arXiv:2303.04565v1 [math.LO] 8 Mar 2023

# 次协调概率的双层逻辑*

Marta B´ılkov´a[1][0000−0002−3490−2083]，Sabine Frittella[2][0000−0003−4736−8614]、Daniil Kozhemiachenko[2][0000−0002−1533−8034]和 Ondrej Majer[3][0000−0002−7243−1622]

[1] 捷克科学院计算机科学研究所，布拉格 bilkova@cs.cas.cz[2] 法国奥尔良大学 INSACentre Val de Loire，LIFO EA 4022 sabine.frittella@insa-cvl.fr、daniil.kozhemiachenko@insa-cvl.fr[3] 捷克科学院哲学研究所，布拉格 majer@flu.cas.cz

摘要。 我们探讨两种双层逻辑，它们将卢卡西维茨 $[0,1]$值逻辑与 Baaz $\triangle$ 算子及 Belnap–Dunn 逻辑结合起来，以形式化对次协调概率的推理。第一种逻辑 Pr-L$_{\triangle}^{2}$ （引入于 [7]）形式化了一种“二值”方法，其中每个事件 $\phi$ 都具有相互独立的正测度和负测度，分别表示 $\phi$ 和 $\neg\phi$的可能性。我们在此介绍的第二种逻辑 4Pr-L $\triangle$ 对应于“四值”概率。在这种逻辑中， $\phi$ 配有四种测度，分别表示主体对 $\phi$的纯信念、纯不信念、冲突和不确定性。

我们构造了 4Pr-L$^{\triangle}$ 与 Pr-L$_{\triangle}^{2}$ 之间的忠实嵌入，并使用希尔伯特式演算为 4Pr-L$^{\triangle}$ 建立公理化系统。我们还证明了这两种逻辑都是可判定的，并通过扩展 L 的约束表列演算，对它们的复杂度进行了评估。

关键词：双层逻辑 · 卢卡西维奇逻辑 · 非标准概率 · 相容逻辑 · 约束表列

## 1 引言

经典概率论研究概率测度：从概率空间到 $[0,1]$ 的映射，并满足（有限或可数）可加性条件：

$$\mu\left(\bigcup_{i\in I} E_i\right) = \sum_{i\in I} \mu(E_i) \qquad (\forall i,j \in I : i \neq j \Rightarrow E_i \cap E_j = \varnothing)$$

* Marta B´ılkov´a 的研究得到了捷克科学基金会 22-01137S 项目资助。Sabine Frittella 和 Daniil Kozhemiachenko 的研究由 ANR JCJC 2019 项目 PRELAP（ANR-19-CE48-0006）资助。本研究是 MOSAIC 项目的一部分，该项目由欧盟玛丽·斯克沃多夫斯卡-居里资助协议（编号 101007627）资助。

上述 $E_i$ 与 $E_j$ 的不相交性可以理解为它们彼此不相容。最重要的是，如果命题公式 $\phi$ 与某个事件相关联（并被解释为关于该事件的陈述），那么 $\phi$与 $\neg\phi$不相容，而 $\phi\vee\neg\phi$则穷尽整个样本空间。

另一方面，次协调概率论认为，事件的概率测度表示的并非该事件发生的可能性，而是主体基于各信息源所提供的信息推断出的对该事件的确定性。由于单一信息源可能提供不完整或相互矛盾的信息，因此，合理的假设是，“矛盾的”事件 $\phi\wedge\neg\phi$ 可以具有正概率，而 $\phi\vee\neg\phi$ 的概率不一定为 1。

因此，描述事件的逻辑应允许事件既真又假（当信息源提供矛盾信息时），或既非真也非假（当信息源未提供信息时）。形式上，这意味着 $\neg$ 不对应于样本空间中的补集。

次协调概率在 BD 中，表示对信息源所提供信息进行推理的最简单逻辑是 Belnap–Dunn 逻辑 [13,4,3]。最初，BD 被提出为一种四值命题逻辑，使用 $\{\neg,\wedge,\vee\}$语言。这些值表示信息源针对某个陈述所能给出的不同说明 $\phi$:

– T 表示“来源只说 $\phi$ 为真”；– F 表示“来源只说 $\phi$ 为假”；– B 表示“来源既说 $\phi$ 为假，也说 $\phi$ 为真”；– N 表示“来源既没有说 $\phi$ 为假，也没有说它为真”。

对真值的诠释使我们能够用两个经典但相互独立的赋值来重新表述 BD 语义。具体而言，

| | 当.....时为真 | 当.....时为假 |
|---|---|---|
| $\neg\phi$ | $\phi$ 为假 | $\phi$为真 |
| $\phi_1\wedge\phi_2$ | $\phi_1$ 和 $\phi_2$ 为真 | $\phi_1$ 为假或 $\phi_2$ 为假 |
| $\phi_1\vee\phi_2$ | $\phi_1$ 为真或 $\phi_2$ 为真 | $\phi_1$ 和 $\phi_2$ 为假 |

很容易看出，BD 中不存在普遍为真的公式，也不存在普遍为假的公式。因此，BD 满足上述要求。

以 BD 为基础对次协调概率进行的首次表示见于[14], ，但该文并未给出公理化。Dunn 提议根据 $\phi$的 Belnap 真值，将样本空间划分为四个完备且互斥的部分。 [25]提出了另一种方法。该文作者基于语义的两种表述，提出了两种等价的解释。第一种方法是为 $\phi$ 给出两个相互独立的概率测度：一个用于确定 $\phi$ 为真的可能性，另一个用于确定 $\phi$ 为假的可能性。第二种方法沿用 Dunn 的思路，也根据 $\phi$ 在给定状态下取值为 T、B、N 还是 F 来划分样本空间。

这两种方法的主要区别在于，在 [14], 中， $\phi\wedge\phi'$ 的概率完全由 $\phi$ 和 $\phi'$ 的概率决定，因此具有组合性。另一方面，所提出的次协调概率

在 [25] 合取方面不具有组合性。本文选择后一种方法，因为可以论证 [12] 信念不具有组合性。

例如， [9,28]中可以找到一种类似的容矛盾概率研究方法。在那里，概率定义在 BD 的扩展之上，该扩展包含经典性算子和非经典性算子。值得一提的是，所提出的概率公理与 [25] 中的公理非常接近：例如，两者都允许测度 p 满足 $p(\phi)+p(\neg\phi) < 1$ （若有关 $\phi$ 的信息不完整），或者 $p(\phi)+p(\neg\phi) > 1$（若信息相互矛盾）。

用于不确定性的双层逻辑 对不确定性的推理可以通过模态逻辑形式化，其中模态被解释为对某个事件的测度。模态的具体语义可以通过两种方式定义。第一，采用具有克里普克语义的模态语言，在这种语言中，测度定义在状态集合上；例如， [17,10,11] 以此处理定性概率， [24] 则以此处理定量概率。第二，采用双层形式体系（例如参见 [16,15], [2], 和 [7,6] ）。在这种体系中，逻辑分为两个层次：内层描述事件，外层描述基于定义在事件上的测度进行的推理。该测度是一个非嵌套模态 M，而外层公式由形如 $M\phi$ 的“模态原子”构成，其中 $\phi$ 是一个内层公式。随后，为外层公式赋予模糊逻辑的语义，从而允许进行必要的运算（例如，定量推理采用卢卡西维茨逻辑，定性推理采用哥德尔逻辑）。

在这项工作中，我们选择双层方法。首先，与通常的克里普克语义相比，它具有更好的模块化特性：只要选定事件描述的逻辑，就可以在其基础上使用不同的上层逻辑定义不同的测度。其次，完备性证明非常简单，因为只需将给定测度的公理转换为外层逻辑中的公理即可。最后，尽管传统的克里普克语义比双层逻辑更具表达力，但在许多情境下，这种表达力并非真正必要。事实上，人们很少会说类似“ $\phi$是可能的，而且它是可能的”这样的话。此外，在嵌套情形下，为真值赋值也要困难得多；尤其是当同一个测度既应用于命题公式，也应用于模态化公式时，例如 $M(p \wedge Mq)$。

本文结构本文延续了 [8] 提出的研究计划，并在 [7] 和 [6]中继续推进。在此，我们旨在构建一种逻辑，用以形式化[25]中所述的四值概率推理。本文其余部分安排如下。第2节回顾了BD 上概率的两种处理方法，见 [25]。第3节介绍我们双层逻辑的语义，第4节使用希尔伯特式演算对其进行公理化。第5节证明我们的所有逻辑都是可判定的，并确定其复杂度评估。最后，我们在第6节总结研究成果。

