arXiv:2303.04567v1 [math.DG] 8 Mar 2023

球面单纯形的类时希尔伯特几何

ATHANASE PAPADOPOULOS 和 SUMIO YAMADA

谨以友谊与钦佩献给 *Norbert A'Campo* 之情

Abstract. 我们首先回顾类时度量空间的概念。这是 Herbert Busemann 为广义相对论发展出的一种度量理论框架。我们特别回顾类时希尔伯特几何和类时球面希尔伯特几何的概念。我们证明了关于单纯形的类时球面希尔伯特几何的以下结果：设 Δ_2 是二维球面上的一个单纯形，$\tilde{\Delta}_2$ 是其对跖单纯形。我们证明，与这对单纯形 Δ_2，Δ_2 相关的类时˜球面希尔伯特几何，等距于六个赋有类时范数的向量空间之并；群 $\mathbb{R}^2_{>0} \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_2$以等距且传递的方式作用于其上。这是一个类时球面类比，类似于一个著名结果（归功于 Busemann）：欧几里得单纯形的希尔伯特度量等距于由赋范向量空间诱导的度量。同时，这也提供了一个新的类时空间实例。

Keywords.— 类时几何、类时闵可夫斯基空间、洛伦兹几何、类时球面希尔伯特几何。

AMS classification: 53C70, 53C22, 5C10, 53C23, 53C50, 5 3C45

Contents

1. 引言 1 2. 球面单纯形的类时希尔伯特几何 3 3. 类时欧几里得希尔伯特几何诱导类时球面希尔伯特几何 8 4. 单纯形分解与几何图册 S^2 9
5. 2-单纯形的希尔伯特度量 11 6. 球面 2-单纯形的类时希尔伯特几何 13 参考文献 21

1. Introduction

在其论文 [4], 中，Herbert Busemann 提出了类时空间的概念。类时空间是一个豪斯多夫拓扑空间 Ω，配备有偏序关系 $<$ 和一个称为（类时）距离函数的函数 d ——尽管它不满足距离函数通常具有的公理——使得对于 Ω 中任意的 x 和 y，$d(x, y)$ 有定义当且仅当 $x \leq y$（即 $x < y$ 或 $x = y$）；并且对于 Ω 中满足 $x \leq y \leq z$ 的任意三元组 x，y，z，反三角不等式（亦称时间不等式）成立，也就是说，我们有

$$d(x, z) \geq d(x, y) + d(y, z).$$

Date: 2023年3月9日。

一个满足该时间不等式的经典例子，是狭义相对论中洛伦兹空间的情形（我们将在下文回顾其定义）。

在 Busemann 的一般框架中，偏序关系 $<$ 和距离函数 d 满足若干公理——数量太多，无法在此一一列举；我们将在下一节简要谈谈这些公理。请注意，与通常的距离函数不同，类时距离函数 d 并不在底层空间 Ω 上定义拓扑；这就是为何要预先给定这样的拓扑。

Busemann 类时空间理论是一种一般度量框架，其中包括半黎曼流形（亦称伪黎曼流形）这一特例；而半黎曼流形又将黎曼流形加以推广，其度量所定义的二次型在无穷小意义下非退化，但不一定正定。类时空间的一个例子是 n维洛伦兹空间。在这个类时空间中，底层拓扑空间 Ω 是实仿射 n维空间 A^n，它配备了由仿射坐标 $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ 给出的不定度量，具体如下：

$$\lambda_n(\mathbf{x}) = x_1^2 - \sum_{i=2}^{n} x_i^2.$$

相应的序关系 $<$定义为：对于$\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ 和$\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)$,

$$\mathbf{x} < \mathbf{y} \iff (x_1 < y_1 \text{ and } \lambda_n(\mathbf{x} - \mathbf{y}) > 0).$$

于是，类时距离函数定义为

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sqrt{\lambda_n(\mathbf{x} - \mathbf{y})}.$$

类时空间的更一般例子是类时闵可夫斯基空间。这类类时空间的底层空间是一个有限维向量空间，并配备了由类时范数诱导的距离；类时范数是一种类似于通常范数的函数，通常范数定义了闵可夫斯基空间（有限维赋范空间），而类时范数则不同：它不是定义在整个向量空间上，而仅定义在一个顶点为原点的真锥上（也就是说，该锥不包含任何直线）；此外，它不是凸的，而是凹的。换言之，类时闵可夫斯基空间的单位球包含在一个真锥中；从原点看去，该真锥是一个凹超曲面。类时闵可夫斯基空间是连续可微类时芬斯勒流形的局部模型，这与经典闵可夫斯基空间是连续可微芬斯勒流形的局部模型大致相同（见[3]）；欧几里得向量空间也是黎曼流形的局部模型。

研究类时度量的动机在于，它们为广义相对论提供了一种几何框架，这与洛伦兹空间为狭义相对论提供框架的方式大致相同。类时度量定义中固有的序关系，是对相对论中时空因果性的数学抽象；也就是说，$x < y$ 反映了以下事实：y 位于 x的未来，或者 x 与 y 之间存在因果关系（或者说，y 受到 x的影响）。

既然我们谈到了广义相对论，也不妨提及爱因斯坦关于这一主题的重要论文，[6]。为结束对物理学的讨论，我们还要提到，A. D. 亚历山德罗夫及其学派在俄罗斯独立于 Busemann 的研究，提出了一种广义相对论的一般度量框架，称为时序几何；例如参见文献 [11]中的综述。

下面举几个例子。Busemann 在 [4], 中证明，在适当定义乘积度量 [4, §4]的情况下，类时空间与满足某些假设的度量空间的乘积是类时空间。文献 [9]也回顾了 Busemann 在这一主题上的工作。类时空间的其他有趣例子包括凸集的外部（也称类时）Funk 几何和希尔伯特几何，其中凸集位于 $\mathbb{R}^n$中。基于 Busemann 的思想，我们在论文 [10] 中发展了外部 Funk 几何和希尔伯特几何的理论，并引入了这些几何的非欧几里得变体。在后者的框架中，底层凸集位于 n维球面或双曲空间中，而非欧几里得空间中。同一篇论文还将经典德西特几何刻画为类时球面希尔伯特几何的一个特例；具体而言，它是球面上一对互不相交的几何对跖圆盘之并的外部希尔伯特几何。

需要指出的是，关于类时空间背景下伪芬斯勒流形的一般理论，Guillaume Buro 在其近期的博士论文中已作了深入研究，参见 [1]。特别是，作者在这一伪芬斯勒框架下证明了芬斯勒几何中的若干经典重要定理（Busemann–Mayer、Hopf–Rinow 等）。

本文研究一种类时球面希尔伯特几何，它是球面上两个对跖单纯形的外部几何。我们证明如下：

定理 6.1设 Δ_2 是球面 S^2 中的一个球面2维单纯形，且$\tilde{\Delta}_2$ 是其对跖单纯形。那么，$\Omega = S^2 \setminus (\Delta_2 \cup \tilde{\Delta}_2)$的类时希尔伯特几何等距于 six 个类时赋范空间的并，其中阿贝尔群 $\mathbb{R}^2_{>0} \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_2$ 在这些空间上等距且传递地作用。

高维情形也可以用类似的方法处理。不过，论述需要涉及更多技术细节，这些内容将另行发表于一篇论文中。

定理 6.1 可以与 Busemann 的一项结果相比较：该结果指出，在经典（非类时）情形下，任意维数的单纯形的希尔伯特几何都由有限维向量空间上的一个范数诱导。（事实上，Busemann 的结果更为精确；见 [4, 第 35] 页和 [5, 第 313] 页。）在二维情形下，我们的结果也是 Phadke 关于三角形的希尔伯特几何的一项结果[7]的类时类比。

2. The timelike Hilbert geometry of a spherical simplex

我们首先简要回顾类时空间和类时希尔伯特几何的概念。

类时空间是一个豪斯多夫拓扑空间 Ω，配备偏序关系 $<$ 以及一个 d 发挥距离函数作用的函数。距离$d(x, y)$仅对满足 $x \leq y$（也就是说， $x = y$ot $x < y$）的点对 $(x, y) \in \Omega \times \Omega$ 定义，并满足以下三条公理：

(1) $d(x,\ x) = 0$ 对 Ω 中的每个 x；(2) $d(x,\ y) \geq 0$ 对 Ω 中满足 $x < y$ 的每个 x 和 y；(3) $d(x,\ y) + d(y,\ z) \leq d(x,\ z)$ 对 Ω 中所有满足 $x < y < z$的点三元组 $x,\ y,\ z$ 均成立。

最后一个性质是时间不等式。它是一个反三角不等式。注意，距离函数 d 具有非对称性，也就是说， $d(x,\ y)$ 不一定等于 $d(y,\ x)$。（事实上，如果 $d(y,\ x)$ 有定义，那么除非 $x = y$，否则 $d(x,\ y)$ 无定义。）

Busemann 引入的类时空间概念 [4], 包含一系列附加公理，用以建立空间 Ω 的拓扑性质、距离函数 d 与偏序关系 $<$之间的联系。例如，有一条

公理要求，Ω 中任意点 q 的任意邻域都包含满足 $x < q < y$的点 x 和 y。其他公理则保证局部测地线段的存在性及其延拓的唯一性。这些性质是 Busemann 意义下 G-空间（G 代表“测地线”）性质的类时类比；这套理论发展于 [2]。由于公理数量过多，本文不予列述。在此讨论的类时球面希尔伯特几何这一特殊情形中，这些公理均成立。

我们将回顾 [10], 中研究的类时球面希尔伯特度量，因为我们的主要结果与这一度量有关。在此之前，我们需要回顾另一种类时度量，即类时芬克度量。首先，我们提醒读者一些关于球面凸子集的基本事实。我们所用的球面凸性理论基本概念，已在论文 [10] 中作了详细介绍。

对于 $n \geq 1$，设 S^n 是 n 维球面，我们将其视为 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中的单位球面。我们用 O 表示它的中心。

一个**球面线段** 是 S^n 上大圆的一段。当且仅当该线段包含在某个半球内时，它才是端点之间的最短路径；也就是说，该半球是此球面与一个经过原点的超平面的交集在 S^n 中的补集。

若子集 $I \subset S^n$ 满足 $I \neq S^n$，且 I 中任意两点之间都存在一条位于 I 内的最短直线，则称其为**凸的** 。注意，这意味着 I 包含在某个开半球内。诸如**超球面**、**大超球面**、**开** 与**闭半球**、**半球**的**极点** 等概念，均以自然的方式定义。以下概念在这一情形中起着关键作用：

