arXiv:2303.04609v1 [math.CO] 8 Mar 2023

关于两种牌的猜牌

MARKUS KUBA 和 ALOIS PANHOLZER

摘要。我们研究一叠包含两种不同类型牌的猜牌策略，例如， m_1 张红色牌（红桃或方块）和 m_2 张黑色牌（梅花或黑桃）。对于一副有 $M = m_1 + m_2$ 张牌的牌，我们提出一种更精细的正确颜色猜测次数计数方法：猜牌者掌握完整信息，也就是说，已知数字 m_1 和 m_2 以及每张抽出牌的颜色。我们根据猜对的概率，将猜对的牌分为三种不同类型，并给出相关随机变量的联合分布结果以及联合极限定律。

1. 引言

文献中已有许多文章研究猜牌游戏 [4, 11, 15,18, 19, 20, 22, 23, 24]。其基本设定是一副随机排列的、包含 M 张牌的牌。参与者需要猜测牌堆顶端的牌。随后，向猜牌者揭示顶牌，并将其弃置。这个过程持续进行，直到牌全部抽完。如果猜牌者事先知道牌在随机排列前的组成，例如红桃、方块、梅花和黑桃的数量，人们便会关注正确猜测的次数、其分布、期望值和极限定律，并假设猜牌者利用这些信息，在每一步都尽可能提高猜对的概率。有时，这一设定会推广到 $n \geq 2$ 种不同类型的牌 [4, 11, 20], , 但迄今为止仅讨论了期望值。猜牌过程也有一些变体，只揭示部分信息；关于这些变体，可参见 Diaconis 等人的研究 [3, 5, 6], , 以及 [2, 8]中有关临床试验应用的讨论。

我们考虑两种不同类型的牌，例如红色（红桃或方块）和黑色（梅花或黑桃）。它们的数量分别为非负整数m_1, m_2，且 $M = m_1 + m_2$。我们关注随机变量$C_{m_1,\, m_2}$，它统计正确猜测的次数。这一问题已在 [15, 18, 19, 22, 23, 24]中得到研究：Sulanke [23] 求出了$C_{m_1,\, m_2}$的概率质量函数，随后 Knopfmacher 和 Prodinger [15]重新推导了该函数。Zagier [24] 研究了$C_{m,\, m}$的分布和期望值。前文提到的关于 $n \geq 2$ 种不同类型的一般结果也涵盖了期望值。在 [15]中，针对任意m_1， m_2 的期望值，得到了一个更一般的结果。我们还提及文献 [16], , 该文重新推导了关于$C_{m_1,\, m_2}$的结果，但似乎并未注意到先前的研究。此外， [18], 推导出了$C_{m_1,\, m_2}$的极限定律，但未给出证明；在一般情形下，根据 m_1 和 m_2 的不同增长情况，会出现相变 $\max\{m_1, m_2\} \to \infty$。

接下来，我们将进一步探究正确猜测的数量、其结构以及其极限定律。我们根据正确猜测的概率，将猜对的牌分为三种不同类型。$C_{m_1,\, m_2}$ 给定 $p \in [0.5, 1]$ 红牌和 m_2 黑牌，并且不失一般性地将讨论范围限定为 $0 \leq m_2 \leq m_1$，我们关注边界情形的数量，例如 $p = 0.5$或 $p = 1$，以及介于两者之间的情形 $0.5 < p < 1$。更具体地说，我们考虑这样的抽牌：首先，猜牌者确定自己一定能猜对的抽牌 $p = 1$；其次，猜牌者有

2000 数学主题分类。05A15, 05A16, 60F05, 60C05。关键词和短语。猜牌、递减 urn、精确分布、极限分布。1

纯运气，猜对的概率为五五开的抽牌；第三，猜牌者猜对的概率严格介于百分之五十和百分之一百之间的抽牌 $0.5 < p < 1$。

令 T_{m_1,m_2} 表示确定正确的猜测数，L_{m_1,m_2} 表示更可能猜对的猜测数，P_{m_1,m_2} 表示纯靠运气的猜测数。这些随机变量细化了正确猜测总数，因为我们有如下恒等映射

$$C_{m_1,m_2} = T_{m_1,m_2} + L_{m_1,m_2} + P_{m_1,m_2}.$$

此外，这三个随机变量将详细揭示有知识的猜测者相较于纯粹随机猜测究竟有多大优势。我们预先指出，直觉表明，对于 $m_1 \gg m_2$，平凡正确猜测的数量 T_{m_1,m_2} 应主导C_{m_1,m_2}的渐近行为；而对于 $m_1 \sim m_2$，由于二者同阶，我们应观察到更可能猜对的猜测L_{m_1,m_2} 与纯靠运气的猜测P_{m_1,m_2}之间的相互作用。

有趣的是，随机变量T_{m_1,m_2} 将猜牌游戏直接与所谓的递减 urn 模型 [7, 12, 17] 联系起来：可以将猜牌游戏理解为一个 urn，里面装有两种球，例如红色球和黑色球。随机地从 urn 中取球，查看其颜色，然后将其移除。这就是众所周知的不放回抽样 urn：$\left(\begin{smallmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$。我们关注其中一种球被取尽时取出的球数。通过格路径的几何解释（参见第2.2节），这对应于在坐标轴处吸收 [12], , 与T_{m_1,m_2}类似。

我们提出一种基于 Prodinger 和 Knopfmacher 分析的生成函数方法 [15], , 用于确定前文所述随机变量的分布及其极限定律。这使我们能够深入了解极限定律的性质 [18], , 以及猜牌游戏与所谓的递减 urn 模型之间更精确的关系。

作为关于本文所用符号的说明，我们始终用 $X \overset{\mathcal{L}}{=} Y$ 表示两个随机变量（r.v.）X 和 Y 同分布，用 $X_n \overset{\mathcal{L}}{\to} X$ 表示一列随机变量X_n 弱收敛（即依分布收敛）到随机变量 X。此外，我们用 $x^s := x(x-1)\dots(x-(s-1))$表示下降阶乘，用 $x^{\overline{s}} := x(x+1)\dots(x+s-1)$表示上升阶乘，$s \in \mathbb{N}_0$。此外，$f_n \ll g_n$ 表示序列 f_n 渐近小于序列 g_n，即$f_n = o(g_n)$，$n \to \infty$。

2. 分布分析

2.1. 纯运气的分解。 为了分析纯靠运气的猜测次数，我们实际上转而考察另一个随机变量，W_{m_1,m_2}，它统计猜牌过程中红牌和黑牌数量相等且均不为零的次数。这个随机变量可以将纯靠运气的猜测分解。

引理 1（纯靠运气的猜测的分解）。设 $B(n, p)$ 表示成功概率为 p、试验次数为 n 的二项分布。随机变量 P_{m_1,m_2} 统计纯靠运气的猜测次数，其服从试验次数为随机变量的二项分布：

$$P_{m_1,m_2} \overset{\mathcal{L}}{=} B\big(W_{m_1,m_2}, \tfrac{1}{2}\big).$$

证明。根据P_{m_1,m_2}的定义，每次进行此类猜测时，猜对的概率都是 $p = 0.5$，因此只有在两种牌的数量相等时才会如此。每当牌的数量构成达到 $(j,j) \neq (0,0)$（即分别对应两种颜色的牌数）时，我们都可以抛一枚公平硬币，而不受此前发生的事情影响。由于W_{m_1,m_2} 统计了达到这种状态 $(j,j) \neq (0,0)$ 且两种牌数量相等的（随机）次数，结论得证。□

2.2. **通过格路径和分解进行几何解释。**

引理 2。 随机变量L_{m_1,m_2} 和 T_{m_1,m_2}分别统计更可能猜对的猜测和平凡猜测，满足

$$L_{m_1,m_2} + T_{m_1,m_2} = m_1. \tag{1}$$

因此，正确猜测总数满足

$$C_{m_1,m_2} = m_1 + P_{m_1,m_2} \overset{\mathcal{L}}{=} m_1 + B\big(W_{m_1,m_2}, \tfrac{1}{2}\big). \tag{2}$$

注 1. 我们指出，后一个关系解释了在陈述 m_1 的极限分布行为时，为何会出现一个[18]$C_{m_1,\ m_2}$ 的平移。

证明。 为了对猜牌过程作几何解释，我们将数字m_1 和 m_2 视为楔形区域 $x \geq y \geq 0$中粒子的（x，y）坐标。该过程的演化可通过从（m_1，m_2）到原点的加权格路径来描述，其步集合为“向左”（-1，0）和“向下”（0，-1）。

具体而言，当 $m_1 > m_2 \geq 0$ 时，向左步（m_1，m_2）$\to$（m_1-1，m_2），向下步（m_1，m_2）$\to$（m_1，m_2-1），分别表示抽到第一类或第二类牌，其出现概率分别为 $\frac{m_1}{m_1+m_2}$ 和 $\frac{m_2}{m_1+m_2}$。因此，向左步对应一次正确猜测：如果 $m_2 = 0$，则是一次确定正确的猜测，使$T_{m_1,\ m_2}$的计数器递增；如果 $m_2 \geq 1$，则是一次更可能发生的正确猜测，使 $L_{m_1,\ m_2}$的计数器递增。在我们的生成函数方法中，这对应于各步的相应权重。请注意，除了引入某些加权向左步之外，这一描述只是对应于前文所述的、以格路径解释递减 urn 的方法。

然而，当 $m_1 = m_2 \geq 1$时，一个向下步$(m_1,\ m_1) \to (m_1,\ m_1-1)$以概率1发生；这实际上结合了抽取一张第二类牌和抽取一张第一类牌，两者出现的概率均为$\frac{1}{2}$。在后一种情况下，我们可以认为交换第一种颜色和第二种颜色的角色，使得第二类牌的数量始终不超过第一类牌的数量。从对角线开始的向下步会使$W_{m_1,\ m_2}$ 的计数器增加，并且在生成函数方法中产生相应的权重。正如引理1所指出的，每个从对角线出发的向下步都对应一次伯努利试验，该试验以概率$\frac{1}{2}$产生一次正确的纯靠运气的猜测。

由这一几何解释可知，每个向左步要么使确定正确的猜测数量增加一个——当且仅当该步位于 x-轴上时；要么使更有可能的正确猜测数量增加一个——当该步位于 x-轴上方时；而向下步不会对这两个数量作出贡献。这意味着随机变量$L_{m_1,\ m_2}$ 和$T_{m_1,\ m_2}$之间存在上述关系。此外，结合引理1，可得到正确猜测数量的上述表示。□

2.3. 生成函数方法。 我们将多元生成函数$\varphi_{m_1,m_2} := \varphi_{m_1,m_2}(u_1,u_2,w)$定义为$L_{m_1,\ m_2}, T_{m_1,m_2}$ 以及W_{m_1,m_2}的多元概率生成函数：

$$\varphi_{m_1,m_2}(u_1,u_2,w) = \mathbb{E}\big(u_1^{L_{m_1,m_2}} u_2^{T_{m_1,m_2}} w^{W_{m_1,m_2}}\big).$$

根据抽出的第一张牌区分各种情况，我们得到递推关系

$$\varphi_{m_1,m_2} = u_1 \frac{m_1}{m_1+m_2}\varphi_{m_1-1,m_2} + \frac{m_2}{m_1+m_2}\varphi_{m_1,m_2-1},$$