## 2 次协调概率的两种方法

我们首先定义 BD 在状态集上的语义。BD 的语言由以下语法给出（其中 Prop 是一个可数的

命题变量集）。

$$\mathcal{L}_{\mathsf{BD}} \ni \phi := p \in \mathtt{Prop} \mid \neg\phi \mid (\phi \wedge \phi) \mid (\phi \vee \phi)$$

约定 1 下文中，我们用 Prop($\phi$) 表示在 $\phi$ 中出现的变量集，用 Lit($\phi$) 表示在 $\phi$ 中出现的文字集（即变量或其否定）。此外，我们用 Sf($\phi$) 表示 $\phi$ 的所有子公式集。

我们还将使用两类公式：单层公式和双层公式。为了更简单地区分二者，我们用字母表末尾的希腊字母（$\phi$、 $\chi$、 $\psi$ 等）表示第一类，用字母表开头的字母（$\alpha$、 $\beta$、 $\gamma$ 等）表示第二类。

此外，我们用 $v$ （带下标）表示单层公式的赋值，用 $e$（带下标）表示双层公式的赋值。

定义 1（BD 的集合语义）。设 $\phi$、$\phi' \in \mathcal{L}_{\mathsf{BD}}$、 $W \neq \varnothing$ 和 $v^+$、$v^-$ 为 Prop $\to 2^W$。对于模型 $\mathfrak{M} = \langle W$、$v^+$、$v^-\rangle$，我们按如下方式定义 $w \vDash^+ \phi$ 和 $w \vDash^- \phi$ 关于 $w \in W$ 的概念。

$w \vDash^+ p$ 当且仅当 $w \in v^+(p)$ $w \vDash^- p$ 当且仅当 $w \in v^-(p)$$w \vDash^+ \neg\phi$ 当且仅当 $w \vDash^- \phi$ $w \vDash^- \neg\phi$ 当且仅当 $w \vDash^+ \phi$$w \vDash^+ \phi \wedge \phi'$ 当且仅当 $w \vDash^+ \phi$ 且 $w \vDash^+ \phi'$ $w \vDash^- \phi \wedge \phi'$ 当且仅当 $w \vDash^- \phi$ 或 $w \vDash^- \phi'$$w \vDash^+ \phi \vee \phi'$ 当且仅当 $w \vDash^+ \phi$ 或 $w \vDash^+ \phi'$ $w \vDash^- \phi \vee \phi'$ 当且仅当 $w \vDash^- \phi$ 且 $w \vDash^- \phi'$

我们将公式的正扩张与负扩张记作如下：

$$|\phi|^+ := \{w \in W \mid w \vDash^+ \phi\} \qquad |\phi|^- := \{w \in W \mid w \vDash^- \phi\}.$$

我们称序列 $\phi \vdash \chi$ 在 $\mathfrak{M} = \langle W, v^+, v^-\rangle$ 上有效（记作 $\mathfrak{M} \models [\phi \vdash \chi]$），当且仅当 $|\phi|^+ \subseteq |\chi|^+$ 且 $|\chi|^- \subseteq |\phi|^-$。序列 $\phi \vdash \chi$ 是 BD有效（$\phi \models_{\mathsf{BD}} \chi$），当且仅当它在每个模型上都有效。在这种情况下，我们称 $\phi$ 蕴涵 $\chi$。

现在，我们可以利用上述语义来定义模型上的概率。我们改编了 [25]中的定义。

定义 2（带有 $\pm$-概率的 BD 模型）。带有 $\pm$-概率的 BD 模型是一个元组 $\mathfrak{M}_\mu = \langle \mathfrak{M}, \mu\rangle$，其中 $\mathfrak{M}$ 是一个 BD 模型，且 $\mu\colon 2^W \to [0,1]$ 满足：

单调规则：若 $X \subseteq Y$，则 $\mu(X) \leq \mu(Y)$；否定规则： $\mu(|\phi|^-) = \mu(|\neg\phi|^+)$；ex： $\mu(|\phi \vee \chi|^+) = \mu(|\phi|^+) + \mu(|\chi|^+) - \mu(|\phi \wedge \chi|^+)$。

为便于介绍定义在 BD 模型上的四值概率，我们引入由 $|\phi|^+$ 和 $|\phi|^-$ 定义的 $\phi$ 的额外扩展。

约定 2 设 $\mathfrak{M} = \langle W, v^+, v^-\rangle$ 为一个 BD 模型， $\phi \in \mathcal{L}_{\mathsf{BD}}$。我们定义

$$|\phi|^{\mathsf{b}} = |\phi|^+ \setminus |\phi|^- \qquad |\phi|^{\mathsf{d}} = |\phi|^- \setminus |\phi|^+$$
$$|\phi|^{\mathsf{c}} = |\phi|^+ \cap |\phi|^- \qquad |\phi|^{\mathsf{u}} = W \setminus (|\phi|^+ \cup |\phi|^-)$$

遵循 *[25]* 的说法，我们分别将这些扩展称为 $\phi$ 中的纯信念、纯不信念、冲突和不确定性。

定义 3（具有 4-概率的 BD 模型）。具有 4-概率的 BD 模型是一个元组 $\mathfrak{M}_4 = \langle \mathfrak{M}, \mu_4 \rangle$，其中 $\mathfrak{M}$ 是一个 BD 模型，且 $\mu_4 : 2^W \to [0,1]$ 满足：

部分：$\mu_4(|\phi|^{\mathsf{b}}) + \mu_4(|\phi|^{\mathsf{d}}) + \mu_4(|\phi|^{\mathsf{u}}) + \mu_4(|\phi|^{\mathsf{c}}) = 1$；否定规则：$\mu_4(|\neg\phi|^{\mathsf{b}}) = \mu_4(|\phi|^{\mathsf{d}})$，$\mu_4(|\neg\phi|^{\mathsf{c}}) = \mu_4(|\phi|^{\mathsf{c}})$；矛盾规则：$\mu_4(|\phi \wedge \neg\phi|^{\mathsf{b}}) = 0$, $\mu_4(|\phi \wedge \neg\phi|^{\mathsf{c}}) = \mu_4(|\phi|^{\mathsf{c}})$；BCmon：若 $\mathfrak{M} \models [\phi \vdash \chi]$，则 $\mu_4(|\phi|^{\mathsf{b}}) + \mu_4(|\phi|^{\mathsf{c}}) \leq \mu_4(|\psi|^{\mathsf{b}}) + \mu_4(|\psi|^{\mathsf{c}})$；BCex：$\mu_4(|\phi|^{\mathsf{b}}) + \mu_4(|\phi|^{\mathsf{c}}) + \mu_4(|\psi|^{\mathsf{b}}) + \mu_4(|\psi|^{\mathsf{c}}) = \mu_4(|\phi \wedge \psi|^{\mathsf{b}}) + \mu_4(|\phi \wedge \psi|^{\mathsf{c}}) + \mu_4(|\phi \vee \psi|^{\mathsf{b}}) + \mu_4(|\phi \vee \psi|^{\mathsf{c}})$。

约定 3 我们将进一步采用以下命名约定：

– 我们用术语 '±-概率'表示 $\mu$（定义 2）；– 我们将定义 $\mu_4$ 3 中的称为' 4-概率' 或 '四值概率'。请注意，±-概率在 [25] 和 [7]中被称为'非标准'。由于这一术语过于宽泛（四值概率也不是'标准'的），我们采用另一种称谓。

我们来简要讨论一下上述定义的测度。首先，请注意，$\mu(|\phi|^{+})$ 和 $\mu(|\phi|^{-})$ 彼此独立。因此，$\mu$ 会为每个 $\phi$ 给出两个测度，这正是我们所期望的。其次，回顾一下定理 2–3]：每个 BD 模型上的 4-概率都会导出一个 ±-概率，反之亦然。在接下来的章节中，我们将为具有 ±-概率和 4-概率的 BD 模型定义双层逻辑，并证明它们可以忠实嵌入彼此。

注 1. 请注意，对于每个具有 ±-概率 $\langle W, v^{+}, v^{-}, \mu \rangle$ 的 BD 模型（以及具有 4-概率 $\langle W, v^{+}, v^{-}, \mu_4 \rangle$ 的 BD 模型），都存在一个 BD 模型$\langle W', v'^{+}, v'^{-}, \pi \rangle$，其带有经典概率测度 $\pi$，使得 $\pi(|\phi|^{+}) = \mu(|\phi|^{+})$（以及 $\pi(|\phi|^{\mathsf{x}}) = \mu_4(|\phi|^{\mathsf{x}})$，其中 $\mathsf{x} \in \{\mathsf{b},\mathsf{d},\mathsf{c},\mathsf{u}\}$），根据定理 4–5]。因此，不失一般性，我们可以进一步假设 $\mu$ 和 $\mu_4$ 是 $W$上的经典概率测度。