开凸子集 I S^n 的**支撑超平面** π 是一个大超球面，其与 I 的闭包 I 相交非空，并且 I包含于S^n中由 π 分出的两个连通分支之一。球面上凸子集边界上的每一点，都存在一个包含该点的支撑超球面。

设 I_1 和 I_2 是 S^n 的两个开凸子集， K_1 和 K_2 分别是它们的边界超曲面。换言之，对于 $i = 1,\ 2$, $K_i = I \setminus I$。

定义 2.1. 若以下两个性质成立，则称这两个超曲面 K_1, K_2 处于**一般位置**：

(1) $\overline{I_1} \cap \overline{I_2} = \emptyset$; (2) 对于任意满足 $C \cap K_i \neq \emptyset$的 C大圆，其中 $i = 1,\ 2$, 集合 $C \setminus (I_1 \cup I_2)$是两条长度为 $< \pi$的球面线段之并。

以下内容在 [10] （命题 11.3）中得到了证明。

命题 2.2。 假设 K_1, K_2 处于一般位置。那么，并集 $I_1 \cup I_2$ 中包含一对对踵点，且这两个点分别属于集合 I_1, I_2。

下文中，我们假设两个超曲面 K_1 和 K_2 处于一般位置。设 $\Omega = S^2 \setminus (I_1 \cup I_2)$。我们在 Ω 上定义一个偏序关系。

定义 2.3 （偏序）。 给定 Ω 中的两个点 p 和 q，若存在 Ω 中大圆 C 的一段 $[p, q]$，连接 p 与 q，并且存在两个点 $a_1 \in C \cap K_1$ 和 $a_2 \in C \cap K_2$，使得四个点 a_1, p, q, a_2 按此顺序位于 C 上，其中 $]a_1, a_2[\subset \in \Omega$，且 $]a_1, a_2[$ 不包含于 K_1 或 K_2 的任何支撑超平面中，则称 q 在 ..... 的**未来** p，或称 p 在 ..... 的**过去** q，并记作 $p < q$。（见图 1。）

我们将 Ω 中满足 $p < q$ 的有序对 $(p,\ q)$ 的集合记作 $\Omega_<$；并且，按照惯例，当 $p < q$ 或 $p = q$ 时，我们记作 $p \leq q$。我们有以下结论（[10]中的命题 11.8）。

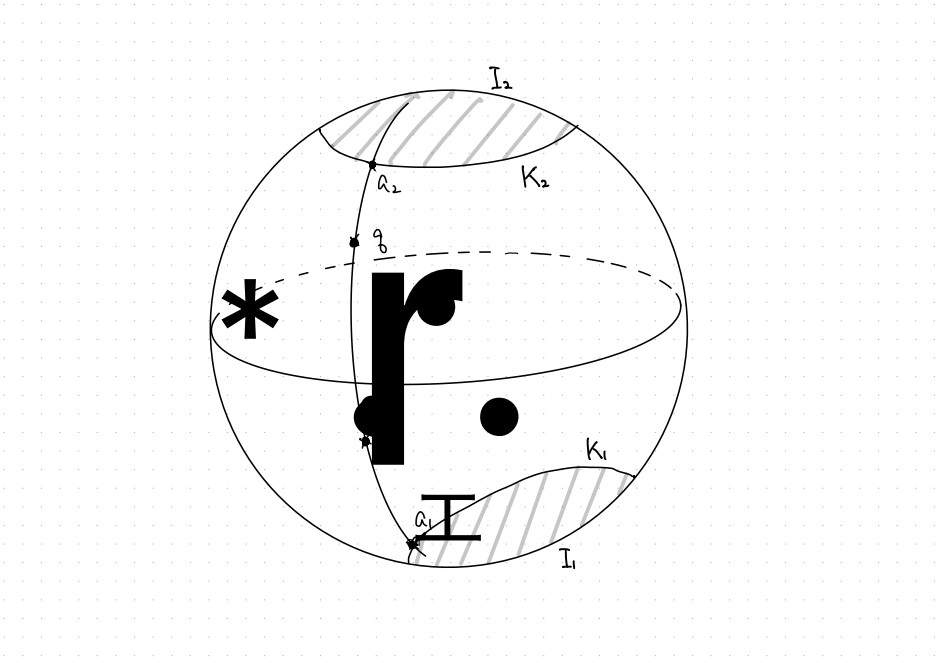


FIGURE 1. 与两个超曲面 K_1 和 K_2相关联的类时球面希尔伯特几何

命题 2.4（偏序关系的传递性）。设 p、 q 和 r 是 Ω 中的三个点，满足 $p \leq q$ 和 $q \leq r$。那么我们有 $p \leq r$。

现在，我们在乘积 Ω × Ω 的子集 Ω≤ 上定义类时球面相对芬克距离 F_1^2，该子集由满足 $p \leq q$ 的点对 $(p,\ q)$ 组成，定义如下：

$$F_1^2(p,q) = \log \frac{\sin d(p, b(p,q))}{\sin d(q, b(p,q))},$$

其中， d 是通常的球面距离；对于给定的两点 p 和q， $b(p,\ q)$ 表示从 p 经过 q 的测地射线与 K_2 的交点。（该点等于上文定义 2.3 中的 a_2 。）随后，我们将此定义扩展到 Ω ×Ω 的对角线上的点对 $(p,\ p)$，规定 $F_1^2(p,\ p) = 0$ 对任意此类点对均成立。这里请注意，我们要求 p 和 q 所在的大圆 C 与 K_1 和 K_2 均相交；尽管为了定义 F_1^2， C 无需与K_1相交。

函数 $F_1^2(p,q)$ 满足类时不等式（ [10] 的命题 11.12）。它定义了一个类时芬斯勒度量。

接下来，我们定义与有序对 (K_1, K_2) 相关联的 类时球面相对反向芬克度量 F_1^2。为此，我们先考虑与有序对 (K_1, K_2) 相关联的类时球面相对芬克度量 F_2^1，并定义新函数 $\overline{F_1^2}$。其定义域与 F_1^2 的定义域相同，具体定义如下：

$$\overline{F_1^2}(p,q) = F_2^1(q,p).$$

现在我们可以定义类时球面希尔伯特度量：

定义 2.5（类时球面希尔伯特度量）。 与有序对 (K_1, K_2) 相关联的类时球面希尔伯特度量 H_1^2 定义在满足 H_1^2 的有序

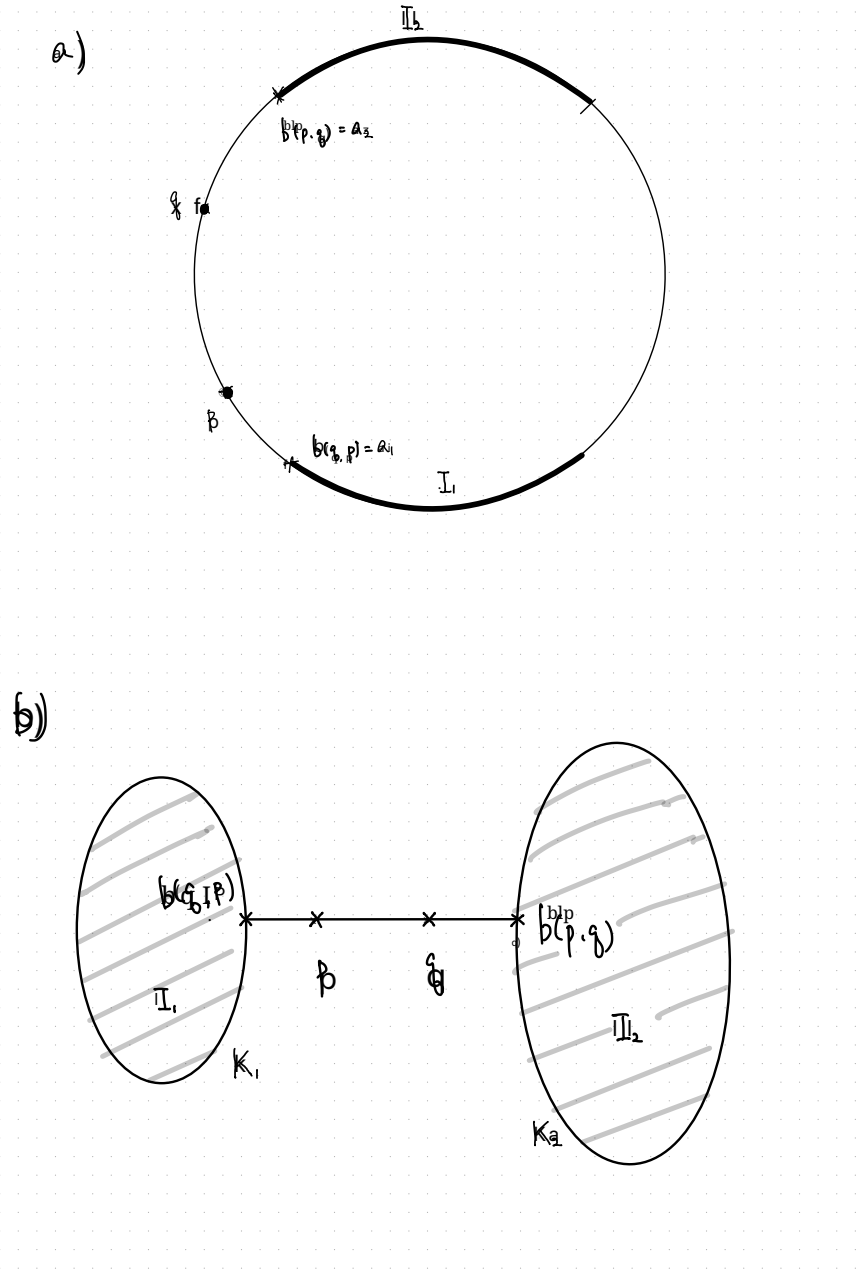


FIGURE 2. 希尔伯特度量是相对芬克度量的对称化

对 (p, q) 上，其定义公式为

$$H(p,q) = \frac{1}{2}(F_1^2(p,q) + \overline{F_1^2}(p,q)).$$

在这种设定下，凸集 K_1 表示过去，凸集 K_2 表示未来。（见图 2a。）

与通常情况一样，通过在此情形下令 $H(p,\ q)=0$，定义也扩展到 $p=q$ 的情形。

我们回顾一下，在球面上的一个大圆上按此顺序排列的四个点 p_1、p_2、p_3、p_4，其球面交比 定义为

$$[p_1,p_2,p_3,p_4]=\frac{\sin d(p_2,p_4)\sin d(p_3,p_1)}{\sin d(p_3,p_4)\sin d(p_2,p_1)}.$$