对于 $M = m_1 + m_2$、 $m_1 > m_2 > 0$，并且初始值为$\varphi_{m,\ 0} = u_2^m$、 $m \geq 0$。此外，

$$\varphi_{m,m} = w\varphi_{m,m-1}, \quad m \geq 1.$$

为简化分析，我们考虑以下量

$$\Phi_{m_1,m_2}(u_1,u_2,w)=\binom{m_1+m_2}{m_1}\varphi_{m_1,m_2}(u_1,u_2,w),$$

从而得到简化后的递推关系

$$\Phi_{m_1,m_2}=u_1\Phi_{m_1-1,m_2}+\Phi_{m_1,m_2-1},\quad m_1>m_2>0, \tag{3}$$

其中 $\Phi_{m,\ 0}=u_2^m$, $m\geq 0$. 此外,

$$\Phi_{m,m}=2w\Phi_{m,m-1},\quad m\geq 1. \tag{4}$$

接下来，我们引入额外的生成函数

$$F(z,x):=F(z,x,u_1,u_2,w)=\sum_{m_1\geq m_2\geq 0}\Phi_{m_1,m_2}z^{m_1}x^{m_1-m_2}.$$

我们采用以下附加记号

$$F_0(z)=F(z,0)=\sum_{m\geq 0}\Phi_{m,m}z^m,$$

以及

$$F_1(z)=\sum_{m\geq 1}\Phi_{m,m-1}z^m.$$

命题 1. 加权多变量概率生成函数的生成函数 $F(z,x)$ 满足函数方程

$$\Big(1-u_1zx-\frac{1}{x}\Big)F(z,x)=\frac{(u_2-u_1)zx}{1-u_2zx}+F_0(z)\Big(1-\frac{1}{x}\Big)-F_1(z), \tag{5}$$

and

$$F_0(z)=1+2wF_1(z).$$

证明. 基本递推关系（3）很容易转化为关于$F(z,x)$的函数方程。求和后得到方程

$$\sum_{m_1>m_2>0}\Phi_{m_1,m_2}z^{m_1}x^{m_1-m_2}=u_1\sum_{m_1>m_2>0}\Phi_{m_1-1,m_2}z^{m_1}x^{m_1-m_2}+\sum_{m_1>m_2>0}\Phi_{m_1,m_2-1}z^{m_1}x^{m_1-m_2}.$$

经过标准推导、指标移位并拆分求和后，左边可化简为

$$F(z,x)-F_0(z)-\frac{u_2zx}{1-u_2zx}.$$

右边的两个求和式可化简如下:

$$u_1\sum_{m_1>m_2>0}\Phi_{m_1-1,m_2}z^{m_1}x^{m_1-m_2}=u_1zxF(z,x)-\frac{u_1zx}{1-u_2zx}$$

and

$$\sum_{m_1>m_2>0}\Phi_{m_1,m_2-1}z^{m_1}x^{m_1-m_2}=\frac{1}{x}\big(F(z,x)-F_0(z)\big)-F_1(z).$$

最后，我们注意到（4）直接推出 $F_0(z)=1+2wF_1(z)$。进一步化简即可得到所述函数方程。□

引理3。 加权多元概率生成函数的生成函数 F（z,x）为

$$F(z,x)=\frac{1}{1-x+u_1zx^2}\left(\frac{(u_1-u_2)zx^2}{1-u_2zx}+1-x+F_1(z)\big(2w(1-x)+x\big)\right),$$

with

$$F_1(z) = \frac{1}{2w(1-\lambda)+\lambda} \cdot \Big(\frac{(u_2-u_1)z\lambda^2}{1-u_2 z\lambda} + \lambda - 1 \Big)$$

and

$$\lambda := \lambda(z,u_1) = \frac{1-\sqrt{1-4zu_1}}{2u_1 z}.$$

证明。我们采用所谓核方法的一个基本应用，参见例如 [1, 21]。首先，将整个方程（5）乘以 $(-x)$。核 $K(z,\ x,\ u_1) = 1 - x + u_1 z x^2$ 可由引理表述中给出的幂级数 $x = \lambda = \lambda(z,\ u_1)$ 消去：

$$K\big(z, \lambda(z,u_1), u_1\big) = 0.$$

因此，将 $x = \lambda$ 代入方程后，左边因而右边也随之消失，这意味着还存在以下关系

$$0 = \frac{(u_1-u_2)z\lambda^2}{1-u_2 z\lambda} + \big(1-\lambda\big)F_0(z) + \lambda F_1(z).$$

利用 $F_0(z) = 1 + 2wF_1(z)$，即可直接得到所述结果。 □

由于式（1）中随机变量 L_{m_1,m_2} 和 T_{m_1,m_2} 之间存在依赖关系，我们可以将分析范围限定为联合分析 T_{m_1,m_2} 和 W_{m_1,m_2}。为提取系数，我们发现引入生成函数很方便

$$\hat{F}(z,y) := \hat{F}(z,y,u,w) = \sum_{m_1 \geq m_2 \geq 0} \binom{m_1+m_2}{m_1} \mathbb{E}\big(u^{T_{m_1,m_2}} w^{W_{m_1,m_2}}\big) z^{m_1} y^{m_2}$$

$$= \sum_{m_1 \geq 0} \sum_{m_2=0}^{m_1} \sum_{k=0}^{m_2} \sum_{\ell=0}^{m_1} \binom{m_1+m_2}{m_1} \mathbb{P}\big\{W_{m_1,m_2} = k \wedge T_{m_1,m_2} = \ell\big\} w^k u^\ell z^{m_1} y^{m_2}, \quad (6)$$

它由 $F(z,x,u_1,u_2,w)$ 经由 $\hat{F}(z,y,u,w) = F(zy, y^{-1}, 1, u, w)$ 得到。注意，自然限制 $0 \leq \ell \leq m_1, 0 \leq k \leq m_2$ 可由第 2.2 节给出的几何解释轻易推出。

从引理 3出发，我们很容易得到 $\hat{F}(z,y)$的如下表示：

$$\begin{aligned} \hat{F}(z,y) = {} & \frac{1-z}{(1-y-z)(1-uz)} - \frac{y}{1-y-z} \\ & + \frac{uzy(2w(1-y)-1)}{(1-y-z)(1-2wP(zy))(1-uP(zy))}, \end{aligned} \quad (7)$$

with

$$P(q) = \frac{1-\sqrt{1-4q}}{2} = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} \binom{2n-2}{n-1} q^n$$

表示平移卡特兰数的生成函数，它满足函数方程

$$P(q) = \frac{q}{1-P(q)}.$$

从 $\hat{F}(z,\ y)$ 中提取系数，可得 $W_{m_1,\ m_2}$ 和 $T_{m_1,\ m_2}$ 的联合分布的显式公式（鉴于所述依赖关系 (1)，也可得到 $L_{m_1,\ m_2}$ 的联合分布），如下所示。

定理4。随机变量 $W_{m_1,\ m_2}$ 和 $T_{m_1,\ m_2}$ 的联合分布，对于$0 \leq m_2 \leq m_1$、$0 \leq \ell \leq m_1$和 $0 \leq k \leq m_2$，如下所示；超出此范围时，概率均为零。

$$\mathbb{P}\big\{W_{m_1,m_2} = k \wedge T_{m_1,m_2} = \ell\big\} =$$

$$\begin{cases} \frac{\binom{m_1+m_2-\ell-1}{m_2-1}-\binom{m_1+m_2-\ell-1}{m_1-1}}{\binom{m_1+m_2}{m_1}}, & k=0 \text{ and } m_2,\ell\geq 1,\\ \frac{2^k\binom{m_1+m_2-\ell-k}{m_1-1}-2^{k+1}\binom{m_1+m_2-\ell-k-1}{m_1-1}}{\binom{m_1+m_2}{m_1}}, & \ell,k\geq 1 \text{ and } (m_1,m_2)\neq(\ell,k),\\ 1, & k=m_2=0 \text{ and } \ell=m_1,\\ 1, & m_1=m_2=k=\ell=1,\\ 0, & \textit{otherwise}. \end{cases}$$

证明。在从方程（7）中提取系数以获得无和表达式时，我们的方法中一个关键步骤是将二元生成函数 $\frac{1}{1-y-z}=\sum_{m_1,\ m_2\geq 0} f_{m_1,\ m_2} z^{m_1} y^{m_2}$（其中 $f_{m_1,\ m_2}=\binom{m_1+m_2}{m_1}$）拆分为生成函数 $S^+(z,\ y)$ 和 $S^-(z,\ y)$，其中 $S^+(z,\ y)$ 仅包含满足 $m_1\geq m_2\geq 0$ 的项 $f_{m_1,\ m_2} z^{m_1} y^{m_2}$，而 $S^-(z,\ y)$ 则仅包含满足 $m_2>m_1\geq 0$ 的项：

$$\frac{1}{1-y-z}=\underbrace{\frac{1}{(1-2P(zy))\big(1-\frac{z}{1-P(zy)}\big)}}_{=:S^+(z,y)}+\underbrace{\frac{P(zy)}{z(1-2P(zy))\big(1-\frac{P(zy)}{z}\big)}}_{=:S^-(z,y)}. \tag{8}$$

通过令 $q:=zy$ 并对所得因式分解进行部分分式展开，即可轻松得到这一表示：

$$\begin{aligned}\frac{1}{1-y-z}&=\frac{1}{1-\frac{q}{z}-z}=\frac{-z}{z^2-z+q}=\frac{-z}{(z-P(q))\big(z-(1-P(q))\big)}\\&=\frac{1}{(1-2P(q))\big(1-\frac{z}{1-P(q)}\big)}+\frac{P(q)}{z(1-2P(q))\big(1-\frac{P(q)}{z}\big)}.\end{aligned}$$

由于我们关注的是生成函数中 $z^{m_1}y^{m_2}$（其中 $m_1\geq m_2\geq 0$）的系数，因此可以将系数提取任务转化为针对表达式的系数提取，并将 $\frac{1}{1-y-z}$ 替换为 $S^+(z,\ y)$。具体而言，我们结合这一替换，并运用形式留数演算（或者柯西积分公式），参见例如 [10],，来提取下列表达式的系数。

设 $m_1\geq m_2\geq b+r\geq b\geq a\geq 0$。令 $q=zy$，并考虑到 $q=P(q)(1-P(q))$ 和 $\frac{dq}{dP}=1-2P$，可得：

$$\begin{aligned}&[z^{m_1-a}y^{m_2-b}]\frac{P(zy)^r}{1-y-z}=[z^{m_1-m_2+b-a}q^{m_2-b}]\frac{P(q)^r}{1-y-z}\\&=[z^{m_1-m_2+b-a}q^{m_2-b}]\frac{P(q)^r}{(1-2P(q))\big(1-\frac{z}{1-P(q)}\big)}\\&=[q^{m_2-b}]\frac{P(q)^r}{(1-2P(q))\big(1-P(q)\big)^{m_1-m_2+b-a}}\\&=[q^{-1}]\frac{1}{P(q)^{m_2-b+1-r}(1-2P(q))(1-P(q))^{m_1-a+1}}\\&=[P^{-1}]\frac{1-2P}{P^{m_2-b+1-r}(1-2P)(1-P)^{m_1-a+1}}=[P^{m_2-b-r}]\frac{1}{(1-P)^{m_1-a+1}}\\&=\binom{m_1+m_2-a-b-r}{m_1-a}.\end{aligned} \tag{9}$$