## 3 次协调概率的逻辑

本节将介绍一些逻辑，它们相对于带有 ±-概率和 4-概率的 BD 模型是（弱）完备的。由于测度条件包含对 $[0,1]$, 进行的算术运算，我们选择卢卡西维茨逻辑的一种扩展，即带有 △（$\mathrm{L}_{\triangle}$）的卢卡西维茨逻辑，作为外层。此外，±-概率同时涉及公式的正扩张与负扩张，因此使用 $\mathrm{L}^2$ ——L 的一种次协调扩展（详情参见 [8,5] ），它在$[0,1]$上具有两个赋值—— $v_1$（真支持）和 $v_2$（假支持）——似乎是合理的。 [7] 采用了这一做法——最终得到的逻辑 $\mathrm{Pr}\text{-}\mathrm{L}_{\triangle}^{2}$ 已证明相对于带有 ±-概率的 BD 模型是完备的。

我们首先回顾带有 △ 的卢卡西维奇逻辑的语言和标准语义，以及其相容矛盾扩展 $\mathrm{L}^2_{\triangle}$。

定义 4。标准 $\mathrm{L}_{\triangle}$-代数是一个元组 $\langle [0,1], \sim_{\mathrm{L}}\ \triangle_{\mathrm{L}}\ \wedge_{\mathrm{L}}\ \vee_{\mathrm{L}}\ \to_{\mathrm{L}} \odot_{\mathrm{L}}\ \oplus_{\mathrm{L}}\ \ominus_{\mathrm{L}} \rangle$，其运算定义如下。

$$\sim_{\mathrm{L}} a := 1 - a \qquad\qquad \triangle_{\mathrm{L}} a := \begin{cases} 1 & \text{if } a = 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$a \wedge_{\text{下界}} b := \min(a,b)$ $a \vee_{\text{下界}} b := \max(a,b)$ $a \to_{\text{下界}} b := \min(1, 1-a+b)$ $a \odot_{\text{下界}} b := \max(0, a+b-1)$ $a \oplus_{\text{下界}} b := \min(1, a+b)$ $a \ominus_{\text{下界}} b := \max(0, a-b)$

定义 5（带有 $\triangle$ 的卢卡西维奇逻辑）。$\mathrm{L}_{\triangle}$ 的语言由以下语法给出

$\mathcal{L}_{\mathrm{L}} \ni \phi := p \in$命题集 $\mid \sim\phi \mid \triangle\phi \mid (\phi \wedge \phi) \mid (\phi \vee \phi) \mid (\phi \to \phi) \mid (\phi \odot \phi) \mid (\phi \oplus \phi) \mid (\phi \ominus \phi)$ 我们也将 $\phi \leftrightarrow \chi$ 作为 $(\phi \to \chi) \odot (\chi \to \phi)$ 的简写。

赋值是一个映射 $v$: 命题集 $\to [0,1]$，并按预期扩展到复合公式：$v(\phi \circ \chi) = v(\phi) \circ_{\mathrm{L}} v(\chi)$。$\phi$ 是 $\mathrm{L}_{\triangle}$-有效的，当且仅当对每个 $v$，$v(\phi) = 1$。

备注 2. 注意，$\triangle$、$\sim$ 和 $\to$ 可用于定义所有其他联结词，如下所示。

$$\phi \vee \chi := (\phi \to \chi) \to \chi \qquad \phi \wedge \chi := \sim(\sim\phi \vee \sim\chi) \qquad \phi \oplus \chi := \sim\phi \to \chi$$
$$\phi \odot \chi := \sim(\phi \to \sim\chi) \qquad \phi \ominus \chi := \phi \odot \sim\chi$$

定义 6（$\mathrm{L}^2_{\triangle}$）。语言由以下语法构成。

$$\mathcal{L}_{\mathrm{L}^2_{\triangle}} \ni \phi := p \in \mathtt{Prop} \mid \neg\phi \mid \sim\phi \mid \triangle\phi \mid (\phi \to \phi)$$

语义由两个赋值 $v_1$（真支持）和 $v_2$（假支持）$v_1, v_2$: 命题集 $\to [0,1]$ 给出，并按如下方式扩展。

$$v_1(\neg\phi) = v_2(\phi) \qquad v_2(\neg\phi) = v_1(\phi)$$
$$v_1(\sim\phi) = \sim_{\mathrm{L}} v_1(\phi) \qquad v_2(\sim\phi) = \sim_{\mathrm{L}} v_2(\phi)$$
$$v_1(\triangle\phi) = \triangle_{\mathrm{L}} v_1(\phi) \qquad v_2(\triangle\phi) = \sim_{\mathrm{L}} \triangle_{\mathrm{L}} \sim_{\mathrm{L}} v_2(\phi)$$
$$v_1(\phi \to \chi) = v_1(\phi) \to_{\mathrm{L}} v_1(\chi) \qquad v_2(\phi \to \chi) = v_2(\chi) \ominus_{\mathrm{L}} v_2(\phi)$$

我们称 $\phi$ 是 $\mathrm{L}^2_{\triangle}$-有效的，当且仅当对于每个 $v_1$ 和 $v_2$，都有 $v_1(\phi) = 1$ 且 $v_2(\phi) = 0$。

备注 3. 同样，其余联结词可以像备注2中那样定义。此外，在不会引起混淆时，我们写作 $v(\phi) = (x, y)$ 表示 $v_1(\phi) = x$ 和 $v_2(\phi) = y$。

现在我们可以介绍双层逻辑了。首先介绍来自 [7] 的 $\mathrm{Pr}\text{-}\mathrm{L}_{\triangle}{}^2$。

定义7（$\mathrm{Pr}\text{-}\mathrm{L}_{\triangle}{}^2$：语言与语义）。$\mathrm{Pr}\text{-}\mathrm{L}_{\triangle}{}^2$ 的语言由以下语法给出

$$\mathcal{L}_{\mathrm{Pr}\mathrm{L}^2_{\triangle}} \ni \alpha := \mathrm{Pr}\phi \mid \sim\alpha \mid \neg\alpha \mid \triangle\alpha \mid (\alpha \to \alpha) \qquad (\phi \in \mathcal{L}_{\mathrm{BD}})$$

一个 $\mathrm{Pr}\text{-}\mathrm{L}_{\triangle}{}^2$ 模型是一个元组 $\mathbb{M} = \langle \mathfrak{M}, \mu, e_1, e_2 \rangle$，其中 $\langle \mathfrak{M}, \mu \rangle$ 是一个具有 $\pm$-概率的 BD 模型，且 $e_1, e_2 : \mathcal{L}_{\mathrm{Pr}\text{-}\mathrm{L}^2_{\triangle}} \to [0,1]$，满足 $e_1(\mathrm{Pr}\phi) = \mu(|\phi|^+)$、$e_2(\mathrm{Pr}\phi) = \mu(|\phi|^-)$，而复合公式的值按照定义6计算。若在每个模型中都有 $e(\alpha) = (1, 0)$，则称 $\alpha$ 是 $\mathrm{Pr}\text{-}\mathrm{L}_{\triangle}{}^2$ 有效的。

定义8（4Pr-L$^{\triangle}$：语言与语义）。4Pr-L$^{\triangle}$ 的语言由以下语法构造：

$$\mathcal{L}_{\mathbf{4Pr}^{\mathrm{L}_{\triangle}}} \ni \alpha ::= \mathsf{Bl}\phi \mid \mathsf{Db}\phi \mid \mathsf{Cf}\phi \mid \mathsf{Uc}\phi \mid \sim\alpha \mid \triangle\alpha \mid (\alpha \to \alpha) \qquad (\phi \in \mathcal{L}_{\mathsf{BD}})$$

一个 4Pr L$^{\triangle}$ 模型是一个元组 $\mathbb{M} = \langle \mathfrak{M}, \mu_{\mathbf{4}}, e\rangle$，其中 $\langle \mathfrak{M}, \mu_{\mathbf{4}}\rangle$ 是具有 4- 概率的 BD 模型，使得 $e(\mathsf{Bl}\phi) = \mu_{\mathbf{4}}(|\phi|^{\mathsf{b}})$、$e(\mathsf{Db}\phi) = \mu_{\mathbf{4}}(|\phi|^{\mathsf{d}})$、$e(\mathsf{Cf}\phi) = \mu_{\mathbf{4}}(|\phi|^{\mathsf{c}})$、$e(\mathsf{Uc}\phi) = \mu_{\mathbf{4}}(|\phi|^{\mathsf{u}})$，复合公式的值则通过定义 5 计算。我们称 $\alpha$ 是 4Pr L$^{\triangle}$ 有效的，当且仅当在每个模型中 $e(\alpha) = 1$。一组公式 $\Gamma$ 蕴涵 $\alpha(\Gamma \models_{\mathbf{4Pr}\mathrm{L}_{\triangle}} \alpha)$，当且仅当不存在 $\mathbb{M}$，使得对于每个 $\gamma \in \Gamma$，$e(\gamma) = 1$，但 $e(\alpha) \neq 1$。

