arXiv:2303.04601v2 [math.FA] 3 May 2023

克莱因空间中对称算子的边界三元组的相似性

˘ ˙RYTIS JURSENAS

Abstract. 经典结果表明，希尔伯特空间中单对称算子的韦尔函数能够在酉等价意义下唯一确定一个边界三元组。我们将这一结果推广到庞特里亚金空间中的单对称算子，此时酉等价被通过标准酉算子实现的相似所取代。

1. Introduction

希尔伯特空间中闭稠定对称算子的边界三元组这一概念可追溯至 [9, 18, 25, 36]。与边界三元组相关联的是韦尔函数，它是克莱因 Q- 函数 [37, 40]的一种现代类似物；二者都是 Nevanlinna函数 [16]。在庞特里亚金空间的框架下，韦尔族是广义奈万林纳族 [6, 26]。此外，希尔伯特空间中单对称算子的韦尔函数的关键特性之一，是它能在酉等价意义下唯一确定一个边界三元组 [18, 19, 20, 30]。据我们所知，在克莱因空间（乃至庞特里亚金空间）的框架下，尚无此类等价性结果。本文讨论的边界三元组均为普通边界三元组，也就是说，对称算子的亏指数相等。我们不讨论 D-三元组 [42, 43, 44]，也不考虑与算子对相关联的边界三元组 [30, 41]。

设 T 是克莱因空间 $(\mathfrak{H}, [\cdot, \cdot])$ 中的一个闭对称关系，其基本对称性为 J。所谓 T 具有相等（有限或无限）亏指数，是指希尔伯特空间 $(\mathfrak{H}, [\cdot, J\cdot])$ 中的闭对称关系 $\mathfrak{T} := JT$ 具有相等亏指数；关于其动机，见 [34, 47]。这保证了 T 具有典范自伴扩张，或者等价地

日期：2023年5月4日。2010年数学主题分类。47A06；47B50；47B25；46C20。关键词和短语：线性关系、希尔伯特空间、克莱因空间、庞特里亚金空间、韦尔族、边界三元组。

[6, 命题 3.4], 一个边界三元组。下面给出的边界三元组定义源自 [14, 定义 6]; 参见 [7, 定义 2.1.1], [21, 定义 1.1], [20, 定义 7.1], [13, 定义 2.1] , 后者是在波涅亚金空间或希尔伯特空间框架下给出的。

定义 1.1。三元组 $\Pi_\Gamma = (\mathfrak{L}, \Gamma_0, \Gamma_1)$, 其中 $(\mathfrak{L}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ 是一个希尔伯特空间, 若边界算子 $\Gamma = (\Gamma_0, \Gamma_1) : T^+ \to \mathfrak{L}^2$ 是满射且格林恒等式成立,

$$[f, g'] - [f', g] = \langle \Gamma_0 \widehat{f}, \Gamma_1 \widehat{g}\rangle - \langle \Gamma_1 \widehat{f}, \Gamma_0 \widehat{g}\rangle$$

对于来自 T^+ 的所有 $f = (f, f')$、 $\widehat{g} = (g, g')$, $\widehat{\ }$均成立。与 Π_Γ 相关联的是韦尔族

$$\mathbb{C} \ni z \mapsto M_\Gamma(z) := \Gamma(zI)$$

以及伽马场

$$\mathbb{C} \ni z \mapsto \gamma_\Gamma(z) := \pi_1 \widehat{\gamma}_\Gamma(z)\,, \quad \widehat{\gamma}_\Gamma(z) := (\Gamma_0 \,|\, _{zI})^{-1}$$

其中 $\pi_1 := \{((f, f')\ f)\ |(f, f')\ \in \mathfrak{H}\}$。若 $\mathfrak{L}$中的一个关系 $M_\Gamma(z)$ 是单值的, 即为一个算子, 则称 M_Γ 为韦尔函数。

显然, $\Gamma(zI) = \Gamma(zI \cap T^+)$ 且 $\Gamma_0 \,|\, _{zI} = \Gamma_0 \,|\, _{zI \cap T^+}$。

定义 1.2（[2]）。庞特里亚金空间 $\mathfrak{H}$ 中的闭对称关系 T 称为单对称算子, 若它没有非实特征值, 且亏子空间 $\bigvee\{\mathfrak{N}_z(T^+) \mid z \in \mathbb{C}_* := \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}\}$的闭线性张成作为线性集合与 $\mathfrak{H}$ 重合; 亏子空间的全体性意味着 T 必然是一个算子。

在希尔伯特空间的情形下, 本文标题中所述的相似性结果如下: [20, 定理 7。122], [19, 推论 3。10], [30, 定理 2。16] [18, 推论 1]。

定理 1.3。设 T 和 T' 是希尔伯特空间 $\mathfrak{H}$ 和 $\mathfrak{H}'$中的稠密定义单对称算子, 且二者具有相等的亏指数。设 $\Pi_\Gamma = (\mathfrak{L}, \Gamma_0, \Gamma_1)$ 和 $\Pi_{\Gamma'} = (\mathfrak{L}, \Gamma'_0, \Gamma'_1)$ 分别是 T^*和 T'^*的边界三元组, 对应的 Weyl族为 M_Γ 和 $M_{\Gamma'}$。那么, 对于所有 $z \in \mathbb{C}_*$, $M_\Gamma(z) = M_{\Gamma'}(z)$ 当且仅当边界三元组 Π_Γ和 $\Pi_{\Gamma'}$ 酉等价。

根据定义 [30, 定义 2.14], 另见定义 6.5, 边界三元组 Π_Γ 和 $\Pi_{\Gamma'}$ 酉等价, 当且仅当存在酉算子 $U\colon \mathfrak{H} \to \mathfrak{H}'$ 使得 $\Gamma = \Gamma' \left(\begin{smallmatrix} U & 0 \\ 0 & U \end{smallmatrix}\right)$; 在这种情况下, $T' = UTU^{-1}$的任意典范扩张都与尺度 $T \subseteq T^*$中的对应扩张酉等价。

定理 1.3 可改述如下：定义在 $\mathbb{C}_*$上的韦尔函数唯一确定一个稠定定义、亏指数相等的单值对称算子的边界三元组（尤其是典范扩张），其中的唯一性是指相差一个酉等价。由于克莱因（或庞特里亚金）空间中的自伴关系并非都有非空预解集，我们在此证明定理 1.3 在克莱因空间框架下的一个“局部”版本，见定理 6.11。在这一框架中，边界三元组 Π_Γ 和 $\Pi_{\Gamma'}$ 的酉等价由相似性取代；这种相似性由一个从克莱因空间 $\mathfrak{H}$ 到克莱因空间 $\mathfrak{H}'$的标准酉算子 U 实现；此时称 Π_Γ 和 $\Pi_{\Gamma'}$ 相似。因此，定理 6.11 的一个“全局”版本就是下一个推论，并将其表述为定理。

定理 1.4. 在 $\mathbb{C}_*$ 上的韦尔函数唯一确定庞特里亚金空间中一个稠密定义的单值对称算子的边界三元组（特别是一个典范扩张），其中该算子的亏指数相等，且确定性达到相似意义下的唯一性。

稠密性保证典范自伴扩张 T_0 （它必然是一个算子）的预解集 $\rho(T_0)$ 至少包含一个非实点（例如 [8, 定理 7.2],，另见 [23, 26, 32, 39]）。但一般来说，这不足以保证 $\rho(T_0) \supseteq \mathbb{C}_*$，而这正是定理 1.4 的关键要点之一。后一个包含关系是定理 4.2 的特例，该定理针对标准对称算子陈述；回忆一下，根据命题 2.4]，单值 T 是一个没有特征值的标准 T。定理 1.4 中的 T 示例可见 [48]。另一方面，定理 1.4 可以推广为推论 6.13，但目前我们尚不知晓这一更一般的算子类的实例。

在概述本文其余部分时，我们简要讨论证明定理 6.11、定理 1.4 以及其他具有独立意义的结果所用的主要工具。第 2 节回顾一些标准记号。在第 3 节的定理 3.2 中，我们建立了如下两个集合之间的一一对应关系：由具有相等亏指数的闭对称关系 T 的典范自伴扩张 T_0 构成的集合 Self(T)，以及由满足 $N \subseteq T^+ \cap T^\perp$ 且 ran($JN \pm \mathrm{i}I$) $= \mathfrak{N}_{\pm\mathrm{i}}(\mathfrak{T}^*)$（或者等价地，$T \widehat{\oplus} N$ 为超极大中性）的闭对称关系 N 构成的集合 $\mathcal{N}$，其中 N 属于 $\mathfrak{H}$；如果 T 是一个与基本对称性 J 交换的稠密定义算子，那么 $T_0 \leftrightarrow N$ 可以写成已知形式 [1, 29, 38]。 $\mathcal{N}$ 是证明定理 1.4 中 $\rho(T_0) \supseteq \mathbb{C}_*$ 的关键概念；详见第 4 节。请注意，一般而言，我们只能期望 $\rho(T_0) \supseteq \mathbb{C}_*$ 在一个有限维集合以外成立。

算子解 V到 $\Gamma' = \Gamma V^{-1}$ 在 [45, 46] 中用哈梅尔基来刻画。通过使用 $T_0 \leftrightarrow N$，我们在此刻画 V

借助边界算子 $\Gamma = (\Gamma_0, \Gamma_1)$ 的“逆”（定义 5.3）。特别地，当且仅当对称关系 T 和 T' 同构（作为希尔伯特空间）时，存在标准酉算子 V；参见第 5 节中的定理 5.8。在这种情况下，V 是典型酉关系的乘积，沿用 [49,第 4 节的术语2]。

如果 $\Gamma' = \Gamma V^{-1}$ 存在一个合适的酉关系 V，那么 $M_\Gamma(z) = M_{\Gamma'}(z)$ 成立的充要条件由第 6 节的引理 6.3 给出；该结果适用于等距边界对 $(\mathfrak{L}, \Gamma)$ 和 $(\mathfrak{L}, \Gamma')$，并推广了 [35] 中的一个类似结果。

当相应的广义 Nevanlinna 函数相同时，极小实现的相似性由定理 3.2]证明。从这里可以推导出 T 和 T' 是同构的。不过，在定理 6.11 中，我们是在克莱因空间中进行讨论，但证明这部分的思路基本相同，另见 [20, 定理 7.122]¸[40, 定理 2.2]。因此，根据定理 5.8，存在一个标准酉算子 V使得 $\Gamma' = \Gamma V^{-1}$，特别是 $T' = V(T)$；由引理 6.3（更具体地说，由定理 6.7）可知，该 V 具有如下形式 $\left(\begin{smallmatrix} U & 0 \\ 0 & U \end{smallmatrix}\right) W$，其中某个标准酉算子为 W。亏子空间的全体进一步表明，W 具有对角形式，因此三元组 Π_Γ 和 $\Pi_{\Gamma'}$ 相似。

我们指出，与定理 1.3 中的 T 不同，定理 6.11 中克莱因空间上的闭对称算子 T 不一定是稠密定义的。相反，这类 T 满足一种稍微更一般的性质（P），见定义 6.10。另一方面，根据附录 A 中的引理 A.6，希尔伯特空间上的 T 具有性质（P）当且仅当它是稠密定义的。附录中列出了一些正文中用到的引理，但它们也可以用于更广泛的情形。

2. 记号与标准术语

不定度量空间中算子理论的背景与基础可参见 [3, 4, 24, 33, 37, 47]。线性关系理论见 [7, 27, 31],，其中亦列有相关参考文献。克莱因空间 $\mathfrak{H} = (\mathfrak{H}, [\cdot, \cdot])$ 也称为 J-空间，其中 J 是基本对称性。与 J 相联系的是基本对称性

$$\widehat{J} := \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i}J \\ \mathrm{i}J & 0 \end{pmatrix} : \begin{matrix} \mathfrak{H} \\ \oplus \\ \mathfrak{H} \end{matrix} \to \begin{matrix} \mathfrak{H} \\ \oplus \\ \mathfrak{H} \end{matrix} \tag{2.1}$$

以及不定内积

$$\begin{aligned}[\widehat{f},\widehat{g}] &= -\mathrm{i}[f,g'] + \mathrm{i}[f',g]\,,\\ \widehat{f} &= (f,f')\,,\quad \widehat{g} = (g,g')\end{aligned} \tag{2.2}$$

在 $\mathfrak{H}^2$ 中，右侧的 $[\cdot,\cdot]$ 是 $\mathfrak{H}$ 中的不定内积；显然，$[\cdot,\cdot]$ 关于第一个因子共轭线性。在本文中，$[\cdot,\cdot]$ 的记号不会引起混淆，因此无需使用额外的下标。不过，若 $\mathfrak{H}'$ 是另一个具有基本对称性 J' 的克莱因空间，则不定内积记为 $[\cdot,\cdot]'$，约定与 (2.1)、(2.2) 中相同。克莱因空间 $(\mathfrak{H}^2,[\cdot,\cdot])$ 是一个 $\widehat{J}$ 空间，记为 $\mathfrak{K}$；类似地，具有基本对称性 J' 的克莱因空间 $\mathfrak{K}' = \widehat{\mathfrak{H}'^2}$ 亦然。若 $\mathfrak{L} = (\mathfrak{L},\langle\cdot,\cdot\rangle)$ 是希尔伯特空间，则希尔伯特直和 $\mathfrak{L}^2$ 可赋予 $\widehat{J}_\circ$ 空间结构，记为 $\mathfrak{K}_\circ$，如下所示。$\widehat{\ }$基本对称性 $J_\circ$。由 (2.1) 定义，其中 $J,\mathfrak{H}$ 分别替换为 I（恒等算子）、$\mathfrak{L}$；而 $\mathfrak{K}_\circ$ 中的不定内积由 (2.2) 定义，其中右侧的 $[\cdot,\cdot]$ 替换为标量积 $\langle\cdot,\cdot\rangle_\circ$。

在 $\mathfrak{H}$（或 $\mathfrak{K}$）中，关于不定度量$[\cdot,\cdot]$ 的正交性记作 $[\perp]$；关于相应 Hilbert$\widehat{\ }$空间度量 $[\cdot,J\cdot]$（或 $[\cdot,J\cdot]$）的正交性记作 $\perp_\circ$。若 $\mathcal{L}$ 是克莱因空间的一个子空间，则 $P_\mathcal{L}$ 表示到 $\mathcal{L}$上的相应正交投影（相对于 Hilbert 空间度量）。

克莱因空间 $\mathfrak{H}$ 中带有基本对称性 J 的关系 T，若满足 $T\subseteq T^+$或 $T = T^+$，则称为对称或自伴。其（克莱因空间）伴随为 $T^+ := JT^*J$，其中 T^*是通常的（即 Hilbert 空间）伴随。若 T是对称关系，则其规范扩张集（参见 $[7,25]$,$\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$）T，即满足 $T\subseteq\widetilde{T}\subseteq T^+$的扩张，记作 Ext($T$)。其中在 $\mathfrak{H}$ 中自伴的 Ext(T)中的元素$\widetilde{T}\in$ 构成的集合记作 Self(T)。

从克莱因空间 $\mathfrak{H}$ 到克莱因空间 $\mathfrak{H}'$ 的有界处处定义关系 T 是一个有界处处定义算子，记作$T\in\mathcal{B}(\mathfrak{H},\mathfrak{H}')$；如果 $\mathfrak{H}\equiv\mathfrak{H}'$，则记作 $T\in\mathcal{B}(\mathfrak{H})$。克莱因空间 $\mathfrak{H}$和 $\mathfrak{H}'$中的两个闭关系 T和 $T'\widehat{\ }$是同构的，当且仅当希尔伯特空间 $(T,[\cdot,J\cdot])\widehat{\ }$和 $(T',[\cdot,J'\cdot]')$ 同构，也就是说，存在一个同胚$\tau\in\mathcal{B}(T,T')$。

若关系 V从克莱因空间 $\mathfrak{K}$到克莱因空间 $\mathfrak{K}'$的逆关系 $V^{-1}\subseteq V^+$ 或 $V^{-1} = V^+$，则称其为等距或酉；克莱因空间$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$伴随 $V^+ := JV^*J'$，其中 V^*是希尔伯特空间伴随。除非另有说明，全文中的逆均指关系意义下的逆。若酉 V满足 $V\in\mathcal{B}(\mathfrak{K},\mathfrak{K}')$，或等价地满足 $V^{-1}\in\mathcal{B}(\mathfrak{K}',\mathfrak{K})$，则称其为标准酉算子；参见 [17, 定义 2.5、推论 2.7]。

克莱因空间 $\mathfrak{H}$ 中关系 T 的定义域、值域、核、多值部分分别记为 $\operatorname{dom} T$、$\operatorname{ran} T$、$\ker T$、$\operatorname{mul} T$。T在 $\mathcal{L} \subseteq \mathfrak{H}$ 上的定义域限制记为 $T \mid_{\mathcal{L}} := T \cap (\mathcal{L} \times \mathfrak{H})$；显然 $T \mid_{\mathcal{L}} = T_{\mathcal{L} \cap \operatorname{dom} T}$，例如参见定义 1.1 中的 M_Γ 和 $\widehat{\gamma}_\Gamma$。

闭对称关系 T 在克莱因空间 $\mathfrak{H}$ 中的正则域（或称正则型点集）记为 $\widehat{\rho}(T)$；它由满足以下条件的 $z \in \mathbb{C}$ 组成：特征子空间 $\mathfrak{N}_z(T) := \ker(T - zI)$ 是平凡的，且值域 $\operatorname{ran}(T - zI)$ 是一个子空间，即 $\mathfrak{H}$ 的闭线性子集。T 的预解集（或称正则点集）记为 $\rho(T)$；它由满足 $\operatorname{ran}(T - zI) = \mathfrak{H}$ 的那些 $z \in \widehat{\rho}(T)$ 组成。T 的点谱 $\sigma_p(T)$ 是由满足 $\mathfrak{N}_z(T)$ 非平凡的那些 $z \in \mathbb{C}$ 组成。T 在 $\mathbb{C}_* := \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ 中的点谱部分记为 $\sigma_p^0(T) := \mathbb{C}_* \cap \sigma_p(T)$。对于特征子空间 $\mathfrak{N}_z(T)$，$\widehat{\ }$ 与之关联一个算子 $\mathfrak{N}_z(T) := zI \cap T$（其图像）。

设 T 和 T' 是克莱因空间 $\mathfrak{H}$中的关系。逐分量和 $T \widehat{+} T'$是由满足 $(f, f') \in T$且 $(g, g') \in T'$的所有 $(f+g, f'+g')$ 构成的（线性）集合。正交逐分量和 $T \widehat{\oplus} T'$是表示 $T \perp T'$的逐分量和。算子和（或简称和）$T + T'$是由满足 $(f, f') \in T$且 $(f, g') \in T'$的所有 $(f, f' + g')$ 构成的集合。上述概念可自然地推广到从一个克莱因空间到另一个（可能不同的）克莱因空间的关系。若 $\mathcal{L}$和 $\mathcal{L}'$是 $\mathfrak{H}$的线性子集，则 $\mathcal{L} \dot{+} \mathcal{L}'$是集合 $\mathcal{L} + \mathcal{L}' = \{f + g \mid f \in \mathcal{L}$的 不交和； $g \in \mathcal{L}'\}$ 称为直和。在克莱因空间的典范分解中，我们用符号 $[\oplus]$ 表示关于 $[\cdot, \cdot]$ 和 $[\cdot, J\cdot]$的正交性。