其取值属于 $\mathbb{R}_{\geq 0}\cup\{\infty\}$。球面交比是一个射影不变量。其含义见 [8, 第 243] 页。请注意，引入球面交比后，球面的射影变换恰好就是保持四个共线点交比不变的变换。

对于 Ω< 中任意一对点 (p、q)，设 $a_1\in K_1$ 和 $a_2\in K_2$ 为经过 p 和 q 的大圆与两个超曲面 K_1 和 K_2 的交点，使得 a_1、p、q、a_2 按此顺序位于大圆弧 $[a_1,a_2]\subset\Omega$ 上。采用此记号后，与点对 (K_1、K_2) 相关的类时球面希尔伯特距离也可由下式给出：

命题 2.6。设 p 和 q 是 Ω 中满足 $p<q$ 的两个点，并设 $[a_1,a_2]$ 是包含 p 和 q 的大圆弧段，其中对于 $i=1,\ [a_1,a_2]\cap K_i=a_i,\ 2$。则有：

$$H(p,q)=\frac{1}{2}\log[a_1,p,q,a_2].$$

以下是 [10] 中的命题 13.3：

命题 2.7（不变性）。与凸超曲面 K_1、$K_2\subset S^n$ 相关联的类时球面希尔伯特度量，在保持球面 S^n 上的两个凸超曲面 K_1、K_2 的集合不变的射影变换下是不变的。

类时球面希尔伯特度量 H 具有潜在的类时芬斯勒结构，我们将在论文 [10] 中对其进行描述。此外，[10] 中的命题 13.4 刻画了与任意一对凸超曲面（$K_1,\ K_2$）相关联的、关于该度量的一类自然测地线，即形如 $]a_1,\ a_2[$，的球面线段；这些线段配备了从 a_1 到 a_2 的自然定向，并满足以下三个性质

(1) $a_1\in K_1$ 和 $a_2\in K_2$；(2) $]a_1,\ a_2[$ 不包含于 K_1 或 K_2的任何支撑超平面中；(3) 开球面线段 $]a_1,\ a_2[$ 位于 $K_1\cup K_2$ 的补集内。

以下命题是 [10]中的命题 13.4。

命题 2.8。*(a)* 在与一对凸超曲面 (K_1,K_2)相关联的类时球面希尔伯特几何 (Ω H) 中，具有从 a_1 到 a_2 的自然定向、形如 $]a_1,a_2[$，并满足以下三个性质的球面线段

(1) $a_1\in K_1$ 和 $a_2\in K_2$；*(2)* $]a_1,a_2[$ 不包含于 K_1 或 K_2的任何支撑超平面中；*(3)* 开球面线段 $]a_1,a_2[$ 位于 $K_1\cup K_2$的补集内

是具有给定方向的 H-测地线。每条这样的测地线都与实数直线等距。

(b) 包含在形如 $[a_1,a_2]$ 且满足上述性质（*1-3*）的线段中的定向球面线段，是唯一的 H-测地线，当且仅当满足以下条件：不存在满足性质（*1-3*）的球面测地线段 $[a_1,a_2]$，使得 a_1 位于一个非空开球面线段 $J_1\subset K_1$ 的内部

且 a_2 位于一个非空开线段 $J_2 \subset K_2$ 的内部，并且 J_1 与 J_2 共面，即包含在一个二维球面中。

读者会注意到，这与经典希尔伯特几何中测地线的性质及刻画在形式上相似；另请参见下一节回顾的类时欧几里得希尔伯特几何中测地线的刻画。

3. Timelike Euclidean Hilbert geometry induces timelike spherical Hilbert geometry

在希尔伯特几何的背景下，类时球面希尔伯特度量可以自然地表示为类时欧几里得希尔伯特几何（ [10]第9节）。回顾一下，类时欧几里得希尔伯特几何是在两个互不相交的开凸集 I_1 和 I_2 的补集中实现的，这两个凸集分别由凸超曲面 K_1 和 K_2 围成，其中前者视为过去集，后者视为未来集。将 $I_1 \cup I_2$ 的补集记为 Ω。对于 p 和 q （其中q 位于 p 的未来），定义与之相关的欧几里得类时希尔伯特距离 $H_E(p,\ q)$（ [10]的定义9.1）为欧几里得交比的对数，

$$H_E(p,q) = \frac{1}{2}\log[a_1, p, q, a_2].$$

其中 $a_1 \in K_1$ 和 $a_2 \in K_2$ 是经过 p 和q的直线与超曲面 K_1和 K_2的交点，使得 $a_1,\ p,\ q,\ a_2$按此顺序共线于线段 $[a_1, a_2] \subset \Omega$ 上。

[10] 的命题9.2给出了与一对凸超曲面（$K_1,\ K_2$）相关的这种欧几里得类时希尔伯特几何的一类自然测地线的刻画，即形如 $]a_1,\ a_2[$的欧几里得线段，其自然取向由 a_1 指向 a_2 ，且满足以下三个性质

(1) $a_1 \in K_1$ 和 $a_2 \in K_2$; (2) $]a_1,\ a_2[$ 不包含在以 K_1 或 K_2为支撑的任何支撑超平面内; (3) 开球面线段 $]a_1,\ a_2[$ 位于 $K_1 \cup K_2$ 的补集中。

现在考虑投影映射 $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \to S^n$ ，它将 x 映射到射线 Ox 与单位球面的交点。该投影诱导出一个映射

$$\Phi : (\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}) \setminus (C_1 \cup C_2) \to S^n \cap (I_1 \cup I_2)$$

其中， C_i 是 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中的开锥，其顶点为原点 O ，由开球面区域 I_i张成。注意，C_1 和 C_2 构成 $\mathbb{R}^{n+1}$中的一对互不相交的开凸集，而其并集的补集 $C_1 \cup C_2$具有自然的类时欧几里得希尔伯特度量 H_E。由于映射 Φ保持交比不变（在球面上则取球面交比），我们有以下结论（见图3a、3b）：

定理 3.1。 映射 Φ 保持距离不变，即

$$H_E(x, y) = H(\Phi(x), \Phi(y))$$

对于 x、$y \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$。 H_E中的每条测地线段都表示为一条欧几里得线段，并被映射为 H中的一条测地线段，即一段大圆弧。

请注意，在佩龙-弗罗贝尼乌斯定理的框架中（例如，参见 [12]），距离保持成立；在该框架下，投影的定义是从具有正分量的 $n \times n$ 矩阵空间投影到具有经典希尔伯特度量的 $(n^2 - 1)$ 维（球面）单纯形，

$$\Phi : (\mathbb{R}_{>0})^{n^2} \to \text{ the first orthant} \cap S^{(n^2-1)}.$$

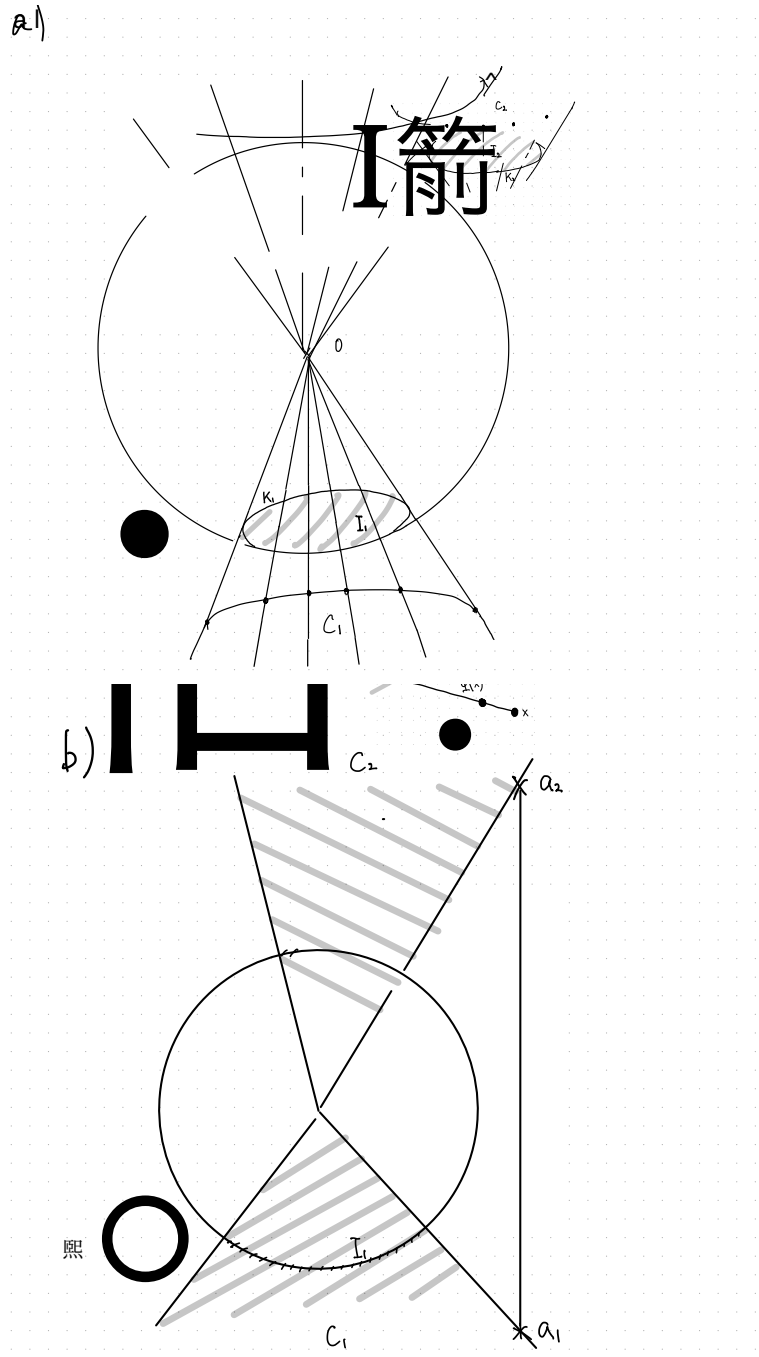


FIGURE 3. 欧几里得模型与球面模型

4. SIMPLICAL DECOMPOSITION AND GEOMETRIC CHARTS FOR S^2

球面 S^2 被视为以原点 O 为中心的 $\mathbb{R}^3$ 单位球面，并配备笛卡尔坐标系 $x = (x_1,\ x_2,\ x_3)$。我们将标准单纯形 定义为 S^2 与 $\mathbb{R}^3$的一个正交象限 的交集，也就是说，它是通过规定每个坐标具有固定符号而定义的 $\mathbb{R}^3$ 子空间。因此，我们有八个标准球面单形，每个单形都由一组不等式定义