约定4 我们还将形如 X$\phi$ ($\phi \in \mathcal{L}_{\mathsf{BD}}$, X $\in${Pr,Bl,Db,Cf,Uc}) 的公式称为模态原子。我们将模态原子的值解释为主体对 $\phi$所具有的确定性程度。例如，$e(\mathsf{Pr}p) = (\frac{3}{4}, \frac{1}{2})$ 表示主体对 $p$的确定性为 $_{34}$，对 $\neg p$的确定性为 $_{12}$。同样，$e(\mathsf{Cf}q) = \frac{1}{3}$ 可理解为“主体对 $q$抱有程度为 $_{13}$ 的矛盾态”。

为了更清楚地说明语义，我们给出以下例子。

例1。考虑以下 BD 模型。

$$w_0 : p^{\pm}, q^{\pm} \qquad\qquad w_1 : p^{-}, q^{-}$$

并令 $\mu = \mu_{\mathbf{4}}$ 定义如下：$\mu(\{w_0\}) = \frac{1}{3}$, $\mu(\{w_1\}) = \frac{21}{3}$, $\mu(W) = 1$,$\mu(\varnothing) = 0$。容易验证，$\mu$ 满足定义2和定义3的条件。现在令 $e$ 为由 $\mu$ 诱导的 $\mathrm{L}^2_{\triangle}$ 赋值，$e_{\mathbf{4}}$ 为由 $\mu_{\mathbf{4}}$ 诱导的 $\mathrm{L}_{\triangle}$ 赋值。

考虑两个 BD 公式：$p \vee q$ 和 $p$。我们有 $e(\mathsf{Pr}(p \vee q)) = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$ 和 $e(\mathsf{Pr}p) = \left(\frac{2}{3}, 1\right)$。在 4Pr-L$^{\triangle}$ 中，我们有 $e_{\mathbf{4}}(\mathsf{Bl}(p \vee q)) = \frac{2}{3}$, $e_{\mathbf{4}}(\mathsf{Db}(p \vee q)) = \frac{1}{3}$, $e_{\mathbf{4}}$ $p$ - $e_{\mathbf{4}}$ $p \vee q$ $e_{\mathbf{4}}$ $p \vee q$ $= 0$ $e_{\mathbf{4}}$ $p$ $e$ $p = 0$ $e_{\mathbf{4}}$ $p$ - ( Cf ) $= \frac{2}{3}$, (Cf( )) (Uc( )) , (Bl ) (Uc ) , (Cf ) $= \frac{2}{3}$，以及 $e(\mathsf{Db}p) = \frac{1}{3}$。

本节后续将用到 Pr-L$^{2}_{\triangle}$ 的以下性质。

引理 1. 设 $\alpha \in \mathcal{L}_{\mathsf{Pr}\text{-}\mathrm{L}^2_{\triangle}}$。那么，$\alpha$ 是 Pr-L$^{2}_{\triangle}$ 有效的，当且仅当 $e_1(\alpha) = 1$ 在每个 Pr-L$^{2}_{\triangle}$ 模型中成立。

证明。设 $\mathbb{M} = \langle W, v^+, v^-, \mu, e_1, e_2\rangle$ 是一个 Pr-L$^{2}_{\triangle}$ 模型，使得 $e_2(\alpha) \neq 0$。我们构造一个模型 $\mathbb{M}^* = \langle W, (v^*)^+, (v^*)^-, \mu, e_1^*, e_2^*\rangle$，其中 $e_1^*(\alpha) \neq 1$。为此，我们按如下方式在 $W$ 上定义新的 BD 赋值 $(v^*)^+$ 和 $(v^*)^-$。

$$w \in v^+(p), w \notin v^-(p) \text{ then } w \in (v^*)^+(p), w \notin (v^*)^-(p)$$
$$w \in v^+(p), v^-(p) \text{ then } w \notin (v^*)^+(p), (v^*)^-(p)$$
$$w \notin v^+(p), v^-(p) \text{ then } w \in (v^*)^+(p), (v^*)^-(p)$$
$$w \notin v^+(p), w \in v^-(p) \text{ then } w \notin (v^*)^+(p), w \in (v^*)^-(p)$$

通过对 $\phi \in \mathcal{L}_{\mathsf{BD}}$ 进行归纳法，可以很容易地验证

$$|\phi|^+_{\mathbb{M}} = W \setminus |\phi|^-_{\mathbb{M}^*} \qquad\qquad |\phi|^-_{\mathbb{M}} = W \setminus |\phi|^+_{\mathbb{M}^*}$$

现在，由于我们不失一般性地可以假设 $\mu$ 是定义在 $W$ 上的（经典）概率测度（参见备注1），因此我们有

$$e^*(\mathsf{Pr}\phi) = (1 - \mu(|\phi|^-), 1 - \mu(|\phi|^+)) = (1 - e_2(\mathsf{Pr}\phi), 1 - e_1(\mathsf{Pr}\phi))$$

注意，如果 $e(\alpha) = (x, y)$，那么 $e(\neg\sim\alpha) = (1-y, 1-x)$。此外，很容易验证以下公式是有效的。

$$\neg\sim\neg\alpha \leftrightarrow \neg\neg\sim\alpha \qquad \neg\sim\sim\alpha \leftrightarrow \sim\neg\sim\alpha$$
$$\neg\sim\triangle\alpha \leftrightarrow \triangle\neg\sim\alpha \qquad \neg\sim(\alpha\to\alpha') \leftrightarrow \neg\sim\alpha\to\neg\sim\alpha'$$

因此，对于每个 $\alpha \in \mathcal{L}_{\mathsf{Pr}\text{-}\mathrm{L}^2_\triangle}$，$e^*(\alpha) = (1-e_2(\alpha)\ 1-e_1(\alpha))$。结论得证。

乍看之下，$4\mathbf{Pr}\text{-}\mathrm{L}^\triangle$ 对 BD 模型的刻画比 $\mathbf{Pr}\text{-}\mathrm{L}^{2}_{\triangle}$ 更细致，因为它可以评估给定 $\phi \in \mathcal{L}_{\mathsf{BD}}$ 的每个扩展，而 $\mathbf{Pr}\text{-}\mathrm{L}^{2}_{\triangle}$ 总是将 $|\phi|^+$ 和 $|\phi|^-$ 一并考虑。在本节余下部分，我们将证明，这两种逻辑实际上具有相同的表达力。

从定义 7 可以看出，$\neg\mathsf{Pr}\phi \leftrightarrow \mathsf{Pr}\neg\phi$。此外，$\mathrm{L}^2$ 具有$\neg$ 否定范式，并且是 L [8,5] 的保守扩张。因此，可以将 $\mathrm{L}_{\mathrm{L}^2_\triangle}$ 中出现的所有 $\neg$ 都移至模态原子。我们将使用这一

用于确立 $\mathbf{Pr}\text{-}\mathrm{L}^{2}_{\triangle}$ 与 $4\mathbf{Pr}\text{-}\mathrm{L}^\triangle$ 相互嵌入这一事实。

定义9。设 $\alpha \in \mathcal{L}_{\mathsf{Pr}\text{-}\mathrm{L}^2_\triangle}$。$\alpha^\neg$ 由 $\alpha$ 依次应用以下变换得到。

$$\neg\mathsf{Pr}\phi \rightsquigarrow \mathsf{Pr}\neg\phi \qquad \neg\neg\alpha \rightsquigarrow \alpha \qquad \neg\sim\alpha \rightsquigarrow \sim\neg\alpha$$
$$\neg(\alpha\to\alpha') \rightsquigarrow \sim(\neg\alpha'\to\neg\alpha) \qquad \neg\triangle\alpha \rightsquigarrow \sim\triangle\sim\neg\alpha$$

容易验证，在每个 $\mathbf{Pr}\text{-}\mathrm{L}^{2}_{\triangle}$ 模型中，$e(\alpha) = e(\alpha^\neg)$。