3. Decomposing the adjoint of a symmetric relation in a Krein space into the orthogonal sum

设 T 是克莱因空间 $\mathfrak{H} = (\mathfrak{H}, [\cdot, \cdot])$ 中的闭对称关系，基本对称性为 J。则闭关系

$$\mathfrak{T} := JT$$

在希尔伯特空间 $(\mathfrak{H}, [\cdot, J\cdot])$ 中是对称关系，其伴随为 $\mathfrak{T}^* = JT^+$。在全文中（除非引理 6.3 中另有可能） T 具有相等亏指数 (d, d)，$d \leqslant \infty$，这里指的是 $\mathfrak{T}$ 的亏指数相等：

$$d = \dim \mathfrak{N}_{\mathrm{i}}(\mathfrak{T}^*) = \dim \mathfrak{N}_{-\mathrm{i}}(\mathfrak{T}^*)\,.$$

根据假设，存在 $T_0 \in \operatorname{Self}(T)$。与 T_0 相关联的是一个关系

$$\mathfrak{T}_0 := JT_0 \in \operatorname{Self}(\mathfrak{T})$$

它作为希尔伯特空间 $(\mathfrak{H}, [\cdot, J\cdot])$ 中的关系是自伴的。（回想一下，T 存在典范自伴扩张，当且仅当 $\mathfrak{T}$存在典范自伴扩张，也就是说，当且仅当 $\mathfrak{T}$ 具有相等亏指数 (d, d)。）尽管 $\mathfrak{T}_0$ 总有非空预解集，$\rho(\mathfrak{T}_0) \supseteq \mathbb{C}_*$，但并未预先假设 $\rho(T_0)$ 非空。

本文研究的关键概念是：

定义 3.1. 用 $\mathcal{N}$ 表示满足以下条件的所有中性子空间 N of$\mathfrak{K}$ 的集合：$N \subseteq T^+ \cap T^\perp$，且 $T \widehat{\oplus} N$ 是 $\mathfrak{K}$ 的超极大中性子空间。

Let

$$\mathfrak{N} := JN\,.$$

因此，根据引理 A.1，$N \in \mathcal{N}$ 当且仅当 N 是 $\mathfrak{H}$ 中满足以下条件的闭对称关系：

(a) $N \subseteq T^+ \cap T^\perp$，且 (b) $\mathfrak{N} + zI$ 的值域 $= \mathfrak{N}_z(\mathfrak{T}^*)$，对 $z = -\mathrm{i}$ 和 $z = \mathrm{i}$ 均成立。此外

定理 3.2. 一个 $T_0 \in \mathrm{Self}(T)$ 与一个 $N \in \mathcal{N}$ 一一对应，该对应由下式给出

$$T_0 = T_0(T, N) := T \widehat{\oplus} N\,, \quad N = N(T, T_0) := T_0 \cap T^\perp\,. \tag{3.1}$$

注 3.3. 定理 3.2 可以推广：对称扩张集 $T_0 \in \mathrm{Ext}(T)$ 与满足 $N \subseteq T^+ \cap T^\perp$ 的 $\mathfrak{H}$ 中对称关系集 N 之间存在一一对应；此对应仍由 (3.1) 给出。

给定 $T_0 \in \mathrm{Self}(T)$，$N = N(T, T_0)$ 有若干种等价的描述。在引理 4.4 中我们使用以下描述：

$$(f, f') \in N \quad \text{iff} \quad (f, f') \in T_0 \quad \text{and} \quad Jf' + \mathrm{i}f \in \mathfrak{N}_\mathrm{i}(\mathfrak{T}^*) \tag{3.2}$$

（或者等价地，$Jf' - \mathrm{i}f \in \mathfrak{N}_{-\mathrm{i}}(\mathfrak{T}^*)$）。另一种描述

$$N = (I + K_{T_0})(\mathfrak{K}_+ \,|\, \mathfrak{N}_\mathrm{i}(\mathfrak{T}^*))$$

是用角算子 $K_{T_0} \in \mathcal{B}(\mathfrak{K}_+, \mathfrak{K}_-)$ 来给出的（术语见 [4]）。该角算子是从克莱因空间 $\mathfrak{K} = \mathfrak{K}_+[\widehat{\oplus}]\mathfrak{K}_-$ 的典范分解中正子空间 $\mathfrak{K}_+$ 到负子空间 $\mathfrak{K}_-$ 的标准酉算子；此克莱因空间具有基本对称性 $\widehat{J}$。它具有如下矩阵形式

$$K_{T_0} = \begin{pmatrix} -C_{\mathfrak{T}_0} & 0 \\ 0 & JC_{\mathfrak{T}_0}J \end{pmatrix}\Big|_{\mathfrak{K}_+}\,.$$

希尔伯特空间 $(\mathfrak{H}, [\cdot, J\cdot])$ 中的酉算子 $C_{\mathfrak{T}_0}$

$$C_{\mathfrak{T}_0} := \{(f' + \mathrm{i}f, f' - \mathrm{i}f) \,|\, (f, f') \in \mathfrak{T}_0\}$$

是 $\mathfrak{T}_0$ 的凯莱变换。注意， $\mathfrak{N}$ 的凯莱变换

$$C_{\mathfrak{N}} := \{(f' + \mathrm{i}f, f' - \mathrm{i}f) \,|\, (f, f') \in \mathfrak{N}\} = C_{\mathfrak{T}_0} \,|\, _{\mathfrak{N}_{\mathrm{i}}(\mathfrak{T}^*)}$$

是从 $\mathcal{B}(\mathfrak{N}_{\mathrm{i}}(\mathfrak{T}^*)\ \mathfrak{N}_{-\mathrm{i}}(\mathfrak{T}^*))$ 到希尔伯特空间的酉算子。若令$V_z := I + 2z(\mathfrak{T}_0 - zI)^{-1}$, $z \in \mathbb{C}_*$, 为定义在 $\mathfrak{H}$ 上的双射有界算子，则 $C_{\mathfrak{N}} = V_{-\mathrm{i}} \,|\, _{\mathfrak{N}_{\mathrm{i}}(\mathfrak{T}^*)}$，且逆 $C_{\mathfrak{N}}^{-1} = V_{\mathrm{i}} \,|\, _{\mathfrak{N}_{-\mathrm{i}}(\mathfrak{T}^*)}$；特别地$C_{\mathfrak{T}_0} = V_{-\mathrm{i}}$, $C_{\mathfrak{T}_0}^{-1} = V_{\mathrm{i}}$。例如参见 [7, 引理 1.1.9]，对于 V_z。

另外， $N \in \mathcal{N}$ 还具有一些其他性质:

命题 3.4. (1) N 的亏指数（记作 n、 n）相等

$$n = \dim \mathfrak{N}_{\mathrm{i}}(\mathfrak{N}^*) = \dim \mathfrak{N}_{-\mathrm{i}}(\mathfrak{N}^*)$$

并且满足 $d + n =$ 维数 $\mathfrak{H}$。

(2) $\operatorname{dim} N = d$, $\operatorname{dim}\ T = n$。

(3) $T^+ = T \widehat{\oplus} \Sigma$。克莱因空间（$\mathfrak{K}, [\cdot,\cdot]$）的克莱因子空间（$\Sigma, [\cdot,\cdot]$）由下式给出

$$\Sigma := T^+ \cap T^\perp = N \widehat{\oplus}\, \widehat{J}(N) = J\widehat{\mathfrak{M}}\,,$$

$$\widehat{\mathfrak{M}} := \widehat{\mathfrak{N}}_{\mathrm{i}}(\mathfrak{T}^*) \widehat{\oplus}\, \widehat{\mathfrak{N}}_{-\mathrm{i}}(\mathfrak{T}^*)\,.$$

(4) $\operatorname{dom} N = \operatorname{dom}\ \mathfrak{N}$ 由下式刻画

$$\begin{aligned}\operatorname{dom} N =& (\mathfrak{T}_0 + \mathrm{i}I)^{-1}(\mathfrak{N}_{\mathrm{i}}(\mathfrak{T}^*)) = (\mathfrak{T}_0 - \mathrm{i}I)^{-1}(\mathfrak{N}_{-\mathrm{i}}(\mathfrak{T}^*)) \\ =& (C_{\mathfrak{N}} - I)(\mathfrak{N}_{\mathrm{i}}(\mathfrak{T}^*))\end{aligned}$$

并且是克莱因空间 $\mathfrak{M}:=\widehat{\ }\operatorname{dom}\mathfrak{M}$ 中的超极大中性子空间，该空间带有不定度量

$$[f_{\mathrm{i}} + f_{-\mathrm{i}}, g_{\mathrm{i}} + g_{-\mathrm{i}}]_{\mathfrak{M}} := [f_{\mathrm{i}}, Jg_{\mathrm{i}}] - [f_{-\mathrm{i}}, Jg_{-\mathrm{i}}]\,,$$

$f_{\pm\mathrm{i}}$, $g_{\pm\mathrm{i}} \in \mathfrak{N}_{\pm\mathrm{i}}$（$\mathfrak{T}^*$），以及基本对称性 $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$（相对于 $\mathfrak{N}_{\mathrm{i}}$（$\mathfrak{T}^*$）$+ \mathfrak{N}_{-\mathrm{i}}$（$\mathfrak{T}^*$）书写）。

证明。(1) 使用上文的 (b)。(2) $\operatorname{dim} N = d$ 的结论例如可由 $C_{\mathfrak{N}} \in \mathcal{B}$（$\mathfrak{N}_{\mathrm{i}}$（$\mathfrak{T}^*$） $\mathfrak{N}_{-\mathrm{i}}$（$\mathfrak{T}^*$））是希尔伯特空间酉算子这一点得到；交换 T 和 N 的角色，同理可得 $\operatorname{dim}\ T = n$。(3)（$\Sigma, [\cdot,\cdot]$）是克莱因空间这一点显然成立，因为 $0 \in \rho$（$J \,|\, _\Sigma$）、 J（Σ）$= \Sigma$, 见 [4, 定理 7.16]。 $\Sigma = J\mathfrak{M}$ 可由冯·诺伊曼公式 $\mathfrak{T}^* = \mathfrak{T} \widehat{\oplus} \widehat{\mathfrak{M}}$ 得出。(4) 是直接计算即可得到的。□

注记 3.5. 1. 若 T 是稠密定义的，则 $T_0 \in \operatorname{Self}(T)$ 与 $\operatorname{dom}\ N$ 一一对应。此外，若 T 与 J 对易，即 $T = \mathfrak{T}J$，则 $\operatorname{dom}\ N$ 可视为克莱因空间 $\mathfrak{M}$ 中的超极大中性子空间，其带有不定度量 $[\cdot, J\cdot]_{\mathfrak{M}}$ 和基本对称性 $\left(\begin{smallmatrix} J & 0 \\ 0 & -J \end{smallmatrix}\right)$；这正是 [1, 29, 38] 中研究的情形。

2. 若 $\hat{}\rho(T) \neq \emptyset$，则对于 $\hat{}\rho(T)$ 的每个连通分支中的 z，$\dim \mathfrak{N}_z(T^+)$ 都是常数；例如 [34]。若 $T_0 = T_0(T, N)$ 具有非空的 $\rho(T_0)$（$\subseteq \hat{}\rho(T)$），则 $(\forall z \in \rho(T_0))$ $\dim \mathfrak{N}_z(T^+) = d$。这是因为

$$\mathfrak{K} = N^+ \widehat{\oplus} \widehat{J}(N)$$

一方面，根据冯·诺伊曼公式

$$\mathfrak{K} = N^+ \widehat{+} \widehat{\mathfrak{N}}_z(T^+)$$

（逐分量直和）；另一方面。

3. 若 $\mathfrak{H}$ 是希尔伯特空间，则定理 3.2 和命题 3.4(3) 已经以 [10, 定理 12], 的形式出现；另见 [12, 定理 A][11, 定理 A], ，其形式如下（采用我们调整后的记号）：设 Σ 是 $\mathfrak{T}^*$ 中 $\mathfrak{T}$的一个正交补。那么$\mathfrak{T}_0 \in \mathsf{Self}(\mathfrak{T})$ 当且仅当 $\mathfrak{T}_0 = \mathfrak{T} \widehat{\oplus} \mathfrak{N}$，其中 $\mathfrak{N}$ 是 Σ 的一个满足 $\Sigma = \mathfrak{N} \widehat{\oplus} \left(\begin{smallmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{smallmatrix}\right)(\mathfrak{N})$的子空间。感谢审稿人指出这一点。

4. Standard symmetric operator in a Pontryagin space

庞特里亚金空间中的标准对称关系 T，如 [2], 中所定义，是一个闭对称关系，并具有性质 $(\exists z \in \mathbb{C}_*) z, \overline{z} \notin \sigma_p^0(T)$。等价地

定义 4.1. 若闭对称关系 T 满足集合

$$\delta(T) := (\mathbb{C}_* \cap \hat{\rho}(T)) \cap (\mathbb{C}_* \cap \hat{\rho}(T))^*$$

非空，则称其为标准对称关系。（通常，$\mathcal{O}^* := \{z \,|\, \overline{z} \in \mathcal{O}\}$ 表示子集 $\mathcal{O} \subseteq \mathbb{C}$。）

若 T 在庞特里亚金空间中是标准的，则 $\delta(T)$ 除至多一个有限维子集外，均为 $\mathbb{C}_*$。

本节中，$(\mathfrak{H}, [\cdot, \cdot])$ 是一个带有基本对称性 J 的庞特里亚金空间，T 是 $\mathfrak{H}$ 中一个具有相等亏指数的标准对称关系。我们的目标是证明

定理 4.2. 若 T 稠密定义，则其典范自伴扩张的预解集包含 $\delta(T)$ 作为子集。

定理 4.2 是由以下两个引理组合而成的。

引理 4.3. 设 $T_0 = T_0(T, N)$，$N \in \mathcal{N}$。令 $O_s(T, N)$ 为满足 $\mathsf{ran}(T - wI) \cap \mathsf{ran}(N - wI)$ 对$w = z$ 和 $w = \overline{z}$均为平凡集的那些 $z \in \delta(T)$ 的集合。则

$$\mathbb{C}_* \cap \rho(T_0) = O_s(T, N) \cap \delta(N)\,.$$

此外，若 T 是稠密定义的，则

$$\mathbb{C}_* \cap \rho(T_0) = \delta(T) \cap \delta(N)\,.$$

证明。由于对于所有 $z \in \mathbb{C}_*$，$\operatorname{ran}(T_0 - zI)$ 都是闭的，因此我们有

$$\delta(T_0) = \mathbb{C}_* \cap \rho(T_0) = (\mathbb{C}_* \setminus \sigma_p^0(T_0)) \cap (\mathbb{C}_* \setminus \sigma_p^0(T_0))^*\,.$$

令 $O(T,N)$ 表示满足 $\operatorname{ran}(T-zI) \cap \operatorname{ran}(N-zI) = \{0\}$ 的那些 $z \in \mathbb{C}$ 的集合。根据引理 A.3

$$O(T,N) \cap \sigma_p(T_0) = O(T,N) \cap (\sigma_p(T) \cup \sigma_p(N))$$

and

$$\rho(T_0) \subseteq O(T,N) \cap O(T,N)^*$$

因此，结论随即由 $O_s(T,N) = \delta(T) \cap O(T,N) \cap O(T,N)^*$ 得出。

设 T 是稠密定义的。由于 $\mathfrak{N}$ 与一个典范自伴扩张 $\mathfrak{T}_0 := JT_0 \in \operatorname{Self}(\mathfrak{T})$ 一一对应，后者是一个算子，并且由于

$$\operatorname{dom}\mathfrak{N} = \ker(\mathfrak{T}^*\mathfrak{T}_0 + I)$$

条件 $(N-zI)f = (T-zI)g$ 对某个 $f \in \operatorname{dom}\mathfrak{N}$ 和 $g \in \operatorname{dom}\mathfrak{T}$ 成立，蕴含 $(T_0 - zI)(f-g) = 0$，即对某个 $h_z \in \mathfrak{N}_z(T_0)$ 有 $f = g - h_z$；因此

$$0 = (\mathfrak{T}^*\mathfrak{T}_0 + I)f = (|\mathfrak{T}|^2 + I)g - (z^2+1)h_z$$

i.e.

$$g = (z^2+1)(|\mathfrak{T}|^2 + I)^{-1}h_z.$$

这尤其表明 $O(T,N) \supseteq \{-\mathrm{i}, \mathrm{i}\}$ and

$$\operatorname{ran}(T - zI) \cap \operatorname{ran}(N - zI) \subseteq (T - zI)(|\mathfrak{T}|^2 + I)^{-1}(\mathfrak{N}_z(T_0))$$

if $z \in \mathbb{C} \setminus \{-\mathrm{i}, \mathrm{i}\}$。由于 $\mathfrak{N}_z(T_0) = \mathfrak{N}_z(T) + \mathfrak{N}_z(N)$ 对于 $z \in O(T,N)$ 成立，见引理 A.3，因此可得（其中 $\amalg$ the disjoint $\cup$）

$$\begin{aligned} O(T,N) \supseteq & \{-\mathrm{i}, \mathrm{i}\} \\ & \amalg \{z \in \mathbb{C} \setminus \{-\mathrm{i}, \mathrm{i}\} \mid \\ & (|\mathfrak{T}|^2 + I)^{-1}(\mathfrak{N}_z(T) + \mathfrak{N}_z(N)) \subseteq \mathfrak{N}_z(T)\} \end{aligned}$$

随后

$$\delta(T) \cap O(T,N) \setminus \sigma_p^0(N) \supseteq \delta(T) \setminus \sigma_p^0(N)\,. \qquad \square$$

引理 4.4. 如果 T 的定义域是稠密的，那么 $N \in \mathcal{N}$ 是一个定义域稠密且没有特征值的标准对称算子。

证明。步骤 1. 在任意具有基本对称性 J的典范分解 $\mathfrak{H}=\mathfrak{H}_-[\oplus]\mathfrak{H}_+$ 中，算子 N的特征子空间由下式给出

$$\mathfrak{N}_z(N)=(\operatorname{dom}N)\cap(I+\mathrm{i}zJ)(\mathfrak{N}_\mathrm{i})\cap(I-\mathrm{i}zJ)(\mathfrak{N}_{-\mathrm{i}}) \tag{4.1}$$

若 $z\in\mathbb{C}\setminus\{-\mathrm{i},\mathrm{i}\}$，且由

$$\begin{aligned}\mathfrak{N}_\mathrm{i}(N)=&(\operatorname{dom}N)\cap((\mathfrak{H}_+\cap\mathfrak{N}_\mathrm{i})\oplus(\mathfrak{H}_-\cap\mathfrak{N}_{-\mathrm{i}}))\,,\\ \mathfrak{N}_{-\mathrm{i}}(N)=&(\operatorname{dom}N)\cap((\mathfrak{H}_+\cap\mathfrak{N}_{-\mathrm{i}})\oplus(\mathfrak{H}_-\cap\mathfrak{N}_\mathrm{i}))\,.\end{aligned} \tag{4.2}$$

这里我们使用 $\mathfrak{N}_{\pm\mathrm{i}}:=\mathfrak{N}_{\pm\mathrm{i}}(\mathfrak{T}^*)$。