类型的

$$x_1 \lneqq 0, x_2 \lneqq 0, x_3 \lneqq 0.$$

考虑一对这样的对跖单纯形 Δ_2 和 Δ_2，它们位于 $\tilde{S}^2$ 中，

$$\Delta_2 = \{(x_1, x_2, x_3) \,|\, \forall j \ x_j > 0 \text{ and } \sum_{i=1}^{3} (x_i)^2 = 1\}$$

and

$$\tilde{\Delta}_2 = \{(x_1, x_2, x_3) \,|\, \forall j \ x_j < 0 \text{ and } \sum_{i=1}^{3} (x_i)^2 = 1\}.$$

对于 S^2 中坐标均不为零的每个点 x，我们引入一个称为多重符号的符号表达式

$$\mathrm{MS}(x) = (\pm, \pm, \pm)$$

其中第 i 个符号表示第 i 个分量的符号。例如，点 x 属于 Δ_2 时，其多重符号 ˜MS(x) 为 (+，+，+)；而点 y 属于 Δ_2 时，MS(y) 为 (−，−，−)。

我们注意到，任意两个球面单形（它们也是两个测地三角形）都射影等价，因为任意球面单形都射影等价于一个欧几里得二单形（即一个三角形），这是通过立体投影得到的；而任意两个欧几里得三角形也都射影等价。特别地，两个球面单形 D_1 和 D_2 射影等价这一事实，意味着 S^2 −($D_1 \cup \tilde{D_1}$) 与 S^2 −($D_2 \cup \tilde{D_2}$) 的类时希尔伯特几何˜等距，其中对于 $i = 1, 2$，D_i 是 D_i 的对跖单纯形。

令 $\mathbb{U}_3$ 为球面的一个半球，其极点为 $C_3 = (0, 0, 1)$，并令 $\Pi_3 \subset \mathbb{R}^3$ 为与北半球 $\mathbb{U}_3$ 在 C_3 处相切的超平面（见图˜4a-1）。我们还令 $\mathbb{U}_3$ 为与 $\mathbb{U}_3$对跖的南半球。其极点是˜ ˜点 $C_3 : = (0, 0, -1)$。令 Π_3 为超平面 $\{x_1 = -1\}$。平面 Π_3具有自然坐标系 $t^{(1)} = (x_2, x_3)$，$\tilde{\Pi}_3$也同样如此。

与 $\mathbb{U}_3$ 相关、以 C_3 为中心的立体投影 π_3 是映射$\pi_3 : \mathbb{U}_3 \to \Pi_3$，它将 $\mathbb{U}_3$ 上的每个点 x 映到直线 Ox与 Π_3的交点。

$\mathbb{U}_1$，C_1，Π_1，$\mathbb{U}_2$，C_2，Π_2均按相同方式定义。

现在注意，北半球 $\mathbb{U}_3$ 在其赤道边界˜ ˜$\{x_1 = 0\}$上有四个点 C_1，C_1，C_2，C_2，它们分别是 x_1和 x_2坐标轴˜与单位球面的交点。对跖点对 C_i 和 C_i（$i = 1, 2$）确定了一族经过它们的大圆 S^1，由此形成开半球 $\mathbb{U}_1$上的测地叶状分解。该叶状分解的每个叶 ℓ 确定一个包含 ℓ 和 $\mathbb{R}^3$的原点的二维平面 Π_ℓ。开半圆 ℓ 经立体投影 $\pi_3 : \mathbb{U}_3 \to \Pi_3$ 映射为一条直线 $\mathcal{P}_\ell^{(i)}$，它是二维平面 Π_ℓ与二维平面 $\Pi_{C_3} = \{x_3 = 1\}$的交线。（见图 4a-2。）

前述观察表明，给定 $\mathbb{U}_3$ 中任意一点 x，都存在一对唯一确定的大圆 ℓ^1(x) ℓ^2(x)，它们交于 x。（见图 4a-2。）经立体投影 π_3 后，这对大圆的像分别是两条直线 $\mathcal{P}^{(3)}_{\ell^1\ x}()$ $\mathcal{P}^{(3)}_{\ell^2\ x}()$，它们在 π_3(x) 处垂直相交，且分别平行于 $\mathbb{R}^3$ 中的 x_1 轴和 x_2 轴。（见图 7a。）因此，在 π_3(x) 处，$\mathcal{P}^{(3)}_{\ell^1\ x}()$ $\mathcal{P}^{(3)}_{\ell^2\ x}()$ 构成一个双锥 $J^{\pm}$(π_3(x))，它由平移 Π_3 的第一和第三正交象限得到。我们将 J^+(π_3(x)) 的内部定义为 π_3(x) 的未来集，其中的点的坐标均大于 π_3(x) 的坐标；而 J^-(π_3(x)) 则是 π_3(x) 的过去集。

请注意，整个球面都被这些坐标图覆盖

$$\mathbb{U}_1, \mathbb{U}_2, \mathbb{U}_3, \tilde{\mathbb{U}}_1, \tilde{\mathbb{U}}_2, \tilde{\mathbb{U}}_3.$$

˜每个 $\mathbb{U}_i$ 都包含球面单纯形 Δ_2（即未来凸集），而每个 $\mathbb{U}_i$˜都包含球面单纯形 Δ_2（即过去凸集）。单纯形在 $\pi_i(\mathbb{U}_i)$中的像是三维超平面 $\{x_i = 1\}$中的四个正交象限之一，而˜$\tilde{\pi}_i(\mathbb{U}_i)$则是超平面 $\{x_i = -1\}$中的四个正交象限之一。$\Omega = S^2 \setminus (\Delta_2 \cup \tilde{\Delta}_2)$中的任意点 x 至少被两个局部坐标图覆盖：$\mathbb{U}_i$ 其极点是 Δ的一个顶点˜，而 $\mathbb{U}_j$ 其极点是 Δ的一个顶点。例如，如果 $\mathrm{MS}(x) = (+, -, +)$，那么˜$x$ 既属于 $\mathbb{U}_3$，也属于 $\mathbb{U}_2$。（见图4c。）

5. The Hilbert metric of the 2-simplex

本文主要研究 2-单纯形的类时希尔伯特几何，但我们首先回顾二维单纯形（即平面上的三角形）的（非类时）希尔伯特几何，因为这种情形已有明确的公式。Phadke 在其论文 [7]中对此作了描述。我们从这一情形入手，是因为我们研究 2-单纯形类时希尔伯特几何的方法，与这个较简单的（非类时）2-单纯形希尔伯特几何情形存在相似之处。

平面上的任意两个三角形都射影等价，因此任意三角形都射影等价于 $\mathbb{R}^2$，$\Delta = \{(x_1, x_2) \text{ 的第一象限（或称四分之一平面）} \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 > 0, x_2 > 0\}$. 因此，任意三角形的希尔伯特度量都与四分之一平面 Δ的希尔伯特度量等距。因此，只需写出后一情形的明确公式即可。

两点 p 和 q 在 Δ 中的希尔伯特距离 $H_\Delta(p, q)$，等于有序四元组 a, p, q, b的交比的对数的一半，其中 a和b 是直线 pq 与四分之一平面边界的交点（它们位于坐标轴上，或在无穷远处）。结果取决于点 p 和 q 相对于两条坐标轴的相对位置。共有6种情况（见图5a）：

- $H_\Delta(p, q) = \frac{1}{2}\big(\log(p_2/q_2) + \log(q_1/p_1)\big)$ 如果 a 位于 y 轴上且 b 位于 x轴上；
- $H_\Delta(p, q) = \frac{1}{2}\big(\log(q_2/p_2) + \log(p_1/q_1)\big)$ 如果 a 位于 x 轴上且 b 位于 y轴上；
- $H_\Delta(p, q) = -\frac{1}{2}\log(q_1/p_1)$，若 a 位于 y 轴上且 b 位于无穷远处；
- $H_\Delta(p, q) = -\frac{1}{2}\log(p_1/q_1)$，若 a 位于无穷远处且 b 位于 y 轴上；
- $H_\Delta(p, q) = -\frac{1}{2}\log(q_2/p_2)$，若 a 位于 x 轴上且 b 位于无穷远处；
- $H_\Delta(p, q) = -\frac{1}{2}\log(p_2/q_2)$，若 a 位于无穷远处且 b 位于 x 轴上。

下面的公式综合了所有这些情形：

$$H_\Delta(p, q) = \frac{1}{2}\max\left\{\left|\log\frac{p_1}{q_1}\right|, \left|\log\frac{p_2}{q_2}\right|, \left|\log\frac{p_1\, q_2}{q_1\, p_2}\right|\right\}. \tag{1}$$

注意，欧几里得二单形与单位二球面中的球面单纯形射影等价，其局部坐标图为 $(\mathbb{U}_3, \pi_3)$，并且球面单纯形 $\{x \in S^2 \mid \mathrm{MS}(x) = (+, +, +)\}$ 被映射到第一象限$Q_1 \cong \Delta$。这里，与前文一样，射影等价是指存在一个保持 4 个共线点交比的同胚；需要注意的是，在球面上我们使用球面交比（例如参见 [8]）。从这个意义上说，球面上单纯形的希尔伯特几何可以看作一种经典的（非类时）球面希尔伯特几何。我们指出，在当前情形中，S^2 上的对跖单纯形并不明显，但它仍存在于 S^2的射影几何中。

