arXiv:2303.04597v1 [physics.optics] 8 Mar 2023

含光学晶格的散焦介质中的光隙子弹

Zhiming Chen[1,2] 和 Jianhua Zeng[1,3,*][1]中国科学院西安光学精密机械研究所瞬态光学与光子学国家重点实验室，中国西安 710119[2]东华理工大学理学院，中国南昌 330013[3]中国科学院大学，中国北京 100049（日期：2023年3月9日）

寻找三维时空孤子（也称为光子弹）近年来引起了非线性物理领域理论和实验研究的浓厚兴趣。目前，人们已引入各种光学晶格来稳定光子弹，但对带隙型光子弹——即存在于底层线性布洛赫谱有限带隙中的非线性局域模式——的研究仍然缺乏。本文从理论和数值角度，研究了散焦非线性周期介质中此类光隙子弹的形成及稳定特性。周期介质基于相干三能级原子系统中的二维周期驻波，该系统被驱动至电磁感应透明状态；原则上，也可分别以光学中的光子晶体或基态超冷原子系统中的光学晶格取代。时间色散项被调节为正常（正）群速度色散，从而能够在自排斥型非线性下激发光隙子弹。本文报告了在第一有限带隙内构建的两类此类光隙子弹，即三维带隙孤子和拓扑荷为 $m = 1$ 的涡旋，并发现它们在存在区域内具有稳健的稳定性。此前，光子弹的研究仅限于周期介质的半无限带隙以及连续非线性物理系统。因此，本文报告的光隙子弹补充了周期介质中缺失的一类三维时空局域模式，这类介质具有有限带隙。

引言。——由于吸引性立方（克尔）非线性会引发固有的超临界波塌缩（二维（2D）情形中也存在临界波塌缩），因此要产生稳定的三维（3D）局域模式（又称孤子）是一项极具挑战性的任务。[1–9]为应对科学各领域孤子研究中的此类高维波塌缩，有必要引入额外的物理效应，包括合成周期势 [10–20], 可饱和吸收体 [21, 22], 光学腔 [23–25], 半导体有源介质 [26] 或二次非线性介质[27], 波导与光纤阵列 [28–31], 具有非局域特性的材料[32, 33] 或具有竞争性（聚焦）立方非线性与（散焦）五次非线性的材料[34, 35], 线性自旋-轨道耦合 [36], 等。

近年来，在各种光学系统和玻色–爱因斯坦凝聚体（BECs）中，三维局域模式的产生——包括光子弹（时空孤子）——无论从理论预测[37–48]还是实验观测 [28–30]来看，都吸引了广泛关注。特别是，理论预测表明，在电磁感应透明（EIT）条件下，超冷 ^{87}Rb原子气体中的低功率（弱光）$(3+1)$维光子弹和涡旋可以实现存储与读取 [41], 。这一设想随后拓展至兼具局域与非局域非线性的超冷里德堡原子气体[44, 45]。Kartashov等人研究了在具有宇称-时间对称光学晶格的聚焦型克尔非线性介质中，稳定三维拓扑孤子（光子弹）的产生及其性质[42]。最近，Kartarshov预测了光子莫尔˙晶格中光子弹一个引人注目的稳定性区域[48]。然而，所有这些关于有无周期势时光子弹的研究都局限于聚焦型非线性介质；而在周期性散焦非线性介质中，以三维局域带隙模式形式存在、位于相应线性布洛赫波谱有限带隙内的光子弹（我们称之为光隙子弹）的产生、稳定化及其性质，据我们所知，仍未得到探索。

本文通过理论和数值方法，探讨了在电磁感应透明条件下工作的散焦原子介质中，由二维光学晶格束缚的三维时空局域带隙态（又称光隙子弹）的存在性及稳定性。我们报告了两类拓扑局域带隙态：基态隙孤子（零涡旋度）和具有涡旋度（拓扑荷） $m = 1$ 的带隙涡旋。研究发现，它们在第一有限带隙内具有稳健的稳定性，而在接近布洛赫能带两侧边缘时则不稳定。尽管聚焦介质中的光子弹已在周期势中得到深入研究，但它们仅局限于相应线性布洛赫能带的半无限带隙（而非有限带隙）。因此，我们的研究报道了周期性光学介质中排斥非线性所支持的首个隙型光子弹，为探索二维周期性介质中的光子弹等高维稳定拓扑带隙模式开辟了新途径。

理论模型。——三维时空孤子的传播动力学，在周期性光学介质或电磁诱导光学晶格中由无量纲复振幅非线性薛定谔方程支配， $\psi(\xi,\eta,\tau)$，其沿传播距离 s 的演化见补充材料：

$$i\frac{\partial\psi}{\partial s} = -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial\eta^2}\right)+\frac{\beta}{2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\tau^2}+g|\psi|^2\psi+V_{\mathrm{OL}}\psi, \quad (1)$$

其中， ξ 和 η 是横向平面中的坐标， τ 是时间，二维光学晶格给出 $V_{\mathrm{OL}}(\xi,\eta) = -c_0(\sin^2\xi +$

* zengjh@opt.ac.cn

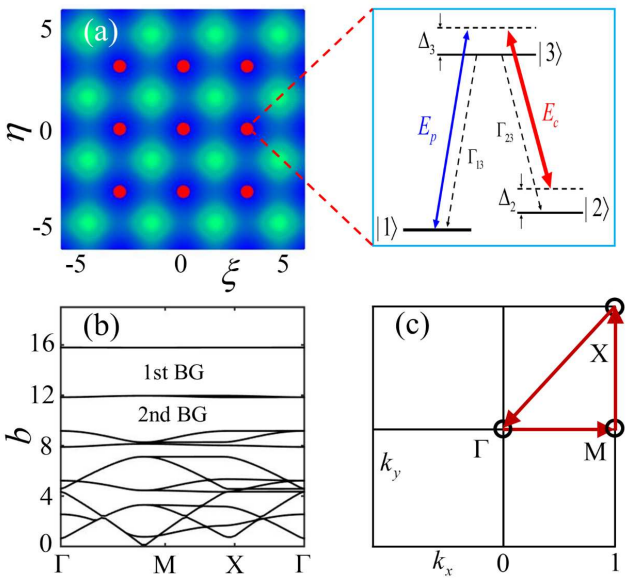


图 1. 被二维光晶格俘获的相干原子系综及其相关线性布洛赫谱。(a) 深度为 $c_0 = 10$的二维方形光晶格等高线图，绿色阴影对应晶格势能极大值，红点表示俘获于晶格势能极小值处的三能级 Λ型原子（其激发方案如右上角所示）。(右上) ^{87}Rb 原子调谐至 D1线跃迁[49]，处于电磁感应透明模式：弱探测场$\mathbf{E}_p$ 和强连续波控制场$\mathbf{E}_c$分别耦合跃迁 $|1\rangle \leftrightarrow |3\rangle$ 和 $|2\rangle \leftrightarrow |3\rangle$；$\Gamma_{13}$和 Γ_{23} 分别为跃迁 $|3\rangle \to |1\rangle$ 和$|3\rangle \to |2\rangle$ 的自发辐射衰减率，相应的失谐量为 Δ_2 和 Δ_3。(b) 线性带隙谱中的 1st/2nd BG 分别表示第一/第二带隙。(c) 倒易晶格空间中高对称点所在的第一约化布里渊区。