令 $z\in\mathbb{C}$且 $f\in\mathfrak{N}_z(N)$；则由 (3.2) 得 $(I\mp\mathrm{i}zJ)f\in\mathfrak{N}_{\pm\mathrm{i}}$。若 $z\neq\pm\mathrm{i}$，则逆算子

$$(I\mp\mathrm{i}zJ)^{-1}\subseteq(I\pm\mathrm{i}zJ)/(1+z^2)$$

而这表明 (4.1) 中的 $\subseteq$。反过来，令 $f\in\operatorname{dom}N(=\operatorname{dom}\mathfrak{N})$，使得 $(I\mp\mathrm{i}zJ)f\in\mathfrak{N}_{\pm\mathrm{i}}$，即

$$(I\mp\mathrm{i}zJ)f=g_{\pm\mathrm{i}}\in\mathfrak{N}_{\pm\mathrm{i}}\,.$$

由于 $f\in\operatorname{dom}\mathfrak{N}$，$(\exists f')\,(f,f')\in\mathfrak{N}$；因此由 (3.2)

$$f'\pm\mathrm{i}f=f_{\pm\mathrm{i}}\in\mathfrak{N}_{\pm\mathrm{i}}$$

然后

$$f'-zJf=f_\mathrm{i}-\mathrm{i}g_\mathrm{i}\in\mathfrak{N}_\mathrm{i}\,,\quad f'-zJf=f_{-\mathrm{i}}+\mathrm{i}g_{-\mathrm{i}}\in\mathfrak{N}_{-\mathrm{i}}\,.$$

由于 $\mathfrak{T}$ 是稠密定义的，根据引理 A.5，$\mathfrak{N}_\mathrm{i}$ 和 $\mathfrak{N}_{-\mathrm{i}}$ 不相交，这表明 $f'=zJf$，即 $f\in\mathfrak{N}_z(N)$。

用完全相同的论证可得 $\mathfrak{N}_{\pm\mathrm{i}}(N)$，如上所述。

步骤 2。令 $\mu\in\mathbb{C}\setminus\{-1,1\}$；则

$$(J-\mu I)(\mathfrak{N}_\mathrm{i})\cap(J+\mu I)(\mathfrak{N}_{-\mathrm{i}})=(J-\mu I)(\mathfrak{N}_\mathrm{i}\cap L_\mu(\mathfrak{N}_{-\mathrm{i}}))\,,$$

$$L_\mu:=\lambda^{-1}P_{\mathfrak{H}_+}+\lambda P_{\mathfrak{H}_-}\,,\quad \lambda:=\frac{1-\mu}{1+\mu}$$

其典范投影为 $P_{\mathfrak{H}_\pm}:=(I\pm J)/2$。为此，考虑 $(J-\mu I)f_\mathrm{i}=(J+\mu I)f_{-\mathrm{i}}$，其中 $f_{\pm\mathrm{i}}\in\mathfrak{N}_{\pm\mathrm{i}}$。于是

$$f_{-\mathrm{i}}=(\lambda P_{\mathfrak{H}_+}+\lambda^{-1}P_{\mathfrak{H}_-})f_\mathrm{i}=L_\mu^{-1}f_\mathrm{i}\quad i.e.\quad f_\mathrm{i}\in\mathfrak{N}_\mathrm{i}\cap L_\mu(\mathfrak{N}_{-\mathrm{i}})\,.$$

由于该论证是可逆的，这就证明了所述结论。

步骤 3。对于上述的 μ

$$\mathfrak{N}_\mathrm{i}\cap L_\mu(\mathfrak{N}_{-\mathrm{i}})\subseteq\mathfrak{N}_\mathrm{i}\cap\ker(\mathfrak{T}^*+L_\mu\mathfrak{T}^*L_\mu^{-1})\,.$$

对于，如果 $f_\mathrm{i}\in\mathfrak{N}_\mathrm{i}$ 和 $f_\mathrm{i}=L_\mu f_{-\mathrm{i}}$，存在某个 $f_{-\mathrm{i}}\in\mathfrak{N}_{-\mathrm{i}}$，那么 $f_{-\mathrm{i}}=L_\mu^{-1}f_\mathrm{i}$ 和

$$\mathfrak{T}^*f_{-\mathrm{i}}=-\mathrm{i}f_{-\mathrm{i}}=-L_\mu^{-1}\mathfrak{T}^*f_\mathrm{i}$$

即 $\mathfrak{T}^*L_\mu^{-1}f_\mathrm{i}=-L_\mu^{-1}\mathfrak{T}^*f_\mathrm{i}$。

步骤 4. 不失一般性，设庞特里亚金空间 $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_-[\oplus]\mathfrak{H}_+$ 具有有限负指标，且 $\operatorname{dom} T \supseteq \mathfrak{H}_-$。则 T 具有矩阵表示（回顾 [37]）

$$T = \begin{pmatrix} T_{11} & -T_{21}^* \\ T_{21} & T_{22} \end{pmatrix} : \begin{matrix} \mathfrak{H}_- \\ \oplus \\ \mathfrak{H}_+ \end{matrix} \to \begin{matrix} \mathfrak{H}_- \\ \oplus \\ \mathfrak{H}_+ \end{matrix}.$$

Here

- $T_{11} \in \mathcal{B}(\mathfrak{H}_-)$ 在有限维希尔伯特空间 $(\mathfrak{H}_-, -[\cdot,\cdot])$ 中是自伴的，
- T_{22} 是希尔伯特空间 $(\mathfrak{H}_+, [\cdot,\cdot])$ 中的闭稠定对称算子，
- T_{21}^* 是算子 $T_{21} : (\mathfrak{H}_-, -[\cdot,\cdot]) \to (\mathfrak{H}_+, [\cdot,\cdot])$ 的伴随，其定义域为 $\mathfrak{H}_-$。

T^+也有类似的矩阵形式，但其中的 T_{22} 由其伴随$T_{22}^* \supseteq T_{22}$替代。

随后（其中 $I_\pm := I \,|\, _{\mathfrak{H}_\pm}$）

$$\mathfrak{N}_{\mathrm{i}} = \left\{ \begin{pmatrix} f_- \\ f_+ \end{pmatrix} \,\middle|\, \begin{matrix} -(T_{11} + \mathrm{i}I_-)f_- + T_{21}^* f_+ & = 0 \\ T_{21} f_- + (T_{22}^* - \mathrm{i}I_+) f_+ & = 0 \end{matrix} \right\} \tag{4.3}$$

and

$$\begin{aligned} \ker(\mathfrak{T}^* + L_\mu \mathfrak{T}^* L_\mu^{-1}) &= \ker \begin{pmatrix} -T_{11} & \frac{\lambda^2+1}{2} T_{21}^* \\ \frac{\lambda^{-2}+1}{2} T_{21} & T_{22}^* \end{pmatrix} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} f_- \\ f_+ \end{pmatrix} \,\middle|\, \begin{matrix} -T_{11} f_- + \frac{\lambda^2+1}{2} T_{21}^* f_+ & = 0 \\ \frac{\lambda^{-2}+1}{2} T_{21} f_- + T_{22}^* f_+ & = 0 \end{matrix} \right\}. \end{aligned} \tag{4.4}$$

将 (4.4) 减去 (4.3)，$\begin{pmatrix} f_- \\ f_+ \end{pmatrix} \in \mathfrak{N}_{\mathrm{i}} \cap \ker(\mathfrak{T}^* + L_\mu \mathfrak{T}^* L_\mu^{-1})$ 满足

$$\begin{cases} \mathrm{i} f_- + \frac{\lambda^2-1}{2} T_{21}^* f_+ & = 0\,, \\ \frac{\lambda^{-2}-1}{2} T_{21} f_- + \mathrm{i} f_+ & = 0\,. \end{cases} \tag{4.5}$$

对于 $\lambda \neq 1$，即 $\mu \in \mathbb{C} \setminus \{-1, 0, 1\}$，可得

$$f_+ = \frac{\mathrm{i}(\lambda^{-2}-1)}{2} T_{21} f_-\,, \quad f_- \in \mathfrak{N}_k(|T_{21}|^2)\,,$$

$$k := \left(\frac{2\lambda}{\lambda^2 - 1} \right)^2 = \left(\frac{\mu^2 - 1}{2\mu} \right)^2.$$

将此解代入 (4.3) 可进一步得到

$$(T_{11} + \mathrm{i}I_-) f_- = \frac{\mathrm{i}(\lambda^{-2}-1)}{2} |T_{21}|^2 f_- = \frac{\mathrm{i}(\lambda^{-2}-1)}{2} k f_-$$

i.e.

$$f_- \in \mathfrak{N}_{(\frac{\mu^2-1}{2\mu})^2}(|T_{21}|^2) \cap \mathfrak{N}_{\frac{\mathrm{i}(\mu^2+1)}{2\mu}}(T_{11})\,.$$

现在，$\mathfrak{N}_{(\frac{\mu^2-1}{2\mu})^2}(|T_{21}|^2)$ 只有在 $(\frac{\mu^2-1}{2\mu})^2 > 0$，即 $\mu \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$ 时才可能是非平凡的。但对于实数 μ，$\mathfrak{N}_{\frac{\mathrm{i}(\mu^2+1)}{2\mu}}(T_{11})$ 是平凡的，因此

$$\mathfrak{N}_{\mathrm{i}} \cap \ker(\mathfrak{T}^* + L_\mu \mathfrak{T}^* L_\mu^{-1}) = \{0\} \quad \text{for all} \quad \mu \in \mathbb{C} \setminus \{-1, 1\}\,.$$

注意，由 (4.5)，$f_\pm = 0$ 对于 $\lambda = 1$ ($\mu = 0$)。结合 $\mu = \mathrm{i}/z$，这表明$\sigma_p(N) \subseteq \{-\mathrm{i}, \mathrm{i}\}$ (N由 (4.1) 和引理 A.5 可知是单射)。

最后，由 (4.2)，$\mathfrak{N}_{\pm\mathrm{i}}(N) = \{0\}$，因为由 (4.3) 可知 $\mathfrak{H}_- \cap \mathfrak{N}_{\mathrm{i}} = \{0\}$（对 $\mathfrak{H}_- \cap \mathfrak{N}_{-\mathrm{i}}$ 也同样如此），且因为 $\mathfrak{N}_{\pm\mathrm{i}} \cap \operatorname{dom}\mathfrak{N} = \{0\}$。对于后者，考虑 $f \in \mathfrak{N}_{\mathrm{i}} \cap \operatorname{dom}\mathfrak{N}$；则 $(f, \mathrm{i}f) \in \mathfrak{T}^*$，且 $(\exists f')\,(f, f') \in \mathfrak{N}$。由于$\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{T}^* \cap \mathfrak{N}^*$

$$\mathrm{i}\|f\|^2 = \Re\,\langle f', f\rangle$$

即 $f = 0$；（希尔伯特空间的）标量积 $\langle g, h\rangle := [g, Jh]$，以及范数 $\|g\| := \sqrt{\langle g, g\rangle}$, $g \in \mathfrak{H}$。类似地，$\mathfrak{N}_{-\mathrm{i}} \cap \operatorname{dom}\mathfrak{N} = \{0\}$。□

注 4.5. 如果 T 是单值的，则根据无特征值的标准 [2, 命题 2.4], ，有 $\delta(T) = \mathbb{C}_*$；但反之不成立。

5. Application to boundary triples

这里 $\mathfrak{H} = (\mathfrak{H}, [\cdot,\cdot])$ 是一个带有基本对称性 J的克莱因空间，T 是 $\mathfrak{H}$ 中的闭对称关系，且具有相等亏指数。设 $\Pi_\Gamma = (\mathfrak{L}, \Gamma_0, \Gamma)$ 是 T^+ 的一个边界三元组。由 Self(T) 中的自伴关系定义为

$$T_0 := \ker\Gamma_0 \quad \text{and} \quad T_1 := \ker\Gamma_1$$

它们是不相交的，$T_0 \cap T_1 = T$，并且是横截的，$T_0 \mathbin{\widehat{+}} T_1 = T^+$ [6, 命题 3.4]。因此特别有 $\Gamma_1(T_0) = \Gamma_0(T_1) = \mathfrak{L}$。设 $N = N(T, T_0)$。则典范自伴扩张 T_0 和 $T \mathbin{\widehat{\oplus}} \widehat{J}(N)$ 也同样是不相交且横截的，但 $T \mathbin{\widehat{\oplus}} \widehat{J}(N)$ 可能不同于 T_1。

命题 5.1. 设 $\Pi_\Gamma = (\mathfrak{L}, \Gamma_0, \Gamma_1)$ 是 T^+ 的边界三元组。则

$$T^+ = T_1 \mathbin{\widehat{+}} N\,, \quad N = N(T, T_0) \tag{5.1}$$

其中逐分量和是直和，但不一定正交；当且仅当以下等价命题 (i)–(iii) 中至少一个成立时，它是正交的：

(i) $\widehat{J(N)} \subseteq T_1$.

(ii) $J(N) = N(T, T_1)$.

(iii) $T_1 = T \mathbin{\widehat{\oplus}} \widehat{J}(N)$.

证明。(5.1) 由 $T^+ = T_0 \mathbin{\widehat{+}} T_1$ 和 $T_0 = T \mathbin{\widehat{\oplus}} N$ 可直接得到。 N 与 T_1 不相交，这是由 $N \cap T_1 \subseteq T_0 \cap T_1 = T$ 得出的，然后利用 N 与 T 不相交这一事实即可。陈述 (ii)、(iii) 的等价性由下式得出

$$T^+ = T_1 \mathbin{\widehat{\oplus}} \widehat{J}(N(T, T_1)) \tag{5.2}$$

而（i）使用 $T_1^\perp = \widehat{J}\,(T_1)$。 □

注记 5.2。1. 三元组 $\Pi_{\Gamma'} = (\mathfrak{L}, \Gamma_0', \Gamma_1')$，其中 $\Gamma_0' = \Gamma_1, \Gamma_1' = -\Gamma_0$，是 T^+ 的边界三元组，称为转置边界三元组（例如 [21]），因此（5.2）不过是将 T_0 替换为 $\ker \Gamma_0' = T_1$ 后的命题 3.4(3)。2. 然而，总可以为 T^+ 选取一个边界三元组 Π_Γ，使得（5.1）中的和为正交和；见下文命题 5.4。

算子 $\Gamma_0 \,|\, _{\widehat{J}(N)}$ 和 $\Gamma_1 \,|\, _N$ 是双射，这促使我们给出它们的逆的以下定义。

定义 5.3。设 $\Pi_\Gamma = (\mathfrak{L}, \Gamma_0, \Gamma_1)$ 是 T^+ 的边界三元组，并定义如下在 $\mathfrak{L}$ 上有界且处处有定义的算子

$$\Gamma_0^{(-1)} := (\Gamma_0 \,|\, _{\widehat{J}(N)})^{-1}, \quad \Gamma_1^{(-1)} := (\Gamma_1 \,|\, _N)^{-1},$$

$$\beta = \beta(\Gamma_0, \Gamma_1) := \Gamma_1 \Gamma_0^{(-1)}$$

其中 $N = N(T, T_0)$。

以下断言可通过直接计算得到。

命题 5.4. 设 $\Pi_\Gamma = (\mathfrak{L}, \Gamma_0, \Gamma_1)$ 是 T^+ 的一个边界三元组，其韦尔族为 M_Γ，并设 $N = N(T, T_0)$。

1) 对于 $\mathfrak{L}$ 中的任意关系 Θ，$T_\Theta := \Gamma^{-1}(\Theta) \in \mathrm{Ext}(T)$ 由下式给出

$$T_\Theta = T \mathbin{\widehat{\oplus}} \operatorname{ran}(\Gamma_0^{(-1)} + \Gamma_1^{(-1)}(\Theta - \beta)).$$

2) 特别地，对于一个自伴关系 $T \mathbin{\widehat{\oplus}} \widehat{J}(N) \in \mathrm{Self}(T)$，存在与之对应的自伴算子 $\beta \in \mathcal{B}(\mathfrak{L})$，即

$$T \mathbin{\widehat{\oplus}} \widehat{J}(N) = \ker(\Gamma_1 - \beta \Gamma_0).$$

此外，三元组 $\Pi_{\Gamma^\beta} = (\mathfrak{L}, \Gamma_0^\beta, \Gamma_1^\beta)$ 满足

$$\begin{pmatrix} \Gamma_0^\beta \\ \Gamma_1^\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ -\beta & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Gamma_0 \\ \Gamma_1 \end{pmatrix}$$

是满足以下条件的 T^+ 的边界三元组

$$\ker \Gamma_0^\beta = T_0, \quad \ker \Gamma_1^\beta = T \mathbin{\widehat{\oplus}} \widehat{J}(N)$$

以及韦尔族 $\mathbb{C} \ni z \mapsto M_{\Gamma^\beta}(z) = M_\Gamma(z) - \beta$。

注5.5。通过使用（$\forall z \in \mathbb{C}$）

$$P_{\widehat{J}(N)}\widehat{\gamma}_\Gamma(z) \subseteq \Gamma_0^{(-1)}\,, \quad P_N\widehat{\gamma}_\Gamma(z) = \Gamma_1^{(-1)} M_{\Gamma^\beta}(z)$$

由此可得，$M_\Gamma(z) = \Gamma_1\widehat{\gamma}_\Gamma(z)$ 是一个自伴常数β与一个“较小”的韦尔族 $M_{\Gamma^\beta}(z) = \Gamma_1 P_N\widehat{\gamma}_\Gamma(z)$ 之和。这样，例如，[5, 定理 3.2]的证明就大大简化了，因为我们的 β 恰好就是其中的 α 。

变换后的边界三元组 Π_{Γ^β} 是下一个例子所讨论情形的一个特殊情况。

例。设 $\Pi_\Gamma = (\mathfrak{L}, \Gamma_0, \Gamma_1)$ 和 $\Pi_{\Gamma'} = (\mathfrak{L}, \Gamma_0', \Gamma_1')$ 是 T^+ 的边界三元组。若 $\Gamma_0' = \Gamma_0$ ，则（参见 [19, 命题 2.2], [7, 推论 2.5.6] 在希尔伯特空间中的情形）存在一个自伴算子 $K \in \mathcal{B}(\mathfrak{L})$，使得

$$\Gamma_1' = \Gamma_1 - K\Gamma_0 \quad \text{on} \quad T^+\,. \tag{5.3}$$

由此可得

$$K = \beta - \beta_0 \quad \text{with} \quad \beta_0 := \Gamma_1'\Gamma_0^{(-1)} \in \mathcal{B}(\mathfrak{L})\,.$$

一般化如下。若 $\Pi_\Gamma = (\mathfrak{L}, \Gamma_0, \Gamma_1)$ 和 $\Pi_{\Gamma'} = (\mathfrak{L}, \Gamma_0', \Gamma_1')$ 是 T^+ 的边界三元组，则以下两个条件等价：

(a) 存在算子 $K \in \mathcal{B}(\mathfrak{L})$，使得 (5.3) 成立。($b$) $\Gamma_1' = \Gamma_1$ 在 $N = N(T, T_0)$ 上。

证明。任意 $\widehat{u} \in \widehat{J}(N)$ 都可写成 $\widehat{u} = \Gamma_0^{(-1)} l$, $l \in \mathfrak{L}$ 的形式，因此 $(\Gamma_1 - \Gamma_1')\widehat{u} = (\beta - \beta_0)l \equiv Kl$；故 ($a$) $\Leftarrow$ (b)。反向的 (a) $\Rightarrow$ (b) 显然。若$\Gamma_0 = \Gamma_0'$ ，则 (b) 自动成立，而K 的自伴性源于格林恒等式。□

因此，下面给出另外两个例子来说明定义 5.3。

例。在 [2, 例 3.1] $\mathfrak{H} = (\mathbb{C}^4, [\cdot,\cdot])$ 中，$c_1, \ldots, c_4 \in \mathbb{C}$ 时，[2, 是一个带有基本对称性 $J(c_1, c_2, c_3, c_4) = (c_4, c_3, c_2, c_1)$ 的庞特里亚金空间；而当 $c, d \in \mathfrak{H}$ 时，$[c, d] = c^* J d$。一个单对称算子

$$T = \{((c_1, 0, 0, 0), (0, c_1, 0, 0)) \,|\, c_1 \in \mathbb{C}\}$$

它的伴随

$$T^+ = \{((c_1, c_2, c_3, c_4), (c_5, c_6, c_7, c_3)) \,|\, c_1, \ldots, c_7 \in \mathbb{C}\}$$