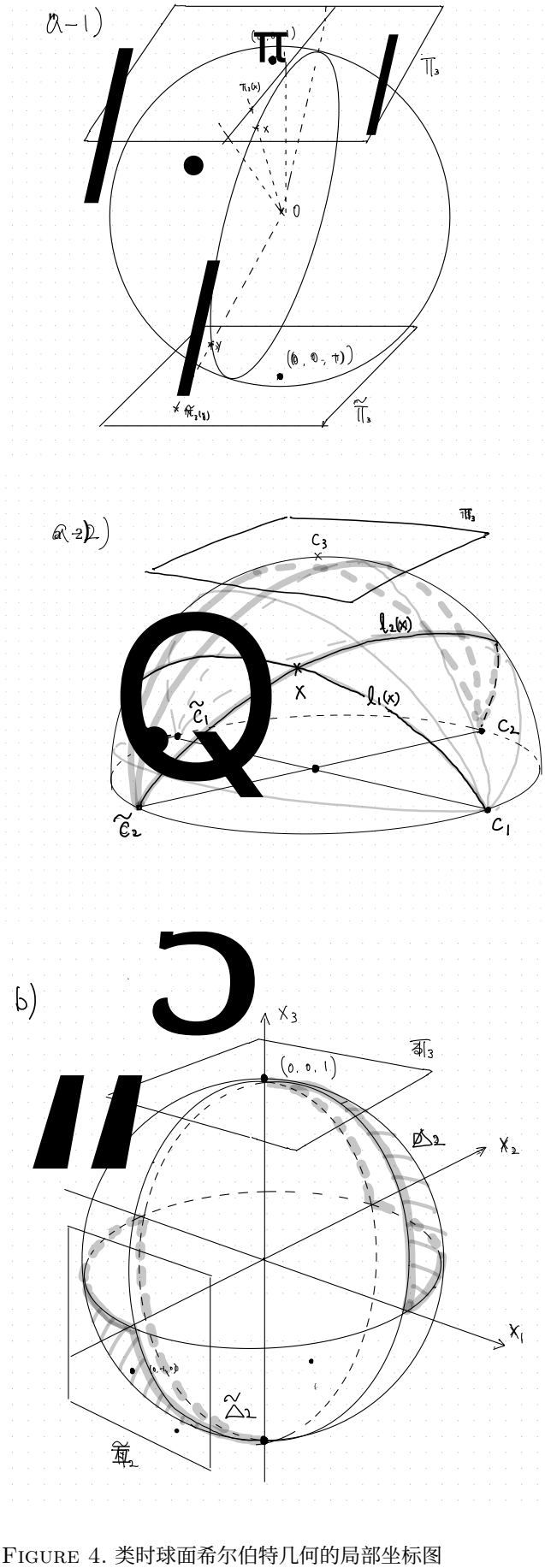


FIGURE 4. 类时球面希尔伯特几何的局部坐标图

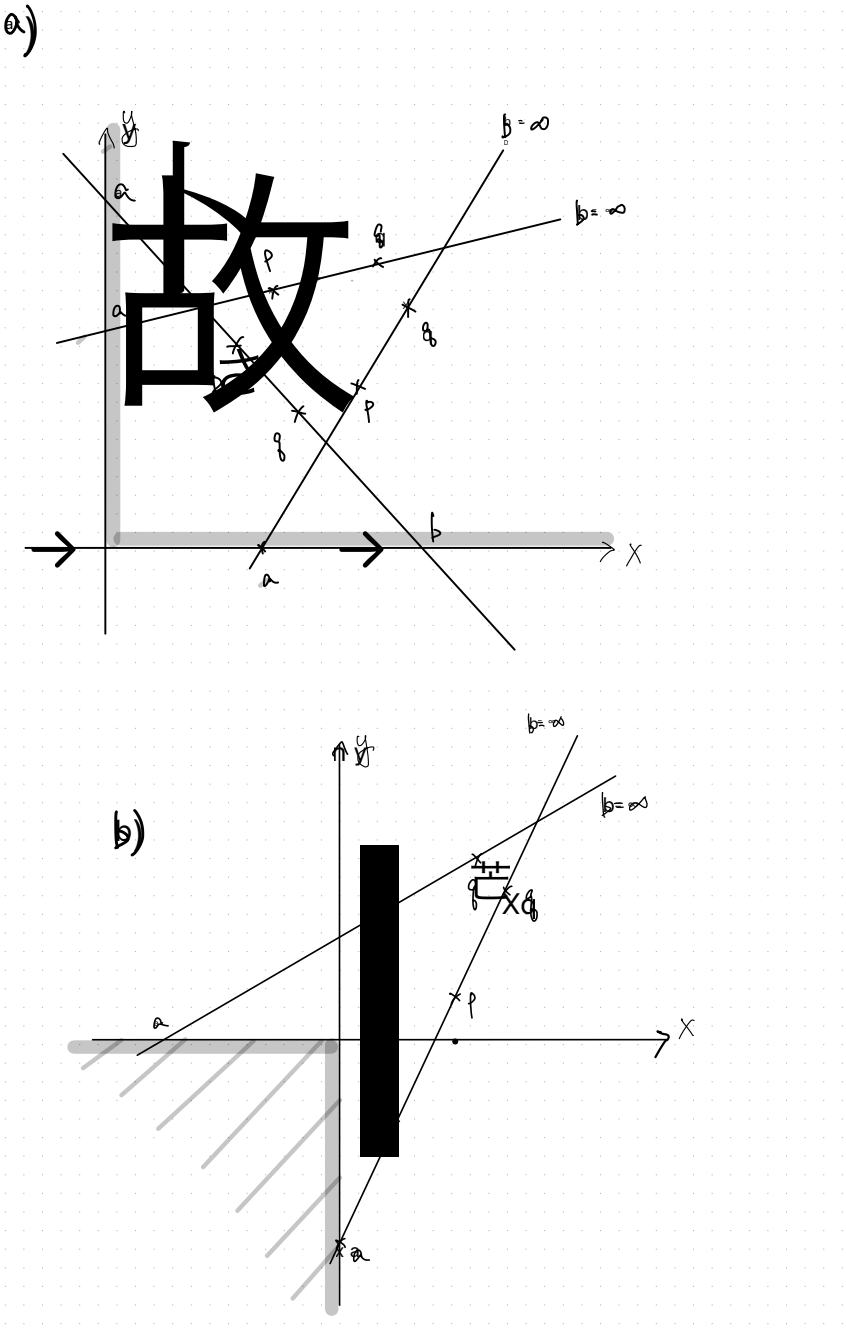


FIGURE 5. 希尔伯特几何的平面芬克模型

6. THE TIMELIKE HILBERT GEOMETRY OF THE SPHERICAL 2-SIMPLEX

本节中，我们证明主定理。我们沿用第 §4 节的记号。

定理 6.1。设 Δ_2 是球面 S^2 上的标准2维单纯形，并令$\tilde{\Delta}_2$ 为其对跖单纯形。则 $\Omega = S^2 \setminus (\Delta_2 \cup \tilde{\Delta}_2)$的类时希尔伯特几何等距于六个赋范空间的并；这些空间与 $S^1 \times \mathbb{R}$ 同胚，且阿贝尔群$(\mathbb{R}_{>0})^2 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_2$ 在其上等距作用。

定理 *6.1* 的证明。我们的构形是将两个二维˜球面单形 Δ_2 和 Δ_2 这一对对跖单纯形分别设为第一卦限中的球冠及其对跖对应部分，即，

$$\Delta_2 = \{x \in S^2 \,|\, \mathrm{MS}(x) = (+,+,+)\}, \qquad \tilde{\Delta}_2 = \{x \in S^2 \,|\, \mathrm{MS}(x) = (-,-,-)\}.$$

我们首先精确定义立体投影。请注意，在文献中，这一术语有时有不同的用法。

˜立体投影 $\tilde{\pi}_2$ 将半球 $\mathbb{U}_2$ 上的点映射到一个平面

˜ ˜ 该平面与球面在顶点 C_2 处相切，且我们将其定向为法向量为 $(0,\ -1,\ 0)$，对应关系为

$$x \mapsto Ox \cap \tilde{\Pi}_2.$$

˜ ˜该投影将 Δ_2 映射到 Π_2中的一个象限，即第三象限 $Q_3 := \{x_1 < 0, x_3 < 0\}$ 位于平面 $(x_1,\ x_3)$ 中。通过这一投影，我们的类时球面希尔伯特度量与平面$\mathbb{R}^2 \setminus Q_3$ 上的（退化）类时希尔伯特度量同构，其中过去是第三象限 Q_3，而未来由第一象限 $\{\text{“}r = \infty\text{”}\ 0 < \theta < \pi/2\}$的无穷远点组成。它是退化的，因为两个凸集之一位于无穷远处（见图 5b），˜因此希尔伯特度量实际上是 Π_2 上的芬克度量（见 §2 ）。为简单起见，我们使用坐标 $(x,\ y)$ 代替 $t^{(2)} = (x_1,\ x_3)$。

我们回顾第 2 节的内容：在 Ω 中，具有偏序 $p < q$ 的两点 p 和 q 的类时球面希尔伯特距离 $H_\Delta(p,q)$ 等于按该顺序排列在大圆 ℓ 上、位于 S^2中的有序四元组 (a_1,p,q,a_2) 的球面交比的一半。这四个点在 Π_2 中分别映射为 $\tilde{\pi}_2(a_1)$ $\tilde{\pi}_2(p)$ $\tilde{\pi}_2(q)$ $\tilde{\pi}_2(a_2)$，其中$\tilde{\pi}_2(a_1) =: a$ 是直线 $\tilde{\pi}_2(\ell)$ 与第三象限 Q_3 的边界的交点；$= \{x < 0, y < 0\}$ 和 $\tilde{\pi}_2(a_2) =: b$ 位于第一象限的无穷远处。在坐标中，我们在˜平面 Π_2中写作 $\tilde{\pi}_2(p) = (p_1,p_2)$ 和 $\tilde{\pi}_2(q) = (q_1,q_2)$。偏序 $p < q$ 等价于经过 p 和 q的直线具有正斜率。换言之，我们有 $p_1 \le q_1$ 和 $p_2 \le q_2$。

有两种情况：

- $H_\Delta(p,\ q) = -\frac{1}{2}\log(q_2/p_2)$，当 a 位于 x 轴的负半轴上且 b 位于无穷远处时；
- $H_\Delta(p,\ q) = \frac{1}{2}\log(q_1/p_1)$，当 a 位于 y 轴的负半轴上且 b 位于无穷远处时。