$\sin^2\eta$），讨论中设定强度 $c_0 = 10$，并且 g 为广义非线性克尔系数。如图1（a）所示，对于一个开启电磁感应透明的三能级 Λ型相干原子系综，这种二维光学晶格可由一对反向传播的远失谐激光（斯塔克）场形成。控制方程 [方程（1）] 是基于电偶极近似和旋波近似，采用多尺度法从麦克斯韦-布洛赫方程推导得到的（更多细节见补充材料）。这种晶格的线性布洛赫谱如图 1（b）所示，显示出一个较宽的第一有限带隙；相应的约化布里渊区遵循方形晶格的一般形式 [图 1（c）]。

剩余参数 β 在方程（1）中表示色散系数。在异常群速度色散（GVD）区域内，为生成基阶亮孤子解，该系数固定为 $\beta < 0$；据我们所知，过去所有关于存在或不存在周期势时空孤子的研究都遵循这一规则。与此相应，迄今报道的由二维复晶格支持的三维时空孤子，仅存在于自聚焦（吸引性，$g < 0$）非线性区域。特别是，周期势展现出卓越的带隙调控能力，可在其中产生称为局域带隙模的新局域态，例如带隙孤子和涡旋，过去一直以来也都受到实验和理论领域的广泛关注[10–20]。因此，一个重要的研究目标是揭示二维光学晶格有限带隙中三维时空孤子的形成，以及它们的稳定机制和动力学构型。

这一猜想在物理上是合理的，这一点有两项基本事实为证：（i）自散焦（排斥性，$g > 0$）非线性区域中存在局域带隙模，这在实验中很容易实现；（ii）要在$g > 0$下构造带隙型三维时空孤子（光隙子弹），就必须将反常群速度色散（$\beta < 0$）转换为正常群速度色散区域（$\beta > 0$）；这可以通过选择光的波长（在非线性光学中），或者借助带隙调制获得正有效质量（在由成对反向传播激光束照射的玻色–爱因斯坦凝聚体中）来实现。因此，从技术上讲，阐释三维光隙子弹的理论基础是可行且极具意义的，因为它们是全新的时空局域结构。本研究旨在实现这一目标。

定态带隙模解 ψ 在传播常数b 下表示为 $\psi = \phi e^{ib\tau}$，则方程（1）化简为定态方程

$$b\phi = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial\xi^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial\eta^2}\right) - \frac{\beta}{2}\frac{\partial^2\phi}{\partial\tau^2} - |\phi|^2\phi - V_{\mathrm{OL}}\phi. \quad (2)$$

下文将讨论自散焦非线性，因此令 $g \equiv 1$。为展示下文中 $P(b)$ 的依赖关系，我们将孤子功率定义为 $P = \int\int\int_{-\infty}^{+\infty} |\phi(\xi,\eta,\tau)|^2 d\xi d\eta d\tau$。

在展示数值结果之前，我们先介绍所采用的数值方法。具体而言，利用修正的平方算子迭代法，从方程（2）求解定态光隙子弹，并通过直接扰动模拟检验其稳定性 [50], 。 [方程（1）] 采用四阶龙格-库塔法求解。

光隙子弹。——带隙孤子是光学晶格中的基本带隙模之一；加入时间项后，便构成了第一类也是最简单的光隙子弹。图 $\tau = 0$中分别给出了第一带隙内一个稳定和一个不稳定实例的空间构型等高线图，见图2(a) 和 2(b)；相应的等值面图（包含时间轴）见图2(c)，其中还展示了 $P(b)$ 曲线。由最后一个面板可清楚看出，这些光隙子弹仅在第一有限带隙中部稳定；尤其是，其稳定区域比二维对应形式（不含时间项的二维构型，即 $\beta = 0$）更窄。我们强调，时间导数（仅针对三维时空模）并未被限制在二维空间晶格方向中；这或许可以解释，它非但没有增强光隙子弹的稳定性，反而削弱了稳定性。

图 3（a）和 3（b）展示了所研究的稳定与不稳定光隙子弹的受扰传播动力学。根据演化过程可以观察到，前者保持了良好的相干性，而后者在时间轴（τ）和两个空间坐标（ξ，η）上的形状则发生了剧烈变化。因此，不稳定的动力学给在宽广的稳定区域内实现稳定光隙子弹的完全控制带来了重大挑战。

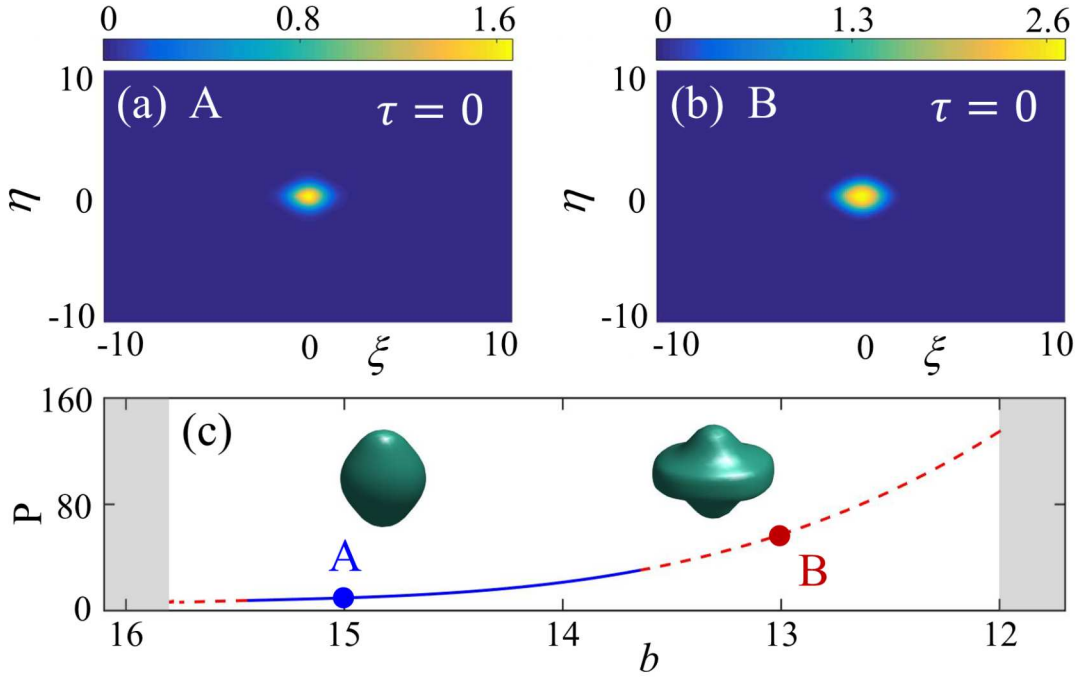


图2. 二维光晶格第一带隙中形成的光隙子弹的形状及存在区域。(a) 稳定和 (b) 不稳定隙型光子弹的等高线图，参数为：(a) $b = 15$, $P = 9.564$；(b) $b = 13$, $P = 57.34$。(c) 光隙子弹的稳定区域（实线）和不稳定区域（虚线），以光隙子弹的能量（孤子功率 P）随传播常数（b）的变化表示；同时还展示了稳定和不稳定光隙子弹的等值面，其等高线图分别见 (a) 和 (b)。