以及亏子空间

$$\mathfrak{N}_z(T^+) = \{(c_1, c_2, zc_4, c_4) \,|\, c_1, c_2, c_4 \in \mathbb{C}\}\,, \quad z \in \mathbb{C}\,.$$

由于 T 是单值的，因此适用广义冯·诺依曼公式

$$T^+ = T \mathbin{\widehat{+}} \widehat{\mathfrak{N}}_{\overline{z}}(T^+) \mathbin{\widehat{+}} \widehat{\mathfrak{N}}_z(T^+) \mathbin{\widehat{+}} \widehat{\mathfrak{N}}_{z_0}(T^+)$$

对于 z、 $z_0 \in \mathbb{C}_+$、 $z \neq z_0$。另一方面，三元组 $\Pi_\Gamma =$ （$\mathbb{C}^3$、Γ_0、Γ_1）具有

$$\begin{aligned}\Gamma_0((c_1,c_2,c_3,c_4),(c_5,c_6,c_7,c_3)) =&(c_1-c_6,c_2,c_4)\,,\\ \Gamma_1((c_1,c_2,c_3,c_4),(c_5,c_6,c_7,c_3)) =&(c_3,c_7,c_5)\end{aligned}$$

是 T^+ 的一个边界三元组；T 的指定自伴扩张由下式给出

$$\begin{aligned}T_0 =&\{((c_1,0,c_3,0),(c_5,c_1,c_7,c_3)) \,|\, c_1,c_3,c_5,c_7 \in \mathbb{C}\}\,,\\ T_1 =&\{((c_1,c_2,0,c_4),(0,c_6,0,0)) \,|\, c_1,c_2,c_4,c_6 \in \mathbb{C}\}\,.\end{aligned}$$

因此， $T^+ = T \mathbin{\widehat{\oplus}} N \mathbin{\widehat{\oplus}} \widehat{J}(N)$，其中

$$\begin{aligned}N =&\{((0,0,c_4,0),(c_1,0,c_3,c_4)) \,|\, c_1,c_3,c_4 \in \mathbb{C}\}\,,\\ \widehat{J}(N) =&\{((c_1,c_2,0,c_4),(0,-c_1,0,0)) \,|\, c_1,c_2,c_4 \in \mathbb{C}\}\,.\end{aligned}$$

可以验证 $T_1 = T \mathbin{\widehat{\oplus}} \widehat{J}(N)$。这些算子

$$\begin{aligned}\Gamma_0^{(-1)}(c_1,c_2,c_3) =&((c_1/2,c_2,0,c_3),(0,-c_1/2,0,0))\,,\\ \Gamma_1^{(-1)}(c_1,c_2,c_3) =&((0,0,c_1,0),(c_3,0,c_2,c_1))\end{aligned}$$

以及 $\beta = 0$。

例。在 [15, 定理 2.2(iii)] $\mathfrak{H}$ 是一个希尔伯特空间，自伴关系 T_0 是单射，闭对称关系 T 由下式给出

$$T = (T_0^{-1} \,|\, _{\ker G^*})^{-1}$$

其中 $G \in \mathcal{B}(\mathfrak{L},\mathfrak{H})$ 是单射，并满足 $G^*(\operatorname{ran} T_0) = \mathfrak{L}$；由此特别可知 $\operatorname{ran} G$ 是闭的。其伴随和亏子空间由下式给出

$$T^* = T_0 \mathbin{\widehat{+}} (\operatorname{ran} G \times \{0\})\,, \quad \mathfrak{N}_{\mathrm{i}}(T^*) = (T_0^{-1} + \mathrm{i}I)^{-1}(\operatorname{ran} G)$$

T^* 的边界三元组 $\Pi_\Gamma = (\mathfrak{L},\Gamma_0,\Gamma_1)$ 定义如下

$$\Gamma_0 \begin{pmatrix} T_0^{-1}f' + G\varphi \\ f' \end{pmatrix} = \varphi\,, \quad \Gamma_1 \begin{pmatrix} T_0^{-1}f' + G\varphi \\ f' \end{pmatrix} = G^*f' + E\varphi\,,$$

$$\text{with an arbitrary} \quad E = E^* \in \mathcal{B}(\mathfrak{L})$$

对于 $f' \in \operatorname{ran} T_0$ 和 $\varphi \in \mathfrak{L}$。由此可得

$$N = (T_0^{-1} \,|\, _{\mathcal{X}})^{-1}\,, \quad \widehat{J}(N) = -T_0^{-1} \,|\, _{\mathcal{X}}\,,$$

$$\mathcal{X} := (T_0^{-1} - \mathrm{i}I)^{-1}(\mathfrak{N}_{\mathrm{i}}(T^*)) = (T_0^{-2} + I)^{-1}(\operatorname{ran} G)\,.$$

我们注意到

$$\mathcal{X} = \operatorname{ran} G\,.$$

设 $\varphi\in\mathfrak{L}$求解 $G^*(T_0^{-2}+I)^{-1}G\varphi=0$；则 $(T_0^{-1}-\mathrm{i}I)^{-1}G\varphi=0$，从而 $\varphi=0$。这表明 $\mathcal{X}\subseteq$值域 G。由于 $\mathcal{X}$是闭的，值域G是 $\mathcal{X}$ 与 $\mathcal{X}^\perp\cap$值域 G 的正交和。设 $f\in\mathcal{X}^\perp$，则 $G^*(T_0^{-2}+I)^{-1}f=0$。此外，若 $f=G\varphi\in$值域G，则如前所述，后者推出 $\varphi=0$；因此 $\mathcal{X}=$值域G。因此，$(\forall\varphi\in\mathfrak{L})$

$$\Gamma_0^{(-1)}\varphi=\begin{pmatrix}(T_0^{-2}+I)^{-1}G\varphi\\ -T_0^{-1}(T_0^{-2}+I)^{-1}G\varphi\end{pmatrix},\quad \Gamma_1^{(-1)}\varphi=\begin{pmatrix}T_0^{-1}(G^*\mid_{\operatorname{ran}G})^{-1}\varphi\\ (G^*\mid_{\operatorname{ran}G})^{-1}\varphi\end{pmatrix}$$

此外

$$\beta=E-E_0$$

其中自伴 $E_0\in\mathcal{B}(\mathfrak{L})$定义为

$$E_0:=G^*T_0^{-1}(T_0^{-2}+I)^{-1}G\,.$$

（因此，$\beta=0$当且仅当 $E=E_0$。）可以验证，$T\widehat{\oplus}\widehat{J}(N)$的定义与 T_1 类似，但边界条件 $G^*f'+E\varphi=0$ 中的 E 由 E_0替换，即 $G^*f'+E_0\varphi=0$。

下文中，T' 是（可能）另一个克莱因空间$(\mathfrak{H}',[\cdot,\cdot]')$中的另一个对称关系，其基本对称性为 J'。T'与 T具有相同的相等亏指数，即(d,d)，且 $\Pi_{\Gamma'}=(\mathfrak{L},\Gamma_0',\Gamma_1')$是$T'^+$的一个边界三元组。定义 5.3 中相关的逆算子记为 $\Gamma_0'^{(-1)}$, $\Gamma_1'^{(-1)}$，其中 $N=N(T,T_0)$替换为 $N'=N(T',T_0')$，$\frown$ $\frown$$T_0'$:=的核$\Gamma_0'$, J替换为 J'。此外（见命题 3.4(3)）

$$\Sigma:=T^+\cap T^\perp\,,\quad \Sigma':=T'^+\cap T'^\perp\,.$$

引理 5.6. 设 T 和 T' 是克莱因空间 $\mathfrak{H}$ 和 $\mathfrak{H}'$中的闭对称关系。假设 T 和 T' 都具有相同的相等亏指数，并且 $\Pi_\Gamma=(\mathfrak{L},\Gamma_0,\Gamma_1)$ 和 $\Pi_{\Gamma'}=(\mathfrak{L},\Gamma_0',\Gamma_1')$ 分别是 T^+和 T'^+的边界三元组。

1) 由下式定义的关系 V_0: $\mathfrak{K}\to\mathfrak{K}'$

$$V_0:=\Gamma'^{-1}\Gamma=(V_0)_s\,\widehat{\oplus}\,(\{0\}\times T')$$

是一个酉关系，其在 T^+ 上的算子部分 $(V_0)_s$ 由下式给出

$$(V_0)_s=\Gamma_0'^{(-1)}\Gamma_0+\Gamma_1'^{(-1)}(\Gamma_1-\beta'\Gamma_0)\,,\quad \beta'=\beta(\Gamma_0',\Gamma_1')\,.$$

2) $(V_0)_s\mid_\Sigma$ 是从克莱因空间 $(\Sigma,[\cdot,\cdot])$ 到克莱因空间 $(\Sigma',[\cdot,\cdot]')$ 的标准酉算子，其逆为

$$((V_0)_s\mid_\Sigma)^{-1}=\Gamma_0^{(-1)}\Gamma_0'+\Gamma_1^{(-1)}(\Gamma_1'-\beta\Gamma_0')\quad on\quad \Sigma'\,.$$

3) $N=N(T,T_0)$ 与 $N'=N(T',T_0')$ 同构；这两个同胚映射 $(N,[\cdot,J\cdot])\to(N',[\cdot,J'\cdot]')$ 由下式给出：

$$w_0:=\widehat{J}'\Gamma_0'^{(-1)}\Gamma_0\widehat{J}\mid_N\quad and\quad w_1:=\Gamma_1'^{(-1)}\Gamma_1\mid_N=w_0^{*-1}\,.$$

证明。1) $(f,h)\in(V_0)_s$ 当且仅当 $(f,h)\in T^+\times T'^+$ 使得 $\Gamma_0 f=\Gamma'_0 h$ 且 $\Gamma_1 f=\Gamma'_1 h$，并且对于某些 $\widehat{u}\in N'$, $\widehat{v}\in J'(N')$（回顾一下$\Sigma'=N'\widehat{\oplus}\widehat{J'}(N')$）；也就是说，$\widehat{v}=\Gamma'^{(-1)}_0\Gamma_0\widehat{f}$ 且 $\widehat{u}=\Gamma'^{(-1)}_1(\Gamma_1\widehat{f}-\Gamma'_1\widehat{v})$。

2) 为了证明 $Q:=(V_0)_s\,|_{\,\Sigma}$ 是标准酉算子 $\Sigma\to\Sigma'$，我们利用 $Q=V_0\cap(\Sigma\times\Sigma')$；于是其伴随

$$Q^+=(\Sigma'\times\Sigma)\cap\overline{(V_0^{-1}\,\widehat{+}\,(\Sigma'^+\times\Sigma^+))}$$

其中，$\Sigma\subseteq\mathfrak{K}$ 的伴随由 $\Sigma^+=T\widehat{\oplus}\widehat{J}(T)$ 给出，$\Sigma'\subseteq\mathfrak{K}'$ 的伴随也类似。由于 $V_0\,\widehat{+}(\Sigma\times\Sigma')$ 是闭关系，因此 $V_0^{-1}\,\widehat{+}\,(\Sigma'^+\times\Sigma^+)$ 也是闭关系；因此

$$\begin{aligned}(Q^+)^{-1}=&(\Sigma\times\Sigma')\cap(V_0\,\widehat{+}\,(\Sigma^+\times\Sigma'^+))\\=&(\Sigma\times\Sigma')\cap((V_0)_s\,\widehat{+}\,(\Sigma^+\times\Sigma'^+))\\=&((V_0)_s\,\widehat{+}\,(\Sigma^+\times\{0\}))\,|_{\,\Sigma}\\=&(Q\,\widehat{+}\,(\Sigma^+\times\{0\}))\,|_{\,\Sigma}=Q\,.\end{aligned}$$

逆 Q^{-1} 可直接计算得出。

3) w_0 和 w_1 是双射显而易见，我们只需证明 $w_1=w_0^{*\,-1}$。后一个等式等价于 $(\forall l,l'\in\mathfrak{L})$

$$[\Gamma_0^{(-1)}l,\Gamma_1^{(-1)}l']=[\Gamma'^{(-1)}_0 l,\Gamma'^{(-1)}_1 l']'\tag{5.4}$$

其中，左侧的 $[\cdot,\cdot]$（右侧的 $[\cdot,\cdot]'$）是 $\mathfrak{K}$（$\mathfrak{K}'$）中的不定内积；回顾（2.2）。另一方面，由于 $(V_0)_s\,|_{\,\Sigma}\widehat{\ }$ 是标准酉 $\Sigma\to\Sigma'$，$(\forall f,\widehat{g}\in\Sigma)$

$$[\widehat{f},\widehat{g}]=[(V_0)_s\widehat{f},(V_0)_s\widehat{g}]'\,.\tag{5.5}$$

对于 $f\in J(N)$，$\widehat{g}\in N$，(5.5) 可写成 (5.4) 的形式，其中 $l=\Gamma_0 f$, $l'=\Gamma_1\widehat{g}$。 □

注 5.7. w_0 不一定是希尔伯特空间酉算子，即 $w_1=w_0$ 未必成立。举一个简单的例子，令 $\Gamma'=\left(\begin{smallmatrix}\varkappa^{-1}I & 0\\ 0 & \varkappa I\end{smallmatrix}\right)\Gamma$, $\varkappa\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$。那么

$$(V_0)_s=\varkappa^{-1}P_N+\varkappa P_{\widehat{J}(N)}\,,\quad w_0=\varkappa I\,|_{\,N}\,,\quad w_1=\varkappa^{-1}I\,|_{\,N}\,.$$

另一方面，对于例 5 中的 $\Pi_{\Gamma'}=(\mathfrak{L},\Gamma_0,\Gamma_1-K\Gamma_0)$

$$(V_0)_s=(I+\Gamma_1^{(-1)}K\Gamma_0)P_\Sigma\,,\quad w_0=w_1=I\,|_{\,N}\,.$$

利用引理 5.6，在本节余下部分我们证明以下定理。

定理 5.8。设 T 和 T' 是克莱因空间 $\mathfrak{H}$ 和 $\mathfrak{H}'$ 中的闭对称关系，其基本对称分别为 J 和 J'。假设T和 T'的亏指数相等，并设 $\Pi_\Gamma=(\mathfrak{L},\Gamma_0,\Gamma_1)$ 和 $\Pi_{\Gamma'}=(\mathfrak{L},\Gamma'_0,\Gamma'_1)$ 分别是 T^+和 T'^+的边界三元组。令 $T_0:=$

核 Γ_0, T_0':=核 Γ_0', $N = N(T, T_0)$, 以及 $N' = N(T', T_0')$。最后, 令$\mathcal{V}(\Gamma, \Gamma')$表示所有满足 $\Gamma' = \Gamma V^{-1}$的关系 V: $\mathfrak{K} \to \mathfrak{K}'$ 所构成的集合。

1) 在 $\mathcal{V}(\Gamma, \Gamma')$ 中存在算子（分别为单射算子）当且仅当存在满射（分别为双射） τ: $T \to T'$。特别地, 每个算子 $V \in \mathcal{V}(\Gamma, \Gamma')$ 都满足 $V\,|_T = \tau$, $\operatorname{dom} V \supseteq T^+$, 且具有如下矩阵形式

$$V = \begin{pmatrix} \tau & * & * & * \\ 0 & w_1 & w_{01} & * \\ 0 & 0 & \widehat{J}' w_0 \widehat{J} & * \\ 0 & 0 & 0 & * \end{pmatrix} : \begin{matrix} T \\ \widehat{\oplus} \\ N \\ \widehat{\oplus} \\ \widehat{J}(N) \\ \widehat{\oplus} \\ \widehat{J}(T) \end{matrix} \to \begin{matrix} T' \\ \widehat{\oplus} \\ N' \\ \widehat{\oplus} \\ \widehat{J}'(N') \\ \widehat{\oplus} \\ \widehat{J}'(T') \end{matrix} \tag{5.6}$$

其中

$$w_{01} := \Gamma_1'^{(-1)}(\beta - \beta')\Gamma_0\,|_{\widehat{J}(N)}\,.$$

2) 在 $\mathcal{V}(\Gamma, \Gamma')$ 中存在标准酉算子, 当且仅当 T和 T'同构。特别地, 每个标准酉算子 $V \in \mathcal{V}(\Gamma, \Gamma')$ 都由一个同胚 $B \in \mathcal{B}(J'(T_0'), J(T_0))$ 和希尔伯特空间 $(J'(T'), [\cdot, J'\cdot]')$ 中一个有界处处有定义的自伴算子 $\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$ Θ 参数化。也就是说

$$V = \begin{pmatrix} B^{-1} & 0 \\ \mathrm{i}\widehat{J}' E B^{-1} & \widehat{J}' B^* \widehat{J} \end{pmatrix} : \begin{matrix} \widehat{J}(T_0) \\ \widehat{\oplus} \\ T_0 \end{matrix} \to \begin{matrix} \widehat{J}'(T_0') \\ \widehat{\oplus} \\ T_0' \end{matrix} \tag{5.7}$$

其中 B 具有如下形式

$$B = \begin{pmatrix} \widehat{J}\tau^* \widehat{J}' & 0 \\ * & \widehat{J} w_0^{-1} \widehat{J}' \end{pmatrix} : \begin{matrix} \widehat{J}'(T') \\ \widehat{\oplus} \\ \widehat{J}'(N') \end{matrix} \to \begin{matrix} \widehat{J}(T) \\ \widehat{\oplus} \\ \widehat{J}(N) \end{matrix} \tag{5.8}$$

且其中 τ是一个同胚 $T \to T'$。一个算子

$$E := E_0 \,\widehat{\oplus}\, \Theta \tag{5.9}$$

是闭对称算子的一个有界、处处有定义的典范自伴扩张

$$E_0 := -\mathrm{i}\widehat{J}' \Gamma_1'^{(-1)}(\beta - \beta')\Gamma_0'\,|_{\widehat{J}'(N')}$$

$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$在希尔伯特空间（$J'(T_0')$ $[\cdot, J'\cdot]'$）中。

注 5.9. 1. 矩阵表示中的星号表示相应的算子，这一点从矩阵元素的一般定义中显而易见；在当前语境下，这并不重要（也就是说，它并非特定于某些边界三元组）。再次提醒，同构（同胚）指的是这样的希尔伯特空间：其标量积由相应的不定内积通过基本对称性诱导得到。

2. 在 [45, 46] 中，方程 $\Gamma' = \Gamma V^{-1}$ 是在更一般的情形下讨论的，即 Γ 和 Γ' 不必是单值的，也不假设与边界三元组有关，并且允许用“$\subseteq$”代替“$=$”。特别地，文中证明了方程$\Gamma'^{-1} = V\Gamma^{-1}$ 存在算子解 V，见 [46, 定理 2]：存在算子V，当且仅当存在从 T 的一个子空间到 T'的满射。在 [45,定理 4.2 的式（7）] 中，给出了一个以 T'^{+}的哈梅尔基表示的 $\Gamma'^{-1} \subseteq V\Gamma^{-1}$ 的算子解。正如定理 5.8 证明的充分性部分所示，若 $\tau\colon\ T \to T'$ 是满射但不一定是双射，则存在算子 $V \in \mathcal{V}(\Gamma,\ \Gamma')$，使得核 $V =$ 等于核 τ；关于这一情形，参见推论 5.7 、定理 5.8], 其中考虑的是 $\Gamma'^{-1} \subseteq V\Gamma^{-1}$，而不是 $\Gamma'^{-1} = V\Gamma^{-1}$。