借助后一个结果，我们可以从 $[z^{m_1}y^{m_2}w^k u^\ell]$（7）中提取系数；回想一下，自然限制条件为 $m_1\geq m_2\geq 0$，$0\leq\ell\leq m_1$，以及 $0\leq k\leq m_2$。我们区分以下几种情况：$k\geq 1$ 和 $k=0$。

对于 $k \geq 1$，为了得到非零系数，还必须满足 $\ell \geq 1$，由此可得

$$\begin{aligned}[u^\ell w^k]\hat{F}(z,y,u,w) &= [u^\ell w^k]\frac{uzy(2w(1-y)-1)}{(1-y-z)(1-2wP(zy))(1-uP(zy))}\\ &= [w^k]\frac{zy(2w(1-y)-1)P(zy)^{\ell-1}}{(1-y-z)(1-2wP(zy))}\\ &= \frac{2^k zy}{1-y-z}\Big((1-y)P(zy)^{\ell+k-2}-P(zy)^{\ell+k-1}\Big),\end{aligned}$$

thus

$$\begin{aligned}[z^{m_1}y^{m_2}u^\ell w^k]\hat{F}(z,y,u,w) &= 2^k[z^{m_1-1}y^{m_2-1}]\frac{P(zy)^{\ell+k-2}}{1-y-z}\\ &\quad -2^k[z^{m_1-1}y^{m_2-2}]\frac{P(zy)^{\ell+k-2}}{1-y-z}-2^k[z^{m_1-1}y^{m_2-1}]\frac{P(zy)^{\ell+k-1}}{1-y-z}.\end{aligned}$$

利用（9），可得显式公式

$$[z^{m_1}y^{m_2}u^\ell w^k]\hat{F}(z,y,u,w) = 2^k\binom{m_1+m_2-\ell-k}{m_1-1}-2^{k+1}\binom{m_1+m_2-\ell-k-1}{m_1-1}, \tag{10}$$

该公式对 $1\leq \ell \leq m_1, 1\leq k\leq m_2$ 以及 $(m_1,m_2)\neq(\ell,k)$ 成立。对于 $(m_1,m_2)=(\ell,k)$，容易验证 $[z^1y^1u^1w^1]\hat{F}(z,y,u,w)=2$；否则为零。

对于 $k=0$，我们首先得到

$$\begin{aligned}[w^0]\hat{F}(z,y,u,w) &= \hat{F}(z,y,u,0)\\ &= \frac{1-z}{(1-y-z)(1-uz)}-\frac{y}{1-y-z}-\frac{uzy}{(1-y-z)(1-uP(zy))}.\end{aligned}$$

我们进一步区分 $\ell=0$和 $\ell\geq 1$。当 $\ell=0$ 时，有

$$[u^0w^0]\hat{F}(z,y,u,w)=\hat{F}(z,y,0,0)=1,$$

因此，对于 $m_1=m_2=0$，$[z^{m_1}y^{m_2}u^0w^0]\hat{F}(z,y,u,w)=1$，否则系数为零。

对于 $\ell\geq 1$ 的情形，我们继续如下推导

$$[u^\ell w^0]\hat{F}(z,y,u,w)=\frac{(1-z)z^\ell}{1-y-z}-\frac{zyP(zy)^{\ell-1}}{1-y-z}.$$

由于

$$\begin{aligned}[z^{m_1}y^{m_2}]\frac{(1-z)z^\ell}{1-y-z} &= [z^{m_1-\ell}y^{m_2}]\frac{1}{1-\frac{y}{1-z}} = [z^{m_1-\ell}]\frac{1}{(1-z)^{m_2}}\\ &= \binom{m_1+m_2-\ell-1}{m_2-1},\end{aligned}$$

并且，通过应用（9），

$$[z^{m_1}y^{m_2}]\frac{zyP(zy)^{\ell-1}}{1-y-z}=\binom{m_1+m_2-\ell-1}{m_1-1},$$

因此我们得到显式公式

$$[z^{m_1}y^{m_2}u^\ell w^0]\hat{F}(z,y,u,w)=\binom{m_1+m_2-\ell-1}{m_2-1}-\binom{m_1+m_2-\ell-1}{m_1-1}, \tag{11}$$

这对 $\ell,m_2\geq 1$ 成立。此外，$[z^{m_1}y^0u^{m_1}w^0]\hat{F}(z,y,u,w)=1$，而其他情况下系数均为零。

,m_2 和 T_{m_1,m_2} 的联合分布的精确公式，可由（10）、（11）以及上述特殊情形得出，同时考虑定义方程（6）。□

根据这一显式结果，可以轻松得到边缘分布。

推论 1. 随机变量$T_{m_1,\ m_2}$ 和$W_{m_1,\ m_2}$的精确分布分别如下：当 $0 \le m_2 \le m_1$，且 $0 \le \ell \le m_1$ 或 $0 \le k \le m_2$时成立；在此范围之外，概率均为零。

$$\mathbb{P}\{T_{m_1,m_2}=\ell\} = \begin{cases} \dfrac{\binom{m_1+m_2-\ell-1}{m_2-1}+\binom{m_1+m_2-\ell-1}{m_1-1}}{\binom{m_1+m_2}{m_1}}, & m_2,\ell \ge 1,\\ 1, & m_2=0\text{和 } \ell=m_{\ 1},\\ 0, & \text{否则。}\end{cases}$$

$$\mathbb{P}\{W_{m_1,m_2}=k\} = \begin{cases} \dfrac{2^k\binom{m_1+m_2-k}{m_1}-2^{k+1}\binom{m_1+m_2-k-1}{m_1}}{\binom{m_1+m_2}{m_1}}, & m_1 \ge 1,\\ 1, & m_1=m_2=k=0,\\ 0, & \text{否则。}\end{cases}$$

证明。 边缘分布的上述结果可由定理4 求和得到。对于W_{m_1,m_2} 的概率质量函数，只需应用基本求和公式 $\sum_{\ell=0}^{n}\binom{\ell}{m}=\binom{n+1}{m+1}$；而$T_{m_1,m_2}$的相应结果则源于对 k 求和时出现的望远镜消去。□

3. 极限定律

3.1. 边缘分布的极限行为。 我们首先分别陈述单个随机变量W_{m_1,m_2} 和T_{m_1,m_2}在 $m_1 \to \infty$ 下的极限行为，该行为取决于 m_2的增长行为。我们排除 $m_2=0$的情形，因为此时W_{m_1,m_2} 和T_{m_1,m_2} 的分布是确定性的。

定理 5. 随机变量$T_{m_1,\ m_2}$ 的极限分布行为，对于$0 \le m_2 \le m_1$ 和 $m_1 \to \infty$，取决于 m_2 的增长行为，如下所示。

- $m_2 \ge 1$ 固定：经过适当缩放后，$T_{m_1,\ m_2}$ 依分布收敛到随机变量 $Y^{[m_2]}$，其特征由分布函数给出
$$F(y)=1-(1-y)^{m_2}, \quad 0<y<1.$$
可以证明， $Y^{[m_2]}$ 服从参数为1 和 m_2的 ***Beta*** 分布；或者，也可以看作区间 $[0,1]$上 m_2 个相互独立、服从均匀分布的随机变量中的最小值：
$$\frac{T_{m_1,m_2}}{m_1} \xrightarrow{\mathcal{L}} Y^{[m_2]}, \quad Y^{[m_2]} \stackrel{\mathcal{L}}{=} \mathrm{Beta}(1,m_2) \stackrel{\mathcal{L}}{=} \min\{U_1,U_2,\dots,U_{m_2}\},$$
where $U_i \stackrel{\mathcal{L}}{=} \mathrm{Unif}[0,1]$, $1 \le i \le m_2$, *and the* U_i *mutually independent*.
- $m_2=o(m_1)$，但 $m_2 \to \infty$：经过适当缩放后，$T_{m_1,\ m_2}$ 渐近服从参数为1的指数分布：
$$\frac{m_2 \cdot T_{m_1,m_2}}{m_1} \xrightarrow{\mathcal{L}} Y, \quad Y \stackrel{\mathcal{L}}{=} \mathrm{Exp}(1),$$
即， Y的分布函数为 $F(y)=1-e^{-y}$， $y>0$.
- $m_2 \sim \rho m_1$，在 $0<\rho \le 1$ 条件下：$T_{m_1,\ m_2}$ 依分布收敛于一个离散随机变量 Y_ρ，其概率质量函数如下：
$$p_\ell^{[Y]} := \mathbb{P}\{Y_\rho=\ell\} = \frac{\rho+\rho^\ell}{(1+\rho)^{\ell+1}}, \quad \ell \ge 1.$$

可知， Y_ρ 是两个服从几何分布的随机变量的混合：

$$Y_\rho \overset{\mathcal{L}}{=} I_1 \cdot \mathrm{Geom}\left(\frac{\rho}{1+\rho}\right) + (1-I_1)\cdot \mathrm{Geom}\left(\frac{1}{1+\rho}\right),$$
$$\textit{with } I_1 \overset{\mathcal{L}}{=} \mathrm{Bernoulli}\left(\frac{1}{1+\rho}\right).$$

注 2. 注意，在上述刻画适用于 $m_2 \sim m_1$ 的情况下，它给出两个同分布几何随机变量的混合，因此对于 $\rho = 1$，结论显然成立

$$T_{m_1,m_2} \xrightarrow{\mathcal{L}} Y_1, \quad \text{with } Y_1 \overset{\mathcal{L}}{=} \mathrm{Geom}\left(\tfrac{1}{2}\right).$$

注 3. 如开头所述，$T_{m_1,\ m_2}$ 的极限分布与在边界处被吸收的不放回抽样 urn 的极限分布 [17], 非常相似，这也在意料之中。对这些极限分布的一种直观解释是：当 m_2 较小时，也就是说 $m_2 \geq 1$ 固定或 $m_2 = o(m_1)$，但 $m_2 \to \infty$ 时，对角线 $y = x$ 的影响可以忽略；然而，一旦 m_2 和 m_1 的大小相近，其影响就会变得更加显著。与不放回抽样不同，由于我们始终处于锥体 $x \geq y \geq 0$ 内，$T_{m_1,\ m_2}$ 的极限分布不会退化（而对于不放回抽样 urn，当 $m_2 \gg m_1$ 时则会发生退化）。这一直观解释可以严格化，因为 $T_{m_1,\ m_2}$ 的分布等同于到原点的距离：一个粒子从（m_1，m_2）出发，按照不放回抽样 urn 的规则移动，最终撞上 x 轴或 y 轴。

定理 6。 随机变量 $W_{m_1,\ m_2}$ 对于$0 \leq m_2 \leq m_1$ 和 $m_1 \to \infty$，其极限分布行为取决于 m_2 的增长行为，具体如下。

- $m_2 = o(m_1)$：$W_{m_1,\ m_2}$ 具有退化极限分布，$W_{m_1,\ m_2} \xrightarrow{\mathcal{L}} 0$。
- $m_2 \sim \rho m_1$，当 $0 < \rho < 1$时：$W_{m_1,\ m_2}$ 依分布收敛于一个（平移后的）服从几何分布的随机变量 X_ρ，其成功概率为 $\frac{1-\rho}{1+\rho}$：

$$W_{m_1,m_2} \xrightarrow{\mathcal{L}} X_\rho, \quad \textit{with } X_\rho \overset{\mathcal{L}}{=} \mathrm{Geom}\left(\frac{1-\rho}{1+\rho}\right) - 1,$$

  因此，其概率质量函数为

$$p_k^{[X]} := \mathbb{P}\{X_\rho = k\} = \frac{1-\rho}{1+\rho}\cdot\left(\frac{2\rho}{1+\rho}\right)^k, \quad k \geq 0.$$

- $m_2 \sim m_1$，其中差值 $d := m_1 - m_2$ 满足 $\sqrt{m_1} \ll d \ll m_1$：适当缩放后，$W_{m_1,\ m_2}$ 渐近服从参数为$\frac{1}{2}$的指数分布：

$$\frac{d \cdot W_{m_1,m_2}}{m_1} \xrightarrow{\mathcal{L}} X, \quad X \overset{\mathcal{L}}{=} \mathrm{Exp}\left(\tfrac{1}{2}\right),$$

  即，X具有分布函数 $F(x) = 1 - e^{-\frac{x}{2}}$，$x > 0$.