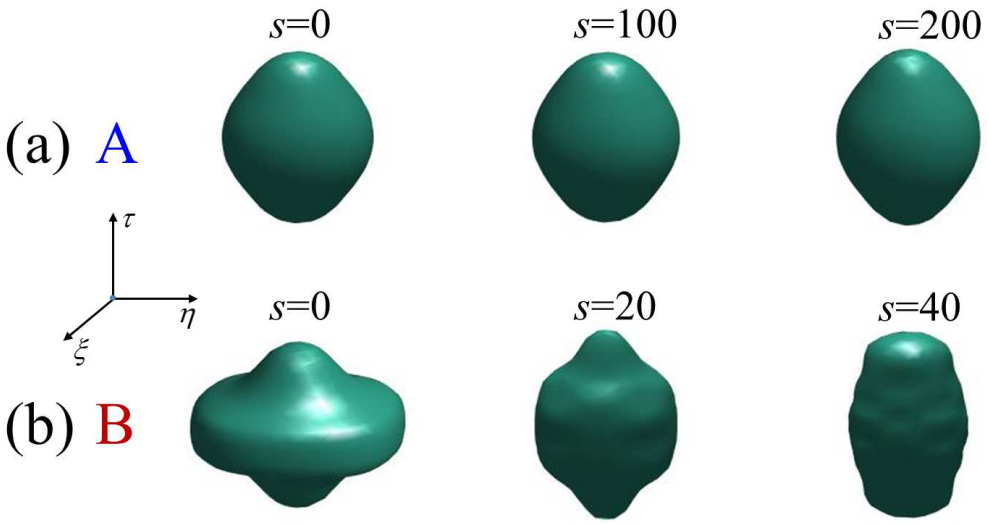


图3. 稳定 (a) 和不稳定 (b) 光隙子弹的受扰传播动力学 [对应于图中标记的点。1(c)] 沿传播距离 s。

在宽广的稳定区域内生成稳定的光隙子弹。

因此，本节报告的数值证据首次证实，在自散焦非线性和正常群速度色散条件下，周期势中存在稳定的隙型光子弹。这一发现证明了我们此前基于逻辑推演提出的合理猜想。

与物理原理。

光隙涡旋。第二类光隙子弹是光隙涡旋，它们被视为拓扑荷为 $m = 1$的三维涡旋隙孤子，通常以空心四重局域波结构的形式激发；该结构由四个相同的组分（基模带隙孤子）构成，每个组分都占据一个晶格势极小值，并

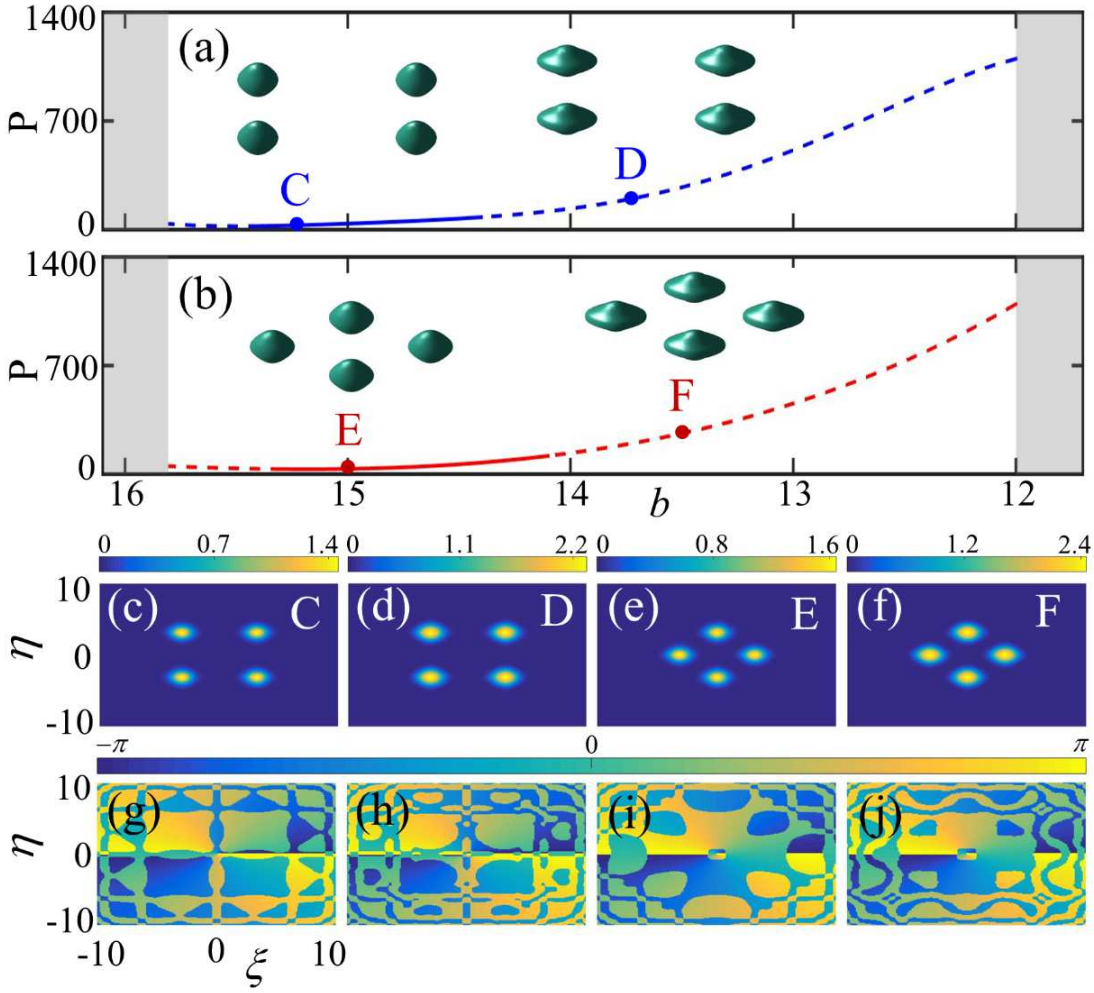


图 4. 二维光晶格第一带隙中拓扑荷为 $m = 1$ 的光隙涡旋的形状、相位结构和存在域。光隙涡旋的能量（孤子功率 P）随 b 的变化：图中还展示了离格点 (a) 和格点 (b) 光隙子弹的稳定性（实线）与不稳定性（虚线）区域，以及以点 (C、D、E、F) 标记的代表性等值面；等高线图和对应的相位分布分别显示在第三行和底行。