定义10。设 $\alpha \in \mathcal{L}_{\mathsf{Pr}\text{-}\mathrm{L}^2_\triangle}$ 不含 $\neg$，我们如下定义 $\alpha^{\mathbf{4}} \in \mathcal{L}_{\mathbf{4Pr}\text{-}\mathrm{L}^\triangle}$。

$$\begin{aligned}(\mathsf{Pr}\phi)^{\mathbf{4}} &= \mathsf{Bl}\phi \oplus \mathsf{Cf}\phi\\ (\heartsuit\alpha)^{\mathbf{4}} &= \heartsuit\alpha^{\mathbf{4}} && (\heartsuit \in \{\triangle, \sim\})\\ (\alpha\to\alpha')^{\mathbf{4}} &= \alpha^{\mathbf{4}} \to \alpha'^{\mathbf{4}}\end{aligned}$$

设 $\beta \in \mathcal{L}_{\mathbf{4Pr}\text{-}\mathrm{L}^\triangle}$。我们如下定义 $\beta^\pm$。

$$\begin{aligned}(\mathsf{Bl}\phi)^\pm &= \mathsf{Pr}\phi \ominus \mathsf{Pr}(\phi\wedge\neg\phi)\\ (\mathsf{Cf}\phi)^\pm &= \mathsf{Pr}(\phi\wedge\neg\phi)\\ (\mathsf{Uc}\phi)^\pm &= \sim\mathsf{Pr}(\phi\vee\neg\phi)\\ (\mathsf{Db}\phi)^\pm &= \mathsf{Pr}\neg\phi \ominus \mathsf{Pr}(\phi\wedge\neg\phi)\\ (\heartsuit\beta)^\pm &= \heartsuit\beta^\pm && (\heartsuit \in \{\triangle, \sim\})\\ (\beta\to\beta')^\pm &= \beta^\pm \to \beta'^\pm\end{aligned}$$

定理 1。$\alpha \in \mathcal{L}_{\mathsf{Pr}\text{-}\mathrm{L}^2_\triangle}$ 是 $\mathbf{Pr}\text{-}\mathrm{L}^{2}_{\triangle}$ 有效的，当且仅当 $(\alpha^\neg)^{\mathbf{4}}$ 是 $4\mathbf{Pr}\text{-}\mathrm{L}^\triangle$ 有效的。

证明。无妨设 $\mathbb{M} = \langle W, v^+, v^-, \mu, e_1, e_2\rangle$ 是一个带有 $\pm$-概率的 BD 模型，其中 $\mu$ 是经典概率测度，并且 $e(\alpha) = (x, y)$。我们证明，在具有四值概率 $\mu$ 的 BD 模型 $\mathbb{M}_{\mathbf{4}} = \langle W, v^+, v^-, \mu, e_1\rangle$ 中，$e_1((\alpha^\neg)^{\mathbf{4}}) = x$。这足以证明该结果。事实上，根据引理 1，只需验证对每个 $e_1$，$e_1(\alpha) = 1$，即可确立 $\alpha \in \mathcal{L}_{\mathsf{Pr}\text{-}\mathrm{L}^2_\triangle}$ 的有效性。根据引理 1，这足以证明该结果，因为要确立 $\alpha \in \mathcal{L}_{\mathsf{Pr}\text{-}\mathrm{L}^2_\triangle}$ 的有效性，只需验证对每个 $e_1$，$e_1(\alpha) = 1$。

我们对 $\alpha^{\neg}$ 作归纳法（回想一下， $\alpha \leftrightarrow \alpha^{\neg}$ 是 $\mathrm{Pr}\text{-}\mathrm{L}_{\triangle}^{2}$ 有效的）。若 $\alpha = \mathrm{Pr}\phi$，则 $e_1(\mathrm{Pr}\phi) = \mu(|\phi|^{+}) = \mu(|\phi|^{\mathsf{b}} \cup |\phi|^{\mathsf{c}})$。但是 $|\phi|^{\mathsf{b}}$ 和 $|\phi|^{\mathsf{c}}$ 不相交，因此$\mu(|\phi|^{\mathsf{b}} \cup |\phi|^{\mathsf{c}}) = \mu(|\phi|^{\mathsf{b}}) + \mu(|\phi|^{\mathsf{c}})$；又因为 $\mu(|\phi|^{\mathsf{b}}) + \mu(|\phi|^{\mathsf{c}}) \leq 1$，所以我们有$e_1(\mathrm{Bl}\phi \oplus \mathrm{Cf}\phi) = \mu(|\phi|^{\mathsf{b}}) + \mu(|\phi|^{\mathsf{c}}) = e_1(\mathrm{Pr}\phi)$，如所需。

归纳步骤很直接，因为 L 中真支持的语义条件$^{2}_{\triangle}$ 与 L 的语义$_{\triangle}$ 一致（参见定义6 和 5）。

定理 2. $\beta \in \mathcal{L}_{\mathbf{4Pr}\text{-}\mathrm{L}\triangle}$ 是 $\mathcal{L}_{\mathbf{4Pr}\text{-}\mathrm{L}\triangle}$ 有效，当且仅当 $\beta^{\pm}$ 是 $\mathrm{Pr}\text{-}\mathrm{L}_{\triangle}^{2}$ 有效。

证明。不失一般性，假设 $\mathbb{M} = \langle W, v^{+}, v^{-}, \mu_{\mathbf{4}}, e\rangle$ 是一个带有 4-概率的 BD 模型，其中 $\mu_{\mathbf{4}}$ 是经典概率测度，且 $e(\beta) = x$。我们定义一个带有 $\pm$-概率的 BD 模型 $\mathbb{M}^{\pm} = \langle W, v^{+}, v^{-}, \mu_{\mathbf{4}}, e_1, e_2\rangle$，并证明 $e_1(\beta^{\pm}) = x$。同样，根据引理 1，这对我们来说已足够。

我们对 $\beta$ 进行归纳。若 $\beta = \mathrm{Bl}\phi$，则 $e(\mathrm{Bl}\phi) = \mu_{\mathbf{4}}(|\phi|^{\mathsf{b}})$。现在注意到，由于 $|\phi|^{\mathsf{b}}$ 和 $|\phi|^{\mathsf{c}}$ 不相交，$\mu_{\mathbf{4}}(|\phi|^{+}) = \mu(|\phi|^{\mathsf{b}} \cup |\phi|^{\mathsf{c}}) = \mu_{\mathbf{4}}(|\phi|^{\mathsf{b}}) + \mu_{\mathbf{4}}(|\phi|^{\mathsf{c}})$。但是，$\mu_{\mathbf{4}}(|\phi|^{+}) = e_1(\mathrm{Pr}\phi)$，且 $\mu_{\mathbf{4}}(|\phi|^{\mathsf{c}}) = \mu_{\mathbf{4}}(|\phi \wedge \neg\phi|^{+})$，因为 $|\phi \wedge \neg\phi|^{+} = |\phi|^{\mathsf{c}}$。因此，$\mu_{\mathbf{4}}(|\phi|^{\mathsf{b}}) = e_1(\mathrm{Pr}\phi \ominus \mathrm{Pr}(\phi \wedge \neg\phi))$，如所需。

$\mathrm{Cf}\phi$、$\mathrm{Uc}\phi$ 和 $\mathrm{Db}\phi$ 的其他基例也可以用类似的方法处理。归纳步骤很直接，因为 $\mathrm{L}^{2}_{\triangle}$中的真支持与 $\mathrm{L}_{\triangle}$中的语义条件一致。

## 4 4Pr$_{\text{-L}\triangle}$的希尔伯特式公理化

接下来我们将对 4Pr$_{\text{-L}^{\triangle}}$ 进行公理化。由于其外层扩展了 $\mathrm{L}_{\triangle}$，我们需要在其中编码关于 $\mu_{\mathbf{4}}$ 的条件。此外，由于 L（因而 $\mathrm{L}_{\triangle}$）并不紧致 [22, 备注 3.2。14], ，我们的公理化只能是弱完备的（即相对于有限理论完备）。

该公理化将包含两类公理：一类用于公理化 $\mathrm{L}_{\triangle}$ ，另一类是用于编码定义 3 中条件的模态公理。为简洁起见，我们将把 $\mathrm{L}_{\triangle}$ 的公理化压缩为一条公理，从而可以不经证明直接使用 $\mathrm{L}_{\triangle}$ 定理[4] 。