- $m_2 \sim m_1$，其中差值 $d := m_1 - m_2$ 满足 $d \sim \alpha\sqrt{m_1}$，其中 $\alpha > 0$：经过适当缩放后，$W_{m_1,\ m_2}$ 依分布收敛于随机变量 X_α，其特征由分布函数刻画

$$F(x) = 1 - e^{-\frac{x(2\alpha+x)}{4}}, \quad x > 0.$$

  因此，$W_{m_1,\ m_2}$ 渐近线性指数分布：

$$\frac{W_{m_1,m_2}}{\sqrt{m_1}} \xrightarrow{\mathcal{L}} X_\alpha, \quad X_\alpha \overset{\mathcal{L}}{=} \mathrm{LinExp}\left(\tfrac{\alpha}{2}, \tfrac{1}{2}\right).$$

- $m_2 \sim m_1$，其中差值 $d := m_1 - m_2$ 满足 $d = o(\sqrt{m_1})$：经过适当缩放后，$W_{m_1,\ m_2}$ 依分布收敛于参数为 $\sqrt{2}$ 的服从瑞利分布的随机变量 X：

$$\frac{W_{m_1,m_2}}{\sqrt{m_1}} \xrightarrow{\mathcal{L}} X, \quad X \overset{\mathcal{L}}{=} \mathrm{Rayleigh}\left(\sqrt{2}\right),$$

thus X has the distribution function $F(x) = 1 - e^{-\frac{x^2}{4}}$, $x > 0$.

注 4 （线性指数分布的性质）。所谓的线性指数分布 LinExp(λ, ν)，参见 [13, 第 480], 页，是一个包含两个参数的连续分布族，其支撑集为 $\mathbb{R}^+$，可通过分布函数刻画

$$F(x) = 1 - e^{-\left(\lambda x + \frac{\nu x^2}{2}\right)}, \quad x > 0.$$

它推广了指数分布和瑞利分布。或者，LinExp(λ, ν) 可以用指数分布 $Z \overset{\mathcal{L}}{=}$ Exp(1) 表示:

$$Y \overset{\mathcal{L}}{=} -\frac{\lambda}{\mu} + \frac{\sqrt{\lambda^2 + 2\mu Z}}{\mu}.$$

注 5. 范围 $m_2 \sim m_1$ 和 $d := m_1 - m_2 \sim \alpha\sqrt{m_1}$ 可以放宽为 $d := m_1 - m_2 \sim \alpha_{m_1}\sqrt{m_1}$, 也允许序列 $\alpha_{m_1} \to 0$，因为线性指数分布会退化为瑞利分布。

我们的引理 1和 2 结合定理 6 的结果，可以直接给出关于正确猜测总数 C_{m_1, m_2}的分布及极限定律的另一种证明。如前所述，这些极限定律已在 [18], 中陈述，其依据是 [23, 15], 中给出的 $C_{m_1,\, m_2}$ 的显式分布

$$\mathbb{P}\{C_{m_1,m_2} = k\} = \frac{\binom{m_1+m_2}{k} - \binom{m_1+m_2}{k+1}}{\binom{m_1+m_2}{m_1}}, \quad m_1 \le k \le m_1 + m_2.$$

但没有给出证明。这里我们仅顺便补充指出 $C_{m_1,\, m_2}$ 和$W_{m_1,\, m_2}$的矩之间一个非常简单的关系。

推论 2 (正确猜测总数的矩)。 令 $C_{m_1,\, m_2}$ 表示正确猜测数的平移量 $C_{m_1, m_2} - m_1$。 s 阶阶乘矩 $\mathbb{E}(C^{\underline{s}}_{m_1,\, m_2})$满足$C_{m_1,\, m_2}$

$$\mathbb{E}(\hat{C}^{\underline{s}}_{m_1,m_2}) = \frac{1}{2^s}\mathbb{E}(W^{\underline{s}}_{m_1,m_2}), \quad s \ge 1.$$

定理的证明5-6。 所述极限分布结果可由推论 1 给出的显式公式得到，具体做法是根据 m_2 的增长情况逐一分析，并仔细应用阶乘的斯特林公式,

$$\ln n! = \left(n + \tfrac{1}{2}\right)\ln n - n + \tfrac{1}{2}\ln(2\pi) + \mathcal{O}\left(n^{-1}\right). \tag{12}$$

由于这些计算与第 3.2 节给出的联合极限定律的计算类似，因此这里省略。 □

推论的证明2。 根据二项分布的众所周知的性质（或通过直接计算），对于整数 $s \ge 1$:

$$\mathbb{E}(\hat{C}^{\underline{s}}_{m_1,m_2} \mid W_{m_1,m_2}) = \frac{1}{2^s}W^{\underline{s}}_{m_1,m_2}.$$

由全期望的塔式法则,

$$\mathbb{E}(\hat{C}^{\underline{s}}_{m_1,m_2}) = \mathbb{E}\Big(\mathbb{E}(\hat{C}^{\underline{s}}_{m_1,m_2} \mid W_{m_1,m_2})\Big),$$

所述结果即可推出。 □

3.2. **联合极限定律。** 由定理$W_{m_1,\ m_2}$和$T_{m_1,\ m_2}$4中给出的关于联合分布的显式公式，我们可推导出以下联合极限定律。

定理 7. 随机变量 W_{m_1,m_2}和 T_{m_1,m_2} 的联合极限分布行为，对于 $0 \le m_2 \le m_1$ 和 $m_1 \to \infty$，取决于m_2 的增长行为，具体如下。

- $m_2 \sim \rho m_1$，且 $0 < \rho < 1$: $(W_{m_1,m_2}, T_{m_1,m_2})$ 依分布收敛于一对离散随机变量$\hat{}$ $\hat{}(X_\rho, Y_\rho)$，其联合概率质量函数对于 $k \ge 0$和 $\ell \ge 1$，如下所示:

$$\hat{p}_{k,\ell} := \mathbb{P}\{\hat{X}_\rho = k \wedge \hat{Y}_\rho = \ell\} = \begin{cases} \frac{\rho - \rho^\ell}{(1+\rho)^{\ell+1}}, & \text{for } k = 0 \text{ and } \ell \ge 1, \\ \frac{1-\rho}{\rho(1+\rho)} \cdot \left(\frac{\rho}{1+\rho}\right)^\ell \cdot \left(\frac{2\rho}{1+\rho}\right)^k, & \text{for } k, \ell \ge 1. \end{cases}$$

对于 m_2, W_{m_1,m_2} 和 T_{m_1,m_2} 在所有其他增长范围内渐近独立；也就是说，经过适当缩放后，这对随机变量弱收敛于一对 (X, Y) 相互独立的随机变量，其分布服从定理5-6中给出的相应边缘分布的极限分布，因此:

- $m_2 \ge 1$ *fixed:*

$$\left(W_{m_1,m_2}, \frac{T_{m_1,m_2}}{m_1}\right) \xrightarrow{\mathcal{L}} (X, Y) \overset{\mathcal{L}}{=} \big(0, \mathrm{Beta}(1, m_2)\big) \overset{\mathcal{L}}{=} \big(0, \min\{\mathrm{Unif}[0,1]_i : 1 \le i \le m_2\}\big).$$

- $m_2 = o(m_1)$, *but* $m_2 \to \infty$*:*

$$\left(W_{m_1,m_2}, \frac{m_2 \cdot T_{m_1,m_2}}{m_1}\right) \xrightarrow{\mathcal{L}} (X, Y) \overset{\mathcal{L}}{=} \big(0, \mathrm{Exp}(1)\big).$$

- $m_2 \sim m_1$, *where the difference* $d := m_1 - m_2$ *satisfies* $\sqrt{m_1} \ll d \ll m_1$*:*

$$\left(\frac{d \cdot W_{m_1,m_2}}{m_1}, T_{m_1,m_2}\right) \xrightarrow{\mathcal{L}} (X, Y) \overset{\mathcal{L}}{=} \left(\mathrm{Exp}\left(\tfrac{1}{2}\right), \mathrm{Geom}\left(\tfrac{1}{2}\right)\right).$$

- $m_2 \sim m_1$, *where the difference* $d := m_1 - m_2$ *satisfies* $d \sim \alpha\sqrt{m_1}$, *with* $\alpha > 0$*:*

$$\left(\frac{W_{m_1,m_2}}{\sqrt{m_1}}, T_{m_1,m_2}\right) \xrightarrow{\mathcal{L}} (X, Y) \overset{\mathcal{L}}{=} \left(\mathrm{LinExp}\left(\tfrac{\alpha}{2}, \tfrac{1}{2}\right), \mathrm{Geom}\left(\tfrac{1}{2}\right)\right).$$

- $m_2 \sim m_1$, *where the difference* $d := m_1 - m_2$ *satisfies* $d = o(\sqrt{m_1})$*:*

$$\left(\frac{W_{m_1,m_2}}{\sqrt{m_1}}, T_{m_1,m_2}\right) \xrightarrow{\mathcal{L}} (X, Y) \overset{\mathcal{L}}{=} \left(\mathrm{Rayleigh}\left(\sqrt{2}\right), \mathrm{Geom}\left(\tfrac{1}{2}\right)\right).$$

证明。 对于$W_{m_1,\ m_2}$ 和 $T_{m_1,\ m_2}$，当 $m_1 \to \infty$时，其联合极限行为可由定理4 中给出的联合概率质量函数显式公式推出：根据 m_2的增长行为区分各种情形，使用适当的估计，并应用斯特林公式（12）。对于 m_2 的某些区域，从联合或单侧累积分布函数的显式公式入手会稍微方便一些；这些公式可通过对定理4 求和轻易得到，因此我们直接列出。具体而言，当 $1 \le \ell \le m_1$，$0 \le k \le m_2$ 且 $(m_1,\ m_2) \ne (\ell,\ k)$时，可得

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}\{W_{m_1,m_2} \le k \wedge T_{m_1,m_2} \le \ell\} \\ &= 1 - \frac{\binom{m_1+m_2-\ell-1}{m_2} + \binom{m_1+m_2-\ell-1}{m_1} + 2^{k+1}\binom{m_1+m_2-k-1}{m_1} - 2^{k+1}\binom{m_1+m_2-k-\ell-1}{m_1}}{\binom{m_1+m_2}{m_1}}, \end{aligned} \tag{13}$$