与一个 $\pi/2$ 相位位移相连，形成嵌套的拓扑孤子。根据其空间位置是以轴为中心还是偏离轴($\xi = 0$ 或 $\eta = 0$)，这类带有拓扑位错的四重孤子模式可称为轴上和离轴光隙涡旋。图4(a)和4(b)展示了它们典型的等值面轮廓，其中还绘出了两种拓扑模式对应的依赖关系$P(b)$。可以看出，两种模式的三维时空涡旋孤子能量约为单个光隙子弹的四倍，而前者的稳定域则略有缩小。与其他情形下的三维涡旋隙孤子一致，轴上三维光隙子弹的稳定区域比离轴模式更宽 [（比较图4(a)和4(b)]）。典型稳定和不稳定的离轴光隙子弹以及轴上光隙子弹的等高线图依次见图4(c)和4(d)，以及图4(e)和4(f)；相应的相位分布分别见图4(g)和4(h)，以及图 4(i) 和 4(j)。值得注意的是，光隙涡旋的相位结构呈现连续而渐进的变化，从 $-\pi$ 到 π，这清楚地表明了空心四重结构如何彼此连接。光隙涡旋从根本上为深入研究孤子分子、携带不同拓扑荷和相位奇点的复杂孤子模式，以及孤子-孤子相互作用提供了另一种呈现方式。

图 5(a) 和 5(b) 分别展示了稳定与不稳定的离轴光隙子弹受扰后的传播动力学。结果清楚地表明，对于前者，会形成稳定的三维时空涡旋隙孤子，并在传播过程中保持其形状和能量；而对于后者，不稳定结构会演变为形态不确定的变形结构，不再能称为孤子。根据图 5(c) 和 5(d)，轴上光隙涡旋也呈现出类似的动力学。

实验可行性。——值得注意的是，二维周

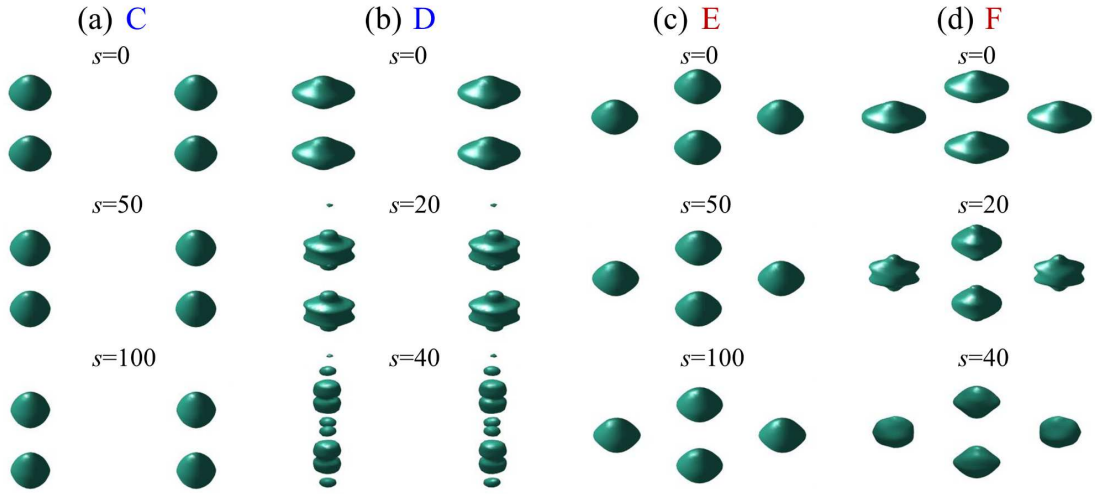


图5. 稳定（a、c）和不稳定（b、d）的离位（a、b）和在位（c、d）光隙子弹的受扰传播动力学 [对应于图中标记点4（a）和4（b）] 随传播距离 *s*的变化。

期势的不同构型可以利用当前光学领域最先进且已趋于成熟的技术，便捷地实现为光子晶体和光学晶格；在超冷原子体系中，则可实现为光学晶格。此外，通过选择合适的激光波长，可以在光学材料中实现正常群速度色散区域；在玻色–爱因斯坦凝聚体中，也可以通过正有效质量实现该区域 [3, 5, 7, 8]。这两个物理上可实现的体系均可由我们的控制模型 [方程（1）], 进行良好描述，因此，新的局域模式——光隙子弹和涡旋模式——在这两个平台中都是可以观测到的。

结论——我们揭示了在电磁感应透明（EIT）区间工作的三能级原子系综中诱导的二维光学晶格所形成的散焦介质中，光隙子弹及其涡旋模式的存在及其特性。基于数值模拟和理论分析，我们给出了第一有限带隙内这两种三维时空局域模式的（不）稳定区域。由于有限带隙中的周期势内尚未有人研究过光子弹，我们的结果填补了这一空白，即填补了在带隙内形成的三维时空局域波结构这一研究空白。这些结构可在非线性光学中观测到，也可在装载于光学晶格中的超冷原子中观测到，并为创造新型三维时空孤子提供了一种途径。这类孤子存在于具有低维周期势的自散焦介质中，具有重要的科学意义，并为大幅提升光与物质相互作用的效率，以及在实际应用中实现多功能光学信息处理铺平了道路。

致谢

本研究获得国家自然科学基金委员会（NSFC）（项目编号：12074423、12264002和12264003）、中国科学院西部青年学者项目（XAB2021YN18）以及江西省自然科学基金（20202BABL211013）的资助。

作者贡献

Z.C.完成了分析和数值计算，并撰写了论文。J.Z.提出了这一想法，进行了计算并修订了论文。

利益冲突

作者声明不存在利益冲突。

补充信息 在线版本包含补充材料，网址为 https://doi.org/

[1] L. Berg´e，《物理学中的波塌缩：原理及其在光波和等离子体波中的应用》，《物理报告》303，259（1998）。[2] Y. S. Kivshar 和 D. E. Pelinovsky，孤立波的自聚焦与横向不稳定性，《物理报告》331，117（2000）。[3] O. Morsch 和 M. Oberthaler，光学晶格中玻色-爱因斯坦凝聚体的动力学，Rev. Mod. Phys. 78，179（2006）。[4] F. Lederer、G. I. Stegeman、D. N. Christodoulides、G. Assanto、M. Segev 和 Y. Silberberg，光学中的离散孤子，《物理报告》463，1（2008）。[5] Y. V. Kartashov、B. A. Malomed 和 L. Torner，非线性晶格中的孤子，Rev. Mod. Phys. 83，247（2011）。

[6] D. Mihalache，《光学与物质波介质中的多维局域结构：近期文献专题综述》，罗马尼亚物理学杂志 569, 403 (2017)。[7] Y. V. Kartashov、G. E. Astrakharchik、B. A. Malomed 和 L. Torner，《非线性场与物质多维自俘获的前沿》，《自然综述：物理》1, 185 (2019)。[8] E. Kengne、W.-M. Liu 和 B. A. Malomed，《玻色–爱因斯坦凝聚体中物质波孤子的时空调控》，《物理报告》899, 1 (2021)。[9] B. A. Malomed，《多维孤子》 [AIP 出版社（在线），梅尔维尔，纽约， 2022]。

