arXiv:2303.04593v1 [math.GN] 8 Mar 2023

拓扑群覆盖维数的无子群定理

奥尔加·西帕切娃

Abstract. 构造了一个强零维拓扑群，其中包含一个具有正覆盖维数的闭子群。

在 [1, 问题 2.1] 中，Shakhmatov 提出，对于任意拓扑群 G的任意子群 H，不等式[1] $\dim_0 H \leqslant \dim_0 G$是否成立。他证明，若 G 是局部伪紧群或 Lindel¨of 群 [1,2]，答案为肯定。已知若 H 是 $\mathbb{R}$-可分解的，则 $\dim_0 H \leqslant \dim_0 G$ [3,（定理 2.7]）。特别地，若 H 是 Lindel¨of 群，则 $\dim H = \dim_0 H \leqslant \dim_0 G$。本文构造了一个 $\mathbb{R}$-可分解群 G，满足 $\dim_0 G = 0$，并且包含一个覆盖维数为正的闭子群 H，其覆盖维数 $\dim_0$ 和 $\dim$。此外，H 是两个 Lindel¨of（因而是 $\mathbb{R}$-可分解的）强零维群的乘积，其中一个是宇宙群。因此，作为附带结果，我们对 [3], 中的 Tkachenko 的问题 4.1，以及 [4]中的问题 8.2.2、8.5.4 和 8.5.6，给出了否定答案。

设 $C \subset [0,1]$ 为通常的康托尔集，并用 τ 表示其拓扑。在 [5] 中（特别参见注 1），我们基于 Przymusi´nski 在 [6] 和 [7] 中的构造（另见 [8]），在 C 上定义了一种新的拓扑 $\tau_1 \supset \tau$，并构造了一个集合 $S_2 \subset C$，使得空间 $C_1 = (C, \tau_1)$ 和 $C_2 = (S_2, \tau|_{S_2})$ 及其自由阿贝尔拓扑群 $A(C_1)$ 和 $A(C_2)$ 具有以下性质：

(1) 对任意 $n \in \mathbb{N}$，C_1^n 都是林德洛夫空间，因此 $A(C_1)$ 也是如此（见 [4, 推论 7.1.18]）；(2) C_2 是宇宙空间（即具有可数网络），因此 $A(C_2)$ 也是如此（见 [4, 推论 7.1.17]）；(3) $\dim_0 C_i = \dim_0 A(C_i) = 0$，其中 $i = 1,2$；(4) $\dim_0(A(C_1) \times A(C_2)) > 0$。

回顾一下，给定蒂霍诺夫空间 X 上的任意连续伪度量 p，其到自由阿贝尔拓扑群 $A(X)$ 的 Graev 延拓已有定义。这是 $A(X)$ 上的一个不变[2] 连续伪度量 $\widehat{p}$，尤其具有以下性质 [9], [10]（另见 [4, 第 425–434] 页）：

(1) $\widehat{p}(x, y) = \min\{1, p(x, y)\}$ 对任意 $x, y \in X$成立；(2) 对任意 $g = k_1 x_1 + \cdots + k_n x_n \in A(X)$，其中 $k_i \in \mathbb{Z}$ 且 $x_i \in X$，对于 $i \leqslant n$,$\widehat{p}$，$(g, 0)$ 是集合 $\{1\} \cup \{p(x_i, x_j) : i, j \leqslant n\}$ 中若干数的和（此处及下文中，0 表示 $A(C_i)$ 的零元）；

2020 *Mathematics Subject Classification*。22A05，54F45。*Key words and phrases*。拓扑群、覆盖维数、子群的覆盖维数、 $\mathbb{R}$-可因子化群。[1]回顾一下，$\dim X$ ($\dim_0 X$) 是满足以下条件的最小整数 $n \geqslant -1$：只要存在这样的有限开（余零）覆盖，X 的任意有限开（余零）覆盖都存在一个阶数为 n 的有限开（余零）加细（见 [8]）。具有 $\dim_0 X = 0$（具有 $\operatorname{ind} X = 0$）的空间 X 称为 *strongly zero-dimensional*（*zero-dimensional*）。[2]群 G 上的伪度量 d 若满足：对任意x、y、$g \in G$，$d(x, y) = d(g \cdot x, g \cdot y) = d(x \cdot g, y \cdot g)$，则称其为 *invariant*。若 d 不变，则对任意 x、$y \in G$，还有 $d(x^{-1}, y^{-1}) = d(x, y)$。

(3) 若 p 是度量，则 $\widehat{p}$也是度量；(4) 若 p_1 和 p_2 是 X 上的连续伪度量，且 p_2 支配 p_1，即对所有 $x, y \in X$，$p_1(x, y) \leqslant p_2(x, y)$，则 $\widehat{p}_2$ 支配 $\widehat{p}_1$；(5) 所有开 $\widehat{p}$-球（其中 p 遍历 X上所有不超过 1 的连续伪度量）构成 $A(X)$的拓扑的一组基。