以及（我们省略了在此处不相关的情形（$m_1,\ m_2$） $=$ （$\ell,\ k$））

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}\{W_{m_1,m_2} \le k \wedge T_{m_1,m_2} = \ell\} \\ &\qquad = \frac{\binom{m_1+m_2-\ell-1}{m_2-1} + \binom{m_1+m_2-\ell-1}{m_1-1} - 2^{k+1}\binom{m_1+m_2-k-\ell-1}{m_1-1}}{\binom{m_1+m_2}{m_1}}. \end{aligned} \tag{14}$$

接下来，我们概述不同情形下的渐近分析。

- $m_2 \geq 1$ 固定：设置 $k=0$为（13）得到

$$\mathbb{P}\{W_{m_1,m_2}=0 \wedge T_{m_1,m_2} \leq \ell\} = 1 - \frac{\binom{m_1+m_2-\ell-1}{m_2}}{\binom{m_1+m_2}{m_2}} - \frac{2\binom{m_1+m_2-1}{m_1}}{\binom{m_1+m_2}{m_1}} + \frac{\binom{m_1+m_2-\ell-1}{m_1}}{\binom{m_1+m_2}{m_1}}. \tag{15}$$

由于

$$\frac{\binom{m_1+m_2-1}{m_1}}{\binom{m_1+m_2}{m_1}} = \frac{m_2}{m_1+m_2} = \mathcal{O}\big(\tfrac{m_2}{m_1}\big),$$
$$\frac{\binom{m_1+m_2-\ell-1}{m_1}}{\binom{m_1+m_2}{m_1}} = \frac{m_2^{\underline{\ell+1}}}{(m_1+m_2)^{\underline{\ell+1}}} = 0, \quad \text{for } \ell \geq m_2,$$

与 m_2 固定相关的渐近贡献源自

$$\frac{\binom{m_1+m_2-\ell-1}{m_2}}{\binom{m_1+m_2}{m_2}} = \frac{m_1^{\underline{\ell+1}}}{(m_1+m_2)^{\underline{\ell+1}}} = \frac{(m_1+m_2-\ell-1)^{\underline{m_2}}}{(m_1+m_2)^{\underline{m_2}}}$$
$$= \frac{(m_1-\ell)^{m_2}\cdot\big(1+\mathcal{O}\big(\frac{1}{m_1-\ell}\big)\big)}{m_1^{m_2}\cdot\big(1+\mathcal{O}\big(\frac{1}{m_1}\big)\big)} = \Big(1-\frac{\ell}{m_1}\Big)^{m_2}\cdot\Big(1+\mathcal{O}\big(\tfrac{1}{m_1-\ell}\big)\Big).$$

因此，对于 $m_2 \geq 1$ 固定、 $m_1 \to \infty$以及例如$\sqrt{m_1} \leq \ell \leq m_1 - \sqrt{m_1}$，有

$$\mathbb{P}\{W_{m_1,m_2}=0 \wedge T_{m_1,m_2} \leq \ell\} \to 1 - \Big(1-\frac{\ell}{m_1}\Big)^{m_2},$$

即，令 $y = \frac{\ell}{m_1}$，

$$\mathbb{P}\Big\{W_{m_1,m_2}=0 \wedge \frac{T_{m_1,m_2}}{m_1} \leq y\Big\} \to F(y) = 1-(1-y)^{m_2}, \quad \text{for } 0<y<1.$$

$F(y)$ 是贝塔分布的分布函数，或者换言之，是 m_2 个相互独立且服从 $[0,1]$ 上均匀分布的随机变量的最小值的分布函数。

- $m_2 = o(m_1)$，但 $m_2 \to \infty$：我们再次考虑（），作为对前一种情况考察的细化，假设 $\frac{m_1}{m_2} \geq 2$，由简单估计可得

$$\frac{\binom{m_1+m_2-\ell-1}{m_1}}{\binom{m_1+m_2}{m_1}} \leq \Big(\frac{m_2}{m_1+m_2}\Big)^{\ell+1} = e^{-(\ell+1)\ln\left(1+\frac{m_2}{m_1}\right)} \leq e^{-\ell}, \quad \text{for } \ell \geq 1,$$

因此，对于 $\ell \to \infty$，其贡献渐近可忽略不计。同样，对渐近行为起关键作用的贡献来自

$$\frac{\binom{m_1+m_2-\ell-1}{m_2}}{\binom{m_1+m_2}{m_2}} = \frac{m_1!\cdot(m_1+m_2-\ell-1)!}{(m_1-\ell-1)!\cdot(m_1+m_2)!}$$
$$= e^{-\frac{\ell m_2}{m_1}}\cdot\Big(1+\mathcal{O}\big(\tfrac{\ell m_2^2}{m_1^2}\big)+\mathcal{O}\big(\tfrac{\ell^2 m_2}{m_1^2}\big)+\mathcal{O}\big(\tfrac{\ell}{m_1}\big)+\mathcal{O}\big(\tfrac{m_2}{m_1}\big)\Big),$$

其中渐近估值通过应用斯特林公式得到。因此，对于 $m_1,\ m_2 \to \infty$、$m_2 = o(m_1)$，以及例如 $\sqrt{\frac{m_1}{m_2}} \leq \ell \leq \min\Big\{\big(\frac{m_1}{m_2}\big)^{\frac{3}{2}},\ \frac{m_1^{\frac{3}{4}}}{m_2}\Big\}$，它 成立

$$\mathbb{P}\{W_{m_1,m_2}=0 \wedge T_{m_1,m_2} \leq \ell\} \to 1 - e^{-\frac{\ell m_2}{m_1}},$$

即，通过设定 $y = \frac{\ell m_2}{m_1}$，

$$\mathbb{P}\Big\{W_{m_1,m_2}=0 \wedge \frac{m_2\cdot T_{m_1,m_2}}{m_1} \leq y\Big\} \to 1-e^{-y}, \quad \text{for } y>0.$$

- $m_2 \sim \rho m_1$，其中 $0<\rho<1$：在此范围内，考虑定理 4 中给出的概率质量函数的渐近行为，其中 $k \geq 0$， $\ell \geq 1$ 固定。情形 $k=0$需要单独处理，此时我们得到

$$\frac{\binom{m_1+m_2-\ell-1}{m_2-1}}{\binom{m_1+m_2}{m_2}} = \frac{m_2 m_1^{\underline{\ell}}}{(m_1+m_2)^{\underline{\ell+1}}} = \frac{\frac{m_2}{m_1}}{\left(1+\frac{m_2}{m_1}\right)^{\ell+1}} \cdot \left(1+\mathcal{O}\left(\tfrac{1}{m_1}\right)\right),$$
$$\frac{\binom{m_1+m_2-\ell-1}{m_1-1}}{\binom{m_1+m_2}{m_1}} = \frac{m_1 m_2^{\underline{\ell}}}{(m_1+m_2)^{\underline{\ell+1}}} = \frac{\left(\frac{m_2}{m_1}\right)^{\ell}}{\left(1+\frac{m_2}{m_1}\right)^{\ell+1}} \cdot \left(1+\mathcal{O}\left(\tfrac{1}{m_2}\right)\right).$$

因此，对于 $m_1 \to \infty, m_2 \sim \rho m_1$，在 $0<\rho<1$且 $\ell \geq 1$ 固定时，有

$$\mathbb{P}\{W_{m_1,m_2}=0 \wedge T_{m_1,m_2}=\ell\} \to \frac{\rho-\rho^{\ell}}{(1+\rho)^{\ell+1}}.$$

类似地，对于 $k \geq 1$ ，可得

$$\frac{2^k\binom{m_1+m_2-\ell-k}{m_1-1}}{\binom{m_1+m_2}{m_1}} = \frac{2^k m_1 m_2^{\underline{\ell+k-1}}}{(m_1+m_2)^{\underline{\ell+k}}} = \frac{2^k\left(\frac{m_2}{m_1}\right)^{\ell+k-1}}{\left(1+\frac{m_2}{m_1}\right)^{\ell+k}} \cdot \left(1+\mathcal{O}\left(\tfrac{1}{m_2}\right)\right),$$
$$\frac{2^{k+1}\binom{m_1+m_2-\ell-k-1}{m_1-1}}{\binom{m_1+m_2}{m_1}} = \frac{2^{k+1} m_1 m_2^{\underline{\ell+k}}}{(m_1+m_2)^{\underline{\ell+k+1}}} = \frac{2^{k+1}\left(\frac{m_2}{m_1}\right)^{\ell+k}}{\left(1+\frac{m_2}{m_1}\right)^{\ell+k+1}} \cdot \left(1+\mathcal{O}\left(\tfrac{1}{m_2}\right)\right),$$

这意味着，对于 $m_1 \to \infty, m_2 \sim \rho m_1$，在 $0<\rho<1$且 k， $\ell \geq 1$ 固定时，

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\{W_{m_1,m_2}=k \wedge T_{m_1,m_2}=\ell\} &\to \frac{2^k\rho^{\ell+k-1}}{(1+\rho)^{\ell+k}} - \frac{2^{k+1}\rho^{\ell+k}}{(1+\rho)^{\ell+k+1}} \\ &= \frac{1-\rho}{\rho(1+\rho)} \cdot \left(\frac{\rho}{1+\rho}\right)^{\ell} \cdot \left(\frac{2\rho}{1+\rho}\right)^{k}.\end{aligned}$$

- $m_2 \sim m_1$，其中差值 $d:=m_1-m_2$ 满足 $\sqrt{m_1} \ll d \ll m_1$：我们从（14）开始，并考察其在 $\ell \geq 1$ 固定时的渐近行为，起初只假设 $d=o\left(m_1\right)$ 。与之前的讨论类似，可得

$$\frac{\binom{m_1+m_2-\ell-1}{m_2-1}}{\binom{m_1+m_2}{m_2}} = \frac{\frac{m_2}{m_1}}{\left(1+\frac{m_2}{m_1}\right)^{\ell+1}} \cdot \left(1+\mathcal{O}\left(\tfrac{1}{m_1}\right)\right) = \tfrac{1}{2^{\ell+1}} \cdot \left(1+\mathcal{O}\left(\tfrac{d}{m_1}\right)\right),$$
$$\frac{\binom{m_1+m_2-\ell-1}{m_1-1}}{\binom{m_1+m_2}{m_1}} = \frac{\left(\frac{m_2}{m_1}\right)^{\ell}}{\left(1+\frac{m_2}{m_1}\right)^{\ell+1}} \cdot \left(1+\mathcal{O}\left(\tfrac{1}{m_1}\right)\right) = \tfrac{1}{2^{\ell+1}} \cdot \left(1+\mathcal{O}\left(\tfrac{d}{m_1}\right)\right),$$

and

$$\frac{2^{k+1}\binom{m_1+m_2-k-\ell-1}{m_1-1}}{\binom{m_1+m_2}{m_1}} = \frac{2m_1(m_2-k)^{\underline{\ell}}}{(m_1+m_2-k)^{\underline{\ell+1}}} \cdot \frac{2^k\binom{m_1+m_2-k}{m_1}}{\binom{m_1+m_2}{m_1}}.$$

