arXiv:2303.04628v1 [stat.AP] 8 Mar 2023

变化检测中的一种带观测调整控制限的 CUSUM 检验

唐福泉、韩栋*统计系，上海交通大学，中国上海 200030。

2023年3月9日

摘要

本文不仅提出了一种基于对数似然比和（SLR）的新型最优序贯检验，还提出了带观测调整控制限的 CUSUM 序贯检验（控制图、停止时间）（CUSUM-OAL），用于快速、自适应地监测序贯观测的分布变化。本文建立了最优检验与一系列 CUSUM-OAL 检验之间的两种极限关系。此外，我们还给出了 CUSUM-OAL 检验的受控平均运行长度和失控平均运行长度（ARLs）的估计。通过数值模拟，展示了理论结果在检测观测序列均值偏移方面的应用。

关键词：最优序贯检验，CUSUM-OAL 检验，变化检测 .

1 引言

为了在不超过特定误报率的前提下快速检测观测序列的分布变化，自 Shewhart（1931）提出控制图方法以来，研究者已提出、发展并将大量序贯检验应用于各个领域，例如 Siegmund（1985）、Basseville 和 Nikiforov（1993）、Lai（1995，2001）、Stoumbos 等（2000）、Chakraborti 等（2001）、Bersimis 等（2007）、Montgomery（2009）、Qiu（2014）、Tartakovsky 等（2015）、Woodall 等（2017）、Bersimis 等（2018）以及 Chakrabortia 和 Graham（2019）的研究。

*由国家自然科学基金委员会（11531001）资助

*通讯作者，电子邮箱：donghan@sjtu.edu.cn

MSC 2010 $subject\ classification$。主要分类号：62L10；次要分类号：62L15

Page（1954）提出的以下上侧 CUSUM 检验是一种广泛使用的序贯检验。

$$T_C(c) = \min\{n \geq 0 : \max_{1 \leq k \leq n} \sum_{i=n-k+1}^{n} Z_i \geq c\}, \tag{1}$$

其中，$c > 0$ 是一个常数控制限，$Z_i = \log[p_{v_1}(X_i)/p_{v_0}(X_i)]$，$p_{v_0}(x)$和 $p_{v_1}(x)$分别是相互独立观测序列 $\{X_i, i \geq 1\}$变化前和变化后的概率密度函数。也就是说，存在一个未知变点 $\tau \geq 1$，使得 $X_1, ..., X_{\tau-1}$服从概率密度函数 p_{v_0}，而 $X_\tau, X_{\tau+1}, ...$服从概率密度函数 p_{v_1}。根据 CUSUM 检验 T_C 的更新性质，我们有$sup_{k \geq 1}\mathrm{E}_k(T_C - k + 1 | T_C \geq k) = \mathrm{E}_1(T_C)$（见 Siegmund，1985，第25页），其中，$\mathrm{E}_1(T_C)$是失控平均运行长度（ARL_1）；当变化在变点 $\tau = k$ 处发生，即 p_{v_0} 变为 p_{v_1}，且 $k \geq 1$时，P_k 和E_k 分别表示概率和期望。

尽管我们知道，CUSUM 检验在 Lorden 准则下是最优的（见 Moustakides 1986 和 Ritov 1990），但 CUSUM 检验的失控平均运行长度$_1$ 并不短，尤其是在检测较小的均值偏移时（见第4节中的表1）。换言之，CUSUM 检验对较小的均值偏移不敏感。那么，如何提高 CUSUM 检验的灵敏度呢？请注意，CUSUM 检验中的控制限是一个常数 c，不依赖于观测样本。直观地说，如果 CUSUM 检验的控制限能随着观测序列的样本均值增加而降低，那么检测均值上升时的报警时间就会大大缩短。基于这一想法，通过选择一个递减函数 $g(x)$，我们可以定义具有观测调整控制限 $cg(Z_n)$的（上侧）CUSUM 控制图 $T_C(cg)$^（简称 CUSUM-OAL 控制图），如下所示

$$T_C(cg) = \min\{n \geq 0 : \max_{0 \leq k \leq n} \sum_{i=n-k+1}^{n} Z_i \geq cg(\hat{Z}_n)\}, \tag{2}$$

其中，$c > 0$ 是一个常数，且 ^ $Z_n = \sum_{i=1}^{n} Z_i/n$。换言之，CUSUM-OAL 检验的控制限 cg (^Z_n) 可以根据观测信息 ^ ^$\{Z_n\}$进行自适应调整。请注意，控制限 $cg(Z_n)$可能为负数。在特殊情况下，当 $g \equiv 1$ 时，CUSUM-OAL 控制图 $T_C(cg)$ 将变为式（1）中的传统 CUSUM 控制图 $T_C(c)$。类似地，我们可以定义下侧 CUSUM-OAL 检验。本文仅考虑上侧 CUSUM-OAL 检验，因为可以用类似的方法推导下侧 CUSUM-OAL 检验的性质。