定义11（$\mathcal{H}$4Pr L$^{\triangle}$ —用于 4Pr L$^{\triangle}$ 的希尔伯特式演算）。演算$\mathcal{H}$4Pr L$^{\triangle}$ 由以下公理和规则组成。$\mathrm{L}_{\triangle}$：$\mathrm{L}_{\triangle}$ 在$\mathcal{L}_{\mathbf{4Pr}\text{-}\mathrm{L}\triangle}$中实例化的有效公式。equiv：$\mathrm{X}\phi \leftrightarrow \mathrm{X}\chi$，对于每个 $\phi$， $\chi \in \mathcal{L}_{\mathsf{BD}}$，使得 $\phi \dashv\vdash \chi$ 是 BD有效，且 $\mathrm{X} \in \{\mathrm{Bl}、\mathrm{Db}、\mathrm{Cf}、\mathrm{Uc}\}$。矛盾规则： $\sim\mathrm{Bl}(\phi \wedge \neg\phi)$；$\mathrm{Cf}\phi \leftrightarrow \mathrm{Cf}(\phi \wedge \neg\phi)$。否定规则：$\mathrm{Bl}\neg\phi \leftrightarrow \mathrm{Db}\phi$；$\mathrm{Cf}\neg\phi \leftrightarrow \mathrm{Cf}\phi$。单调规则：$(\mathrm{Bl}\phi \oplus \mathrm{Cf}\phi) \rightarrow (\mathrm{Bl}\chi \oplus \mathrm{Cf}\chi)$，对于每个 $\phi$， $\chi \in \mathcal{L}_{\mathsf{BD}}$，使得 $\phi \vdash \chi$ 是 BD有效。部分规则1：$\mathrm{Bl}\phi \oplus \mathrm{Db}\phi \oplus \mathrm{Cf}\phi \oplus \mathrm{Uc}\phi$。部分规则2：$((\mathrm{X}_1\phi \oplus \mathrm{X}_2\phi \oplus \mathrm{X}_3\phi \oplus \mathrm{X}_4\phi) \ominus \mathrm{X}_4\phi) \leftrightarrow (\mathrm{X}_1\phi \oplus \mathrm{X}_2\phi \oplus \mathrm{X}_3\phi)$，其中 $\mathrm{X}_i \neq \mathrm{X}j$，$\mathrm{X}_i \in \{\mathrm{Bl}、\mathrm{Db}、\mathrm{Cf}、\mathrm{Uc}\}$。

[4] 例如，[26], 和 [1]中给出了L的希尔伯特式演算以及 $\triangle$ 的公理。 [7]中也简要介绍了$\mathrm{L}_{\triangle}$ 的希尔伯特式演算。

例如：$(\mathsf{Bl}(\phi\vee\chi)\oplus\mathsf{Cf}(\phi\vee\chi)) \leftrightarrow ((\mathsf{Bl}\phi\oplus\mathsf{Cf}\phi)\ominus(\mathsf{Bl}(\phi\wedge\chi)\oplus\mathsf{Cf}(\phi\wedge\chi))\oplus(\mathsf{Bl}\chi\oplus\mathsf{Cf}\chi))$。

**MP:** $\dfrac{\alpha \quad \alpha\to\alpha'}{\alpha'}$.

$\triangle$**nec:** $\dfrac{\mathcal{H}\mathbf{4Pr}^{\mathrm{L}_\triangle}\vdash\alpha}{\mathcal{H}\mathbf{4Pr}^{\mathrm{L}_\triangle}\vdash\triangle\alpha}$.

上述公理只是对定义 3 中各项性质的简单翻译。我们将 部分 拆分为两个公理，以确保 $\mathsf{Bl}\phi$、$\mathsf{Db}\phi$、$\mathsf{Cf}\phi$和$\mathsf{Uc}\phi$之和恰好为 1。

定理 3。设 $\Xi\subseteq\mathcal{L}_{\mathbf{4Pr}^{\text{-}\mathrm{L}\triangle}}$ 是有限的。那么 $\Xi\models_{\mathbf{4Pr}^{\text{-}\mathrm{L}_\triangle}}\alpha$ 当且仅当 $\Xi\vdash_{\mathcal{H}\mathbf{4Pr}^{\text{-}\mathrm{L}_\triangle}}\alpha$。

证明。通过常规检查公理的有效性即可确立可靠性。因此，我们证明完备性。我们采用逆否法进行推理。假设 $\Xi\nvdash_{\mathcal{H}\mathbf{4Pr}^{\text{-}\mathrm{L}_\triangle}}\alpha$。现在注意到，$\mathcal{H}\mathbf{4Pr}^{\text{-}\mathrm{L}^\triangle}$ 证明实际上是带有额外概率公理的 $\mathrm{L}_\triangle$ 证明。令 $\Xi^*$ 表示由 $\mathrm{Prop}[\Xi\cup\{\alpha\}]$ 中构造出的所有两两不等价的 $\mathcal{L}_{\mathsf{BD}}$ 公式上的概率公理扩展所得的 $\Xi$。显然，$\Xi^*\nvdash_{\mathcal{H}\mathbf{4Pr}^{\text{-}\mathrm{L}_\triangle}}\alpha$ 也成立。此外，$\Xi^*$ 也是有限的，因为 BD 是表列式的（因此，在有限变量集上只有有限多个两两不等价的$\mathcal{L}_{\mathsf{BD}}$ 公式）。现在，根据 $\mathrm{L}_\triangle$ 的弱完备性，存在一个 $\mathrm{L}_\triangle$ 赋值 $e$，使得 $e[\Xi^*]=1$ 且 $e(\alpha)\neq 1$。

接下来要构造一个 $\mathbf{4Pr}^{\text{-}\mathrm{L}^\triangle}$ 模型 $\mathbb{M}$，使其在 $e$下证伪 $\Xi^*\models_{\mathbf{4Pr}^{\text{-}\mathrm{L}_\triangle}}\alpha$。我们按以下步骤进行。首先，令 $W=2^{\mathsf{Lit}[\Xi^*\cup\{\alpha\}]}$，并对每个 $w\in W$ 定义$w\in v^+(p)$ 当且仅当 $p\in w$，且 $w\in v^-(p)$ 当且仅当 $\neg p\in w$。我们按通常方式将赋值扩展到 $\phi\in\mathcal{L}_{\mathsf{BD}}$。然后，对于 $\mathsf{X}\phi\in\mathsf{Sf}[\Xi^*\cup\{\alpha\}]$，我们根据模态 X 令 $\mu_{\mathbf{4}}(|\phi|^{\mathsf{x}})=e(\mathsf{X}\phi)$。

现在请注意，从 $2^W$ 到 $[0,1]$ 的任何映射，只要扩展了 $\mu_{\mathbf{4}}$，事实上都是一个 4-概率。确实，定义 3 中的所有要求都得到满足，因为 $\Xi^*$包含概率公理的所有必要实例，以及 $e[\Xi^*]=1$。

注 4. 请注意，我们可以在经典概率测度证明定理3 时使用 [25, 定理 5]。

## 5 可判定性和复杂度

在完备性证明中，我们将 $\mathcal{H}\mathbf{4Pr}^{\text{-}\mathrm{L}^\triangle}$ 证明归约为 $\mathrm{L}_\triangle$ 证明。我们知道，$\mathrm{L}_\triangle$ 的有效性和有限蕴涵是 coNP 完全的（因为 L 是 coNP 完全的，且 $\triangle$ 具有真值函数语义）。

同样，$\mathbf{Pr}^{\text{-}\mathrm{L}_\triangle^{\,2}}$ 证明也可归约为 $\mathrm{L}^2$ 证明（参见 [7, 定理 4.24]），其依据是公理 $\mathrm{Pr}\phi\to\mathrm{Pr}\chi$（对于 $\phi\models_{\mathsf{BD}}\chi$）、$\neg\mathrm{Pr}\phi\leftrightarrow\mathrm{Pr}\neg\phi$ 和 $\mathrm{Pr}(\phi\vee\chi)\leftrightarrow(\mathrm{Pr}\phi\ominus\mathrm{Pr}(\phi\wedge\chi))\oplus\mathrm{Pr}\chi$ 的代换实例。因此，很明显，$\mathbf{4Pr}^{\text{-}\mathrm{L}^\triangle}$ 和 $\mathbf{Pr}^{\text{-}\mathrm{L}_\triangle^{\,2}}$ 的有效性和可满足性分别是 coNP 困难和 NP 困难。

在本节中，我们为 $\mathbf{Pr}^{\text{-}\mathrm{L}_\triangle^{\,2}}$ 和 $\mathbf{4Pr}^{\text{-}\mathrm{L}_\triangle}$提供一个简单的判定过程，并证明它们的可满足性和有效性分别是 NP 完全和 coNP 完全。具体而言，我们对 [5] 中定义的 $\mathrm{L}^2$ 的约束表列进行调整，并通过加入 $\triangle$的规则对其加以扩展。随后，我们调整 [23]中的 FP( L) 的 NP 完全性证明，以建立我们的结果。