固定一个 $i \in \{1, 2\}$，并令 $\mathscr{P}_i$ 表示 C_i 上所有有界于 1 的连续伪度量的集合。

引理 1. 在 C_i 上有界于 1 的任意连续伪度量 p，都被一个取值于 $\{0\} \cup \{1/2^n$ 的连续超度量 [3] d_p C_i 所控制：$n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$。

证明. 我们注意到，C_i 的拓扑比从 $\mathbb{R}$ 诱导的拓扑更细。因此，对所有 x、$y \in C_i$，令 $\bar{p}(x, y) = \max\{p(x, y) \ |x-y|\}$，便得到 C_i 上一个控制 p 的连续度量 $\bar{p}$。下面我们递归地构造 C_i 的不交开覆盖γ_n, $n \in \omega$，并用它们定义一个控制 $\bar{p}$ 的连续超度量。

我们令 $\gamma_0 = C_i$。

假设 $k \in \mathbb{N}$ 和不交开覆盖 $\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_{k-1}$ 已经定义，且每个覆盖都加细前一个覆盖。由于 C_i 是副紧的，存在 C_i 的一个局部有限开覆盖 γ，它同时加细 γ_{k-1} 以及由半径为 $\frac{1}{2^{k+1}}$的开 $\bar{p}$- 球构成的 C_i 的覆盖。根据 [8] 的引理 17.16，γ 有一个不交开加细；我们将其记作 γ_k。

我们得到了一列互不相交的开覆盖 $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$，其覆盖对象为 C_i，并且对于每个 $n \geqslant 1$，γ_n 的每个元素都包含在半径为$\frac{1}{2^{n+1}}$ 的开 $\bar{p}$ 球中，且 γ_{n+1} 是 γ_n 的加细。函数 $d_p\colon C_i \times C_i \to \mathbb{R}$ 定义如下

$$d_p(x, y) = \inf\left\{\frac{1}{2^n} : \exists U \in \gamma_n \text{ such that } x, y \in U\right\}$$

是 C_i 上的连续超度量，并且它支配 $\bar{p}$。 □

引理 2. 群 $A(C_i)$ 可嵌入由零维第二可数群构成的乘积中，并且是其中的闭子群。

证明. 由于 d_p 是 C_i 上任意连续伪度量 p 的一个度量，因此^所有格拉耶夫延拓 d_p 都是不变度量。因此，每个延拓都在 $A(C_i)$ 上确定一个豪斯多夫群拓扑 τ_p，而自由阿贝尔拓扑群 $A(C_i)$ 的拓扑是这些拓扑的上确界（见格拉耶夫延拓的性质 (5)）。因此，恒等同构 $i_p\colon A(C_i) \to (A(C_i)\ \tau_p)$, $p \in \mathscr{P}_i$ 将点与闭集分离，所以它们的对角映射 $\Delta_{p\in\mathscr{P}_i} i_p$ 是 $A(C_i)$ 与可度量拓扑群乘积 $\prod (A(C_i)\ \tau_p)$ 的对角线之间的同胚。显然，这个同胚是拓扑同构。因此，$A(C_i)$ 在拓扑上同构于 $\prod_{p\in\mathscr{P}}$ 的一个闭子群

$$(A(C_i)\ \tau_p)。$$

^鉴于 Graev 延拓的性质（2），每个度量 d_p 只取有理数^值。由于无理半径的 d_p-球构成 τ_p 的基且既开又闭，因此，对于每个 $p \in \mathscr{P}_i$，可度量化空间（$A(C_i)\ \tau_p$）都是零维的。此外，它是 Lindel¨of 空间，因为它是 Lindel¨of 空间 $A(C_i)$ 的连续像；因此，它是第二可数的。□

定理 1. 存在一个强零维阿贝尔拓扑群 G，其中包含一个闭子群 H，且 $\dim_0(H) > 0$。

[3] 一个 *ultrametric* 是满足以下条件的度量：对于所有 x、y 和 z，均有 *strong triangle inequality* $d(x, z) \leqslant \max\{d(x, y)\ d(y, z)\}$。

证明. 只需令 $G = \prod_{p\in\mathscr{P}_1} (A(C_1)\ \tau_p) \times \prod_{p\in\mathscr{P}_2} (A(C_2)\ \tau_p)$ 且 $H = A(C_1) \times A(C_2)$，并回忆一下：任意零维第二可数空间的乘积都是强零维的 [11, 定理 3]。□

˘ 注 1. 很容易构造一个类似的例子，适用于 Cech–Lebesgue 覆盖维数 dim（但在这种情况下，子群 H 无法做到闭，因为对于维数 dim，闭子集定理成立 [8, 命题 2.11]）。事实上，考虑 Sorgenfrey平面 $S \times S$。它是零维的，因此可嵌入 Cantor立方体 $K = \{0,1\}^{2^\omega}$ [12, 定理 6.2.16]。由于 K 是强零维的，因此自由阿贝尔拓扑群 $A(K)$ 是零维的 [13], ；又因为 $A(K)$ 是 Lindel¨of [4, 推论 7.1.18], ，所以 $\dim A(K) = 0$。令 H 表示由 $S \times S$ 生成的 $A(K)$ 的子群。显然，$H \cap K = S \times S$，因此 $S \times S$ 在 H 中是闭的。我们有 $\dim(S \times S) > 0$，因为所有维数为零的空间都是正规的，而 $S \times S$ 不是。因此，$\dim H > 0$。