很容易推出，在 $\ell \geq 1$ 固定时，

$$\frac{2m_1(m_2-k)^{\underline{\ell}}}{(m_1+m_2-k)^{\underline{\ell+1}}} = \frac{2m_1 m_2^{\ell}}{(m_1+m_2)^{\ell+1}} \cdot \left(1+\mathcal{O}\left(\tfrac{k}{m_2}\right)\right) = \tfrac{1}{2^{\ell}} \cdot \left(1+\mathcal{O}\left(\tfrac{d}{m_1}\right)+\mathcal{O}\left(\tfrac{k}{m_1}\right)\right),$$

而通过应用斯特林公式，可得

$$\frac{2^k\binom{m_1+m_2-k}{m_1}}{\binom{m_1+m_2}{m_1}} = e^{-\frac{k(2d+k)}{4m_1}} \cdot \left(1+\mathcal{O}\left(\tfrac{kd^2}{m_1^2}\right)+\mathcal{O}\left(\tfrac{k^3}{m_1^2}\right)\right).$$

因此，综合上述结果，对于固定的 $\ell \geq 1$，我们得到以下渐近结果；例如，对于固定的 $\epsilon>0$，该结果在 $k \leq \min\left\{m_1^{\frac{2}{3}-\epsilon}, \left(\tfrac{m_1}{d}\right)^{2-\epsilon}\right\}$ 的范围内一致成立，

$$\mathbb{P}\{W_{m_1,m_2} \leq k \wedge T_{m_1,m_2}=\ell\}$$

$$= 2^{-\ell} \cdot \Big(1 - e^{-\frac{k(2d+k)}{4m_1}}\Big) \cdot \Big(1 + \mathcal{O}\big(\tfrac{d}{m_1}\big) + \mathcal{O}\big(\tfrac{k}{m_1}\big) + \mathcal{O}\big(\tfrac{kd^2}{m_1^2}\big) + \mathcal{O}\big(\tfrac{k^3}{m_1^2}\big)\Big). \quad (16)$$

现在我们将讨论范围限制为 $\sqrt{m_1} \ll d \ll m_1$。对于 $m_1 \to \infty$、固定的 $\ell \geq 1$，以及例如满足 $k \leq \min\left\{\binom{m_1}{d}^{\frac{3}{2}}, \frac{m_1^4}{\sqrt{d}}\right\}$ 的情形；此外，这还意味着 $k = o(d)$，有

$$\mathbb{P}\{W_{m_1,m_2} \leq k \wedge T_{m_1,m_2} = \ell\} \to 2^{-\ell} \cdot \Big(1 - e^{-\frac{kd}{2m_1}}\Big),$$

即，令 $x = \frac{kd}{m_1}$，

$$\mathbb{P}\Big\{\frac{d \cdot W_{m_1,m_2}}{m_1} \leq x \wedge T_{m_1,m_2} = \ell\Big\} \to 2^{-\ell} \cdot \Big(1 - e^{-\frac{x}{2}}\Big), \quad \text{for } x > 0.$$

- $m_2 \sim m_1$，其中差值 $d := m_1 - m_2$ 满足 $d \sim \alpha\sqrt{m_1}$，其中 $\alpha > 0$：使用（16），对于 $m_1 \to \infty$，$\ell \geq 1$ 固定，并且 $k = \mathcal{O}\big(m^{\frac{1}{2}+\epsilon}\big)$，其中 $\epsilon > 0$，令 $x = \frac{k}{\sqrt{m_1}}$，

$$\mathbb{P}\Big\{\frac{W_{m_1,m_2}}{\sqrt{m_1}} \leq x \wedge T_{m_1,m_2} = \ell\Big\} \to 2^{-\ell} \cdot \Big(1 - e^{-\frac{x(2\alpha+x)}{4}}\Big), \quad \text{for } x > 0.$$

- $m_2 \sim m_1$，其中差值 $d := m_1 - m_2$ 满足 $d = o(\sqrt{m_1})$：对于 $m_1 \to \infty$，$\ell \geq 1$ 固定，并设 $k \leq \min\left\{m_1^{\frac{1}{2}+\epsilon}, \frac{m_1^4}{\sqrt{d}}\right\}$，有

$$\mathbb{P}\{W_{m_1,m_2} \leq k \wedge T_{m_1,m_2} = \ell\} \to 2^{-\ell} \cdot \Big(1 - e^{-\frac{k^2}{4m_1}}\Big),$$

即，令 $x = \frac{k}{\sqrt{m_1}}$，

$$\mathbb{P}\Big\{\frac{W_{m_1,m_2}}{\sqrt{m_1}} \leq x \wedge T_{m_1,m_2} = \ell\Big\} \to 2^{-\ell} \cdot \Big(1 - e^{-\frac{x^2}{4}}\Big), \quad \text{for } x > 0.$$

□

3.3. 中心区域中的相关性。 根据定理7，离散随机变量 X_ρ 和 Y_ρ 分别作为中心区域 $m_2 \sim \rho m_1$、$0 < \rho < 1$ 中 W_{m_1,m_2} 和 T_{m_1,m_2} 的极限出现，因此二者并不独立。为了深入了解 X_ρ 和 Y_ρ 的联合变异性及其线性相关性，我们计算 X_ρ 与 Y_ρ 之间的协方差以及相关系数。

为此，我们引入联合矩母函数

$$\hat{P}(s,t) := \mathbb{E}\big(e^{s\hat{X}_\rho + t\hat{Y}_\rho}\big) = \sum_{k\geq 0}\sum_{\ell \geq 1} \mathbb{P}\big\{\hat{X}_\rho = k \wedge \hat{Y}_\rho = \ell\big\} e^{ks+\ell t}.$$

根据 $p_{k,\ell} = \mathbb{P}\{X_\rho = k \wedge Y_\rho = \ell\}$（定义见定理 7），区分 $k = 0$ 和 $k \geq 1$ 后，通过基本求和和简单变换可得：

$$\sum_{\ell\geq 1} \hat{p}_{0,\ell} e^{\ell t} = \sum_{\ell \geq 1} \frac{\rho - \rho^\ell}{(1+\rho)^{\ell+1}} e^{\ell t} = \frac{\rho(1-\rho)e^{2t}}{(1+\rho)(1+\rho-e^t)(1+\rho-\rho e^t)},$$

$$\begin{aligned}\sum_{k\geq 1}\sum_{\ell\geq 1} \hat{p}_{k,\ell} e^{ks+\ell t} &= \sum_{k\geq 1}\sum_{\ell\geq 1} \frac{1-\rho}{\rho(1+\rho)} \Big(\frac{\rho}{1+\rho}\Big)^\ell \Big(\frac{2\rho}{1+\rho}\Big)^k e^{ks+\ell t} \\ &= \frac{2\rho(1-\rho)e^{s+t}}{(1+\rho)(1+\rho-2\rho e^s)(1+\rho-\rho e^t)},\end{aligned}$$

并结合这些表达式，得到联合矩母函数的以下结果：

$$\hat{P}(s,t) = \frac{\rho(1-\rho)e^t(e^t + 2e^s - 2e^{s+t})}{(1+\rho-e^t)(1+\rho-\rho e^t)(1+\rho-2\rho e^s)}. \quad (17)$$

对17在 $(s,\ t)=(0,\ 0)$ 处进行行级数展开，并考虑到

$$\mathbb{E}\big(e^{s\hat{X}_\rho+t\hat{Y}_\rho}\big)=1+\mathbb{E}(\hat{X}_\rho)s+\mathbb{E}(\hat{Y}_\rho)t+\mathbb{E}(\hat{X}_\rho^2)\frac{s^2}{2}+\mathbb{E}(\hat{X}_\rho\hat{Y}_\rho)st+\mathbb{E}(\hat{Y}_\rho^2)\frac{t^2}{2}+\mathcal{O}\big((s+t)^3\big),$$

$\hat{}$ 给出了 X_ρ 和 Y_ρ的一阶矩:

$$\mathbb{E}(\hat{X}_\rho)=\frac{2\rho}{1-\rho},\quad \mathbb{E}(\hat{Y}_\rho)=\frac{\rho^2+1}{\rho},$$

$$\mathbb{E}(\hat{X}_\rho^2)=\frac{2\rho(1+3\rho)}{(1-\rho)^2},\quad \mathbb{E}(\hat{Y}_\rho^2)=\frac{2\rho^4+\rho^3+\rho+2}{\rho^2},\quad \mathbb{E}(\hat{X}_\rho\hat{Y}_\rho)=\frac{2\rho(1+\rho)}{1-\rho}.$$

由这些表达式可立即得出方差和协方差:

$$\mathbb{V}(\hat{X}_\rho)=\mathbb{E}(\hat{X}_\rho^2)-\big(\mathbb{E}(\hat{X}_\rho)\big)^2=\frac{2\rho(1+\rho)}{(1-\rho)^2},$$

$$\mathbb{V}(\hat{Y}_\rho)=\mathbb{E}(\hat{Y}_\rho^2)-\big(\mathbb{E}(\hat{Y}_\rho)\big)^2=\frac{1+\rho-2\rho^2+\rho^3+\rho^4}{\rho^2},$$

$$\mathrm{Cov}(\hat{X}_\rho,\hat{Y}_\rho)=\mathbb{E}(\hat{X}_\rho\hat{Y}_\rho)-\mathbb{E}(\hat{X}_\rho)\mathbb{E}(\hat{Y}_\rho)=-2.$$

因此，协方差 $\mathsf{Cov}(\hat{X}_\rho,\ \hat{Y}_\rho)$ 不依赖于比值 ρ。此外，相关系数 $C_\rho:=\mathsf{Corr}(\hat{X}_\rho,\ \hat{Y}_\rho)$ 为

$$C_\rho=\mathrm{Corr}(\hat{X}_\rho,\hat{Y}_\rho)=\frac{\mathrm{Cov}(\hat{X}_\rho,\hat{Y}_\rho)}{\sqrt{\mathbb{V}(\hat{X}_\rho)}\sqrt{\mathbb{V}(\hat{Y}_\rho)}}=-\frac{\sqrt{2\rho}\,(1-\rho)}{\sqrt{(1+\rho)(1+\rho-2\rho^2+\rho^3+\rho^4)}}.$$

简单计算表明 C_ρ 在以下情形下取得最小值 $\rho=\tilde{\rho}$，它是 $\kappa(\rho)=1-3\rho-3\rho^2+3\rho^3-6\rho^4-2\rho^5+2\rho^6$ 在区间 $[0,1]$ 内的唯一根；数值上，$\tilde{\rho}\approx 0.269187$，对应的最小相关系数为 $C_{\tilde{\rho}}\approx -0.444039$。将相关系数 C_ρ视为比值的函数 ρ，如图 1所示。

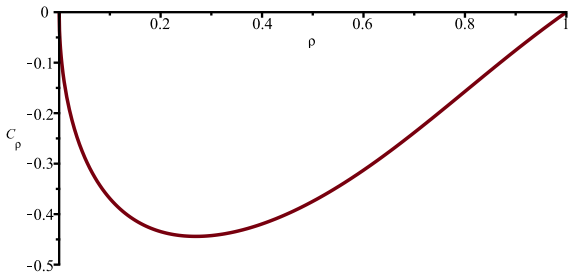


图 1。相关系数 $C_\rho=\mathsf{Corr}(\hat{X}_\rho、\ \hat{Y}_\rho)$ 作为 ρ 在区间 $[0,1]$ 内的函数。