3. 设克莱因空间 $\mathfrak{H}' \equiv \mathfrak{H}$。那么，式（5.7）中的标准酉算子$V$ 是以下所谓的 [49] 原型关系的乘积：

$$V = \begin{pmatrix} B^{-1} & 0 \\ \mathrm{i}\widehat{J}EB^{-1} & \widehat{J}B^{*}\widehat{J} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B^{-1} & 0 \\ 0 & \widehat{J}B^{*}\widehat{J} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ \mathrm{i}\widehat{J}B^{*\,-1}EB^{-1} & I \end{pmatrix}.$$

上述 V 是两个标准酉算子的乘积，当且仅当B 和 B^{-1} 是有界处处定义算子（[49, 命题 4.9]），且 E 是有界自伴算子（[49, 命题 4.8]）。在更一般的情形下，原型关系的乘积由 [49, 命题 7.3、推论 7.4]刻画。

值得注意的是，我们从稍微一般一些的情形开始分析。考虑两个关系 $\Gamma\colon\ \mathfrak{K} \to \mathfrak{K}_{\circ}$和 $\Gamma'\colon\ \mathfrak{K}' \to \mathfrak{K}_{\circ}$，满足

$$\operatorname{ran}\Gamma' \subseteq \operatorname{ran}\Gamma \quad \text{and} \quad \operatorname{mul}\Gamma \subseteq \operatorname{mul}\Gamma'. \tag{5.10}$$

我们定义

定义 5.10. $\mathcal{V}(\Gamma, \Gamma')$ 是所有满足方程 $\Gamma' = \Gamma V^{-1}$ 的关系 $V\colon\ \mathfrak{K} \to \mathfrak{K}'$ 所构成的集合。

为了在边界三元组的情形下（即当 Γ 和 Γ' 是酉且满射时）求得 $\mathcal{V}(\Gamma, \Gamma')$ 中的算子解，首先我们给出

关系 $V\colon \mathfrak{K} \to \mathfrak{K}'$ 属于 $\mathcal{V}(\Gamma,\Gamma')$ 的充要条件，其中 Γ, Γ' 如 (5.10) 所示。

因此，令 Γ, Γ' 如 (5.10) 所示。由 [45, 推论 2.4]

$$\Gamma' = \Gamma V_0^{-1}, \quad V_0 := \Gamma'^{-1}\Gamma$$

使得 $\mathcal{V}(\Gamma,\Gamma')$ 非空。V_0 的基本特征为

$$\operatorname{dom} V_0 = \Gamma^{-1}(\operatorname{ran}\Gamma') \subseteq A_*, \quad \ker V_0 = \Gamma^{-1}(\operatorname{mul}\Gamma') \supseteq S,$$
$$\operatorname{ran} V_0 = A'_*, \quad \operatorname{mul} V_0 = S'$$

其中

$$A_* := \operatorname{dom}\Gamma, \quad S := \ker\Gamma,$$
$$A'_* := \operatorname{dom}\Gamma', \quad S' := \ker\Gamma'.$$

特别地

$$\begin{aligned} \operatorname{ran}\Gamma = \operatorname{ran}\Gamma' \quad &\Leftrightarrow \quad \operatorname{dom} V_0 = A_*, \\ \operatorname{mul}\Gamma = \operatorname{mul}\Gamma' \quad &\Leftrightarrow \quad \ker V_0 = S. \end{aligned} \tag{5.11}$$

若 $V \in \mathcal{V}(\Gamma,\Gamma')$，则

$$A'_* = V(A_*), \quad S' = V(S),$$
$$\operatorname{ran}\Gamma' = \Gamma(\operatorname{dom} V), \quad \operatorname{mul}\Gamma' = \Gamma(\ker V).$$

由此可得：

1° 存在一个（进而所有） $V \in \mathcal{V}(\Gamma,\Gamma')$，使得 $\operatorname{dom} V \supseteq A_*$ 当且仅当 $\operatorname{ran}\Gamma = \operatorname{ran}\Gamma'$。$2^\circ$ 存在一个（进而所有） $V \in \mathcal{V}(\Gamma,\Gamma')$，使得 $A_* \cap$核 $V = S \cap$核 V 当且仅当 $\operatorname{mul}\Gamma = \operatorname{mul}\Gamma'$。

特别地，这表明，如果要寻找标准酉算子 V，那么只有在 $\operatorname{mul}\Gamma = \operatorname{mul}\Gamma'$ 且 $\operatorname{ran}\Gamma = \operatorname{ran}\Gamma'$ 时，这才有可能。

引理 5.11. 设 Γ, Γ' 如 (5.10) 所示。

1) 为使关系 $V\colon \mathfrak{K} \to \mathfrak{K}'$ 属于 $\mathcal{V}(\Gamma,\Gamma')$，以下条件是充分的；若 $S \subseteq \operatorname{dom} V$，则该条件也是必要的：

$$V_0 = V_* \widehat{+} (\{0\} \times V(S)), \quad V_* := V\,|_{A_*} \tag{5.12a}$$

或者，等价地

$$\operatorname{ran}(V_0 - V) = V(S) = S', \quad \operatorname{dom} V_0 = \operatorname{dom} V_*. \tag{5.12b}$$

2) 此外，假设 V_0 是闭的（因此 S' 必然也是闭的）。令 $(V_0)_s$ 为 V_0 的算子部分。那么(5.12)等价于

$$\operatorname{ran}((V_0)_s - V) \subseteq V(S) = S', \quad \operatorname{dom}(V_0)_s = \operatorname{dom} V_*. \tag{5.13}$$

证明。1) 充分性：若 V 满足(5.12a)，则

$$\begin{aligned}\Gamma' =&\Gamma V_0^{-1} = \Gamma(V_* \mathbin{\widehat{+}} (\{0\} \times V(S)))^{-1}\\ =&\Gamma V^{-1} \mathbin{\widehat{+}} (V(S) \times \{0\})\,.\end{aligned}$$

但 $\ker(\Gamma V^{-1}) = V(S)$，因此 $\Gamma' = \Gamma V^{-1}$，即 $V \in \mathcal{V}(\Gamma, \Gamma')$。

必要性：设 $V \in \mathcal{V}(\Gamma, \Gamma')$，$S \subseteq \operatorname{dom} V$。由于 $V_0 = V\Gamma^{-1}\Gamma$，即 V_0 由满足 $(\exists \widehat{g} \in S)\ (f + \widehat{g}, h) \in V_*$ 的 (f, h) 组成，因此 $(\exists \widehat{h}_\circ)\ (\widehat{g}, \widehat{h}_\circ) \in V|_S$，故 $(\widehat{f}, \widehat{h} - \widehat{h}_\circ) \in V_*$，即 $(\widehat{f}, \widehat{h}) \in V_* \mathbin{\widehat{+}} (\{0\} \times V(S))$。反过来，若 $(\widehat{f}, \widehat{h}) \in V_* \mathbin{\widehat{+}} (\{0\} \times V(S))$，即 $\widehat{h} = \widehat{h}_* + \widehat{h}_\circ$ 且 $(\widehat{f}, \widehat{h}_*) \in V_*$，并且 $h_\circ \in V(S)$，则 $(\exists \widehat{g} \in S)\ (\widehat{g}, h_\circ) \in V|_S$；因此 $(f + \widehat{g}, h) \in V_*$，进而由上文可得 $(\widehat{f}, \widehat{h}) \in V\Gamma^{-1}\Gamma = V_0$。

等价性：(5.12a) $\Rightarrow$ (5.12b) 使用 $V_* \subseteq V_0$ 以及 $\operatorname{mul} V_0 = S' = V(S)$。为证明 (5.12a) $\Leftarrow$ (5.12b)，考虑 $(f, h_0) \in V_0$。由于 $\operatorname{dom} V_0 = \operatorname{dom} V_*$，$(\exists h_*)\ (f, h_*) \in V_*$。由于 $\operatorname{ran}(V_0 - V_*) = V(S)$，$h_0 - h_* \in V(S)$，这就表明 $V_0 \subseteq V_* \mathbin{\widehat{+}} (\{0\} \times V(S))$。类似地可得 $V_* \subseteq V_0 \mathbin{\widehat{+}} (\{0\} \times V(S))$；因为 $V(S) = S'$，所以 (5.12a) 成立。

2) 设 V_0 是闭的；则 $S' = \operatorname{mul} V_0$ 是闭的。由典范分解 $V_0 = (V_0)_s \mathbin{\widehat{\oplus}} (\{0\} \times S')$，并注意到 $\operatorname{dom} V_0 = \operatorname{dom}(V_0)_s$，即可得 (5.12b) $\Leftrightarrow$(5.13)，且

$$\operatorname{ran}(V_0 - V) = \operatorname{ran}((V_0)_s - V) \mathbin{\widehat{+}} S'\,. \qquad \square$$

由此可知，每个 $V \in \mathcal{V}(\Gamma, \Gamma')$，只要 $S \subseteq \operatorname{dom} V$，都满足

$$\operatorname{dom} V_0 = A_* \cap \operatorname{dom} V\,, \quad \ker V_0 = S \mathbin{\widehat{+}} (A_* \cap \ker V)\,.$$

根据 (5.11)，上述公式与 $1^\circ, 2^\circ$ 一致。

定理 5.8 的证明。1）必要性：设 $V \in \mathcal{V}(\Gamma, \Gamma')$。由于 $\operatorname{ran}\Gamma = \operatorname{ran}\Gamma'$，由 1° 可得 $\operatorname{dom} V \supseteq A_* = T^+$。若 V 是一个算子，则由引理 5.11、等式 (5.13) 和引理 5.6 可得 (5.6)；由于 $V(T) = T'$，存在一个满射 $\tau := V|_T$。此外，若 V 是单射，则 τ 是双射。

充分性：假设存在一个满射 $\tau\colon T \to T'$，并考虑由 $V := (V_0)_s + L$, $L := \tau P_T|_{T^+}$ 定义的算子 $V\colon \mathfrak{K} \to \mathfrak{K}'$；也就是说，由 (5.6) 可知 $\operatorname{dom} V = T^+$ 且所有 $* \equiv 0$。那么 $V|_T = \tau$，并且由于

$$\operatorname{ran}(V - (V_0)_s) = \operatorname{ran} L = \tau(T) = T'$$

由引理 5.11 可得 $V \in \mathcal{V}(\Gamma, \Gamma')$；此外，若 τ 是双射，则由于 $\ker V = \ker \tau$，上述定义的算子 V是单射。

2) 必要性：设 $V \in \mathcal{V}(\Gamma, \Gamma')$ 为一个标准酉算子。由 1)，$\tau := V|_T$ 是一个同胚 $T \to T'$，且 V 具有形式 (5.6)，

我们将其改写为

$$V=\begin{pmatrix}\widetilde{V}_{22} & 0\\ \widetilde{V}_{12} & \widetilde{V}_{11}\end{pmatrix}:\begin{matrix}\widehat{J}(T_0)\\ \widehat{\oplus}\\ T_0\end{matrix}\to\begin{matrix}\widehat{J'}(T_0')\\ \widehat{\oplus}\\ T_0'\end{matrix}$$

with

$$\widetilde{V}_{11}:=\begin{pmatrix}\tau & *\\ 0 & w_1\end{pmatrix}:\begin{matrix}T\\ \widehat{\oplus}\\ N\end{matrix}\to\begin{matrix}T'\\ \widehat{\oplus}\\ N'\end{matrix},\quad \widetilde{V}_{12}:=\begin{pmatrix}* & *\\ * & w_{01}\end{pmatrix}:\begin{matrix}\widehat{J}(T)\\ \widehat{\oplus}\\ \widehat{J}(N)\end{matrix}\to\begin{matrix}T'\\ \widehat{\oplus}\\ N'\end{matrix},$$

$$\widetilde{V}_{22}:=\begin{pmatrix}* & 0\\ * & \widehat{J}'w_0\widehat{J}\end{pmatrix}:\begin{matrix}\widehat{J}(T)\\ \widehat{\oplus}\\ \widehat{J}(N)\end{matrix}\to\begin{matrix}\widehat{J'}(T')\\ \widehat{\oplus}\\ \widehat{J'}(N')\end{matrix}.$$

我们断言 $V_{22}\in\mathcal{B}(J(T_0)\ J'(T_0'))$ 是双射。由于 V 是满射，且

$$\operatorname{ran}V=\operatorname{ran}\widetilde{V}_{22}\,\widehat{\oplus}\,T_0'$$

因此有 $\operatorname{ran}V_{22}=J'(T_0')$。接下来，等式

$$[V(\widehat{f}+\widehat{u}),V(\widehat{g}+\widehat{v})]'=[\widehat{f}+\widehat{u},\widehat{g}+\widehat{v}]\ (=[\widehat{f},\widehat{v}]+[\widehat{u},\widehat{g}])$$

对所有 f、$\widehat{g}\in T_0$ 以及 $\widehat{u}$，$\widehat{v}\in J(T_0)$ 成立，当且仅当

$$0=[\widetilde{V}_{22}\widehat{u},\widetilde{V}_{11}\widehat{g}]'-[\widehat{u},\widehat{g}]\quad\text{and}\tag{5.14a}$$

$$0=[\widetilde{V}_{22}\widehat{u},\widetilde{V}_{12}\widehat{v}]'+[\widetilde{V}_{12}\widehat{u},\widetilde{V}_{22}\widehat{v}]'\tag{5.14b}$$

对所有上述 $\widehat{u}$、$\widehat{v}$、$\widehat{g}$ 均成立。第一个等式 (5.14a) 表明

$$\widehat{J}(\widetilde{V}_{22})^*\widehat{J}'\widetilde{V}_{11}=I\quad\text{on}\quad T_0\,.\tag{5.15}$$

由于 $\operatorname{ran}V_{11}=T_0'$，这表明 $\operatorname{ran}(V_{22})^*=J(T_0)$；因此 V_{22} 是单射，进而是双射，正如所声称的那样。

令

$$\widetilde{V}_{22}\equiv B^{-1}$$

存在同胚 $B\in\mathcal{B}(J'(T_0')\ J(T_0))$，由等式 (5.15) 得

$$\widetilde{V}_{11}=\widehat{J}'B^*\widehat{J}\quad\text{and then}\quad B\,|_{\widehat{J}'(T')}=\widehat{J}\tau^*\widehat{J}'$$

其中，第二个等号也用到了引理 5.6-3)；因此，B 具有形式 (5.8)。

令

$$\widetilde{V}_{12}\equiv \mathrm{i}\widehat{J}'EB^{-1}$$

对于某个 $E\in\mathcal{B}(\widehat{J}'(T_0'))$，可以看出，$E$ 扩张了 $E_0=-\mathrm{i}\,\widehat{J}'w_{01}\widehat{J}w_0^{-1}\widehat{J}'$。闭的 E_0 在 $(J'(T_0')\ [\cdot,J'\cdot]')$ 中是对称的，这由 (5.5) 以及 $f,\widehat{g}\in J(N)$ 得出。E 是 $(J'(T_0')\ [\cdot,J'\cdot]')$ 中的自伴算子

这由第二个方程 (5.14b) 得出。我们证明 $E \supseteq E_0$ 具有 (5.9) 的形式。

为简便起见，定义希尔伯特空间

$$\mathfrak{U} := (\widehat{J}'(T'), [\cdot, \widehat{J}'\cdot]')\,, \quad \mathfrak{V} := (\widehat{J}'(T_0'), [\cdot, \widehat{J}'\cdot]')\,,$$

$$\mathfrak{W} := (\widehat{J}'(N'), [\cdot, \widehat{J}'\cdot]')$$

算子 E_0 作为从 $\mathcal{B}(\mathfrak{W})$到希尔伯特空间的算子是自伴的，因此 $\mathfrak{V}$ 中 E_0 的伴随由下式给出

$$E_0^* = E_0 \mathbin{\widehat{\oplus}} \mathfrak{U}^2\,.$$

显然，由下式定义的三元组 $\Pi_{\hat{\Gamma}} = (\mathfrak{U}, \Gamma_0, \Gamma_1)$

$$\hat{\Gamma}_0(\widehat{h} + \widehat{u}, E_0\widehat{h} + \widehat{v}) := \widehat{u}\,, \quad \hat{\Gamma}_1(\widehat{h} + \widehat{u}, E_0\widehat{h} + \widehat{v}) := \widehat{v}$$

$\widehat{\ }$对于 $h \in \mathfrak{W}$ 和 $\widehat{u}, \widehat{v} \in \mathfrak{U}$，是 E_0^*的边界三元组。随后，$\widetilde{\ }$的闭扩张 $E \in \mathrm{Ext}(E_0)$ 与 $\mathfrak{U}$ 中的一个闭关系 Θ 一一对应，对应关系如下

$$\widetilde{E} = E_\Theta := \hat{\Gamma}^{-1}(\Theta) = E_0 \mathbin{\widehat{\oplus}} \Theta\,.$$

特别地，E_Θ 在 $\mathfrak{V}$中自伴，当且仅当 Θ 在 $\mathfrak{U}$中。因此可知，$E = E_\Theta$ 与 $\Theta = \Theta^* \in \mathcal{B}(\mathfrak{U})$。

充分性：若存在同胚 $\tau\colon T \to T'$，则由（5.7）定义的算子 $V\colon \mathfrak{K} \to \mathfrak{K}'$ 是满足（5.13）的标准酉算子，即 $V \in \mathcal{V}(\Gamma, \Gamma')$。□

例。若 $V \in \mathcal{V}(\Gamma, \Gamma')$，则也有 $V_* := V\,|_{T^+} \in \mathcal{V}(\Gamma, \Gamma')$。特别地，对于标准酉算子 $V \in \mathcal{V}(\Gamma, \Gamma')$

$$V_* = \begin{pmatrix} \tau & \sigma & 0 \\ 0 & w_1 & w_{01} \\ 0 & 0 & \widehat{J}'w_0\widehat{J} \end{pmatrix} : \begin{matrix} T \\ \widehat{\oplus} \\ N \\ \widehat{\oplus} \\ \widehat{J}(N) \end{matrix} \to \begin{matrix} T' \\ \widehat{\oplus} \\ N' \\ \widehat{\oplus} \\ \widehat{J}'(N') \end{matrix}$$

$$= \tau P_T + \sigma P_N + (V_0)_s \quad \text{on} \quad T^+\,.$$

这里 $\tau \in \mathcal{B}(T, T')$ 是一个同胚，而 $\sigma \in \mathcal{B}(N, T')$ 源自 $\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$(5.8)，其中由 $*$ 指出的未指定算子由 $J\sigma^*J'$ 给出。V_* 的逆可表示为

$$V_*^{-1} = \tau^{-1}P_{T'} + \Gamma_0^{(-1)}\Gamma_0' + (I - \tau^{-1}\sigma)\Gamma_1^{(-1)}(\Gamma_1' - \beta\Gamma_0')$$

关于 T'^+。

例。若 $\mathfrak{H}' \equiv \mathfrak{H}$, $T' \equiv T$, $\Gamma' \equiv \Gamma$，从 $\mathcal{V}(\Gamma,\Gamma)$ 到 V 的标准酉算子读作

$$V = \begin{pmatrix} \tau & \sigma & 0 & \mathrm{i}\widehat{J}\Theta\tau_\natural \\ 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & -(\tau^{-1}\sigma)^+ \\ 0 & 0 & 0 & \tau_\natural \end{pmatrix} : \begin{matrix} T \\ \widehat{\oplus} \\ N \\ \widehat{\oplus} \\ \widehat{J}(N) \\ \widehat{\oplus} \\ \widehat{J}(T) \end{matrix} \to \begin{matrix} T \\ \widehat{\oplus} \\ N \\ \widehat{\oplus} \\ \widehat{J}(N) \\ \widehat{\oplus} \\ \widehat{J}(T) \end{matrix},$$

$$\tau_\natural := \widehat{J}\tau^{*\,-1}\widehat{J}, \quad \tau \in \mathcal{B}(T) \text{ 双射}, \qquad \Theta = \Theta^* \in \mathcal{B}(\ \widehat{J}(T))$$