本文的主要目的是展示 CUSUM-OAL 检验良好的检测性能，并估计其受控和失控状态下的平均运行长度。

本文结构如下。第2节首先介绍一种最优 SLR 序贯检验，随后定义两列 CUSUM-OAL 检验，并证明其中一列收敛于最优检验，另一列收敛于最优检验与 CUSUM 检验的组合。第3节给出了 CUSUM-OAL 检验的受控状态和失控状态平均运行长度估计及其比较

。第4节通过比较数值失控平均运行长度，展示了三种 CUSUM-OAL 检验与传统CUSUM检验的检测性能。第5节给出总结性意见。定理的证明见附录。

2 最优 SLR 检验、两个 CUSUM-OAL检验及其极限关系

当任意时刻均无变化时，令 P_0 和 E_0 分别表示概率和期望，其概率密度为 p_{v_0}。已知 $\mathrm{E}_0(Z_1) = \mathrm{E}^{v_0}(\log[p_{v_1}(X_1)/p_{v_0}(X_1)]) < 0$，其中 $p_{v_1}(x) \neq p_{v_0}(x)$。不失一般性，令 $\mu_0 = \mathrm{E}_0(Z_1) < 0$。

由 Siegmund（1985）中的命题 2.38 以及 Chow 等人第 108 页的式（5.8）—（5.9）可知，以下基于对数似然比之和（SLR）的序贯检验

$$T_{SLR} = \min\{n \geq 1 : \prod_{k=1}^{n} \frac{p_{v_1}(X_k)}{p_{v_0}(X_k)} \geq B\} = \min\{n \geq 1 : \sum_{j=1}^{n} Z_j \geq c\} \tag{3}$$

$$= \min\{n \geq 1 : \sum_{j=1}^{n} (Z_j - \mu_0) \geq c + n|\mu_0|\} \tag{4}$$

对于 $B > 1$，在以下意义下是最优的

$$\min_{T:\ \mathbf{P}_0(T<\infty)\geq\alpha} \{\mathbf{E}_1(T)\} = \mathbf{E}_1(T_{SLR})$$

对于 $\mathrm{P}_0(T_{SLR} < \infty) = \alpha$，其中 $c = \log B$，且 $0 < \alpha < 1$。

特别地，若 P_0 为变点之后均值偏移为 $\mu > 0$ 的标准正态分布，则有 $Z_j - \mu_0 = \mu X_j$，其中 $\mu_0 = -\mu^2/2$。根据 Fris´en (2003) 的命题 4，(4) 中的 SLR 检验 T_{SLR} 在具有相同虚警概率 $\mathrm{P}_0(T < \tau)$ 的情况下也是最优的（ARL_1 最小）。

可以看出，T_{SLR} 的受控平均运行长度是无穷大，即 $\mathrm{ARL}_0 = \mathrm{E}_0(T_{SLR}) = \infty$。然而，有限 ARL_0 条件下的最小 ARL_1 是统计质量控制（见 Montgomery，2009）和突变检测（见 Basseville 和 Nikiforov，1993）中广泛采用的最优性准则。为了使 T_{SLR} 的 ARL_0 有限，我们将 (3) 或 (4) 中 T_{SLR} 的常数控制限 c 替换为动态控制限 $n(\mu_0 - r)$，并得到如下修正 SLR 检验 $T_{SLR}(r)$

$$T_{SLR}(r) = \min\{n \geq 1 : \sum_{j=1}^{n} Z_j \geq n(\mu_0 - r)\} = \min\{n \geq 1 : \sum_{j=1}^{n} (Z_j - \mu_0) \geq -rn\} \tag{5}$$

对于 $r \geq 0$。

为便于比较，所有候选序贯检验的受控状态平均运行长度（ARL）$_0$ 均被约束为等于同一预期的第一类错误水平；在失控状态下ARL$_v$最低的检验具有最高的检验功效，或最快的监测（检测）速度。

在以下例1中，我们将比较 CUSUM-OAL 检验 $T_C(cg_{u,\ 0})$ 在检测正态分布观测值的均值偏移时，其失控平均运行长度的数值模拟结果与 SLR检验 $T^*(r)$ 和 $T^*(0)$ 的结果，以及 CUSUM-SLR 检验 $T_C(c)\ \wedge T^*(0) := \min\{T_C(c)\ T^*(0)\}$ 的结果；结果列于下表1。这些比较使我们推测，$T_C(cg_{u,\ r})$ 与 $T^*(r)$ 之间，以及 $T_C(c\widetilde{g}_u)$ 与 $T_C(c)\ \wedge T^*(0)$ 之间，分别存在某些极限关系。

例1. 设 $X_1, X_2, \ldots$ 相互独立；若无变化，则服从正态分布$N(0, 1)$。变点 $\tau = 1$ 之后，均值 $\mathrm{E}\mu(X_k)$ ($k \geq 1$) 将从 $v_0 = 0$ 变为 $v = 0.1$, 0.25, 0.5, 0.75, 1, 1.25, 1.5, 3。这里，令 $p_{v_0}(x) = e^{-x^2/2}/\sqrt{2\pi}$, $p_{v_1}\ x$ ( ) $= e^{-(x-1)^2/2}/\sqrt{2\pi}$，因此，对于 $k \geq 1$，有 $Z_k = X_k - 1/2$；其中 $v_1 = 1$ 是给定的参考值，对于 CUSUM 检验，该值为过程均值的偏移幅度，旨在尽快检测到这一偏移。我们基于 1,000,000 次重复进行了数值模拟。