3.4. **期望与高阶矩：相同数量的牌**。 最后，我们将极限分布与 Diaconis 和 Graham [4] 关于期望值的结果进行比较。他们考虑了 n 种不同颜色这一更一般的情形，但在此将自身限制于特殊情形 $m_1=m_2=\cdots=m_n=m$，即随机变量 $C_{m、\ m、\ \ldots、\ m}$：当从一副包含 n 种颜色且每种颜色恰好有 m 张、共 nm 张牌的随机牌堆开始时，计算正确猜测的数量。

定理 8 (Diaconis-Graham [4])。 正确猜测数量的期望值$S_{m、\ n}=\mathbb{E}(C_{m、\ m、\ \ldots、\ m})$ 对于固定的 $n\in\mathbb{N}$，在 $n\geq 2$ 且 $m\to\infty$ 的情况下满足展开式

$$S_{m,n}=m+\frac{\pi}{2}\cdot M_n\cdot\sqrt{m}+o(\sqrt{m}),$$

其中 $M_n=\mathbb{E}(\max\{N_1,\ldots,N_n\})$，且随机变量 N_k 独立同分布于标准正态分布。

在特殊情形 $n=2$下，我们观察到

$$\mathbb{E}(C_{m,m}) = S_{m,2} = m + \frac{\sqrt{\pi}}{2}\sqrt{m} + o(\sqrt{m}),$$

利用显式值 $1/\sqrt{\pi}$ 的 $M_{2\circ}$定理 6中的结果表明， $n=2$ 的期望值和高阶矩实际上源自瑞利分布。我们得到以下结果，与定理8一致，即 $\Gamma(3/2) = \sqrt{\pi}/2$，并将其从 $s=1$推广到任意高阶整数阶矩。

定理 9。 中心化随机变量 $C_{m,m} = C_{m,m} - m$（计数正确猜测总数）的原始矩在 $s \in \mathbb{N}$ 和 $m \to \infty$ 的条件下满足如下渐近展开

$$\mathbb{E}(\hat{C}^s_{m,m}) \sim \frac{1}{2^s}\mathbb{E}(R^s)\cdot m^{\frac{s}{2}} = \Gamma\Big(\frac{s}{2}+1\Big)\cdot m^{\frac{s}{2}}, \quad \textit{with} \quad R \overset{\mathcal{L}}{=} \text{Rayleigh}\left(\sqrt{2}\right).$$

为了证明这一结果，我们需要在特殊情形 $m_1 = m_2 = m$下W_{m_1,m_2} 的阶乘矩渐近式。我们使用以下结果，它将阶乘矩与柯西积分联系起来。

引理 10。 当 $s \geq 1$ 时，W_{m_1,m_2} 的第 s 阶乘阶乘矩由下式给出

$$\mathbb{E}(W^{\underline{s}}_{m_1,m_2}) = \frac{s!2^s}{\binom{m_1+m_2}{m_1}}\frac{1}{2\pi i}\oint_{\mathcal{C}}\frac{1}{(1-x)^s}\cdot(1+x)^{m_1+m_2}\frac{dx}{x^{m_2+1-s}},$$

与 $\mathcal{C}$ 一条围绕原点的正向简单闭曲线。

注 6。 上述结果和推论 2 使我们能够研究$W_{m_1,\ m_2}$ 和 $C_{m_1,\ m_2}$ 的矩收敛 $m_1 = m_2 = m \to \infty$，不仅适用于6定理中考虑的不同情形。不过，分析会复杂得多，因此我们不再详述。

引理的证明*10*。 考虑二项式矩 $\mathbb{E}\binom{W_{m_1,\ m_2}}{s}$较为方便，使得

$$\mathbb{E}(W^{\underline{s}}_{m_1,m_2}) = s!\cdot\mathbb{E}\binom{W_{m_1,m_2}}{s}.$$

由推论 1 中的显式结果可得

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\binom{W_{m_1,m_2}}{s} &= \sum_{k=s}^{m_2}\binom{k}{s}\mathbb{P}(W_{m_1,m_2}=k)\\ &= \frac{1}{\binom{m_1+m_2}{m_1}}\sum_{k=s}^{m_2}\binom{k}{s}\Big(2^k\binom{m_1+m_2-k}{m_1} - 2^{k+1}\binom{m_1+m_2-k-1}{m_1}\Big).\end{aligned}$$

利用标准性质 $\binom{k+1}{s} = \binom{k}{s} + \binom{k}{s-1}$，我们进一步得到

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\binom{W_{m_1,m_2}}{s} &= \sum_{k=s}^{m_2}\binom{k}{s}\mathbb{P}(W_{m_1,m_2}=k)\\ &= \frac{1}{\binom{m_1+m_2}{m_1}}\sum_{k=s}^{m_2}\Big(\binom{k}{s}2^k\binom{m_1+m_2-k}{m_1} - \binom{k+1}{s}2^{k+1}\binom{m_1+m_2-k-1}{m_1}\Big)\\ &\quad + \frac{1}{\binom{m_1+m_2}{m_1}}\sum_{k=s}^{m_2-1}\binom{k}{s-1}2^{k+1}\binom{m_1+m_2-k-1}{m_1}.\end{aligned}$$

望远镜求和化简为 $2^s\binom{m_1+m_2-s}{m_1}\big/\binom{m_1+m_2}{m_1}$。进一步化简得

$$\mathbb{E}\binom{W_{m_1,m_2}}{s} = \frac{1}{\binom{m_1+m_2}{m_1}}\sum_{k=s-1}^{m_2-1}\binom{k}{s-1}2^{k+1}\binom{m_1+m_2-k-1}{m_1}\Big).$$

使用整数的标准展开式 $n, j \geq 0$:

$$[t^n]\frac{1}{(1-2t)^{j+1}} = 2^n\binom{n+j}{j},$$

我们得到

$$[t^{m_2-1}]\frac{t^{s-1}}{(1-2t)^s}\cdot\frac{1}{(1-t)^{m_1+1}} = \sum_{k=s-1}^{m_2-1}\binom{k}{s-1}2^{k+1-s}\binom{m_1+m_2-k-1}{m_1}.$$

因此，应用柯西积分公式，我们得到 s阶阶乘矩的如下围道积分表示，其中$W_{m_1,\ m_2}$:

$$\mathbb{E}(W^{\underline{s}}_{m_1,m_2}) = \frac{2^s\cdot s!}{\binom{m_1+m_2}{m_1}}\cdot\frac{1}{2\pi i}\oint_{\mathcal{C}}\frac{1}{(1-2t)^s}\cdot\frac{1}{(1-t)^{m_1+1}}\frac{dt}{t^{m_2-s+1}}.$$

最后，我们使用代换$t = \frac{x}{x+1}$，得到所述结果。 □

接下来，我们将对 $m_1 = m_2 = m \to \infty$的积分进行渐近求值。

定理 9 的证明。 由于阶乘矩与原始矩之间的关系

$$\mathbb{E}(\hat{C}^{\underline{s}}_{m,m}) = \sum_{j=0}^{s}\left\{{s \atop j}\right\}\mathbb{E}(\hat{C}^{j}_{m,m}),$$

其中 $\left\{{s \atop j}\right\}$ 表示第二类斯特林数，因此只需证明所述的阶乘矩展开。根据推论 2 和引理 10 我们有

$$\mathbb{E}(\hat{C}^{\underline{s}}_{m,m}) = \frac{s!}{\binom{2m}{m}2\pi i}\oint_{\mathcal{C}}\frac{1}{(1-x)^s}\cdot(1+x)^{2m}\frac{dy}{x^{m+1-s}}.$$

这里的情况与 Flajolet 和 Sedgewick [9,VIII.39，第 590]页所讨论的例子相似: 由于 $x = 1$处存在奇点，鞍点法无法直接应用。不过，我们可以用一个技巧避开更复杂的分析 [9], ，即进行另一次代换

$$y = \frac{x}{(1+x)^2},\quad x(y) = \frac{1-2y-\sqrt{1-4y}}{2y} \sim 1-2\sqrt{1-4y}+\mathcal{O}(1-4y),$$

其中，后一个局部展开在主导奇点$y = 1/4$的裂隙邻域内成立。由此得到

$$\mathbb{E}(\hat{C}^{\underline{s}}_{m,m}) = \frac{s!}{\binom{2m}{m}2\pi i}\oint_{\mathcal{C}}\frac{\big(1+x(y)\big)x(y)^s}{(1-x(y))^{s+1}}\frac{dy}{y^{m+1}}. = \frac{s!}{\binom{2m}{m}}[y^m]\frac{\big(1+x(y)\big)x(y)^s}{(1-x(y))^{s+1}}.$$

现在可以使用标准的奇点分析 [9]。在 $y = 1/4$ 附近展开可得

$$\frac{\big(1+x(y)\big)x(y)^s}{(1-x(y))^{s+1}} \sim \frac{1}{2^s(1-4y)^{\frac{s+1}{2}}}.$$

因此，奇点分析和经典展开

$$\frac{1}{\binom{2m}{m}} \sim \frac{\sqrt{\pi}\sqrt{m}}{4^m}$$

得到

$$\mathbb{E}(\hat{C}^{\underline{s}}_{m,m}) \sim \frac{s!m^{\frac{s}{2}}\sqrt{\pi}}{2^s\Gamma(\frac{s+1}{2})}.$$

根据勒让德倍公式

$$\frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(s+1)}{2^s\Gamma(\frac{s+1}{2})} = \Gamma\big(\frac{s}{2}+1\big),$$

由此得出所述结果

$$\mathbb{E}(\hat{C}_{m,m}^{s}) \sim \Gamma\big(\frac{s}{2}+1\big)m^{\frac{s}{2}}.$$

□

最后，我们还简要介绍一种基于局部极限定理的定理 9 的替代证明方法；另可参见 Zagier 关于期望值的分析 [24] 。沿用我们先前对联合极限定律的分析，并利用

$$\mathbb{P}\{W_{m,m}=k\} = \frac{2^k\binom{2m-k-1}{m-1-1}\frac{k}{m}}{\binom{2m}{m}}, \quad 0 \le k \le m,$$

我们观察到，对于 k 的阶为 $\sqrt{m}$ 的情形，

$$\mathbb{P}\{W_{m,m}=k\} \sim \frac{k}{2m}e^{-\frac{k^2}{4m}}.$$

因此，根据欧拉求和公式

$$\mathbb{E}(W_{m,m}^{s}) \sim \sum_{k=0}^{\infty} k^s \frac{k}{2m}e^{-\frac{k^2}{4m}} \sim \int_0^{\infty} x^s \cdot \frac{x}{2m}e^{-x^2/4m}dx.$$

由于 $f(x)=\frac{x}{2m}e^{-x^2/4m}$ 是参数为 $\sigma=\sqrt{2m}$ 的瑞利分布随机变量的密度，我们进一步得到

$$\mathbb{E}(W_{m,m}^{s}) \sim \sigma^s\big(\sqrt{2}\big)^s\Gamma\big(\frac{s}{2}+1\big) = 2^s\Gamma\big(\frac{s}{2}+1\big)m^{\frac{s}{2}}.$$