并且 $\sigma \in \mathcal{B}(N,T)$ 与例 5 中的一样。

6. Similarity of boundary triples of symmetric operators

设 T 和 T' 如定理 5.8 中所述，并进一步假设 T 和 T' 均为稠密定义的，且 $V \in \mathcal{V}(\Gamma,\Gamma')$ 是标准酉算子，即它具有如下形式

$$V = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} : \begin{matrix} \mathfrak{H} \\ \oplus \\ \mathfrak{H} \end{matrix} \to \begin{matrix} \mathfrak{H}' \\ \oplus \\ \mathfrak{H}' \end{matrix}. \tag{6.1a}$$

这意味着算子 A, B, C, $D \in \mathcal{B}(\mathfrak{H},\mathfrak{H}')$ 满足

$$\begin{aligned} A^+D - C^+B = I\,, \quad AD^+ - BC^+ = I'\,, \\ A^+C = C^+A\,, \quad AB^+ = BA^+\,, \\ B^+D = D^+B\,, \quad CD^+ = DC^+\,. \end{aligned} \tag{6.1b}$$

那么，与边界三元组 Π_Γ 和$\Pi_{\Gamma'}$ 对应的韦尔函数在 $\rho(T_0) \cap \rho(T_0')$ 上相同（若该集合非空），当且仅当

$$\mathfrak{N}_z(T^+) \subseteq \ker p_V(z)$$

其中二次铅笔

$$p_V(z) := z^2B + z(A-D) - C\,.$$

在接下来的引理中，我们将这一结果推广到等距边界对的情形。结果表明，即使在边界三元组这一特殊情形下，条件 $z \in \rho(T_0) \cap \rho(T_0')$ 也可以放宽。

以下定义是对 [6, 定义 3.1、3.6] 的推广；关于希尔伯特空间情形，另见 [16, 21] 及其中的引文。

定义 6.1. 设 T 是克莱因空间$\mathfrak{H}$ 中的闭对称关系。若关系$\Gamma\colon \mathfrak{K} \to \mathfrak{K}$。是等距的（分别为酉的），且 $\operatorname{dom}\Gamma$ 在 T^+ 中稠密，则称对 $(\mathfrak{L},\Gamma)$（其中 $\mathfrak{L}=(\mathfrak{L},\langle\cdot,\cdot\rangle)$ 是希尔伯特空间）为 T^+ 的等距（分别为酉）边界对。酉的 Γ 也称为 T^+ 的边界关系。

与等距边界对（$\mathfrak{L}$、Γ）对应的韦尔族 M_Γ 的定义方式与边界三元组的情形相同：$\mathbb{C}\ni z\mapsto M_\Gamma(z):=\Gamma(zI)$。

备注 6.2. 如果 Γ 是 T^+ 的满射边界关系，那么酉边界对（$\mathfrak{L}$、Γ）可化为边界三元组 $\Pi_\Gamma=(\mathfrak{L},\Gamma_0,\Gamma_1)$。与边界三元组不同，等距边界对总是存在。

下文中，$S:=$核 Γ（$\subseteq T=$多值 Γ^+），而 $r(T)$是满足以下条件的那些 $z\in\mathbb{C}$ 的集合：$\operatorname{ran}(T-zI)$和 $\operatorname{ran}(T-\overline{z}I)$是子空间。

引理 6.3. 设 T 和 T' 是分别作用于克莱因空间 $\mathfrak{H}$ 和 $\mathfrak{H}'$ 中的闭对称关系，并设（$\mathfrak{L}$、Γ）和（$\mathfrak{L}$、Γ'）分别是对应于 T^+ 和 T'^+ 的等距边界对，其对应的 Weyl族为 M_Γ 和 $M_{\Gamma'}$。假设 $\Gamma'=\Gamma V^{-1}$，其中 $V\colon \mathfrak{K}\to\mathfrak{K}'$ 是一个酉关系，且其闭定义域 $\operatorname{dom}V\supseteq A_*:=\operatorname{dom}\Gamma$。

1) 设 $z\in\mathbb{C}$。为了使 $M_\Gamma(z)=M_{\Gamma'}(z)$，必要条件是——若 $S=T$ 且 $z\in r(T)\neq\emptyset$，这也是充分条件——

$$\mathfrak{N}_z(A_*)\subseteq\mathfrak{N}_z(S\mathbin{\widehat{+}}V^{-1}(zI))\,. \tag{6.2}$$

2）假设对于 $z\in\mathbb{C}\setminus\sigma_p(S)\neq\emptyset$，$S\cap V^{-1}(zI)$ 是平凡的；在此情形下

$$\mathfrak{N}_z(S\mathbin{\widehat{+}}V^{-1}(zI))=\mathfrak{N}_z(V^{-1}(zI))\,.$$

注 6.4。1. 给定 T^+ 的一个等距（分别地，酉）边界对（$\mathfrak{L},\Gamma$），由 [35, 定理 6.1] 可知（$\mathfrak{L},\Gamma'$）是 T'^+ 的一个等距（分别地，酉）边界对。当 $\ker V\subseteq S$ 时，这种对应是一一对应。上述结果也适用于本质酉边界对（即闭包 $\overline{\Gamma}$ 是酉的情形）。

2. 设 V 是单射，或等价地，设 V 是一个标准酉算子。则 $S\cap V^{-1}(zI)$ 平凡当且仅当 $z\in\mathbb{C}\setminus\sigma_p(S')$；此处 $S':=\ker\Gamma'=V(S)$。因此，若 $S=T$（从而 $S'=T'$ 也成立），且集合 $r_V(T):=r(T)\setminus(\sigma_p(T)\cup\sigma_p(T'))$ 非空，则 Weyl族在 $r_V(T)$ 上重合当且仅当

$$\mathfrak{N}_z(A_*)\subseteq\mathfrak{N}_z(V^{-1}(zI))\,.$$

此外，对于形如 (6.1) 的标准酉算子 V，有

$$\mathfrak{N}_z(V^{-1}(zI))=\ker p_V(z)\,.$$

特别地，如果 Γ 是酉算子且 dom ran Γ 是闭的，那么来自 Ext(T) 的对称关系 $T_0 := \Gamma^{-1}(\{0\}\times\mathfrak{L}) \supseteq T$ 是自伴的；参见 [35, 命题 4.5]（参见 [16, 希尔伯特空间情形下的推论 4.17]）。此时，$r_V(T)$ 包含 $\rho(T_0) \cap \rho(T_0')$，其中自伴关系 $T_0' = V(T_0) \in \mathrm{Ext}(T')$。

3. 在希尔伯特空间的情形下，若 $S = T$，则 T^* 的等距边界对 $(\mathfrak{L}, \Gamma)$ 是一个 AB-广义边界对 [21, 定义 4.1]，，也就是说，它是一个等距边界对，其中 T_0 自伴~~且 dom ran~~ $\Gamma = \mathfrak{L}$。因此，如果 T^* 的 AB-广义边界对 $(\mathfrak{L}, \Gamma)$ 和 T'^* 的 $(\mathfrak{L}, \Gamma')$ 通过标准酉算子 V（如引理 6.3 中所述）相关联，那么它们对应的韦尔函数在 $\mathbb{C}_*$ 上相同，当且仅当 $\mathfrak{N}_z(A_*) \subseteq$ 核 $p_V(z)$。

引理 6.3 的证明。可以验证，$\Gamma(zI) = \Gamma'(zI)$ 当且仅当

$$S \widehat{+} \widehat{\mathfrak{N}}_z(A_*) = S \widehat{+} \widehat{\mathfrak{N}}_z^V(A_*)\,, \quad \widehat{\mathfrak{N}}_z^V(A_*) := A_* \cap V^{-1}(zI)\,. \tag{6.3}$$

1) 必要性：若 (6.3) 成立，即若

$$(S \widehat{+} zI) \cap A_* = (S \widehat{+} V^{-1}(zI)) \cap A_*$$

then

$$(S \widehat{+} zI) \cap A_* \cap zI = (S \widehat{+} V^{-1}(zI)) \cap A_* \cap zI$$

也就是说，(6.2) 成立。

充分性：假设 $S = T$，且 (6.2) 对 $z \in r(T)$ 成立；注意，当且仅当 $\overline{z} \in r(T)$ 时，$z \in r(T)$。由于克莱因空间伴随

$$\widehat{\mathfrak{N}}_z^V(A_*)^+ \supseteq T \widehat{+} V^{-1}(\overline{z}I)$$

由 (6.2) 可得

$$\mathrm{ran}(T - zI) \supseteq \mathrm{ran}(\widehat{\mathfrak{N}}_z^V(A_*) - zI)\,. \tag{6.4}$$

定义

$$R := T \widehat{+} \widehat{\mathfrak{N}}_z(A_*)\,, \quad R^V := T \widehat{+} \widehat{\mathfrak{N}}_z^V(A_*)\,.$$

Then

$$\mathrm{ran}(R - zI) = \mathrm{ran}(T - zI) = \mathrm{ran}(R^V - zI)$$

其中最后一个等号用到了 (6.4)。特别地，可得

$$R^V = T \widehat{+} \widehat{\mathfrak{N}}_z(R^V)\,.$$

另一方面，(6.2) 等价地可写为

$$\mathfrak{N}_z(A_*) = \mathfrak{N}_z(T \widehat{+} \widehat{\mathfrak{N}}_z^V(A_*)) = \mathfrak{N}_z(R^V)$$

因此 $R^V = R$。由 (6.3) 可得，$M_\Gamma(z) = M_{\Gamma'}(z)$，对于 $z \in r(T)$。2）如果

$$(f, zf) \in S \widehat{+} V^{-1}(zI) \quad \text{and} \quad (f, zf) \notin V^{-1}(zI)$$

那么，由于 $S\cap V^{-1}(zI)=\{0\}$，必然有 $(f,zf)\in S$，即 $f=0$ 对于 $z\in\mathbb{C}\setminus\sigma_p(S)$。□

为陈述并证明下一个定理，我们回顾边界三元组相似的定义，参见 [30, 定义 2.14]。

定义 6.5. 设 T 和 T' 是克莱因空间 $\mathfrak{H}$ 和 $\mathfrak{H}'$中的闭对称关系，假设 T 和 T' 的亏指数相等，并设 $\Pi_\Gamma=(\mathfrak{L},\Gamma_0,\Gamma_1)$和 $\Pi_{\Gamma'}=(\mathfrak{L},\Gamma'_0,\Gamma'_1)$分别是 T^+和 T'^+的边界三元组。若存在标准酉算子$\sim U\colon\ \mathfrak{H}\to\mathfrak{H}'$，使得 $\Gamma'=\Gamma U^{-1}$ 且满足下式，则称 $\Pi_{\Gamma'}$与 Π_Γ（或 Π_Γ 和 $\Pi_{\Gamma'}$）是（U-）相似的:

$$\widetilde{U}:=\begin{pmatrix}U&0\\0&U\end{pmatrix}:\begin{matrix}\mathfrak{H}&\mathfrak{H}'\\\oplus&\oplus\\\mathfrak{H}&\mathfrak{H}'\end{matrix}\to\begin{matrix}\mathfrak{H}&\mathfrak{H}'\\\oplus&\oplus\\\mathfrak{H}&\mathfrak{H}'\end{matrix}. \tag{6.5}$$

$\widetilde{\ }$在这种情况下，$T'=U(T)=UTU^{-1}$与 T相似（或 T和 T'相似），但这种相似不一定是希尔伯特空间酉算子。

注 6.6. 从带有基本对称性 J 的克莱因空间 $\mathfrak{H}$到带有基本对称性 J' 的克莱因空间 $\mathfrak{H}'$ 的标准酉算子 U 是希尔伯特空间酉算子，当且仅当 $J'U=UJ$。

Below, $r(T)$ is as in Lemma 6.3 and $r_1(T):=r(T)\setminus\sigma_p(T)$ $(\subseteq\hat\rho(T))$.

定理 6.7. 设 T 是克莱因空间 $\mathfrak{H}$ 中的一个闭对称关系，其亏指数相等，且 $r_1(T)\neq\emptyset$。设 $\Pi_\Gamma=(\mathfrak{L},\Gamma_0,\Gamma_1)$ 是 T^+ 的一个边界三元组，其韦尔族为 M_Γ。设 $U\in\mathcal{B}(\mathfrak{H},\mathfrak{H}')$ 是$\widetilde{\ }$一个标准酉算子，使得 $T':=U(T)$ 是克莱因空间 $\mathfrak{K}'$ 中的一个闭对称关系，且其亏指数相等。那么，$\widetilde{\ }$ 对于 $T'^+=U(T^+)$ 的任意边界三元组 $\Pi_{\Gamma'}=(\mathfrak{L},\Gamma'_0,\Gamma'_1)$，若其对应的韦尔族 $M_{\Gamma'}(z)$ 对所有 $z\in r_1(T)$ 都满足 $=M_\Gamma(z)$，则该边界三元组与 T^+ 的一个边界三元组 $\Pi_{\Gamma''}=(\mathfrak{L},\Gamma''_0,\Gamma''_1)$ U- 相似，其中 $\Gamma'':=\Gamma W^{-1}$，且 W 是 $\mathfrak{K}$ 中的一个标准酉算子，使得 $W(T)=T$，并且使得 $W(\mathfrak{N}_z(T^+))=\mathfrak{N}_z(T^+)$ 对所有 $z\in r_1(T)$ 都成立。

证明。第一步。设 $\Pi_{\Gamma'}=(\mathfrak{L},\Gamma'_0,\Gamma'_1)$ 是 $T'^+=\sim U(T^+)$ 的一个边界三元组，其韦尔族为 $M_{\Gamma'}$，满足对所有 $z\in\sim r_1(T)$，$M_{\Gamma'}(z)=M_\Gamma(z)$。由于 $T'=U(T)$、T 和 T' 同构，根据定理 5.8- 2)，存在一个标准酉算子 $V\in\mathcal{V}(\Gamma,\Gamma')$，即 $\Gamma'=\Gamma V^{-1}$.$\widetilde{\ }$ 但于是 $T'=V(T)$，即 $W(T)=T$，其中 $W:=U^{-1}V$ 是 $\mathfrak{K}$ 中的一个标准酉算子。另一方面，根据引理 6.3 $(\forall z\in r_1(T))$，$\mathfrak{N}_z(T^+)\subseteq\mathfrak{N}_z(V^{-1}(zI))$，或等价地

$$V(\widehat{\mathfrak{N}}_z(T^+))\subseteq\widehat{\mathfrak{N}}_z(T'^+)\,.$$

$\widehat{\ }$ $\sim$ $\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$由于 $\mathfrak{N}_z(T'^+) = U$ $(\mathfrak{N}_z(T^+))$，W因此对所有 $z \in r_1(T)$，$\mathfrak{N}_z(T^+)$ 保持不变。

反之，若 $\Pi_{\Gamma'} = (\mathfrak{L}, \Gamma'_0, \Gamma'_1)$ 是 $T'^+ =$ 的一个边界三元组 $\sim$ $U(T^+)$ 与 T^+ 的边界三元组 $\Pi_{\Gamma''} = (\mathfrak{L}, \Gamma''_0, \Gamma''_1)$ 是 U-相似的，其中 $\Gamma'' := \Gamma W^{-1}$，且 W 是 $\mathfrak{K}$ 中的一个标准酉算子，满足 $W(T) = T$，并且 $(\forall z \in r_1(T))$ $\mathfrak{N}_z(T^+) \subseteq \mathfrak{N}_z(W^{-1}(zI))$，那么 $(\forall z \in \mathbb{C})$ $M_{\Gamma'}(z) = M_{\Gamma''}(z)$，其中 $M_{\Gamma''}$ 是与 $\Pi_{\Gamma''}$ 对应的韦尔族。但根据引理 6.3 $M_{\Gamma''}(z)$，对所有 $z \in r_1(T)$，均有 $= M_\Gamma(z)$。

步骤 2。在包含关系 $W($ 中实际上存在等式 $\widehat{\ }$ $\mathfrak{N}_z(T^+)) \subseteq \widehat{\mathfrak{N}}_z(T^+)$，$z \in r_1(T)$。令

$$T_\Theta := \Gamma^{-1}(\Theta), \quad T''_\Theta := \Gamma''^{-1}(\Theta)$$

对任意关系 Θ，其中 $\mathfrak{L}$。于是 $T''_\Theta = W(T_\Theta)$。取特定的$\Theta = \Gamma(zI)$（$= \Gamma''(zI)$），可得

$$T''_{M_\Gamma(z)} = T_{M_\Gamma(z)} = T \mathbin{\widehat{+}} \widehat{\mathfrak{N}}_z(T^+)$$

因此

$$W(T \mathbin{\widehat{+}} \widehat{\mathfrak{N}}_z(T^+)) = T \mathbin{\widehat{+}} \widehat{\mathfrak{N}}_z(T^+).$$

另一方面，由于

$$W(T \mathbin{\widehat{+}} \widehat{\mathfrak{N}}_z(T^+)) = W(T) \mathbin{\widehat{+}} W(\widehat{\mathfrak{N}}_z(T^+)) = T \mathbin{\widehat{+}} W(\widehat{\mathfrak{N}}_z(T^+))$$

并且对于 $z \in r_1(T)$，逐分量和是直和，这就证明了所声称的等式。□

回顾一下，若 $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ 满足 $\Omega = \Omega^*$，则称其为对称的。

引理 6.8. 设 T 和 T' 是分别位于克莱因空间 $\mathfrak{H}$ 和 $\mathfrak{H}'$ 中的闭对称关系，且二者具有相同的相等亏指数；设 $\Pi_\Gamma = (\mathfrak{L}, \Gamma_0, \Gamma_1)$ 和 $\Pi_{\Gamma'} = (\mathfrak{L}, \Gamma'_0, \Gamma'_1)$ 是 T^+ 和 T'^+ 的边界三元组，相应的 Weyl族分别为 M_Γ 和 $M_{\Gamma'}$。令 $T_i :=$ 核 Γ_i，且 $T'_i :=$ 核 Γ'_i，其中 $i \in \{0, 1\}$。假设存在 $\mathbb{C}$ 的一个对称子集 Ω，使得 $(\forall z \in \Omega)$ $M_\Gamma(z) = M_{\Gamma'}(z)$。那么，对于使 $\Omega \cap \rho(T_i)$ 和 $\Omega \cap \rho(T'_i)$ 均非空的那些 i，有

$$\Omega \cap \rho(T_i) \cap \rho(T'_i) = \Omega \cap \rho(T_i) \cap \hat{\rho}_s(T') = \Omega \cap \rho(T'_i) \cap \hat{\rho}_s(T)$$

其中 $\hat{\rho}_s(\cdot) := \hat{\rho}(\cdot) \cap \hat{\rho}(\cdot)^*$。

特别地，若 $\Omega \cap \hat{\rho}_s(T) = \Omega \cap \hat{\rho}_s(T')$，则 $\Omega \cap \rho(T_i)$ 非空当且仅当 $\Omega \cap \rho(T'_i)$ 非空；在此情况下，$\Omega \cap \rho(T_i) = \Omega \cap \rho(T'_i)$。