[10] Th. Anker、M. Albiez、R. Gati、S. Hunsmann、B. Eiermann、A. Trombettoni 和 M. K. Oberthaler，《周期势中物质波的非线性自俘获》，《物理评论快报》94, 020403 (2005)。[11] L. Zeng 和 J. Zeng，《光学晶格中玻色–爱因斯坦凝聚体的带隙型暗局域模》，《先进光子学》1, 046004 2019( )。[12] L. Zeng 和 J. Zeng，《通过调控非传统光学衍射和非线性抑制高阶孤子的临界塌缩》，《通讯物理》3, 26 (2020)。[13] Z. Chen 和 J. Zeng，《加载于光学晶格的相干原子系综中的二维光学带隙孤子与涡旋》，Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat. 102, 105911 (2021)。[14] J. Li、Y. Zhang 和 J. Zeng，《三维宇称-时间对称光学晶格中的物质波带隙孤子与涡旋》，iScience 25, 104026 (2022)。[15] J. Li、Y. Zhang 和 J. Zeng，《光学晶格与空间周期非线性势俘获的玻色–爱因斯坦凝聚体中的三维非线性局域带隙模》，《先进光子学研究》3, 2100288 (2022)。[16] P. Wang、Y. Zheng、X. Chen、C. Huang、Y. V. Kartashov、L. Torner、V. V. Konotop 和 F. Ye，《光子莫尔晶格中的光局域化与离域化》，《自然》577, 42 (2020)。[17] Q. Fu、P. Wang、C. Huang、Y. V. Kartashov、L. Torner、V. V. Konotop 和 F. Ye，《光子莫尔晶格中由角度扭转控制的光学孤子形成》，《自然·光子学》14, 663 (2020)。[18] Y. V. Kartashov、F. Ye、V. V. Konotop 和 L. Torner，《可公度–非公度光子莫尔晶格中的多频孤子》，《物理评论快报》127, 163902 (2021)。[19] A. A. Arkhipova、Y. V. Kartashov、S. K. Ivanov、S. A. Zhuravitskii、N. N. Skryabin、I. V. Dyakonov、A. A. Kalinkin、S. P. Kulik、V. O. Kompanets、S. V. Chekalin、F. Ye、V. V. Konotop、L. Torner 和 V. N. Zadkov，《莫尔阵列边缘线性与非线性光局域化的观测》，《物理评论快报》130, 083801 (2023)。[20] X. Liu 和 J. Zeng，《宇称-时间对称莫尔光学晶格中的带隙孤子》，《光子学研究》11, 196 (2023)。[21] M. Marconi、J. Javaloyes、S. Balle 和 M. Giudici，《激光局域结构如何从被动锁模中演化而来》，《物理评论快报》112, 223901 (2014)。[22] J. Javaloyes，《被动锁模半导体激光器中的腔内光弹》，《物理评论快报》116, 043901 (2016)。[23] S. S. Gopalakrishnan、K. Panajotov、M. Taki 和 M. Tlidi，《克尔腔中的耗散光弹：多稳态、聚集与怪波》，《物理评论快报》126, 153902 (2021)。[24] M. Tlidi、S. S. Gopalakrishnan、M. Taki 和 K. Panajotov，《克尔谐振腔中的光学晶体与光弹》，《混沌、孤子与分形》152, 111364 (2021)。[25] K. Panajotov、M. Tlidi、Y. Song 和 H. Zhang，《耦合非线性腔中的离散矢量光弹》，《混沌、孤子与分形》163, 112532 (2022)。[26] M. Brambilla、T. Maggipinto、G. Patera 和 L. Columbo，《腔内光弹：非线性光学谐振腔中的三维局域结构》，《物理评论快报》93, 203901 (2004)。[27] X. Liu、L. J. Qian 和 F. W. Wise，《光学时空孤子的产生》，《物理评论快报》82, 4631 (1999)。[28] S. Minardi、F. Eilenberger、Y. V. Kartashov、A. Szameit、U. R¨opke、J. Kobelke、K. Schuster、H. Bartelt、S. Nolte、L. Torner、F. Lederer、A. T¨unnermann 和 T. Pertsch，《波导阵列中的三维光弹》，《物理评论快报》105, 263901 2010( )。[29] F. Eilenberger、K. Prater、S. Minardi、R. Geiss、U. R¨opke、J. Kobelke、K. Schuster、H. Bartelt、S. Nolte、A. T¨unnermann 和 T. Pertsch，《离散涡旋光子弹的观测》，《物理评论X》3，041031（2013年）。[30] C. Mili´an、Y. V. Kartashov 和 L. Torner，《强扭曲波导阵列中的稳健超短光子弹》，《物理评论快报》123，133902（2019年）。[31] L. Dong、Y. V. Kartashov、L. Torner 和 A. Ferrando，《扭曲圆形波导阵列中的涡旋孤子》，《物理评论快报》129，123903（2022年）。[32] D. Mihalache、D. Mazilu、F. Lederer、B. A. Malomed、Y. V. Kar- tashov、L.-C. Crasovan 和 L. Torner，《非局域非线性介质中的三维时空光孤子》，Phys. Rev. E 73，025601（2006年）。[33] I. B. Burgess、M. Peccianti、G. Assanto 和 R. Morandotti，《借助协同非线性实现可接入光子弹》，《物理评论快报》102，203903（2009年）。[34] A. Desyatnikov、A. I. Maimistov 和 B. A. Malomed，《具有三次-五次非线性的色散介质中的三维自旋孤子》，Phys. Rev. E 61，3107（2000年）。[35] D. Mihalache、D. Mazilu、L.-C. Crasovan、I. Towers、A. V. Buryak、B. A. Malomed、L. Torner、J. P. Torres 和 F. Led- erer，《三维稳定自旋光孤子》，《物理评论快报》88, 073902（2002年）。[36] Y.-C. Zhang、Z.-W. Zhou、B. A. Malomed 和 H. Pu，《无基态三维自由空间中的稳定孤子：具有自旋-轨道耦合的自陷玻色-爱因斯坦凝聚体》，《物理评论快报》115，253902（2015年）。[37] D. Mihalache、D. Mazilu、F. Lederer、B. A. Malomed、Y. V. Kartashov、L.-C. Crasovan 和 L. Torner，《贝塞尔光学晶格中的稳定时空孤子》，《物理评论快报》95，023902 2005（年）。[38] B. A. Malomed、L. Torner、F. Wise 和 D. Mihalache，《时空光孤子》，J. Opt. B: Quantum Semiclass. Opt. 7，R53（2005年）。[39] F. Ye、Y. V. Kartashov、B. Hu 和 L. Torner，《具有空间调制非线性的贝塞尔光学晶格中的光子弹》，Opt. Express 17，11328（2009年）。[40] W. H. Renninger 和 F. W. Wise，《时空孤子激光器》，Optica 1，101（2014年）。[41] Z. Chen、Z. Bai、H. Li、C. Hang 和 G. Huang，《相干原子气体中（3+ 1）维弱光子弹与涡旋的存储与读取》，Sci. Rep. 5，8211（2015年）。[42] Y. V. Kartashov、C. Hang、G. Huang 和 L. Torner，《PT 对称光学晶格中的三维拓扑孤子》，Optica 3，1048（2016年）。[43] B.-X. Li、V. Borshch、R.-L. Xiao、S. Paladugu、T. Turiv、S. V. Shiyanovskii 和 O. D. Lavrentovich，《向列型液晶中电驱动的三维指向矢子弹孤立波》，Nat. Commun. 9，2912（2018年）。[44] Z. Bai、W. Li 和 G. Huang，《冷里德伯气体中的稳定单光子弹与涡旋及其主动控制》，Optica 6，309-317（2019年）。[45] L. Qin、C. Hang、B. A. Malomed 和 G. Huang，《稳定的高维弱光孤子分子及其主动控制》，Laser Photon. Rev. 16, 2100297（2022年）。[46] C. Guo、M. Xiao、M. Orenstein 和 S. Fan，《借助非局域纳米光子学构造结构化三维线性时空光子弹》，Light: Science & Applications 10，160（2021年）。[47] Y. Mu 和 G. Huang，《非局域里德伯介质中矢量光子弹的施特恩-盖拉赫效应》，Opt. Lett. 47，6221（2022年）。[48] Y. V. Kartashov，《莫尔