最后，我们对 $\mathbb{R}$-可因子化群作一观察。若对每个连续函数 $f\colon G \to \mathbb{R}$，都存在一个连续满同态 $h\colon G \to H$ 到第二可数拓扑群 H，以及一个连续函数 $g\colon H \to \mathbb{R}$，使得 $f = g \circ h$，则称拓扑群 G 为 $\mathbb{R}$-可因子化的。已知任何 Lindel¨of 群都是 $\mathbb{R}$-可因子化的 [16, 断言 1。1] 并且对于任意拓扑群 G 及其任意 $\mathbb{R}$-可因子化子群 H，都有 $\dim_0 H \leqslant \dim_0 G$。这两个事实意味着，群 $A(C_1)$ 和 $A(C_2)$ 都是 $\mathbb{R}$-可因子化的，而它们的乘积却不是。因此，以下定理成立。

定理 2. 存在阿贝尔拓扑群 G 和 H，具有以下性质：

(1) 对每个 $n \in \mathbb{N}$， G^n 都是 Lindel¨of 的，而 H 是宇宙（因此 G 和 H 都是 $\mathbb{R}$-可因子化的）；(2) G 和 H 都是 Raikov完备的（因此 $G \times H$也是）；(3) 乘积 $G \times H$ 不是 $\mathbb{R}$-可因子化的。

证明。我们令 $G = A(C_1)$ 和 $H = A(C_2)$。如上所示，这些群 G and$H$ 满足条件 (1) 和 (3)；条件 (2) 则由以下事实得出：任何抛物紧空间都是 Dieudonné 完备的（见 [12, 8.5.13]），并且根据 Tkachenko–Uspenskij 定理，Dieudonné 完备空间的自由阿贝尔拓扑群是 Raikov 完备的 [14], [15]. □

作者非常感谢 Evgenii Reznichenko 的富有成效的讨论。

References

[1] D. Shakhmatov, 《关于拓扑群维数论当前研究与开放问题的综述》, Questions Answers Gen. Topology 8, 101–128 (1990)。[2] D. B. Shakhmatov, 《保持维数的拓扑群嵌入》, 《拓扑学及其应用》36, 181–204 (1990)。[3] Michael Tka˘cenko, 《 ℝ可分解群的子群、商群与积》, Topol. Proc. 16, 201–231 (1991)。[4] A. Arhangel'skii 和 M. Tkachenko, *Topological Groups and Related Structures*（Atlantis Press/World Sci., 阿姆斯特丹–巴黎, 2008）。[5] O. Sipacheva, 《拓扑群覆盖维数不存在乘积定理》, arXiv:2207.04961 [math.GN]。[6] T. C. Przymusi´nski, 《关于积的维数及 M. Wage 的一个例子》, Proc. Amer. Math. Soc. 76, 315–321 (1979)。[7] T. C. Przymusi´nski, 《乘积空间》, 载于 *Surveys in General Topology*, G. M. Reed 编（Academic Press, 纽约, 1980）, 第 399–429 页。[8] M. G. Charalambous, *Dimension Theory: A Selection of Theorems and Counterexamples*（Springer International, Cham, 2019）。

[9] M. I. 格拉耶夫，《自由拓扑群》，载于 *Topology and Topological Algebra*，美国数学会译丛，第 1 辑（Amer. Math. Soc., 普罗维登斯，罗得岛州，1962），第 8 卷，第 305–364 页。俄文原文载于：苏联科学院学报，数学辑 12, 279–323 (1948)。[10] D. 马克森，《自由阿贝尔拓扑群的单位元邻域》，《斯洛伐克数学》26, 247–256 (1976)。[11] K. 森田，《吉洪诺夫空间乘积的维数》，《一般拓扑学及其应用》3, 123–133 (1973)。[12] R. 恩格尔金，*General Topology*，第 2 版（赫尔德曼出版社，柏林，1989）。[13] M. G. 特卡琴科，《自由拓扑群的零维性》，保加利亚科学院通报 38 (2), 173–174 (1985)。[14] M. G. 特卡琴科，《自由阿贝尔拓扑群的完备性》，《苏联数学文献》27, 341–345 (1983)。俄文原文载于：苏联科学院通报 269, 299–303 (1983)。[15] V. V. Uspenskiĭ，《可度量化空间的自由拓扑群》，《苏联数学科学院学报》37 (3), 657–680 (1991)。俄文原文载于：苏联科学院学报数学辑 54 (6), 1295–1319 (1990)。[16] M. G. 特卡琴科，《拓扑群的分解定理及其应用》，《拓扑学及其应用》38, 21–37 (1991)。

Department of General Topology and Geometry, Faculty of Mechanics and Mathematics, M. V. Lomonosov Moscow State University, Leninskie Gory 1, Moscow, 199991Russia*Email address*: o-sipa@yandex.ru, osipa@gmail.com