定义 12（$\mathrm{L}^2_\triangle$ — $\mathcal{T}\left(\text{-}\mathrm{L}^2_\triangle\right)$的约束表列）。分支包含形式为 $\phi \leqslant_1 i$、 $\phi \leqslant_2 i$、 $\phi \geqslant_1 i$ 或 $\phi \geqslant_2 i$ 的带标签公式，以及形式为 $i \leq j$、带有 $i$、 $j \in [0,1]$ 的数值约束。

每个分支都可以通过应用以下规则之一来扩展。

$$\neg\leqslant_1 \frac{\neg\phi \leqslant_1 i}{\phi \leqslant_2 i} \quad \neg\leqslant_2 \frac{\neg\phi \leqslant_2 i}{\phi \leqslant_1 i} \quad \neg\geqslant_1 \frac{\neg\phi \geqslant_1 i}{\phi \geqslant_2 i} \quad \neg\geqslant_2 \frac{\neg\phi \geqslant_2 i}{\phi \geqslant_1 i}$$

$$\sim\leqslant_1 \frac{\sim\phi \leqslant_1 i}{\phi \geqslant_1 1-i} \quad \sim\leqslant_2 \frac{\sim\phi \leqslant_2 i}{\phi \geqslant_2 1-i} \quad \sim\geqslant_1 \frac{\sim\phi \geqslant_1 i}{\phi \leqslant_1 1-i} \quad \sim\geqslant_2 \frac{\sim\phi \geqslant_2 i}{\phi \leqslant_2 1-i}$$

$$\triangle\leqslant_1 \frac{\triangle\phi \geqslant_1 i}{i \leq 0 \,\middle|\, \begin{matrix}\phi \geqslant_1 j \\ j \geqslant 1\end{matrix}} \quad \triangle\geqslant_1 \frac{\triangle\phi \leqslant_1 i}{i \geq 1 \,\middle|\, \begin{matrix}\phi \leqslant_1 j \\ j < 1\end{matrix}} \quad \triangle\leqslant_2 \frac{\triangle\phi \leqslant_2 i}{i \geq 1 \,\middle|\, \begin{matrix}\phi \leqslant j \\ j \leq 0\end{matrix}} \quad \triangle\geqslant_2 \frac{\triangle\phi \geqslant_2 i}{i \leq 0 \,\middle|\, \begin{matrix}\phi \geqslant j \\ j > 0\end{matrix}}$$

$$\rightarrow\leqslant_1 \frac{\phi_1 \rightarrow \phi_2 \leqslant_1 i}{i \geq 1 \,\middle|\, \begin{matrix}\phi_1 \geqslant_1 1-i+j \\ \phi_2 \leqslant_1 j \\ j \leq i\end{matrix}} \quad \rightarrow\leqslant_2 \frac{\phi_1 \rightarrow \phi_2 \leqslant_2 i}{\begin{matrix}\phi_1 \geqslant_2 j \\ \phi_2 \leqslant_2 i+j\end{matrix}} \quad \rightarrow\geqslant_1 \frac{\phi_1 \rightarrow \phi_2 \geqslant_1 i}{\begin{matrix}\phi_1 \leqslant_1 1-i+j \\ \phi_2 \geqslant_1 j\end{matrix}} \quad \rightarrow\geqslant_2 \frac{\phi_1 \rightarrow \phi_2 \geqslant_2 i}{i \leq 0 \,\middle|\, \begin{matrix}\phi_1 \leqslant_2 j \\ \phi_2 \geqslant_2 i+j \\ j \leq 1-i\end{matrix}}$$

设 $i$'s 属于 $[0,1]$， $x$'s 为取值范围在实数区间 $[0,1]$ 内的变量。我们将从带标签公式到线性不等式的翻译 $\tau$ 定义如下：

$\tau(\phi\leqslant_1 i) = x^L_\phi \leq i$; $\tau(\phi\geqslant_1 i) = x^L_\phi \geq i$; $\tau(\phi\leqslant_2 i) = x^R_\phi \leq i$; $\tau(\phi\geqslant_2 i) = x^R_\phi \geq i$

设 $\bullet \in \{\leqslant_1, \geqslant_1\}$ 和 $\circ \in \{\leqslant_2, \geqslant_2\}$。一条语义树分支

$$\mathcal{B} = \{\phi_1 \circ i_1, \ldots, \phi_m \circ i_m, \phi'_1 \bullet j_1, \ldots, \phi'_n \bullet j_n, k_1 \leq l_1, \ldots, k_q \leq l_q\}$$

若不等式组

$$\tau(\phi_1 \circ i_1) \ldots, \tau(\phi_m \circ i_m)\ \tau(\phi'_1 \bullet j_1) \ldots, \tau(\phi'_n \bullet j_n)\ k_1 \leq l_1, \ldots, k_q \leq l_q$$

没有解。否则， $\mathcal{B}$ 是开放的。如果一个语义树的所有分支都是闭合的，则该语义树是闭合的。若以 $\{\phi \leqslant_1 c, c < 1\}$ 开始的语义树是闭合的，则 $\phi$ 有一个 $\mathcal{T}\left(\text{-}\mathrm{L}^2_\triangle\right)$ 证明。

注意到 $\rightarrow$ 和 $\sim$ 的规则与 $\leqslant_1$ 的约束语义树中给出的 L 的对应规则相同，如 [18,19,21]所述。因此，该演算既可用于 4Pr-L$^\triangle$，也可用于 Pr-L$^2_\triangle$。还需注意，由于引理 1，我们只需为 $\mathcal{L}_{\text{Pr-L}^2_\triangle}$ 公式构造一棵语义树。

下一个命题可用与 [5, 定理 1] 相同的方法证明。

定理 4（语义树的完备性）。
1. $\phi$ 是 $\mathrm{L}_\triangle$ 有效的，当且仅当它有一个 $\mathcal{T}\left(\text{-}\mathrm{L}^2_\triangle\right)$ 证明。2. $\phi$ 是 $\mathrm{L}^2_\triangle$ 有效的，当且仅当它有一个 $\mathcal{T}\left(\text{-}\mathrm{L}^2_\triangle\right)$ 证明。

定理 5。Pr-L$^2_\triangle$ 和 4Pr-L$^\triangle$ 的可满足性是 NP 完全的。

证明。回顾一下，Pr-L$^2_\triangle$ 和 4Pr-L$^\triangle$ 可以相互线性嵌入（定理 1 和 2）。因此，只需为其中一种逻辑提供一个非确定性多项式算法。我们选择 Pr-L$^2_\triangle$，因为它只有一个模态。

设 $\alpha \in \mathcal{L}_{\text{Pr-L}^2_\triangle}$。不失一般性，我们可以假设 $\neg$ 仅出现在模态原子中，且每个模态原子 $\mathrm{Pr}\phi_i$, $\phi_i$ 都处于否定范式。定义 $\alpha^*$ 为将 $\alpha$ 中出现的每个 $\neg p$ 代换为一个新变量 $p^*$后所得的结果。容易验证， $\alpha$ 可满足，当且仅当 $\alpha^*$ 可满足。我们为 $\alpha^*$构造一个满足赋值。

首先，我们将每个模态原子 $\mathrm{Pr}\phi_i$ 替换为一个新变量 $q_{\phi_i}$。将新公式记为 $(\alpha^*)^-$。显然，$(\alpha^*)^-$ ($|(\alpha^*)^-|$) 的大小仅比 $|\alpha|$线性地大。我们从 $\{(\alpha^*)^- \geqslant_1 c, c \geq 1\}$开始构造一棵语义树。这给出了一个混合整数规划实例，它等价于 $(\alpha^*)^-$的 L-可满足性（更多细节见 [18,19,20] ）。现在，将 $(\alpha^*)^-$中 $q_{\phi_i}$' 的取值记为 $z_i$。我们的混合整数规划实例还包含其他变量 $x_j$，其取值范围为 $[0,1]$，以及由条目 $k \geq 1$ 和 $k' \leq 0$得到的等式 $k = 1$ 和 $k' = 0$。显然，混合整数规划中的（不）等式数量 $l_1$ 和变量数量 $l_2$ 均相对于 $|(\alpha^*)^-|$呈线性关系。将此实例记为 MIP(1)。