利益声明

作者声明，他们不存在影响本文所报告工作的财务或个人利益冲突。

参考文献

[1] C. Banderier 和 P. Flajolet。有向格路径的基础解析组合学。《理论计算机科学》，281(1–2):37–80，2002。[2] D. Blackwell 和 J. L. Hodges Jr.。控制选择偏差的设计。《数学统计年刊》，28(2):449–460，1957。[3] P. Diaconis。超感官知觉研究中的统计问题。《科学》，201(4351):131–136，1978。[4] P. Diaconis 和 R. Graham。对受试者提供反馈的序贯实验分析。《统计年刊》，9(1):3–23，1981。[5] P. Diaconis、R. Graham、X. He 和 S. Spiro。部分反馈下的猜牌。《组合学、概率与计算》，31(1):1–20，2022。[6] P. Diaconis、R. Graham 和 S. Spiro。猜测猜测：有反馈猜牌的实用策略。《美国数学月刊》，第1–16页，2022。[7] P. Dumas、P. Flajolet 和 V. Puyhaubert。抽球过程理论中的若干精确可解模型。载于《第四届数学与计算机科学研讨会论文集》，第 AG 卷，第59–118页。离散数学、理论计算机科学论文集，2006。[8] B. Efron。使序贯实验达到平衡。《生物计量学》，58(3):403–417，1971。[9] P. Flajolet 和 R. Segdewick。《解析组合学》。剑桥大学出版社，2009。[10] I. P. Goulden 和 D. M. Jackson。《组合计数》。威利出版社，1983。[11] J. He 和 A. Ottolini。不放回抽样中的猜牌与生日问题。手稿（Arxiv），2021。[12] H. K. Hwang、M. Kuba 和 A. Panholzer。若干精确可解的递减 urn 模型的分析。载于《第19届形式幂级数与代数组合学国际会议论文集》，中国天津，第12页。FPSAC 2007，2007。[13] N. Johnson、S. Kotz 和 N. Balakrishnan。《连续单变量分布》，第1卷。威利出版社，第二版，1994。[14] J. F. C. Kingman 和 S. E. Volkov。通过解耦弗里德曼 urn 求解 OK Corral 模型。《理论概率学杂志》，16(1):267–276，2003。[15] A. Knopfmacher 和 H. Prodinger。重新探讨一个简单的猜牌游戏。《电子组合学杂志》，8，R13：9页，2001。

[16] T. Krityakierne 和 T. A. Thanatipanonda。猜牌游戏：生成函数方法。手稿（Arxiv），2021。[17] M. Kuba 和 A. Panholzer。某类递减 urn 模型的极限分布。《应用概率进展》，44:1–31，2012。[18] M. Kuba、A. Panholzer 和 H. Prodinger。格路径、不放回抽样与极限分布。《电子组合学杂志》，16 (1)，R67：12页，2009。[19] K. Levasseur。如何在孩子自己的游戏中胜过他们。《数学杂志》，61:301–305，1988。[20] A. Ottolini 和 S. Steinerberger。完全反馈下的猜牌。手稿（Arxiv），2022。[21] H. Prodinger。核方法：一组实例。*S´*洛塔林吉组合学研讨会，50，B50f：19页，2001。[22] R. C. Read。带信息的猜牌：一个概率问题。《美国数学月刊》，69:506–511，1962。[23] R. A. Sulanke。猜测、投票数与帕斯卡三角形的细化。手稿。[24] D. Zagier。你应该多久打赢孩子一次?《数学杂志》，63:89–92，1990。

附录：其他组合模型

在本附录中，我们将两种类型牌的猜牌游戏与不同的组合问题联系起来。这样便可将关于随机变量的结果直接推广到$W_{m_1,\ m_2}$，参见推论1、定理6、7 和引理10，以及下文所述的不同随机变量。

首先回顾不放回抽样 urn 的定义。一个 urn 中有两种球，分别为 m_1 红球和 m_2 黑球，其中 $m_1,\ m_2 \in \mathbb{N}_0$。urn 按照转移矩阵$\left(\begin{smallmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{smallmatrix}\right)$，在离散时刻连续随机抽取球而演变；也就是说，抽出的球的颜色会被检查，随后该球被弃置。通常，人们关注某种颜色的球全部耗尽时 urn 的组成，但在这里，我们将这一过程继续进行，直到 urn 完全清空。

令 G_{m_1,m_2} 表示一个随机变量：在从 m_1 个红球和 m_2 个黑球开始的不放回抽样 urn 过程中，除空 urn 外，红球和黑球数量相等的次数，$m_1 \geq m_2 \geq 0$。

命题 2（猜牌与不放回抽样 urn 中的相等性）。随机变量 G_{m_1,m_2} 与随机变量 W_{m_1,m_2}具有相同的分布；后者统计猜牌过程中红牌和黑牌数量相等且非零的次数。

注 7。时间反演 [7, 14] 还可以建立其与标准 P´olya urn 中相等次数之间的关系，该 urn 的球转移矩阵为$\left(\begin{smallmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)$。

证明。类似于第 2.2 小节中对猜牌游戏的几何解释，我们也可以用格路径 [7, 12]来描述不放回抽样 urn 的演化。不过需要注意的是，二者的状态空间不同：对于不放回抽样，我们考虑 $\Omega_S = \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$；而对于猜牌游戏，我们只考虑 $\Omega_C = \{(x, y)\ \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \colon\ x \geq y \geq 0\}$。为了证明 $\mathbb{P}\{G_{m_1,m_2} = k\} = \mathbb{P}\{W_{m_1,m_2} = k\}$，我们通过构造一个从 Ω_S 到 Ω_C的满射 ψ 来进行。每条来自不放回抽样 urn 的样本路径 $\omega \in \Omega_S$，若对 $\mathbb{P}\{G_{m_1,m_2} = k\}$有贡献，则要么直接包含于 Ω_C中，要么具有一段位于对角线 $y = x$上方的子路径。

满射 ψ 将所有路径 $\sigma \in \Omega_S \setminus \Omega_C$ 映射为 Ω_C 中的一条路径 ω，方法是将对角线以上的部分进行镜像。此外，其限制是恒等映射：$\psi|_{\Omega_C} = \mathrm{id}_{\Omega_C}$。比较不放回抽样 urn 中的路径 $\omega \in \Omega_C$ 的权重与猜牌过程中的权重

$$W_{m_1,m_2}(\omega) = G_{m_1,m_2}(\omega) = k,$$

我们观察到 $\mathbb{P}_S(\omega) = \frac{1}{2^k}\mathbb{P}_C(\omega)$。所有 $2^k - 1$ 不同路径 $\sigma \in \Omega_S \setminus \Omega_C$ 且具有 $\psi(\sigma) = \omega$ 的路径，其概率（权重）都与 ω相同，因此

$$\mathbb{P}\{W_{m_1,m_2} = k\} = \sum_{\substack{\omega \in \Omega_C \\ W_{m_1,m_2}(\omega) = k}} \mathbb{P}_C(\omega) = \sum_{\substack{\omega \in \Omega_C \\ W_{m_1,m_2}(\omega) = k}} \sum_{\sigma \in \psi^{-1}(\omega)} \mathbb{P}_S(\sigma)$$

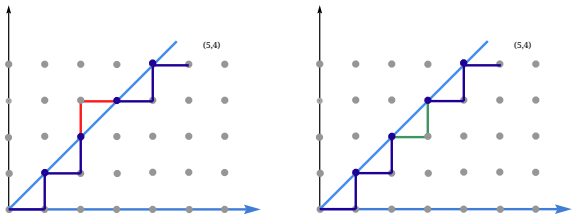


图 2. 一条样本路径 $\sigma \in \Omega_S$ 及其映像 $\psi(\sigma) = \omega \in \Omega_C$。

$$= \sum_{\substack{\sigma\in\Omega_S \\ G_{m_1,m_2}(\sigma)=k}} \mathbb{P}_S(\sigma) = \mathbb{P}\{G_{m_1,m_2} = k\}.$$

□

接下来，我们将这个问题与经典的狄克路径联系起来 [1]。

命题 3（猜牌与狄克路径）。 随机变量W_{m_1,m_2} 与随机变量 $X_{m_1+m_2}$具有相同的分布，后者表示长度为 $m_1 + m_2$、最终高度为 $m_2 - m_1$的狄克游走中返回零点的次数。在特殊情形$m_1 = m_2 = m$ 下，我们观察到一条长度为 $2m$的戴克桥。

注记 8。 上述命题中猜牌、不放回抽样与狄克路径之间的关系，以及 2，还使我们能够用狄克路径来诠释 [18]中考察的命中时间。

证明。 我们实际上证明 $G_{m_1,m_2} \stackrel{\mathcal{L}}{=} X_{m_1+m_2}$，由命题 2 即可得出所述结果。首先注意，对于每一条从 $\sigma \in \Omega_S$ 出发的路径，都有

$$\binom{m_1+m_2}{m_1} \cdot \mathbb{P}\{\sigma\} = 1.$$

因此，我们无需逐步考察 urn 的演变，而可以枚举从（m_1, m_2）到（0,0）的所有路径，这些路径恰好 k 次触及（或穿过）对角线。然后，将这类路径的总数除以所有路径的总数 $\binom{m_1+m_2}{m_1}$，即可得到概率。

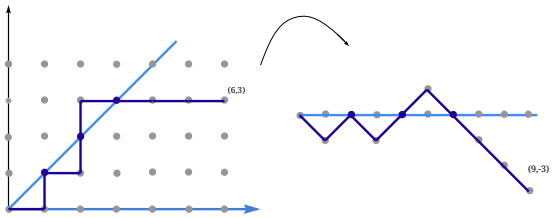


图 3. 从 (6，3) 出发的样本路径 $\omega \in \Omega_S$，以及长度为 9、最终高度为 -3的对应狄克游走。

旋转坐标系后，我们反转路径的方向。新的步长为 (1，1) 和 (1，-1)，游走长度由总和 $m_1 + m_2$ 给出。因此，我们可以看出它与所述经典狄克游走之间的关系，其最终高度为$m_2 - m_1$。

特别地，对于 $m_2 - m_1 = 0$，可得到长度为 $2m$ 的普通戴克桥。这可用于在特殊情形 $m_1 = m_2 = m$ 下，为两者 $W_{m,\,m}$ 以及 $C_{m,\,m}$ 的 ˆ 瑞利极限定律给出一种完全不同的证明。□

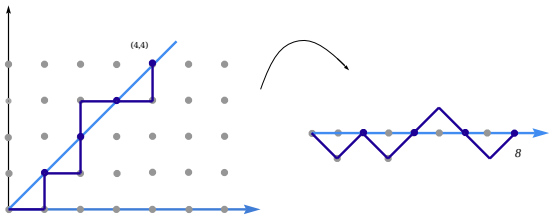


图4。一条从 (4,4) 出发的样本路径 $\omega \in \Omega_S$，以及长度为 8 的对应戴克桥。

MARKUS KUBA，应用数学与物理系，维也纳应用科技大学—维也纳技术学院，H ¨OCHST¨ ADTPLATZ 5，1200 WIEN电子邮箱：kuba@technikum-wien.at

ALOIS PANHOLZER，维也纳工业大学离散数学与几何研究所，WIEDNER HAUPTSTR. 8-10/104，1040 维也纳，奥地利电子邮箱：Alois.Panholzer@tuwien.ac.at