47, 晶格中

4528 2022

的光子弹》，Opt. Lett.（）。[49] D. A. Steck，《铷-87 D 线数据》。

http://steck.us/alkalidata（修订版 2.2.2，2021年7月9日）。

[50] J. Yang，《可积与不可积系统中的非线性波》，（SIAM：费城，2010年）。

补充材料：光学晶格散焦介质中的光隙子弹

Zhiming Chen[1,2] 和 Jianhua Zeng[1,3,*]中国科学院西安光学精密机械研究所瞬态光学与光子学国家重点实验室，中国西安 710119[2]东华理工大学理学院，中国南昌 330013[3]中国科学院大学，中国北京 100049（日期：2023年3月9日）

本补充材料进一步详述了电磁感应透明（EIT）条件下麦克斯韦-布洛赫方程的显式表达式，并推导了探测场的非线性包络方程；该方程构成了正文中生成光隙子弹的基础。在第I节中，我们描述所研究的物理模型，并给出相应麦克斯韦-布洛赫方程的显式表达式。在第II节中，我们详细推导了针对电磁感应透明系统采用标准多尺度法得到的非线性包络方程。

arXiv:2303.04597v1 [physics.optics] 8 Mar 2023

* zengjh@opt.ac.cn

I. 麦克斯韦-布洛赫方程的理论模型与表达式

所研究的物理模型是一个寿命展宽的三能级 Λ 型相干原子系综，与两个激光场共振相互作用（即脉冲探测场 E_p 和强连续波控制场 E_c ），并处于电磁感应透明（EIT）条件下 [1] [见正文图 1(a)]。具体而言，假设原子处于超低温环境，以消除多普勒展宽效应；此外，原子受到成对反向传播的远失谐激光（斯塔克）场照射，这些场形成二维（2D）光学晶格，用于产生光隙子弹。此外，中心角频率为 ω_p 的弱探测场耦合基态 $|1\rangle$ 与激发态 $|3\rangle$，而中心角频率为 ω_c 的强控制场驱动亚稳态 $|2\rangle$ 到激发态 $|3\rangle$的跃迁。 Γ_{13} 和 Γ_{23} 分别是跃迁 $|3\rangle \to |1\rangle$ 和 $|3\rangle \to |2\rangle$的自发辐射衰减率。失谐量 $\Delta_3 = \omega_p - \omega_{31}$ 和$\Delta_2 = \omega_p - \omega_c - \omega_{21}$ 分别表示单光子失谐和双光子失谐。注意，此处 $\omega_{jl} = （E_j - E_l）/\hbar$，其中 E_j 是状态 $|j\rangle$的本征能量。

为简化起见，这里设探测激光场和控制激光场均沿 z 方向传播，因此模型中的电场矢量可写为 $\mathbf{E} = \hat{\mathbf{e}}_p\mathcal{E}_p \exp[i(k_p z - \omega_p t)] + \hat{\mathbf{e}}_c\mathcal{E}_c \exp[i(k_c z - \omega_c t)] + \text{c.c.}$. 这里，$\hat{\mathbf{e}}_p$ ($\hat{\mathbf{e}}_c$) 是探测场（控制场）的单位矢量，其包络为 $\mathcal{E}_p$ ($\mathcal{E}_c$)；$k_p = \omega_p/c$ ($k_c = \omega_c/c$) 分别是探测场（控制场）进入原子气体前的波数。此外，为了在二维光学晶格中稳定光隙子弹，我们假设对三能级 Λ-型相干原子系综施加两对反向传播的斯塔克激光场 [见正文图 1(a)]。远失谐斯塔克场的形式为 $\mathbf{E}_{\text{Stark}}(x,y,t) = \sqrt{2}[\hat{\mathbf{e}}_{s1}E_{s1}(x) + \hat{\mathbf{e}}_{s2}E_{s2}(y)]\cos(\omega_s t)$，其中，$\hat{\mathbf{e}}_{s1}$ ($\hat{\mathbf{e}}_{s2}$)、E_{s1} (E_{s2}) 和 ω_s 分别为单位偏振矢量、场振幅和角频率。需要指出的是，假设 $\hat{\mathbf{e}}_{s1}$ 与 $\hat{\mathbf{e}}_{s2}$ 垂直。斯塔克场会使 x 和 y 方向上的 $|j\rangle$ 能级产生微小但随空间变化的能量位移，其形式为 $\Delta E_{j,\text{Stark}} = -\frac{\alpha_j}{2}[|E_s(x)|^2 + |E_s(y)|^2]$，其中 α_j 是该能级的标量极化率 $|j\rangle$。

在采用电偶极近似和旋波近似的条件下，系统在相互作用绘景中的哈密顿量为

$$\hat{\mathcal{H}}_{\text{int}} = -\sum_{j=1}^{3}\hbar\Delta_j'|j\rangle\langle j| - \hbar\left[\Omega_c|3\rangle\langle 2| + \Omega_p|3\rangle\langle 1| + \text{H.c.}\right], \tag{S1}$$

其中 $\Delta_j' = \Delta_j + \frac{1}{2}\alpha_{j1}[|E_{s1}(x)|^2 + |E_{s2}(y)|^2]$，且 $\alpha_{j1} = (\alpha_j - \alpha_1)/\hbar$。控制场和探测场的半拉比频率分别定义为 $\Omega_c = (\mathbf{p}_{23}\cdot\hat{\mathbf{e}}_c)\mathcal{E}_c/\hbar$ 和 $\Omega_p = (\mathbf{p}_{13}\cdot\hat{\mathbf{e}}_p)\mathcal{E}_p/\hbar$，其中 $\mathbf{p}_{jl}$ 为与从 $|j\rangle$ 到 $|l\rangle$的跃迁相关的电偶极矩阵元。因此，相互作用绘景中密度矩阵 σ 的运动方程为

$$i\frac{\partial}{\partial t}\sigma_{11} - i\Gamma_{13}\sigma_{33} + \Omega_p^*\sigma_{31} - \Omega_p\sigma_{31}^* = 0, \tag{S2a}$$

$$i\frac{\partial}{\partial t}\sigma_{22} - i\Gamma_{23}\sigma_{33} + \Omega_c^*\sigma_{32} - \Omega_c\sigma_{32}^* = 0, \tag{S2b}$$

$$i\frac{\partial}{\partial t}\sigma_{33} + i(\Gamma_{13}+\Gamma_{23})\sigma_{33} - \Omega_p^*\sigma_{31} + \Omega_p\sigma_{31}^*\Omega_c^*\sigma_{32} + \Omega_c\sigma_{32}^* = 0, \tag{S2c}$$

$$\left(i\frac{\partial}{\partial t} + d_{21}\right)\sigma_{21} - \Omega_p\sigma_{32}^* + \Omega_c^*\sigma_{31} = 0, \tag{S2d}$$

$$\left(i\frac{\partial}{\partial t} + d_{31}\right)\sigma_{31} - \Omega_p(\sigma_{33} - \sigma_{11}) + \Omega_c\sigma_{21} = 0, \tag{S2e}$$

$$\left(i\frac{\partial}{\partial t} + d_{32}\right)\sigma_{32} - \Omega_c(\sigma_{33} - \sigma_{22}) + \Omega_p\sigma_{21}^* = 0, \tag{S2f}$$