证明。根据假设 $(\forall z \in \Omega)$ $\Gamma(zI) = \Gamma'(zI)$，可得 $(\forall z \in \Omega)$

$$\begin{aligned} V_0(zI) =& \Gamma'^{-1}\Gamma'(zI) = T' \mathbin{\widehat{+}} \widehat{\mathfrak{N}}_z(T'^+) = T' \mathbin{\widehat{\oplus}} P_{T'^\perp}(\widehat{\mathfrak{N}}_z(T'^+)) \\ =& T' \mathbin{\widehat{\oplus}} P_{\Sigma'}(\widehat{\mathfrak{N}}_z(T'^+)), \quad \Sigma' := T'^+ \cap T'^\perp = N' \mathbin{\widehat{\oplus}} \widehat{J}'(N') \end{aligned}$$

其中 $N' = N(T', T_0')$；因此

$$(V_0)_s(\widehat{\mathfrak{N}}_z(T^+)) = P_{\Sigma'}(\widehat{\mathfrak{N}}_z(T'^+)) .$$

若 $\Omega \cap \rho(T_0) \neq \emptyset$，根据引理 5.6可知 $(\forall z \in \Omega \cap \rho(T_0))$

$$P_{\widehat{J}'(N')}(V_0)_s(\widehat{\mathfrak{N}}_z(T^+)) = \widehat{J}'(N') = P_{\widehat{J}'(N')}(\widehat{\mathfrak{N}}_z(T'^+))$$

也就是说

$$\mathfrak{K}' = N'^+ \widehat{+} \widehat{\mathfrak{N}}_z(T'^+) .$$

由于 $N'^+ \cap T'^+ = T_0'$，$(\forall z \in \Omega \cap \rho(T_0))$

$$T'^+ = T_0' \widehat{+} \widehat{\mathfrak{N}}_z(T'^+)$$

因此

$$\Omega \cap \rho(T_0) \cap \hat{\rho}_s(T') \subseteq \rho(T_0') . \tag{6.6}$$

同样，若 $\Omega \cap \rho(T_0') \neq \emptyset$，则

$$\Omega \cap \rho(T_0') \cap \hat{\rho}_s(T) \subseteq \rho(T_0) . \tag{6.7}$$

由于 $\rho(T_i) \subseteq \hat{}\rho_s(T)$，且 T_i' 的情形也同理，因此关于 $i = 0$ 的结论随之成立。关于 $i = 1$ 的结论证明类似，因为 $\Pi_{\Gamma^\top} = (\mathfrak{L}, \Gamma_1, -\Gamma_0)$ 和 $\Pi_{\Gamma'^\top} = (\mathfrak{L}, \Gamma_1', -\Gamma_0')$ 分别是 T^+ 和 T'^+ 的转置边界三元组，其 Weyl 族为 $-M_\Gamma(z)^{-1} = -M_{\Gamma'}(z)^{-1}$，对所有 $z \in \Omega$ 均成立。

现在假设 $\Omega \cap \hat{}\rho_s(T) = \Omega \cap \hat{}\rho_s(T')$。若 $\Omega \cap \rho(T_0) \neq \emptyset$（分别地，若 $\Omega \cap \rho(T_0') \neq \emptyset$），则由 (6.6)（分别地，由 (6.7)）可得 $\Omega \cap \rho(T_0') \neq \emptyset$（分别地，$\Omega \cap \rho(T_0) \neq \emptyset$）。□

引理 6.9（[35]）。设 T 是克莱因空间 $\mathfrak{H}$中的一个闭对称关系，且具有相等亏指数。设 Π_Γ 是 T^+的一个边界三元组，其韦尔族为 M_Γ。那么（$\forall z \in r(T)$） $M_\Gamma(z)^* = M_\Gamma(\overline{z})$。

定义 6.10。克莱因空间 $\mathfrak{H}$ 中的关系 T 具有性质（P），如果 $\operatorname{dom} T + \operatorname{ran} T$在 $\mathfrak{H}$中稠密。

T 具有（P）的关键特征见引理 A.5，另见引理 A.6；它是对稠密定义的 T的轻微推广。下文中的标准 T与定义 4.1 中的一致，即具有非空的 $\delta(T)$，但采用克莱因空间的框架。

定理 6.11. 设 T 和 T' 是克莱因空间 $\mathfrak{H}$ 和 $\mathfrak{H}'$ 中的标准对称算子，二者具有相同的相等亏指数和性质 (P)。设 $\Pi_\Gamma = (\mathfrak{L}, \Gamma_0, \Gamma_1)$ 和 $\Pi_{\Gamma'} = (\mathfrak{L}, \Gamma_0', \Gamma_1')$ 分别是 T^+ 和 T'^+ 的边界三元组，其 Weyl 族分别为 M_Γ 和 $M_{\Gamma'}$，伽马场分别为 γ_Γ 和 $\gamma_{\Gamma'}$。假设存在一个对称子集 $\Omega \subseteq \delta(T) \cap \delta(T')$，使得：

(a) $\Omega \subseteq \rho(T_0) \cap \rho(T_1)$ *and* $(\forall z \in \Omega)$ $M_\Gamma(z) = M_{\Gamma'}(z)$;

(*b*) (T_0,γ_Γ) 和 $(T_0',\gamma_{\Gamma'})$ 分别以最小方式实现 M_Γ 和 $M_{\Gamma'}$，即 $\bigvee\{\mathfrak{N}_z(T^+)\mid z\in\Omega\}=\mathfrak{H}$ 且 $\bigvee\{\mathfrak{N}_z(T'^+)\mid z\in\Omega\}=\mathfrak{H}'$。那么边界三元组 Π_Γ 和 $\Pi_{\Gamma'}$ 相似。

证明。步骤 1。由 (*a*) 和引理 6.8 $\Omega\subseteq\rho(T_i')$。特别地，$(\forall z\in\Omega)$ $M_\Gamma(z)=M_{\Gamma'}(z)\in\mathcal{B}(\mathfrak{L})$。

步骤 2。令 $U\in\mathcal{B}(\mathfrak{H},\mathfrak{H}')$ 满足（参见 [26, 定理 3.2], [40, 定理 2.2], [20, 定理 7.122]）

$$U\supseteq U_z:=\gamma_{\Gamma'}(z)\gamma_\Gamma(z)^{-1},\quad z\in\Omega. \tag{6.8}$$

U 定义正确：根据定义，对于所有 $z,z_0\in\Omega$，$U\supseteq U_z\mathbin{\widehat{+}}U_{z_0}$。如果$z=z_0$，那么显然 $U_z\mathbin{\widehat{+}}U_{z_0}$是一个算子。如果 $z\neq z_0$，那么 $U_z\mathbin{\widehat{+}}U_{z_0}$也是一个算子，因为

$$\begin{aligned}\operatorname{mul}(U_z\mathbin{\widehat{+}}U_{z_0})&=\operatorname{ran}(U_z-U_{z_0})\\&=\{\gamma_{\Gamma'}(z)l-\gamma_{\Gamma'}(z_0)l_0\mid l,l_0\in\mathfrak{L};\\&\qquad\gamma_\Gamma(z)l=\gamma_\Gamma(z_0)l_0\in\mathfrak{N}_z(T^+)\cap\mathfrak{N}_{z_0}(T^+)\}\end{aligned}$$

由引理 A.5 可知这是平凡的。类似地，对于所有 $z_0,z_1,\dots,z_n\in\Omega$，$n\geqslant 2$，$U_{z_0}\mathbin{\widehat{+}}U_{z_1}\mathbin{\widehat{+}}\cdots\mathbin{\widehat{+}}U_{z_n}$是一个算子。

步骤 3. 根据格林恒等式和引理 6.9（$\forall l,l_0\in\mathfrak{L}$）$(\forall z,z_0\in\rho(T_0))$

$$(\overline{z}-z_0)[\gamma_\Gamma(z)l,\gamma_\Gamma(z_0)l_0]=\langle l,(M_\Gamma(\overline{z})-M_\Gamma(z_0))l_0\rangle$$

其中，$[\cdot,\cdot]$ 是 $\mathfrak{H}$上的不定内积，$\langle\cdot,\cdot\rangle$ 是 $\mathfrak{L}$上的标量积。由于 $\Pi_{\Gamma'}$也满足类似的恒等式，U_z 是$z\in\Omega$上的等距映射。利用 (6.8) 和 (*b*)，通过连续延拓，U 因此是一个标准酉算子 $\mathfrak{H}\to\mathfrak{H}'$。

步骤 4. 利用（参见 [13, 命题 2.2、2.3]）

$$\gamma_\Gamma(z)-\gamma_\Gamma(z_0)=(z-z_0)(T_0-zI)^{-1}\gamma_\Gamma(z_0)$$

对所有 $z,z_0\in\rho(T_0)$ 均成立，以及对 $\gamma_{\Gamma'}$ 的类似等式，$(\forall z\in\Omega)$

$$U(T_0-zI)^{-1}=(T_0'-zI)^{-1}U\quad\text{on}\quad\mathfrak{H}$$

~ ~由此可得 $T_0'=U(T_0)$，U如 (6.5) 所示。

步骤 5. 根据克莱因–奈马克预解式公式（例如 [13, 定理 2.1]）

$$(T_1-zI)^{-1}=(T_0-zI)^{-1}-\gamma_\Gamma(z)M_\Gamma(z)^{-1}\gamma_\Gamma(\overline{z})^+,\quad z\in\Omega$$

~以及针对 $(T_1'-zI)^{-1}$的类似公式，由此可得 $T_1'=U(T_1)$。由于

$$T=T_0\cap T_1,\quad T'=T_0'\cap T_1'$$

˜这表明 $T' = U(T)$。因此，见定理 5.8-2)，存在一个形如 $V = UW$ 的标准˜酉算子 $V \in \mathcal{V}(\Gamma, \Gamma')$，其中 $W \in \mathcal{B}(\mathfrak{K})$ 是定理 6.7 中的标准酉算子。

步骤 6. 令 $\Gamma'' := \Gamma W^{-1}$，使得 $\Pi_{\Gamma''} = (\mathfrak{L}, \Gamma''_0, \Gamma''_1)$ 是 T^+, U^{-1}-相似于 $\Pi_{\Gamma'}$ 的边界三元组；参见定理 6.7。我们考虑具有 (6.1) 形式的 $W$of^ ^；因此 $(\forall z \in \Omega \subseteq r_1(T))\ W(\mathfrak{N}_z(T^+)) = \mathfrak{N}_z(T^+)$ 得到

$$\mathfrak{N}_z(T^+) = \operatorname{ran} K_z$$

其中一个双射算子

$$K_z := (A + zB) \,|\, _{\mathfrak{N}_z(T^+)} = (D + z^{-1}C) \,|\, _{\mathfrak{N}_z(T^+)} \in \mathcal{B}(\mathfrak{N}_z(T^+))$$

其逆为

$$K_z^{-1} = (A^+ - z^{-1}C^+) \,|\, _{\mathfrak{N}_z(T^+)}\,.$$

K_z 是一个等距映射：$(\forall f_z \in \mathfrak{N}_z(T^+))$

$$\begin{aligned}(A + zB)^+(A + zB)f_z =& (A^+ + \overline{z}B^+)(D + z^{-1}C)f_z \\ =& [I + C^+B + z^{-1}C^+A + \overline{z}D^+B \\ & + \overline{z}z^{-1}(D^+A - I)]f_z \\ =& (1 - \overline{z}z^{-1})f_z + \overline{z}z^{-1}(A + zB)^+(A + zB)f_z\end{aligned}$$

并利用 $\overline{z} \neq z$。

通过应用引理 A.5 K_z 扩张为标准酉算子，$K \in \mathcal{B}(\mathfrak{H})$。因此，$K = A + zB$ 在 $\mathfrak{H}$ 上，$z \in \Omega$，继而 $A = D = K^{\sim}$ ˜和 $B = C = 0$；故 $W = K$，其中 $\mathfrak{K}$ 中的标准酉算子 K具有形式 (6.5)，只需将 U 替换为 K，也就是说，边界三元组 $\Pi_{\Gamma'}$ 与边界三元组 Π_Γ是 UK-相似的。□

注 6.12. 在庞特里亚金空间的框架下，广义 Nevanlinna 函数的极小实现已在[22, 23, 26, 32, 39]中得到广泛研究。此外，若 T和 T'均稠密定义且单值，则利用定理 4.2 可得到 $\Omega = \mathbb{C}_*$ 下的定理 1.4。这一特定结果在形式上可推广如下。

下文中，庞特里亚金空间 $\mathfrak{H}$中的半标准单值算子，是指具有性质（P）且亏指数相等的标准对称算子 T，并且还满足以下条件 (i) 和 (ii)：

(i) 集合

$$\Delta_0(T) := \bigcap_{N \in \mathcal{N}} \{z \in O_s(T, N) \,|\, z, \overline{z} \notin \sigma_p^0(N)\}$$

非空，$O_s(T, N)$ 如引理 4.3 所述；

(ii) $\bigvee\{\mathfrak{N}_z(T^+) \,|\, z \in \Delta_0(T)\} = \mathfrak{H}$.

如果 T 和 T' 属于庞特里亚金空间 $\mathfrak{H}$ 和 $\mathfrak{H}'$ 中的半标准简单算子，且 $\Delta_0(T) = \Delta_0(T') \equiv \Delta$，则称它们属于类 $\mathcal{C}_\Delta$。于是

推论 6.13. Δ 上的韦尔函数唯一确定算子类 $\mathcal{C}_\Delta$中的一个边界三元组（特别是一个典范扩张），且在相似意义下唯一。

将定理 1.4 视为推论 6.13 的特例，我们有：

定理 1.4 的证明。我们只需验证，对于亏指数相等的庞特里亚金空间$\mathfrak{H}$中的稠定定义的单对称算子 T， $\Delta_0(T) = \mathbb{C}_*$。因此，由引理 4.4（$\forall N \in \mathcal{N}$） $\sigma_p^0(N) = \emptyset$，故 $\Delta_0(T) = \bigcap_{N\in\mathcal{N}} O_s(T, N)$，并且由引理 4.3$O_s(T, N) = \delta(T) = \mathbb{C}_*$。 □

致谢。谨向审稿人致谢，感谢其提出的宝贵意见。

Appendix A.

引理 A.1. 设 $\mathfrak{H} = (\mathfrak{H}, [\cdot,\cdot])$ 是具有基本对称性 J 的克莱因空间，并考虑 $\mathfrak{H}$ 中的关系 G 和 H，使得 $H \subseteq G^+ \cap G^\perp$。则：

(*a*) 若 dom $G\perp$dom H，则

$$\begin{aligned} &\operatorname{ran}(JH + zI) \subseteq \mathfrak{N}_z(JG^+) \\ &\textit{or equivalently} \\ &\operatorname{ran}(JG + zI) \subseteq \mathfrak{N}_z(JH^+) \end{aligned} \tag{A.1}$$

对所有 $z \in \mathbb{C}$ 均成立。

(*b*) 若 $G \widehat{\oplus} H$ 是 $\mathfrak{K}$ 的中性子集，则：

(*i*) (A.1) 中的包含关系对 $z =$i 和 $z =$ –i 均成立。(*ii*) 当且仅当 $G \widehat{\oplus} H$ 是极大中性（分别为超极大中性）时，(A.1) 中的包含关系对于 $z =$ i 或 $z =$ –i（分别对于 $z =$ i 和 $z =$ –i）变为等式。

注 A.2. 在 (*b*) 中，并未假设 dom $G\perp$dom H。与正文中一样，符号 $\perp$ 表示关于希尔伯特空间度量 $[\cdot, J\cdot]$ 的正交性，而 $[\perp]$ 表示关于 $[\cdot,\cdot]$ 的正交性。

证明。(*a*) dom $G\perp$dom H 意味着

$$\operatorname{dom}(JH) = \operatorname{dom} H \subseteq (\operatorname{dom} G)^\perp = \operatorname{mul}(JG^+)\,.$$

由于 $G\perp H$，这也意味着

$$\operatorname{ran}(JH) \subseteq (\operatorname{ran}(JG))^\perp = \ker G^+ = \ker(JG^+)\,.$$

考虑 $(f, f') \in JH$，使得对于所有 $z \in \mathbb{C}$，$f' + zf \in \operatorname{ran}(JH + zI)$。那么

$$(f' + zf, z(f' + zf)) = z(f, f') + (f', 0) + z^2(0, f)\,.$$

由于 (f, f')、$(f', 0)$ 和 $(0, f)$ 都是 JG^+，$f' + zf \in \mathfrak{N}_z(JG^+)$ 中的元素。

$(b)(i)$ 设 $K := G \widehat{\oplus} H$ 是中性的。由于 $JH = JK \cap (JG)^\perp$，对于所有 $z \in \mathbb{C}$，值域 $\operatorname{ran}(JH + zI)$ 由满足 $(k, k') \in JK$ 且 $(k', -k) \in JG^+$ 的那些 $k' + zk$ 构成。若 $z = \mathrm{i}$，则

$$(k' + \mathrm{i}k, \mathrm{i}k' - k) = \mathrm{i}(k, k') + (k', -k)\,.$$

由于 $JK \subseteq JG^+$，这表明 $k' + \mathrm{i}k \in \mathfrak{N}_\mathrm{i}(JG^+)$。情形 $z = -\mathrm{i}$ 的证明类似。

$(b)(ii)$ 充分性：设 K 为极大中性或超极大中性的；也就是说，若 K 是极大的，则 $P_+(K) = \mathfrak{K}$ 或 $P_-(K) = \mathfrak{K}$；若 K 是超极大的，则 $P_\pm(K) = \mathfrak{K}$。我们考虑 $P_+(K) = \mathfrak{K}$ 的情形，因为 $P_-(K) = \mathfrak{K}$ 的情形证明类似。鉴于 $(b)(i)$，只需证明 $\mathfrak{N}_\mathrm{i}(JG^+) \subseteq$ 属于 $\operatorname{ran}(JH + \mathrm{i}I)$。

若 $P_+(K) = \mathfrak{K}$，则希尔伯特空间 $(\mathfrak{H}, [\cdot, J\cdot])$ 中的极大对称关系 JK 满足 $\operatorname{ran}(JK + \mathrm{i}I) = \mathfrak{H}$。因此，若 $g \in \mathfrak{N}_\mathrm{i}(JG^+)$，则 $(\exists (k, k') \in JK)\ g = k' + \mathrm{i}k$。于是

$$JG^+ \ni (g, \mathrm{i}g) = (k' + \mathrm{i}k, \mathrm{i}k' - k) = \mathrm{i}(k, k') + (k', -k)\,.$$

由于 $JK \subseteq JG^+$，这表明 $(k', -k) \in JG^+$，即 $g \in \operatorname{ran}(JH + \mathrm{i}I)$。

必要性：令 K 为中性且 $\operatorname{ran}(JH \pm \mathrm{i}I) = \mathfrak{N}_{\pm\mathrm{i}}(JG^+)$。于是 $\operatorname{ran}(JK \pm \mathrm{i}I) = \mathfrak{H}$，从而表明 $P_\pm(K) = \mathfrak{K}$。□

引理 A.3. 设 G 和 H 是克莱因空间 $\mathfrak{H} = (\mathfrak{H}, [\cdot, \cdot])$ 中的关系，其基本对称性为 J。

(a) 特征子空间

$$\begin{aligned}\mathfrak{N}_z(G \mathbin{\widehat{+}} H) &= \operatorname{ran}((G - zI)^{-1}(zI - H) + I) \\ &= \operatorname{ran}((G - zI)^{-1} - (H - zI)^{-1}) \\ &\supseteq \mathfrak{N}_z(G) + \mathfrak{N}_z(H)\end{aligned} \tag{A.2}$$