我们需要证明，$z_i$作为 $\phi_i$的概率是相干的（此处，$i \leq n$为$(\alpha^*)^-$的模态原子编索引）。我们引入 $2^n$ 个变量 $u_v$，它们由$n$上的字母词编索引，并表示 $\phi_i$中的变量在 $v^+$下是否为真。当 $\phi_i$ 在 $v^+$ 下为真时，令$a_{i,\ v} = 1$；否则令$a_{i,\ v} = 0$。现在，向 MIP(1) 添加新的等式，记为 MIP(2 exp)，即 $\sum_v u_v = 1$和 $\sum_v (a_{i,v} \cdot u_v) = z_i$。显然，新的 MIP（MIP(1) $\cup$ MIP(2 exp)）有非负解，当且仅当 $\alpha$ 可满足。此外，尽管 MIP(1) $\cup$ MIP(2 exp) 中有$l_2 + 2^n + n$ 个变量，但其（不）等式不超过 $l_1 + n + 1$个。因此，根据[16, 引理 2，5], 它有一个至多含 $l_1 + n + 1$ 个非零项的非负解。我们猜测一个列表 $L$，其中至多包含 $l_1 + n + 1$ 个词$v$（其大小为 $n \cdot (l_1 + n + 1)$）。现在，我们可以计算 $i \leq n$下$a_{i,\ v}$的值以及 $v \in L$，并得到一个新的 MIP，记为 MIP(2poly)：$\sum_{v \in L} u_v = 1$和 $\sum_{v \in L} (a_{i,v} \cdot u_v) = z_i$。显然，MIP(1)$\cup$MIP(2poly)相对于 $|\alpha|$ 而言规模为多项式级，并且有非负解，当且仅当 $\alpha$ 可满足。因此，我们可以按要求在非确定性多项式时间内求解它。

## 6 结论

我们提出了逻辑 4Pr$^{\mathrm{L}^\triangle}$，它形式化了 [25]提出的四值概率，采用带有 $\triangle$ 的卢卡西维奇逻辑的双层扩展。我们建立了 4Pr$^{\mathrm{L}^\triangle}$ 与 Pr$^{\mathrm{L}^2_\triangle}$ 之间的保真嵌入，后者是 $\pm$ 概率的逻辑 [7]。此外，我们构造了 4Pr$^{\mathrm{L}^\triangle}$ 的可靠且完备的公理化，并证明了它可通过针对 $\mathrm{L}_\triangle$ 的约束表列方法判定。

还有一些问题有待解决。在 [7]，中，我们提出了用于对信念和似真函数进行推理的双层逻辑。这些逻辑采用对信念和似真的“二值”解释（即，$\phi$ 有两个信念赋值：一个针对 $\phi$，另一个针对 $\neg\phi$）。对“ 四值”信念和似真函数进行公理化，并通过双层逻辑形式化基于它们的推理，将会很有启发性。

此外，我们一直在考察内层不含蕴涵的逻辑。然而，假设主体能够为条件语句赋予确定性，是合理的。此外，BD 也有带真值函数蕴涵的扩展（例如参见 [27] ）。接下来很自然的一步，是为定义在带蕴涵逻辑之上的次协调概率建立公理化体系。

[5]请注意，$\neg$ 不出现在 $(\alpha^*)^-$ 中，因此我们只关心 $e_1$ 和 $v^+$。此外，虽然 $n$ 是 $\phi_i$ 的数量，但我们可以添加多余的模态原子或变量，使其也等于变量的数量。

## 参考文献

1. Baaz, M.: 带有 0-1 投影和相对化的无限值 G¨odel 逻辑。载于：G¨odel’96：数学、计算机科学与物理学的逻辑基础——Kurt G¨odel 的遗产，布尔诺，捷克共和国，1996 年 8 月，会议论文集，第 23–33 页。符号逻辑协会（1996年） 2. Baldi, P., Cintula, P., Noguera, C.: 不确定性的经典与模糊双层模态逻辑：翻译与证明理论。《计算智能国际期刊》13，988–1001（2020年）。https://doi.org/10 001 3 2991 200703 . /ijcis.d. . . Belnap, N.: 一种有用的四值逻辑。载于：Dunn, J.M., Epstein, G.（编）《多值逻辑的现代应用》，第 5–37 页。施普林格·荷兰，多德雷赫特（1977年）。https://doi.org/10 7 2 4 1007 978 94 010 1161 . / - - - - . Belnap, N.: 计算机应如何思考。载于：Omori, H., Wansing, H.（编）《贝尔纳普–邓恩逻辑新论》，Synthese文库（认识论、逻辑学、方法论与科学哲学研究），第 418 卷。施普林格，查姆（2019年） 5. B´ılkov´a, M., Frittella, S., Kozhemiachenko, D.: 二维模糊逻辑的约束表列。载于：Das, A., Negri, S.（编）《基于解析表列及相关方法的自动推理》，《计算机科学讲义》第 12842 卷，第 20–37 页。施普林格国际出版（2021年） 6. B´ılkov´a, M., Frittella, S., Kozhemiachenko, D., Majer, O.: 双层框架中的定性推理。《国际近似推理杂志》154，84–108（2023年3月） 7. B´ılkov´a, M., Frittella, S., Kozhemiachenko, D., Majer, O., Nazari, S.: 基于 Belnap–Dunn 逻辑的信念函数推理。https://arxiv.org/abs/2203.01060（2022年） 8. B´ılkov´a, M., Frittella, S., Majer, O., Nazari, S.: 基于不一致信息的信念。载于：Martins, M., Sedl´ar, I.（编）《动态逻辑：新趋势与应用》，第 68–86 页。施普林格国际出版，查姆（2020年） 9. Bueno-Soler, J., Carnielli, W.: 次协调概率：一致性、矛盾与贝叶斯定理。《熵》（巴塞尔）18(9)，325（2016年9月） 10. Delgrande, J., Renne, B.: 定性概率逻辑。载于：第二十四届国际人工智能联合会议（2015年） 11. Delgrande, J., Renne, B., Sack, J.: 定性概率逻辑。《人工智能》275，457–486（2019年10月） 12. Dubois, D.: 将无知和矛盾视为真值。《IGPL 逻辑杂志》16(2)，195–216（2008年） 13. Dunn, J.M.: 一级蕴涵与“耦合树”的直观语义。《哲学研究》29(3)，149–168（1976年） 14. Dunn, J.: 矛盾信息：好事太多。《哲学逻辑杂志》39，425–452（2010年） 15. Fagin, R., Halpern, J.: 不确定性、信念与概率。《计算智能》7(3)，160–173（1991年8月） 16. Fagin, R., Halpern, J., Megiddo, N.: 概率推理逻辑。《信息与计算》87(1–2)，78–128（1990年） 17. G¨ardenfors, P.: 作为内涵逻辑的定性概率。《哲学逻辑杂志》，第 171–185 页（1975年） 18. H¨ahnle, R.: 一种从演绎到整数规划的新翻译。载于：人工智能与符号数学计算国际会议，第 262–275 页。施普林格（1992年）

19. H¨ahnle，R.：多值逻辑与混合整数规划。《数学年刊与人工智能》12(3-4)，231–263（1994年）20. H¨ahnle，R.：多值逻辑的语义树方法。载于：D'Agostino，M.、Gabbay，D.、H¨ahnle，R.、Posegga，J.（编），《语义树方法手册》，第529–580页。Springer-Science+Business Media，B.V.（1999年）21. H¨ahnle，R.：高级多值逻辑。载于：Gabbay，D.、Guenthner，F.（编），《哲学逻辑手册》，第2卷，第297–395页。施普林格·荷兰，多德雷赫特（ 2001 10 1007 978 94 017 0452 6_5 ）。
22 ´
https://doi.org/ . / - - - - . Hajek，P.：《模糊逻辑元数学》，逻辑趋势，第4卷。施普林格，多德雷赫特（1998年）23. H´ajek，P.、Tulipani，S.：模糊概率逻辑的复杂度。《基础信息学》45(3)，207–213（2001年）24. Ili´c-Stepi´c，A.、Kneˇzevi´c，M.、Ognjanovi´c，Z.：直觉主义命题概率逻辑。《数学逻辑季刊》68(4)，479–495（2022年11月）25. Klein，D.、Majer，O.、Rafiee Rad，S.：具有缺口和冗余的概率。《哲学逻辑杂志》50(5)，1107–1141（2021年10月）。
https://doi.org/10.1007/s10992-021-09592-x 26. Metcalfe，G.、Olivetti，N.、Gabbay，D.：《模糊逻辑证明论》。应用逻辑丛书36，施普林格（2008年）27. Omori，H.、Wansing，H.：FDE四十年：导论概述。《逻辑研究》105 6 28 6 1021 1049 2017 10 1007 11225 017 9748 ( )，–（2021年12月）。https://doi.org/ . /s - - - . Rodrigues，A.、Bueno-Soler，J.、Carnielli，W.：测量证据：针对 Belnap–Dunn 逻辑扩展的概率方法。《综合》198(S22)，5451–5480（2021年10月）