下面的公式将这两种情况合并起来：

$$H_\Delta(p,q) = \frac{1}{2}\max\left\{\left|\log\frac{p_1}{q_1}\right|, \left|\log\frac{p_2}{q_2}\right|\right\}. \tag{2}$$

现在注意到，根据希尔伯特距离 H_Δ 的这一表达式，定义在 Π_2 上的仿射˜映射

$$x \mapsto \lambda_1 x, \quad y \mapsto \lambda_2 y \qquad (\lambda_i > 0)$$

保持距离不变。因此，乘法阿贝尔群 $\{(\lambda_1,\ \lambda_2)\} \cong (\mathbb{R}_{>0})^2$ 是希尔伯特度量的等距变换群的子群。

接下来，我们将给出与此类时球面希尔伯特度量相关的芬斯勒结构公式。我们将证明，此象限上的类时希尔伯特度量所诱导的类时度量是齐次的。更确切地说，它等距于六个类时赋范空间的并集。

由于我们给出的是局部芬斯勒结构的公式，因此将研究范围限制在平面（$x,\ y$）的第一象限并不失一般性。在我们的语境中，这个象限是 Π_2。其余五个象限上的芬斯勒结构可以

通过（$\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_3$）对称性从这个特殊情形得到，其中 $\mathbb{Z}_2$ 是由环境空间的对跖映射生成的对称性

$$(x_1,x_2,x_3)\mapsto(-x_1,-x_2,-x_3)$$

且 $\mathbb{Z}_3$ 是由坐标置换生成的旋转对称群

$$(x_1,x_2,x_3)\mapsto(x_2,x_3,x_1).$$

设 $\mathbf{v}=(v_1,v_2)$ 是第一象限 $Q_1:=\{(x>0,y>0\}$ 中点 $\mathbf{x}=(x,y)$ 处向量的坐标。我们回顾一下以平面为模型的希尔伯特度量的闵可夫斯基泛函的一般公式。给定点 $\mathbf{x}$ 及 $\mathbf{x}$ 处的切向量 v，令 $r^+=r^+(\mathbf{x},\mathbf{v})$ 表示 $\mathbf{x}$ 与射线 $\mathbf{x}+t\mathbf{v}$ $(t>0)$ 和凸集边界的交点之间的距离，并令$r^-=r^-(\mathbf{x},\mathbf{v})$ 表示 x 与射线 $\mathbf{x}-t\mathbf{v}$ $(t<0)$ 和凸集边界的交点之间的距离。则希尔伯特度量 $H(\mathbf{x},\mathbf{y})$ 的闵可夫斯基泛函 $p(\mathbf{x},\mathbf{v})$ 为

$$p(\mathbf{x},\mathbf{v})=\frac{1}{2}|v|\Big(\frac{1}{r^+}+\frac{1}{r^-}\Big).$$

显然，此表达式关于$\mathbf{v}$对称；$p(\mathbf{x},\mathbf{v})=p(\mathbf{x},-\mathbf{v})$。此外，该表达式体现了希尔伯特度量是类时芬克度量的算术对称化这一事实，因为每一项都是相应类时芬克度量的闵可夫斯基泛函，分别对应未来凸集 Δ_2 和过去凸集 Δ_2。

另请注意，$\mathbb{R}^2\setminus Q_3$ 中具有正斜率的线段，通过立体投影 $\tilde{\pi}_2:\mathbb{U}_2\to\Pi_2$的逆映射，对应于球面上的大圆。

给定 $\mathbb{R}^2\setminus Q_3$中的一点 p，令 x 为 $\tilde{\mathbb{U}}_2$中的点 $\tilde{\pi}_2^{-1}(p)$。于是，所有经过 p 且斜率为正的线段的逆像，都对应于由两条大半圆 $\ell_1(x)$ 和 $\ell_2(x)$ 所界定的区域：前者经过 $C_1:=(1,0,0)$ 和 $C_1:=(-1,0,0)$，后者经过 $C_3:=(0,0,1)$ 和 $C_3:=(0,0,-1)$。注意，这个球面区域由两个球面月牙形区域构成，其中包含两个单纯形 Δ_2 和 Δ_2，分别标示点 x的未来和过去。另请注意，不经过其中一个单纯形，就无法从 p 沿大圆弧到达 $C_2:=(0,1,0)$。

大圆 $\ell_1(\mathbf{x})$ 和 $\ell_2(\mathbf{x})$ 经 $\tilde{\pi}_2$ 映射后成为两条直线 $\tilde{p}$，$\Pi_2\cong\mathbb{R}^2$中的水平线（平行于 x轴）和垂直线（平行于 y轴）相交于 p，因此它们不与第三象限相交（见图 7a），这意味着

$$r^+(\mathbf{x},\mathbf{v})=r^-(\mathbf{x},\mathbf{v})=\infty,$$

使得

$$p(\mathbf{x},\mathbf{v})=\frac{1}{2}|v|\Big(\frac{1}{r^+}+\frac{1}{r^-}\Big)=0$$

当$\mathbf{v}$ 与大圆 $\ell_1(\mathbf{x})$ 或 $\ell_2(\mathbf{x})$ 相切时。换言之，这些直线定义了类时球面希尔伯特度量的类光／零方向。（见图6a。）这与经典洛伦兹空间的情形类似，其中光锥是范数为零的向量集合（按§1中的记号，$\lambda_n(\mathbf{x})=0$）。

当沿该向量方向的射线与第三象限 Q_3相交时，向量的闵可夫斯基泛函的显式表达式才非零。该向量上的闵可夫斯基泛函的值有两种情况，取决于这条射线与 x 轴的负半轴还是 y 轴的负半轴相交（见图 7a）。

情况1的特征是不等式 $\frac{v_2}{v_1}<\frac{y}{x}$。令 θ 为该向量与负 y轴所成的角，r_+ 为该点到

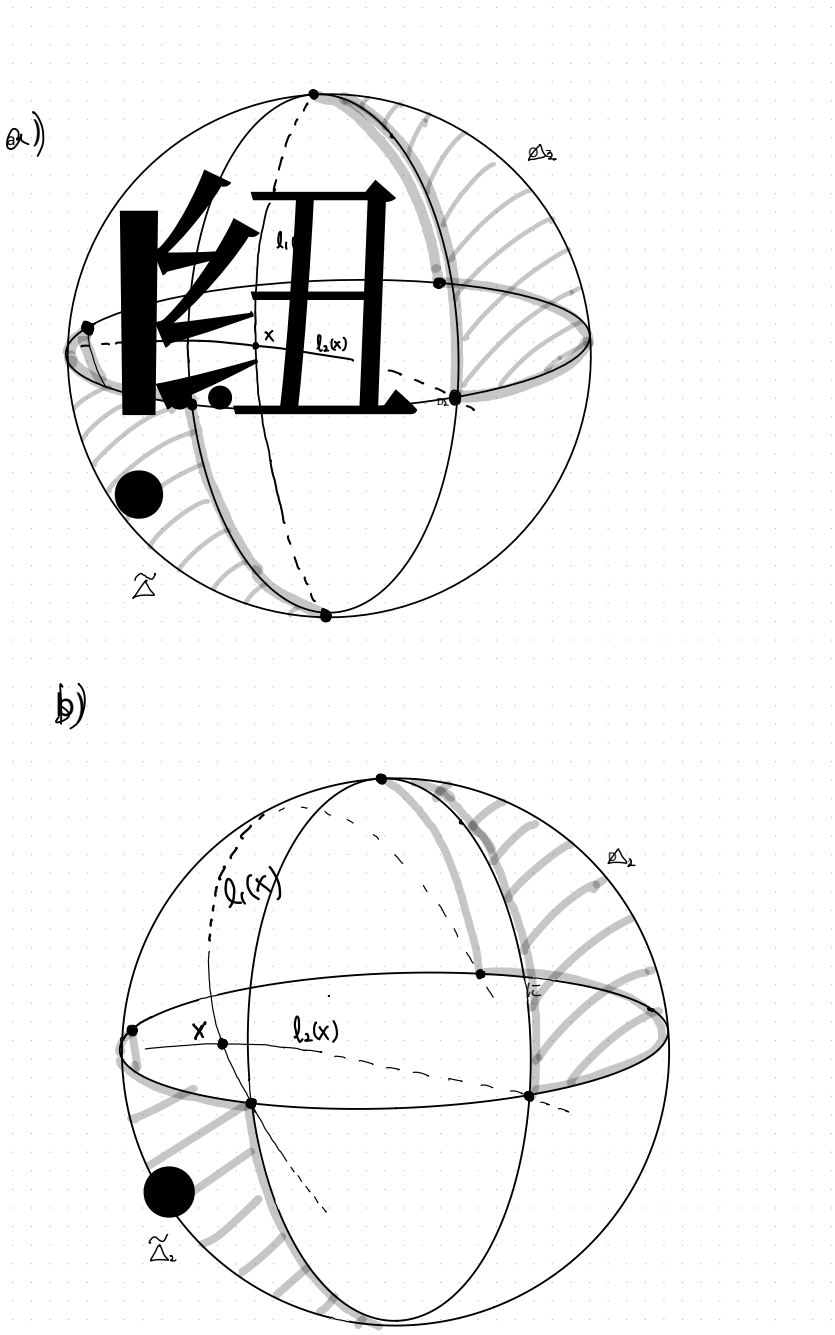


FIGURE 6. 光锥结构

坐标 $(x,\ y)$ 与向量 $(v_1,\ v_2)$ 所指射线和 x轴交点之间的距离，则在此情况下，我们有 $r_+ = \frac{y}{\text{余弦}\,\theta}$ 且

$$p(\mathbf{x}, v) = \frac{1}{2}|v|\left(\frac{1}{\frac{y}{\cos\theta}}\right) = \frac{1}{2}\frac{|v|\cos\theta}{y} = -\frac{1}{2}\frac{v_2}{y} > 0.$$

情形2由不等式 $\frac{v_2}{v_1} > \frac{y}{x}$ 表征。现在令 σ 为向量与负 x 轴所成的角，并令 r_+ 为坐标为

$(x,\ y)$ 的点与向量 $(v_1,\ v_2)$ 所指射线和 x 轴的交点之间的距离，则与之前一样有 $r_+ = \frac{x}{\text{余弦}\,\sigma}$，并且

$$p(\mathbf{x},v) = \frac{1}{2}|v|\left(\frac{1}{\frac{x}{\cos\sigma}}\right) = \frac{1}{2}\frac{|v|\cos\sigma}{x} = -\frac{1}{2}\frac{v_1}{x} > 0.$$

