \geq 1$,

$$\begin{aligned} f_i(\bar{x}(t(n)) - f_i(\bar{x}(0)) &= \sum_{k=0}^{n-1} (f_i(\bar{x}(t(k+1)) - f_i(\bar{x}(t(k)))) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} a(k)\langle \nabla f_i(x(k)), z(k)\rangle + \sum_{k=0}^{n-1} a(k)\langle \nabla f_i(x(k)), M(k+1)\rangle + \sum_{k=0}^{n-1} \zeta(k) \end{aligned}$$

根据泰勒公式，其中 $\|\zeta(k)\| \leq Ca(k)^2\left(1 + \|M(k+1)\|^2\right)$，某个常数为 $C > 0$。根据我们对样本路径的选择，引理 3.3 的结论适用，因此第二项有界。同理，根据引理 3.4，第三项也有界。然后将两边除以 $t(n)$，并令 $n \uparrow \infty$，得到 $t(n) \uparrow \infty$，因此

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} a(k)\langle \nabla f_i(x(k)), z(k)\rangle = \frac{1}{t(n)} \int_0^{t(n)} \int \langle \nabla f_i(x), z\rangle d\mu(dxdz|t)dt \to 0.$$

设当 $t \to \infty$ 时， $\mu^*(dxdz)$ 是 $\check{}\mu(dxdz|t)$ 的一个极限点。那么沿着适当的子序列取极限，可得

$$\int \langle \nabla f_i(x), z\rangle \mu^*(dxdz) = 0 \ \forall i.$$

那么，第一个结论由定理 2.2 和定理 3.1 得出。根据 [25], 的定理 4.7，存在一个平稳过程 $(X(\cdot)\ Z(\cdot))$，使得 $X(t) = Z(t)\ \forall t$，且 $(X(t)\ Z(t))$ 的边缘分布对所有 t 都是 μ^*。这就说明了第二个结论的第一部分。第二个结论的第二部分由 [6], 的推论 2.1 得出；另见 [1] 第 230 页的推论 6.3.7。□

注 3.6. 请注意，控制是平稳松弛马尔可夫过程，并不意味着状态过程本身是时齐马尔可夫过程，甚至也不意味着它是马尔可夫过程。这是由于解的不唯一性：对于某些 $t > 0$，我们可以先取一个截至 t 的解，然后从以 $X(t)$为初始条件的解测度集合中，选择过程在 t之后的正则条件分布，使其成为截至时间 t的整个轨迹的非平凡函数。由此便得到一个非马尔可夫解。更一般地，可以按照 [26] 第 12.3 节中的方法来构造非马尔可夫解。

References

[1] Arapostathis, A.、Borkar, V. S. 和 Ghosh, M. K.，2012年。《扩散过程的遍历控制》，剑桥大学出版社。[2] Benaim, M.，1996年。随机逼近的动力系统方法，《SIAM 控制与优化杂志》，34(2)，437-472。[3] Bena¨ım, M.，2006年。随机逼近算法的动力学。载于《概率研讨会 XXXIII》（第1-68页），施普林格。[4] Bena¨ım, M.、Hofbauer, J. 和 Sorin, S.，2005年。随机逼近与微分包含，《SIAM 控制与优化杂志》，44(1)，328-348。[5] Bena¨ım, M.、Hofbauer, J. 和 Sorin, S.，2006年。随机逼近与微分包含，第二部分：应用，《运筹学数学》，31(4)，673-695。[6] Bhatt, A. G. 和 Borkar, V. S.，1996年。受控马尔可夫过程的占用测度：刻画与最优性，《概率年刊》24(3)，1531-1562。[7] Bianchi, P. 和 Rios-Zertuche, R.，2021年。随机逼近的闭测度方法，arXiv 预印本 arXiv:2112.05482。[8] Borkar, V. S.，2022年。《随机逼近：动力系统视角》（第2版扩充版），Hindustan 出版社和施普林格·自然。[9] Buckdahn, R.、Ouknine, Y. 和 Quincampoix, M.，2009年。关于小噪声强度趋于零的随机微分方程的极限值，《数学科学通报》，133(3)，229-237。[10] Cortes, J.，2008年。不连续动力系统。《IEEE 控制系统杂志》，28(3)，36-73。[11] Derevitskii, D. P. 和 Fradkov, A. L.，1974年。分析自适应算法动力学的两种模型，《自动化与遥控》，35(1)，第67-75页。[12] Echeverr´ıa, P.，1982年。马尔可夫过程不变测度的一个判据。《Zeitschrift f¨ur Wahrscheinlichkeitstheorie und Ver- wandte Gebiete》，61(1)，1-16。

[13] Faure, M. 和 Roth, G.，2010年。集值动力系统的随机逼近：以正概率收敛于一个吸引子，《运筹学数学》，35(3)，624-640。[14] Faure, M. 和 Roth, G.，2013年。集值动力系统弱渐近伪轨道的遍历性质，《随机性与动力学》，13(01)，1250011。[15] Filippov, A.F.，2010年。《不连续右端微分方程》，克吕维尔学术出版社。[16] Jost, J.，2006年。《后现代分析》（第3版），施普林格。[17] Krasovskii, N. N. 和 Subotin, A. I.，1988年。《博弈论控制问题》，施普林格出版社。[18] Ljung, L.，1977年。递归随机算法分析，《IEEE自动控制汇刊》，22(4)，551-575。[19] Meerkov, S. M.，1972年。慢随机游走 II 的简化描述，《自动化与遥控》33(2)，403-414。[20] Neveu, J.，1975年。《离散参数鞅》，北荷兰出版社。[21] Nguyen, N. 和 Yin, G.，2023年。具有不连续动力学、微分包含及应用的随机逼近，《应用概率年刊》，33(1)，780-823。[22] Ramaswamy, A. 和 Bhatnagar, S.，2016年。双时间尺度下的随机递归包含及其在拉格朗日对偶问题中的应用。《随机性》，88(8)，1173-1187。[23] Ramaswamy, A. 和 Bhatnagar, S.，2017年。针对随机递归包含的 Borkar-Meyn定理推广。《运筹学数学》，42(3)，648-661。[24] Robbins, H. 和 Monro, S.，1951年。一种随机逼近方法。《数学统计年刊》，400-407。[25] Stockbridge, R. H.，1990年。鞅问题的时间平均控制：平稳解的存在性。《概率年刊》，190-205。[26] Stroock, D. W. 和 Varadhan, S. R. S.，1979年。《多维扩散过程》，施普林格出版社。[27] Yaji, V. G. 和 Bhatnagar, S.，2018年。具有非加性迭代依赖马尔可夫噪声的随机递归包含，《随机性》，90(3)，330-363。[28] Yaji, V. G. 和 Bhatnagar, S.，2019年。在缺乏稳定性保证的情况下，利用集值映射分析随机逼近方案及其稳定化。《IEEE自动控制汇刊》，65(3)，1100-1115。[29] Yaji, V.G. 和 Bhatnagar, S.，2020年。具有非加性迭代依赖马尔可夫噪声的双时间尺度随机递归包含。《运筹学数学》，45(4)，第1405-1444页。[30] Young, L. C.，1969年。《变分法与最优控制理论讲义》，W. B. Saunders。

Department of Electrical Engineering, Indian Institute of Technology Bombay, Powai, Mumbai 400076, India
Email address: borkar.vs@gmail.com

Department of Electrical Engineering, Indian Institute of Technology Bombay, Powai, Mumbai 400076, India
Email address: 190020039@iitb.ac.in