其中 $d_{jl} = \Delta_j' - \Delta_l' + i\gamma_{jl}$。退相干率定义为 $\gamma_{jl} = (\Gamma_j + \Gamma_l)/2 + \gamma_{jl}^{\text{col}}$，其中 $\Gamma_j = \sum_{E_i<E_j}\Gamma_{ij}$ 为从态 $|j\rangle$ 到所有低能态的自发辐射率，γ_{jl}^{col}为反映 $|j\rangle$ 与 $|l\rangle$之间相位相干性损失的退相干率。通过采用慢变包络近似，可得到探测场拉比频率 Ω_p 的麦克斯韦方程，其形式为

$$i\left(\frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\right)\Omega_p + \frac{c}{2\omega_p}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\Omega_p + \kappa_{13}\sigma_{31} = 0, \tag{S3}$$

其中 $\kappa_{13} = \mathcal{N}_a\omega_p|\mathbf{p}_{13}\cdot\hat{\mathbf{e}}_p|^2/(2\hbar\varepsilon_0 c)$，其中 $\mathcal{N}_a$ 为原子密度， c 为真空中的光速。在接下来的计算中，假设连续波控制场足够强，因此在探测场演化过程中，Ω_c 可视为常数。

该模型可在现实物理系统中实现，即超冷 ^{87}Rb 原子气体。能级可选自经调谐至 D1线跃迁的基态原子，其中 $|1\rangle$, $|2\rangle$，以及 $|3\rangle$ 分别设为 $5^2S_{1/2}(F=1)$,$5^2S_{1/2}(F=2)$，以及 $5^2P_{1/2}(F=2)$ [2]。因此，系统参数为 $\Gamma_2 \simeq 1$ kHz，$\Gamma_3 \simeq 5.75$ MHz，以及 $|\mathbf{p}_{13}|$ =2.54×10^{-27} C cm。

II. 非线性包络方程的推导

为了探究探测场的非线性演化以及系统中光隙子的可能形成，我们基于麦克斯韦-布洛赫方程 (S2) 和 (S3)，采用多重尺度法推导探测场的非线性包络方程。为此，将相应的渐近展开写成如下形式 [3]: $\sigma_{jl} = \sum_{n=0}^{\infty}\epsilon^n\sigma_{jl}^{(m)}$，其中 $\sigma_{jl}^{(0)} = \delta_{j1}\delta_{l1}$、$\Omega_p = \sum_{n=1}^{\infty}\epsilon^n\Omega_p^{(n)}$、 $E_{s1} = \epsilon E_{s1}^{(1)}$ 和 $E_{s2} = \epsilon E_{s2}^{(1)}$。因此可得 $d_{jl} = d_{jl}^{(0)} + \epsilon^2 d_{jl}^{(2)}$，其中 $d_{jl}^{(0)} = \Delta_j - \Delta_l + i\gamma_{jl}$ 和 $d_{jl}^{(2)} = \frac{\alpha_{jl}}{2}[|E_{s1}^{(1)}|^2 + |E_{s2}^{(1)}|^2]$。这里， ϵ 是表示探测场典型振幅的无量纲小参数，展开式右侧的所有量均依赖于多尺度变量 $x_1 = \epsilon x$、 $y_1 = \epsilon y$、 $z_n = \epsilon^n z$ $(n = 0, 1, 2)$ 和 $t_n = \epsilon^n t$ $(n = 0, 1)$。将上述展开代入麦克斯韦-布洛赫方程 (S2) 和 (S3)，并比较 ϵ^n 的系数后，可得到一组线性非齐次方程，进而逐阶求解。

一阶（$n=1$）解表示为 $\Omega_p^{(1)} = \mathcal{F}e^{i\theta}$ 和 $\sigma_{j1}^{(1)} = \{[\delta_{j3}(\omega + d_{21}^{(0)}) - \delta_{j2}\Omega_c^*]/\mathcal{D}\}\mathcal{F}e^{i\theta}$，其中 $\mathcal{D} = |\Omega_c|^2 - (\omega + d_{21}^{(0)})(\omega + d_{31}^{(0)})$， $\theta = \mathcal{K}(\omega)z_0 - \omega t_0$，而 $\mathcal{F}$是一个尚待确定的包络函数，依赖于慢变量 x_1、y_1、 z_1、 z_2和 t_1。根据上述解，我们可以得到线性色散关系： $\mathcal{K}(\omega) = \omega/c + \kappa_{13}(\omega + d_{21}^{(0)})/\mathcal{D}$。值得注意的是，探测场的频率和波数分别为 $\omega_p + \omega$ 和 $k_p + \mathcal{K}(\omega)$。因此， $\omega = 0$对应于探测场的中心频率。

在二阶（$n=2$）下，我们可以得到一个可解性条件： $i[\partial/\partial z_1 + (1/V_g)\partial/\partial t_1]\mathcal{F} = 0$，其中 $V_g = (\partial\mathcal{K}/\partial\omega)^{-1}$为探测场包络的群速度。该阶的近似解为 $\sigma_{21}^{(2)} = a_{21}^{(2)} i\frac{\partial}{\partial t_1}\mathcal{F}e^{i\theta}$, $\sigma_{31}^{(2)} = a_{31}^{(2)} i\frac{\partial}{\partial t_1}\mathcal{F}e^{i\theta}$, $\sigma_{jj}^{(2)} = a_{jj}^{(2)}|\mathcal{F}|^2 e^{-2\bar{\alpha}z_2}$ $(j = 1, 2)$，以及 $\sigma_{32}^{(2)} = a_{32}^{(2)}|\mathcal{F}|^2 e^{-2\bar{\alpha}z_2}$，其中 $\bar{\alpha} = \epsilon^{-2}\mathrm{Im}(\mathcal{K})$，其中

$$a_{11}^{(2)} = \frac{[i\Gamma_{23} - 2|\Omega_c|^2\mathcal{P}]\mathcal{G} - i\Gamma_{13}|\Omega_c|^2\mathcal{Q}}{i\Gamma_{13}|\Omega_c|^2\mathcal{P}^*}, \tag{S4a}$$

$$a_{22}^{(2)} = \frac{\mathcal{G} - i\Gamma_{13}a_{11}^{(2)}}{i\Gamma_{13}}, \tag{S4b}$$

$$a_{21}^{(2)} = -\frac{\Omega_c^*(2\omega + d_{21}^{(0)} + d_{31}^{(0)})}{\mathcal{D}^2}, \tag{S4c}$$

$$a_{31}^{(2)} = \frac{(\omega + d_{21}^{(0)})^2 + |\Omega_c|^2}{\mathcal{D}^2}, \tag{S4d}$$

$$a_{32}^{(2)} = \frac{\Omega_c}{d_{32}^{(0)}}\left[\frac{1}{\mathcal{D}^*} - (a_{11}^{(2)} + 2a_{22}^{(2)})\right], \tag{S4e}$$