当 $\frac{v_2}{v_1} = \frac{y}{x}$ 时的中间情形是，向量 v 指向原点，且

$$p(\mathbf{x},v) = -\frac{1}{2}\frac{v_1}{x} = -\frac{1}{2}\frac{v_2}{y} > 0.$$

进行变量替换很有用

$$\tilde{\mathbf{x}} := (\tilde{x},\tilde{y}) := (\log x, \log y) := \operatorname{Log}\mathbf{x}$$

以描述闵可夫斯基范数 p。对数函数 Log 定义了一个从 Q_1 到 $\mathbb{R}^2$ 的微分同胚。这样的变换将 $(x,\ y)$ 平面的第一象限映射到整个 $(\tilde{x},\ \tilde{y})$ 平面；后者被视为前者中某一点处的切空间。

切向量的变量替换由雅可比矩阵描述：

$$d\text{Log} : \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \frac{1}{x} & 0 \\ 0 & \frac{1}{y} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{v_1}{x} \\ \frac{v_2}{y} \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} \tilde{v}_1 \\ \tilde{v}_2 \end{pmatrix}$$

因此，用 $(\tilde{x}_1,\ \tilde{x}_2)$ 坐标表示的闵可夫斯基泛函可由以下公式给出

$$p(\mathbf{x},\mathbf{v}) = -\frac{1}{2}\frac{v_2}{x_2} = -\frac{1}{2}\tilde{v}_2 := \tilde{p}(\tilde{\mathbf{x}},\tilde{\mathbf{v}})$$

在 $\tilde{v}_1 > \tilde{v}_2$ 的情况下且

$$p(\mathbf{x},\mathbf{v}) = -\frac{1}{2}\frac{v_1}{x_1} = -\frac{1}{2}\tilde{v}_1 > 0 =: \tilde{p}(\tilde{\mathbf{x}},\tilde{\mathbf{v}})$$

在 $\tilde{v}_1 < \tilde{v}_2$的情况下。

这些公式，

$$\tilde{p}(\tilde{\mathbf{x}},\tilde{\mathbf{v}}) = \begin{cases} -\frac{1}{2}\tilde{v}_2 > 0 & \text{if } \tilde{v}_1 > \tilde{v}_2, \\ -\frac{1}{2}\tilde{v}_1 > 0 & \text{if } \tilde{v}_1 < \tilde{v}_2. \end{cases} \tag{3}$$

与（$\tilde{x},\ \tilde{y}$）坐标无关。因此，芬斯勒空间是闵可夫斯基空间，也就是说，是一个有限维赋范空间；特别地，该度量的光锥结构在（$\tilde{x},\ \tilde{y}$）中是齐次的（见图 8a）。

□

现在来研究第二象限 $Q_2 = \{x < 0, y > 0\}$ 中一点 $\mathbf{x} = (x,\ y)$ 处的芬斯勒结构。（见图 6b。）请记住，无须证明主定理，因为总可以改变局部坐标图，使上述论证能够在新的坐标系中原样应用。事实上，使用坐标图（$\mathbb{U}_3,\ \pi_3$），变换 $\pi_3 \circ (\tilde{\pi}_2)^{-1}$ 会将 Q_2 移至 Π_3 的 x_2x_3-平面中的第三象限 Q_3，而未来集 Δ_2 则是 Π_3 的第一象限 Q_1。不过，我们希望从闵可夫斯基泛函的表示角度理解坐标选择的影响。

令$\mathbf{v} = (v_1,\ v_2)$表示该点$\mathbf{x}$处一个向量的坐标。我们关注从$\mathbf{x} + t\mathbf{v}$ 出发的射线击中第三象限 Q_3的情形。（见图 7b。）此时，这条射线必须击中 x轴的负半轴，且需满足$v_2 < 0$。不过，有两种情况需要区分：

情况1：$v_1 \le 0$;
情形2：$v_1 > 0$。

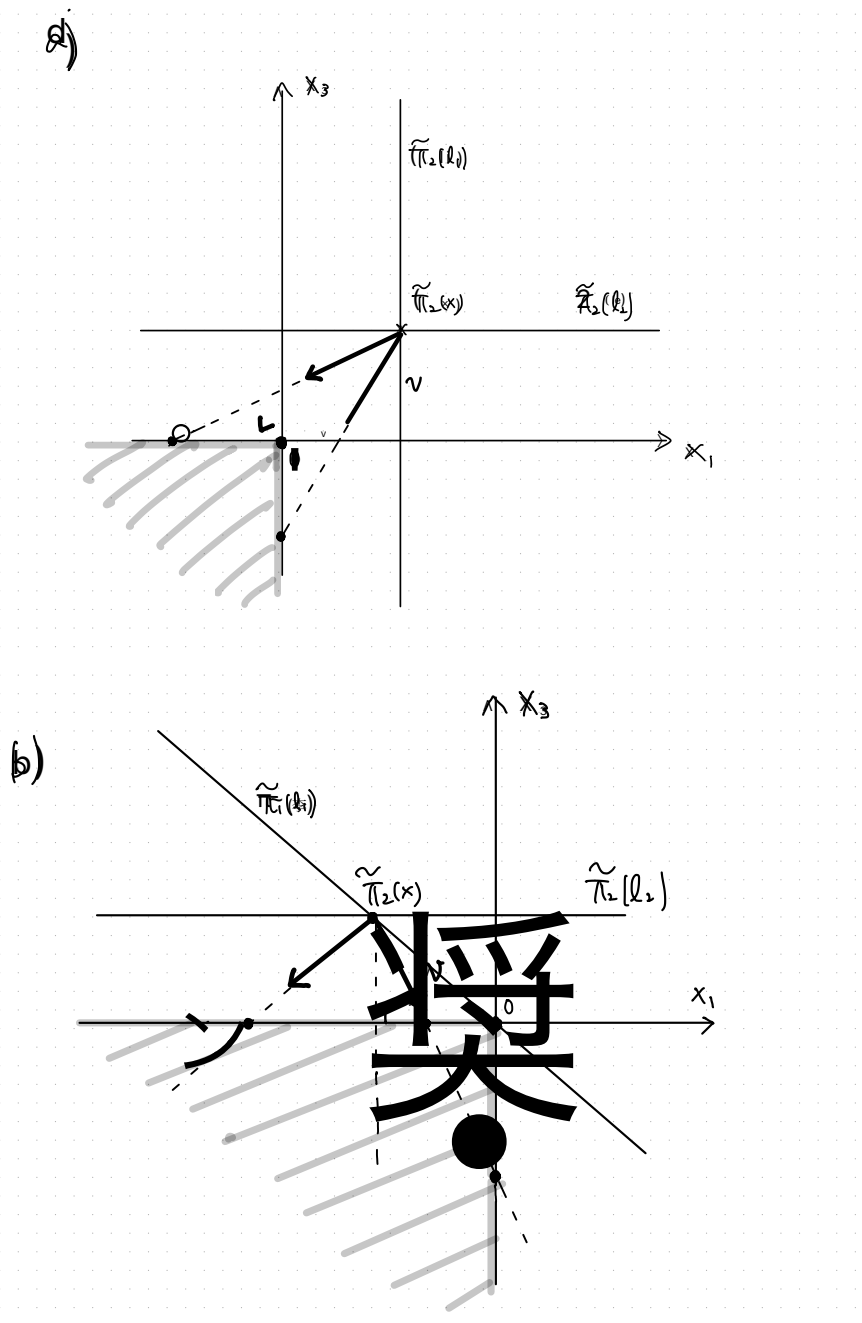


FIGURE 7. 局部坐标图

情况1很简单，因为射线一旦到达 Q_3，就会一直位于 Q_3中。在这种情况下，闵可夫斯基泛函就是

$$p(\mathbf{x}, \mathbf{v}) = -\frac{1}{2}\frac{v_2}{y}.$$

在情形2中，射线 Q_3 在 a_1 处进入象限，随后在点 $\hat{a}_2$ 处离开象限，该点属于 y轴的负半轴。事实上，闵可夫斯基

泛函作为.....的线性化

$$H(\mathbf{x},\mathbf{x}+t\mathbf{v})=\frac{1}{2}\log[\hat{a}_2,\mathbf{x},\mathbf{x}+t\mathbf{v},a_1]$$

在 $t=0$ 处计算为

$$p(\mathbf{x},\mathbf{v})=\frac{d}{dt}H(\mathbf{x},\mathbf{x}+t\mathbf{v})\Big|_{\{t=0\}}=\frac{1}{2}|v|\Big(\frac{1}{r^+}-\frac{1}{\hat{r}^-}\Big),$$

其中，$\hat{r}^-$ 是从 $\mathbf{x}$ 到 $\hat{a}_2$ 的欧几里得距离。

我们通过映射 $Q_2=\{x<0,y>0\}$ 到整个平面 $\mathbb{R}^2$

$$\mathrm{Log}:(x,y)\mapsto(\log(-x),\log y)$$

其微分为

$$d\mathrm{Log}:\begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix}\frac{1}{-x}&0\\0&\frac{1}{y}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{v_1}{x}\\\frac{v_2}{y}\end{pmatrix}=:\begin{pmatrix}-\tilde{v}_1\\\tilde{v}_2\end{pmatrix}$$

其中 $v_2<0$，进而可推出 $\tilde{v}_2<0$。这一变量替换导出了闵可夫斯基泛函的以下表达式：

在情况1中，我们有 $v_1\le 0$，以及 $r^-=\infty$，因此

$$p(\mathbf{x},\mathbf{v})=\frac{1}{2}|v|\Big(\frac{1}{r^+}+\frac{1}{\cancel{r^-}}\Big)=-\frac{1}{2}\frac{v_2}{y}=-\frac{1}{2}\tilde{v_2}>0.$$

在情形2中，我们有 $v_1>0$，$\hat{r}^-=\frac{x}{\text{正弦}\,\theta}$，其中 θ 是 v 与y-轴之间的角。因此

$$p(\mathbf{x},\mathbf{v})=\frac{1}{2}|v|\Big(\frac{1}{r^+}-\frac{1}{\hat{r}^-}\Big)=-\frac{1}{2}\frac{v_2}{y}-\frac{1}{2}\frac{|v|\sin\theta}{x}=-\frac{1}{2}\frac{v_2}{y}-\frac{1}{2}\frac{v_1}{x}=-\frac{1}{2}\tilde{v}_2-\frac{1}{2}\tilde{v}_1.$$