对所有 $z \in \mathbb{C}$。

(b) 令 $O = O(G, H)$ 为所有满足以下条件的 $z \in \mathbb{C}$ 的集合：

$$\operatorname{ran}(G - zI) \cap \operatorname{ran}(H - zI) = \{0\}\,.$$

（等价地，O 是所有满足 $(G - zI)^{-1}(H - zI) \subseteq \mathfrak{N}_z(H) \times \mathfrak{N}_z(G)$ 的 $z \in \mathbb{C}$ 的集合。）那么，(A.2) 中的包含关系 $\supseteq$ 对所有 $z \in O$ 都变为等式；因此

$$O \cap \sigma_p(G \mathbin{\widehat{+}} H) = O \cap (\sigma_p(G) \cup \sigma_p(H))\,. \tag{A.3}$$

(*c*) 设 $G\perp H$ 是 $\mathfrak{K}$ 的线性子集。令 O 如 (*b*) 中所述。那么

$$\sigma_p(G\mathbin{\widehat{\oplus}}H)=(O\cap(\sigma_p(G)\cup\sigma_p(H)))\amalg(\mathbb{C}\smallsetminus O)\,. \tag{A.4}$$

（符号 $\amalg$ 表示不相交集合的并。）特别地：(*i*) $\sigma_p(G\mathbin{\widehat{\oplus}}H)=\emptyset$（分别地，$\sigma_p^0(G\mathbin{\widehat{\oplus}}H)=\emptyset$）当且仅当 $O=\mathbb{C}$ 且 $\sigma_p(G)=\sigma_p(H)=\emptyset$（分别地，$O\supseteq\mathbb{C}_*$ 且 $\sigma_p^0(G)=\sigma_p^0(H)=\emptyset$）。(*ii*) $\sigma_p(G\mathbin{\widehat{\oplus}}H)=\mathbb{C}$（分别地，$\sigma_p^0(G\mathbin{\widehat{\oplus}}H)=\mathbb{C}_*$）当且仅当 $O\subseteq\sigma_p(G)\cup\sigma_p(H)$（分别地，$\mathbb{C}_*\cap O\subseteq\sigma_p^0(G)\cup\sigma_p^0(H)$）。

证明。(*a*) 设 $f\in\mathfrak{N}_z(G\mathbin{\widehat{+}}H)$，即 $(f,zf)\in G\mathbin{\widehat{+}}H$。则 $f=g+h$，其中 $(g,g')\in G$ 且 $(h,h')\in H$，使得 $g'+h'=z(g+h)$，即 $(\exists u)\,(g,u)\in G-zI$ 且 $(h,u)\in zI-H$，也就是说 $(h,g)\in(G-zI)^{-1}(zI-H)$。由于论证过程可逆，这就证明了 (A.2)。

(*b*) 首先，我们证明 $z\in O$ 当且仅当 $z\in\mathbb{C}$ 满足 $(G-zI)^{-1}(H-zI)\subseteq\mathfrak{N}_z(H)\times\mathfrak{N}_z(G)$。这可由以下一般性结论推出：若 X 和 Y 是 $\mathfrak{H}$ 中的关系，则 $\operatorname{ran}X\cap\operatorname{ran}Y$ 是平凡的，当且仅当 $X^{-1}Y\subseteq$ 核 $Y\times$ 核 X。（注意，始终有 $X^{-1}Y\supseteq$ 核 $Y\times$ 核 X。）事实上，$\operatorname{ran}X\cap\operatorname{ran}Y$ 由满足 $(\exists x)\,(\exists y)\,(x,u)\in X$ 且 $(y,u)\in Y$ 的那些 u 组成，而 $X^{-1}Y$ 是由满足 $(\exists u)\,(x,u)\in X$ 且 $(y,u)\in Y$ 的那些 (y,x) 组成。因此，若 $\operatorname{ran}X\cap\operatorname{ran}Y$ 是平凡的，则 $(y,x)\in X^{-1}Y$ 意味着 $(y,x)\in$ 核 $Y\times$ 核 X。反过来，若 $X^{-1}Y=$ 核 $Y\times$ 核 X，则 $u\in\operatorname{ran}X\cap\operatorname{ran}Y$ 意味着 $u=0$。

这尤其表明，对于所有 $z\in O$，(A.2) 中的包含关系 $\supseteq$ 成为等式。

(*c*) 令

$$L_z:=(G-zI)^{-1}(zI-H)+I\,.$$

根据 (*a*)，$\mathfrak{N}_z(G\mathbin{\widehat{\oplus}}H)$ 是平凡的，当且仅当值域 L_z 也是平凡的，即当且仅当 $L_z\subseteq\mathfrak{H}\times\{0\}$。我们证明核 L_z 是平凡的，这意味着最后一个包含关系等价于 $L_z=\{0\}$，而这又等价于 $(G-zI)^{-1}(zI-H)=\{0\}$。

关系 L_z 由满足以下条件的有序对 $(h,g+h)$ 构成：$(\exists u)\,(g,zg+u)\in G$ 且 $(h,zh-u)\in H$。由于 $G\perp H$

$$\|u\|^2-(1+|z|^2)\,\langle g,h\rangle=z\,\langle u,h\rangle-\overline{z}\,\langle g,u\rangle$$

其中标量积 $\langle x,y\rangle:=[x,Jy]$，范数 $\|x\|^2:=\langle x,x\rangle$，对所有 $x,\,y\in\mathfrak{H}$ 均成立。若 $g+h=0$，则由上述内容

$$\|u\|^2+(1+|z|^2)\|g\|^2+2\Re(z\,\langle u,g\rangle)=0\,.$$

但根据柯西–施瓦茨不等式

$$\begin{aligned}\|u\|^2+(1+|z|^2)\|g\|^2+2\Re(z\,\langle u,g\rangle)&\geqslant(\|u\|-|z|\,\|g\|)^2+\|g\|^2\\&\geqslant\|g\|^2\geqslant0\end{aligned}$$

因此，$g=0=u$ 和 $h=0$。

现在假设 $(G-zI)^{-1}(zI-H)=\{0\}$。从左侧将等式两边乘以$G-zI$可得

$$R:=(\mathfrak{H}\times\operatorname{ran}(G-zI))\cap(zI-H)\subseteq\{0\}\times\operatorname{mul}G\,.$$

Then

$$\operatorname{mul}R=\operatorname{ran}(G-zI)\cap\operatorname{mul}H\subseteq\operatorname{mul}G$$

然后 $R=\{0\}$，因为

$$\operatorname{mul}G\cap\operatorname{mul}H=\operatorname{mul}(G\cap H)=\{0\}$$

由 $G\perp H$。特别是

$$\operatorname{ran}R=\operatorname{ran}(G-zI)\cap\operatorname{ran}(H-zI)=\{0\}\,.$$

这表明 $\mathbb{C}\setminus\sigma_p(G\mathbin{\widehat{\oplus}}H)\subseteq O$。后者与 (A.3) 结合，得到 (A.4)，进而得到 (i) 和 (ii)。□

注 A.4. 对于闭关系 G 和 H 以及 $z\in\rho(G)\cap\rho(H)$，(A.2) 中的第二个等式见 [7, 引理 1.7.2]。

引理 A.5. 设 G 是克莱因空间 $\mathfrak{H}$中的一个关系。为了使伴随 G^+对应于不同特征值的特征子空间两两不相交，即 $(\forall z,z_0\in\mathbb{C})$

$$\mathfrak{N}_z(G^+)\cap\mathfrak{N}_{z_0}(G^+)=\{0\}\quad if\quad z\neq z_0$$

$\operatorname{dom}G+\operatorname{ran}G$ 在 $\mathfrak{H}$中稠密，是必要且充分的。

证明。设 $f\in\mathfrak{N}_z(G^+)\cap\mathfrak{N}_{z_0}(G^+)$，$z\neq z_0$。则$(f,zf)\in G^+$且$(f,z_0f)\in G^+$意味着 $f\in\operatorname{mul}G^+\cap\ker G^+$。反之，若 $f\in\operatorname{mul}G^+\cap\ker G^+$，则$(\forall w\in\mathbb{C})\,(f,wf)\in G^+$；因此特别有 $f\in\mathfrak{N}_z(G^+)\cap\mathfrak{N}_{z_0}(G^+)$。所以，对于 $z\neq z_0$，$\mathfrak{N}_z(G^+)\cap\mathfrak{N}_{z_0}(G^+)$是平凡的，当且仅当$\operatorname{mul}G^+\cap\ker G^+=(\operatorname{dom}G+\operatorname{ran}G)^{[\perp]}$是平凡的。□

引理 A.6. 希尔伯特空间中的闭对称算子具有性质（P），参见定义 6.10，当且仅当它是稠密的。

证明。步骤 1。设 T 是希尔伯特空间 $\mathfrak{H}$ 中的闭对称关系。则 $(\forall z\in\mathbb{C}_*)\ \mathfrak{N}_z(T^*)\cap\operatorname{dom}T=\{0\}$。事实上，若 $f\in\mathfrak{N}_z(T^*)$，则 $(f,zf)\in T^*$，并且若还有 $f\in\operatorname{dom}T$，则 $(\exists f')\,(f,f')\in T$，即 $f'-zf\in\operatorname{ran}(T-zI)\cap\operatorname{mul}T^*$；但后一个集合是平凡的，参见例如 [28, 式 (2.4)]。第

^{p} 2. 我们使用第一冯·诺伊曼公式

$$T^*=T\mathbin{\widehat{\oplus}}\widehat{\mathfrak{N}}_{\mathrm{i}}(T^*)\mathbin{\widehat{\oplus}}\widehat{\mathfrak{N}}_{-\mathrm{i}}(T^*)\,.$$

由于 $\mathfrak{N}_{\pm\mathrm{i}}(T^*)\cap\operatorname{dom}T=\{0\}$，$\operatorname{mul}T^*$由元素 $f'+\mathrm{i}f_{\mathrm{i}}-\mathrm{i}f_{-\mathrm{i}}$组成，其中 $(f,f')\in T$, $f_{\pm\mathrm{i}}\in\mathfrak{N}_{\pm\mathrm{i}}(T^*)$，且 $f+f_{\mathrm{i}}+f_{-\mathrm{i}}=0$；因此 $f=0$,$f'\in\operatorname{mul}T=\{0\}$，并且 $f_{-\mathrm{i}}=-f_{\mathrm{i}}\in\mathfrak{N}_{\mathrm{i}}(T^*)\cap\mathfrak{N}_{-\mathrm{i}}(T^*)$。根据引理 A.5$\mathfrak{N}_{\mathrm{i}}(T^*)\cap\mathfrak{N}_{-\mathrm{i}}(T^*)=\operatorname{mul}T^*\cap$核 T^*, 所以 $\operatorname{mul}T^*\subseteq\operatorname{mul}T^*\cap$核 T^*意味着 $\operatorname{mul}T^*\cap$核 $T^*=\{0\}$当且仅当 T^*是一个算子。□

备注 A.7。在步骤 1 中，也可以改为利用 $(\forall z \in \mathbb{C})$

$$\mathfrak{N}_z(T^*) \cap \operatorname{dom} T = \mathfrak{N}_z(T^* \cap (\operatorname{dom} T)^2)$$

并且 $T^* \cap (\operatorname{dom} T)^2$ 是希尔伯特空间 $\operatorname{dom} T$ 中的对称关系。 ——

References

[1]S. Albeverio、U. G¨unther 和 S. Kuzhel，具有 $\mathcal{C}$ 对称性的 J-自伴算子：一种扩张理论方法，J. Phys. A: Math. Theor. 42 (2009)，第 10 期，105205。[2] T. Azizov、B. ´Curgus 和 A. Dijksma，Pontryagin空间中的标准对称算子：广义冯·诺伊曼公式与边界系数的极小性，J. Func. Anal. 198 (2003)，第 2 期，361–412。[3] T. Azizov 和 I. Iokhvidov，不定度量空间中的线性算子及其应用，It ogi nauki i mech. Ser. Mat.（俄文）17 (1979)，113–205。[4] ———, 不定度量空间中的线性算子，John Wiley & Sons. Inc.，1989。[5] J. Behrndt，将非严格矩阵Nevanlinna函数实现为Pontryagin空间中对称算子的韦尔函数，Proc. Amer. Math.Soc. 137 (2009)，第 8 期，2685–2685。[6] J. Behrndt、V. A. Derkach、S. Hassi 和 H. de Snoo，广义 Nevanlinna 族的一个实现定理，Operators and Matrices 5 (2011)，第 4 期，679–706。[7] J. Behrndt、S. Hassi 和 H. de Snoo，《边值问题、韦尔函数与微分算子》，数学专著，第 108 卷，Birkhauser，瑞士 AG，2020。[8] J. Bogn´ar，不定内积空间，Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York，1974。[9] J. Calkin，抽象对称边界条件，Trans. Amer. Math. Soc. 45 (1939)，第 3 期，369–442。[10] E. A. Coddington，形式正规子空间与对称子空间的扩张理论，Mem. Amer. Math. Soc. 134 (1973)，1–80。[11] ———,非稠密定义对称算子的自伴子空间扩张，Bullet. Amer. Mac. Soc. 79 (1973)，第 4 期，712–715。[12] ———,非稠密定义对称算子的自伴子空间扩张，Adv. Math. 14 (1974)，第 3 期，309–332。[13] V. Derkach，克莱因空间中Hermitian关系的广义预解式，J. Math. Sci. 97 (1999)，第 5 期，4420–4460。[14] ———,边界三元组、韦尔函数与 Kre˘ın 公式，Operator Theory (2015)，183–218。[15] V. Derkach、S. Hassi 和 M. Malamud，广义边界三元组，II. 广义边界三元组的一些应用及形式定义域不变的 Nevanlinna 函数，Math. Nachr. 295 (2022)，第 6 期，1113–1162。[16] V. Derkach、S. Hassi、M. Malamud 和 H. de Snoo，边界关系及其韦尔族，Trans. Amer. Math. Soc. 358 (2006)，第 12 期，5351–5400。[17] ———,对称算子的边界关系与广义预解式，Russ. J. Math. Phys. 16 (2009)，第 1 期，17–60。

[18] V. Derkach 和 M. Malamud，具有间隙的厄米算子的广义预解式与边值问题，J. Func. Anal. 95 (1991)，第 1 期，1–95。[19] ———,厄米算子的韦尔函数及其与特征函数的联系，arXiv:1503.08956 (2015)。[20] V. A. Derkach 和 M. M. Malamud，对称算子的扩张理论与边值问题，第 104 卷，乌克兰国家科学院数学研究所，基辅，2017（俄文）。[21] V. Derkach、S. Hassi 和 M. M. Malamud，广义边界三元组，I. 若干类等距与酉边界对，以及 Nevanlinna 函数子类的实现问题，Math. Nachr. 293 (2020)，第 7 期，1278–1327。[22] A. Dijksma、H. Langer 和 H. de Snoo，特征值依赖边界条件下哈密顿系统的特征值与极点函数，Math. Nachr. 161 (1993)，107–154。[23] A. Dijksma、H. Langer、A. Luger 和 Yu. Shondin，与基本因式分解相关的标量广义Nevanlinna函数的极小实现，《数学物理算子的谱方法》。算子理论：进展与应用，2004。[24] I. Gokhberg 和 M. Krein，线性算子的亏指数、根指数与指标的基本方面，Uspekhi Mat. Nauk（俄文）12 (1957)，第 2 期，43–118。[25]V. Gorbachuk 和 M. Gorbachuk，算子微分方程的边值问题，第 48 卷，Kluwer Academic Publishers，多德雷赫特，1991。[26]S. Hassi、H. de Snoo 和 H. Woracek，若干 Nevanlinna–Pick 型插值问题。Krein–Langer方法，算子理论：进展与应用 106 (1998)，201–216。[27] S. Hassi、H. S. V. de Snoo 和 F. H. Szafraniec，线性关系的逐分量分解与笛卡尔分解，Dissert. Math. 465 (2009)，1–59。[28] ———，无限维扰动、极大非稠密定义对称算子及若干矩阵表示，Indagationes Mathematicae 23 (2012)，第 4 期，1087–1117。[29] S. Hassi 和 S. Kuzhel，具有稳定 $\mathcal{C}$ 对称性的 J-自伴算子，Proc. Edinburgh Math. Soc. 143 (2013)，第 1 期，141–167。[30] S. Hassi、M. Malamud 和 V. Mogilevskii，对称算子的真扩张与韦尔函数的酉等价，Integr. Equ. Oper. Theory 77 (2013)，第 4 期，449–487。[31] S. Hassi、Z. Sebesty´en、H. S. V. de Snoo 和 F. H. Szafraniec，线性算子与线性关系的典范分解，Acta Math. Hungar. 115 (2007)，第 4 期，281–307。[32] S. Hassi 和 H. Wietsma，广义 Nevanlinna 函数的极小实现，Opuscula Math. 36 (2016)，第 6 期，749–768。[33] I. Iokhvidov 和 M. Krein，不定度量空间中算子的谱理论。I，Tr. Mosk. Mat. Obs.（俄文）5 (1956)，367–432。[34] P. Jonas 和 H. Langer，克莱因空间中亏指数为一的闭线性关系的自伴扩张，《算子理论与边界特征值问题》，1995，第 176–205 页。

[35] R. Jurˇs ̇enas，变换边界对的 Weyl 族，arXiv:2006.15964（2023年，即将发表于 Math. Nachr.）[36] A. N. Kochubei，对称算子的扩张与对称二元关系，《数学札记》17（1975），第1期，41–48。[37] M. Krein 和 H. Langer，空间 Π_κ 中 Hermitian 算子的亏子空间与广义预解式，《泛函分析及其应用》（俄文）5（1971），第2期，59–71。[38] S. Kuzhel 和 C. Trunk，关于一类具有空预解集的 J-自伴算子，《数学分析及其应用杂志》379（2011），第1期，272–289。[39] H. Langer 和 A. Luger，一类 2×2-矩阵函数，《格拉茨数学学报》35（2000），第55卷，149–160。[40] H. Langer 和 B. Textorius，关于希尔伯特空间中对称线性关系（子空间）的广义预解式与 Q 函数，《太平洋数学杂志》72（1977），第1期，135–165。[41] M. Malamud 和 V. Mogilevskii，对偶线性关系对的典范预解式的 Krein 型公式，《泛函分析与拓扑方法》8（2002），第4期，72–100。[42] V. Mogilevskii，具有不等缺陷数的对称算子的边界三元组与 Krein 型预解式公式，《泛函分析与拓扑方法》12（2006），第3期，258–280。[43] ———,具有任意亏指数的微分算子的边界三元组与 Titchmarsh–Weyl 函数，《泛函分析与拓扑方法》15（2009），第3期，280–300。[44] ———,用边界参数描述微分算子的广义预解式与特征矩阵，《数学札记》90（2011），第4期，558–583。[45] D. Popovici 和 Z. Sebesty´en，线性关系的分解，《数学进展》233（2013），40–55。[46] A. Sandovici 和 Z. Sebesty´en，关于线性关系的算子分解，《正性》17（2013），第4期，1115–1122。[47] Yu. L. Shmul'yan，具有不定度量的算子与空间的扩张理论，《科学院通报》（俄文）38（1974），第4期，896–908。[48] V. A. Strauss 和 C. Trunk，作为庞特里亚金空间的若干索伯列夫空间，《南乌拉尔国立大学学报：数学、力学、物理》6（2012），14–23。[49] H. L. Wietsma，关于克莱因空间之间的酉关系，《瓦萨学报》，瓦萨大学，2012。

Vilnius University,, Institute of Theoretical Physics and Astronomy,, Saulėtekio ave. 3, 10257 Vilnius,, Lithuania
电子邮箱地址：rytis.jursenas@tfai.vu.lt