其中 $\mathcal{G} = (\omega + d_{21}^{(0)*})/\mathcal{D}^* - (\omega + d_{21}^{(0)})/\mathcal{D}$, $\mathcal{P} = 1/d_{32}^{(0)} - 1/d_{32}^{(0)*}$， 以及 $\mathcal{Q} = 1/(\mathcal{D}d_{32}^{(0)*}) - 1/(\mathcal{D}^* d_{32}^{(0)})$。

在三阶（$n=3$）时，可解性条件给出以下方程:

$$i\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial z_2} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2\mathcal{K}}{\partial\omega^2}\frac{\partial^2\mathcal{F}}{\partial t_1^2} + \frac{c}{2\omega_p}\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_1^2}\right)\mathcal{F} + W_1|\mathcal{F}|^2\mathcal{F}e^{-2\bar{\alpha}z_2} + W_2 V(x_1, y_1)\mathcal{F} = 0. \tag{S5}$$

这里， W_1 是自相位调制系数，而 W_2 是由斯塔克场贡献的交叉相位调制系数。 W_1、 W_2和 V（x_1、 y_1）的显式表达式分别为

$$W_1 = \kappa_{13}\frac{\Omega_c a_{32}^{(2)*} + (\omega + d_{21}^{(0)})(2a_{11}^{(2)} + a_{22}^{(2)})}{\mathcal{D}}, \tag{S6a}$$

$$W_2 = \kappa_{13}\frac{(\omega + d_{21}^{(0)})^2\alpha_{31} + |\Omega_c|^2\alpha_{21}}{2\mathcal{D}^2}, \tag{S6b}$$

$$V(x_1, y_1) = |E_{s1}^{(1)}(x_1)|^2 + |E_{s2}^{(1)}(y_1)|^2. \tag{S6c}$$

结合所有阶的可解条件（即关于 $\mathcal{F}$ 的方程），我们得到 $\mathcal{F}$ 的无量纲统一方程

$$i\frac{\partial\psi}{\partial s} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2}{\partial\xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial\eta^2} - \beta\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}\right)\psi + g|\psi|^2\psi + g'V(\xi,\eta)\psi = -i\mathcal{A}\psi, \tag{S7}$$

其中 $\psi = \epsilon\mathcal{F}/\psi_0 e^{-\bar{\alpha}z_2}$, $s = z/L_{\mathrm{Diff}}$, $\tau = [t - z/\mathrm{Re}(V_g)]/\tau_0$、$(\xi,\eta) = (x,y)/R_\perp$, $\beta = L_{\mathrm{Diff}}/L_{\mathrm{Disp}}$, $g = L_{\mathrm{Diff}}/L_{\mathrm{Nonl}}$, $g' = L_{\mathrm{Diff}}$ W_2 E_0^2 $V = [E_{s1}\ \xi\ ^2 + E_{s2}\ \eta\ ^2]/E_0^2$ $\mathcal{A} =$ $\mathcal{K}$ L_{Diff} ψ_0 τ_0 $R_\perp$ E_0 Re( )、( ) ( ) 和 Im( )。这里，„ 和分别表示典型拉比频率、脉冲持续时间、光束半径和场振幅； $L_{\mathrm{Diff}} = \omega_p R_\perp^2/c$, $L_{\mathrm{Disp}} = \tau_0^2/\mathrm{Re}(\partial^2\mathcal{K}/\partial\omega^2)$ 和 $L_{\mathrm{Nonl}} = 1/|\mathrm{Re}(W_1)u_0^2|$ 分别表示典型衍射长度、色散长度和非线性长度。

通常，式（S7）中的无量纲系数是复数，因为所考虑的原子系统存在寿命展宽，因此无法支持稳定的光隙子弹。不过，在电磁感应透明条件下，由于量子相消干涉效应，这些系数的虚部可以减小到极小值 [4],，在后续计算中可安全地忽略。

取其他物理参数 $\mathcal{N}_a \approx 3.69\times10^{11}\,\mathrm{cm}^{-3}$、$\Omega_c = 4.5\times10^7\,\mathrm{Hz}$、$\Delta_2 = 1.8\times10^6\,\mathrm{Hz}$ 和 $\Delta_3 = 4.0\times10^7\mathrm{Hz}$ 时，相应的复系数为 $\mathcal{K} = (9.22 + 0.03i)\,\mathrm{cm}^{-1}$、$\partial^2\mathcal{K}/\partial\omega^2 = (2.37 - 0.18i)\times10^{-13}\mathrm{cm}^{-1}\,\mathrm{s}^2$、$W_1 = -(1.01 + 0.0045i)\times10^{-14}\,\mathrm{cm}^{-1}\,\mathrm{s}^2$、$W_2 = (3.26 + 0.021i)\times10^{-9}\,\mathrm{cm\,V}^{-1}$，这些量的虚部确实远小于相应的实部。此外，取 $\psi_0 = 7.9\times10^6\,\mathrm{Hz}$、$\tau_0 = 6.16\times10^{-7}\mathrm{s}$、$R = 45\,\mu\mathrm{m}$ 和 $E_0 = 1.39\times10^4\,\mathrm{V\,cm}^{-1}$，则三个典型长度（$L_{\mathrm{Diff}}$、$L_{\mathrm{Disp}}$ 和 L_{Nonl}）近似相等，即 $L_{\mathrm{Diff}} = L_{\mathrm{Disp}} = L_{\mathrm{Nonl}} = 1.59\,\mathrm{cm}$。因此，我们得到 $\beta = 1 - 0.07i$、$g = -1 - 0.004i$、$g' = 1 + 0.006i$ 和 $\mathcal{A} = 0.047$。假设斯塔克场的形式为 $E_{s1}(\xi) = E_{s0}\cos\xi$ 和 $E_{s2}(\eta) = E_{s0}\cos\eta$（$E_{s0}$ 为实常数），式（S7）可简化为

$$i\frac{\partial\psi}{\partial s} = -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial\xi^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial\eta^2}\right) + \frac{\beta}{2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\tau^2} + g|\psi|^2\psi + V_{\mathrm{OL}}(\xi,\eta)\psi, \tag{S8}$$

其中 $V_{\mathrm{OL}}(\xi,\eta) = -c_0(\cos^2\xi + \cos^2\eta)$，且 $\sqrt{c_0} = E_{s0}/E_0$。

[1] Z. Chen 和 J. Zeng，《相干原子系综中光学晶格上的二维光学带隙孤子与涡旋》，Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat. 102, 105911（2021年）。[2] D. A. Steck，《铷-87 D 线数据》。http://steck.us/alkalidata（修订版 2.2.2，2021年7月9日）。[3] G. Huang、L. Deng 和 M. G. Payne，《冷三能级原子系统中超慢光孤子的动力学》，Phys. Rev. E 72, 016617（2005年）。[4] M. Fleischhauer、A. Imamo˘glu 和 J. P. Marangos，《电磁感应透明：相干介质中的光学》，Rev. Mod. Phys. 77, 633（2005年）。