注意，情形2中的范数为正，因为几何关系蕴含了 $\hat{r}^->r^+$。因此，我们有

$$\tilde{p}(\tilde{\mathbf{x}},\tilde{\mathbf{v}})=\begin{cases}-\frac{1}{2}\tilde{v_2} & \text{if } \tilde{v}_1\le 0,\\ -\frac{1}{2}\tilde{v}_1-\frac{1}{2}\tilde{v_2} & \text{if } \tilde{v}_1>0\end{cases}\tag{4}$$

注意，在 $\mathbb{R}^2$ 上如此定义的闵可夫斯基范数 $\tilde{p}$ 与 $(\tilde{x},\tilde{y})$ 无关，这使得该类时度量空间具有齐性。该范数的单位长度向量集合（即其指标曲面），以及此赋范空间中的光锥，均如图8b所示。可以验证，对于相应的闵可夫斯基泛函指标曲面，图8a与图8b可通过变换 $\pi_3\circ(\tilde{\pi}_2)^{-1}$ 相互对应。

因此，$\Omega=S^2\setminus(\Delta_2\cup\tilde{\Delta}_2)$ 的类时球面希尔伯特几何是齐性的。其局部齐性由 $(\mathbb{R}_{>0})^2$ 表示，体现为类时赋范空间的结构；整体齐性则由阿贝尔李群 $(\mathbb{R}_{>0})^2\times\mathbb{Z}_3\times\mathbb{Z}_2$ 的作用给出。根据计算闵可夫斯基范数的位置不同，这种局部齐性可以有不同的表达方式。

当局部坐标图按上述方式选取，使得基点 $\mathbf{x}$ 位于 Q_1 的第一象限，且单纯形 Δ_2 为 Q_3 时，多重符号 $\mathrm{MS}(\mathbf{x})=(+,-+)$，而对于 Δ_2 中的任意点 $\mathbf{y}$，$\mathrm{MS}(\mathbf{y})=(-,-,-)$。从 x 到 y 时，多重符号 MS 必须从 $(+,-,+)$ 变为 $(-,-,-)$。也就是说，从 $\mathbf{x}$ 的角度来看，需要穿过 $\mathbb{R}^3$ 中的两个坐标超平面：

$$(+,-,+)\to(-,-,+)\to(-,-,-)\quad\text{or}\quad(+,-,+)\to(+,-,-)\to(-,-,-)$$

沿单位球面移动，以便从$\mathbf{x}$到达单纯形 Δ_2。在赋范空间模型中，每个超平面对应$\mathbf{x}$ 处光锥的一侧，也就是说，对应于平行于 $\tilde{x}$ 轴和 $\tilde{y}$轴的射线，因为光锥渐近于与凸集 Δ_2边界相切的方向。

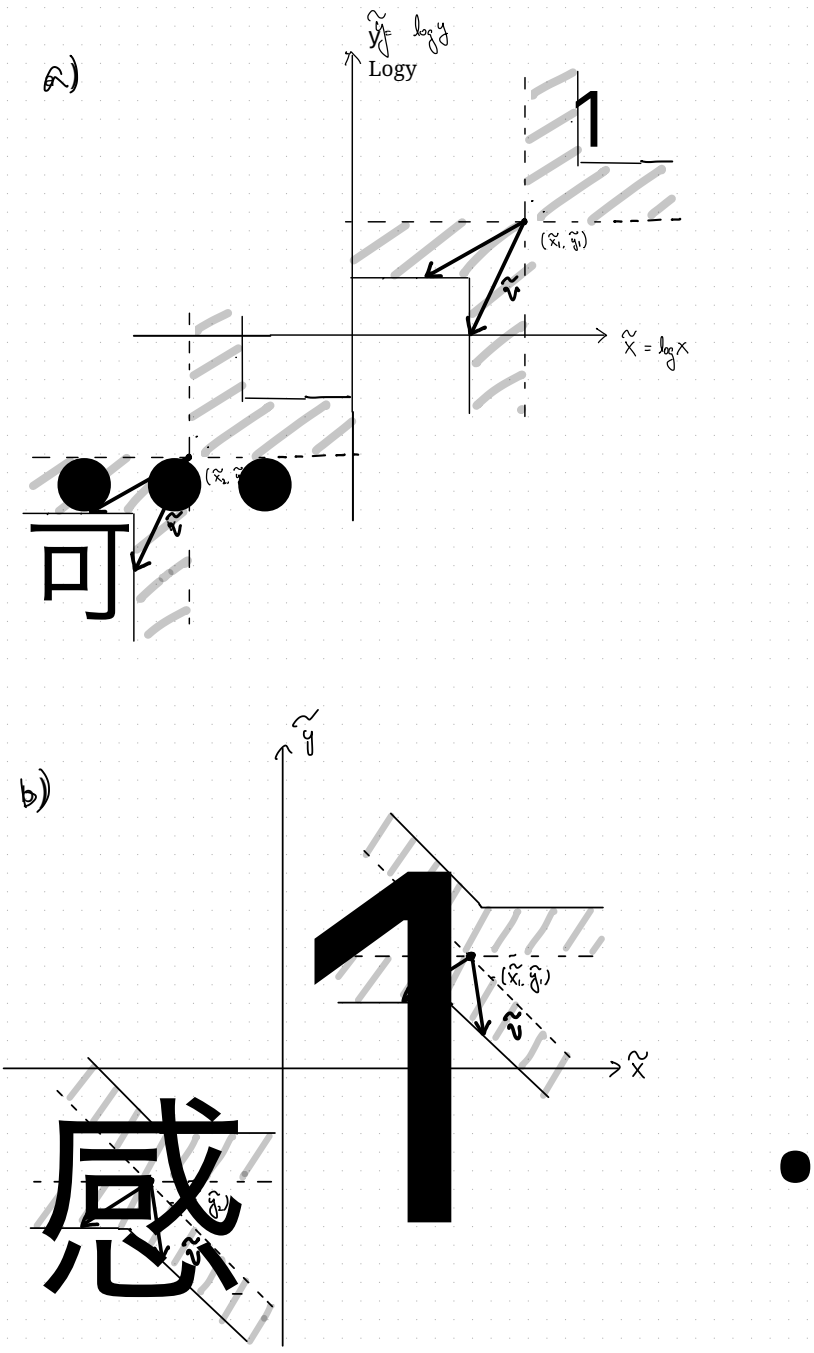


FIGURE 8. 闵可夫斯基泛函

另一方面，局部坐标图按上述方式选取，使得基点**x**位于 Q_2的第一象限中，且单纯形为 Q_3。于是，当沿着从**x**到 Q_3中的点**y** 的路径移动时，多重符号必须从(−, −, +)变为(−, −, −)。请注意，要从**x**到达 Q_3 ，只需穿过一个坐标超平面，即(x_1, x_2)平面。赋范空间模型中**x** 处的过去向光锥由两条射线组成，一条渐近于 x轴，另一条穿过 $\tilde{x}\tilde{y}$平面的原点。

当然，如果考察$\mathbf{x}$的“未来”，那么多重符号会从$(-,\ -,\ +)$变为$(+,\ +,\ +)$，于是情况便回到了第一种情形：多重符号从$(+,\ -,\ +)$变为$(-,\ -,\ -)$，其中“未来” $\leftrightarrow$ “过去”具有 $\mathbb{Z}_2$ 对称性。

特别是，这意味着表示希尔伯特几何的赋范空间中光锥的形状取决于基点$\mathbf{x}$的多重符号，尽管它们彼此等价。（比较图 8a和图8b。）

最后我们指出，Phadke在论文 [7], 中给出了与单纯形内部相关的经典（非类时）闵可夫斯基泛函的公式。我们的公式是Phadke公式的类时对应形式。

References

[1] G. Buro，《低正则性芬斯勒度量与弱伪芬斯勒度量的测地线》，博士论文，洛桑联邦理工学院，洛桑，2023年2月。[2] H. Busemann，《Busemann的类时空间度量理论》，Academic Press, Now York，1955年。Dover于2005年及后续版本再版。[3] H. Busemann，《闵可夫斯基几何基础》，《Comment. Math. Helv.》24（1950），第156–187页。收入《Busemann文选》（A. Papadopoulos编）第I卷，第483–514页，施普林格，2018年再版。[4] H. Busemann，《类时空间》。《Dissertationes Math. Rozprawy Mat.》53（1967），共52页。收入《Busemann文选》（A. Papadopoulos编）第I卷，第741–786页，2018年由施普林格再版。[5] H. Busemann和B. B. Phadke，《贝尔特拉米定理的大范围推广》。《Pacific J. Math.》115（1984），299–315页。收入《Busemann文选》（A. Papadopoulos编）第II卷，第741–786页，2018年由施普林格再版。[6] A. Einstein，《广义相对论的基础》，《物理学年鉴》，第 49, 7, 1916, 769 822, 卷, No. January p. - B. B. Phadke，《具有六边形圆的三角形世界》。《Geom. Dedicata》3，511–520[7]页（1975）。[8] A. Papadopoulos和S. Yamada，《常曲率空间的射影几何》，载于《埃尔朗根纲领及其对数学与物理学的影响》，欧洲数学会出版社，第23卷，第237–245页，2015年。[9] A. Papadopoulos和S. Yamada，《Busemann的类时空间度量理论》，载于《Herbert Busemann文选》（A. Papadopoulos编）第I卷，第115–131页，施普林格，2018年。[10] A. Papadopoulos和S. Yamada，《类时希尔伯特几何与芬克几何》。《Differential Geometry and its Applications》第67卷，2019年12月，第1–45页。[11] A. Papadopoulos，《时序几何》，载于《Herbert Busemann文选》第I卷，第133–141页，施普林格出版社，2018年。[12] H. Samelson，《佩龙-弗罗贝尼乌斯定理述评》。《Michigan Math. J.》4，57–59页（1957）。

Athanase Papadopoulos, Université de Strasbourg and CNRS, 7 rue René Descartes, 67084 Strasbourg Cedex, France*Email address*: athanase.papadopoulos@math.unistra.fr

Sumio Yamada, Gakushuin University, 1-5-1 Mejiro, Toshima, Tokyo, 171-8588, Japan
Email address: yamada@math.gakushuin.ac.jp