下表1列出了检验 $T_C(c)$、$T_C(c\widetilde{g}_u)$ 在 $u = 1$、10、10_2、10_3、10_4，$T^*(0.0007)$、$T_C(c)\ \wedge T^*(0)$ 和 $T^*(0)$ 下检测均值偏移的平均运行长度模拟结果，其中均值偏移 0.0 表示无变化，对应于受控状态下的平均运行长度$_0$，且除检验 $T^*(0)$ 的平均运行长度为 $_0 = \infty$ 外，所有检验的平均运行长度均为 $_0 \approx 1000$。参数中的数值为各检验的标准差。

表1。 当 $\tau = 1$ 时，$T_C(c)$、$T_C(c\widetilde{g}_u)$、$T^*(r)$、$T_C(c)\ \wedge T^*(0)$ 和 $T^*(0)$ 的平均运行长度。

检验	**u, r** **c**	班次 **0.0**	**0.1**	**0.25**	**0.5**	**0.75**	**1.0**	**1.5**	**3.00**
$T_C(c)$	c=5.0742	1000.59 (993.16)	439.00 (431.89)	147.72 (140.25)	38.91 (31.79)	17.32 (11.23)	10.50 (5.49)	5.82 (2.26)	2.61 (0.66)
$T_C(c\widetilde{g}_u)$	$u = 1.0$ $c = 5.6125$	1000.43 (1510.55)	237.34 (391.64)	46.84 (79.68)	10.02 (15.37)	4.39 (5.72)	2.65 (2.90)	1.52 (1.10)	1.03 (0.14)
	$u = 10.0$ $c = 7.7790$	999.17 (4969.50)	18.16 (77.77)	4.57 (11.06)	2.19 (3.01)	1.57 (1.45)	1.31 (0.86)	1.11 (0.38)	1.01 (0.04)
	$u = 10^2$ $c = 9.97$	1000.66 (13951.15)	8.15 (29.90)	3.38 (6.98)	1.92 (2.33)	1.47 (1.20)	1.27 (0.73)	1.11 (0.34)	1.01 (0.04)
	$u = 10^3$ $c = 11.38$	1001.49 (25423.13)	7.56 (26.45)	3.28 (6.60)	1.89 (2.27)	1.46 (1.18)	1.26 (0.72)	1.11 (0.33)	1.01 (0.04)
	$u = 10^4$ $c = 11.84$	1001.32 (30042.90)	7.51 (26.22)	3.26 (6.56)	1.89 (2.27)	1.45 (1.17)	1.24 (0.72)	1.11 (0.33)	1.01 (0.04)
$T^*(r)$	$r = 0.0007$	1001 (43017)	7.44 (26.07)	3.25 (6.57)	1.88 (2.24)	1.45 (1.18)	1.25 (0.71)	1.09 (0.33)	1.01 (0.04)
$T_C(c)\ \wedge T^*(0)$	$r = 0$ $c = 11.9271$	1001.13 (31090.71)	7.52 (26.88)	3.25 (6.57)	1.88 (2.24)	1.45 (1.17)	1.25 (0.72)	1.09 (0.33)	1.01 (0.04)
$T^*(0)$	$r = 0$	∞ (∞)	7.47 (26.24)	3.25 (6.54)	1.88 (2.27)	1.45 (1.18)	1.25 (0.72)	1.09 (0.33)	1.01 (0.04)

从表1的最后一行可以看出，虽然 $T^*(0)$ 的 ARL_0 是无穷大，也就是说 $\mathrm{E}_0(T^*(0)) = \infty$，但 $T^*(0)$ 的检测速度比 CUSUM 控制图更快，这有点令人意外。

T_C 对于所有均值偏移，尤其是在检测较小的均值偏移 0.1 时， $T^*(0)$ 的检测速度仅为 7.47，远快于 CUSUM 检验的 439。此外，控制图 $T^*(0.0007)$ 和 $T_C(11.9271) \wedge T^*(0)$ 不仅具有与 $T^*(0)$ 几乎相同的检测性能，而且还具有有限的受控状态 ARL_0。特别要注意的是，当 $\widetilde{g_u}$ 中的数量 u 从 0 增至 $1, 10, 10^2, 10^3, 10^4,$ 时， $T_C(c\widetilde{g_u})$ 的检测速度越来越快，逐渐接近 $T_C(c) \wedge T^*(0)$ 的检测速度。这促使我们证明以下理论结果。

定理 2. 设 $\tau = 1$ 和 $\{X_k, k \geq 1\}$ 为独立同分布观测序列，且$\mu_0 = E_0(Z_1) < 0$。那么

$$\lim_{u\to\infty} T_C(cg_{u,r}) = T^*(r), \qquad \lim_{u\to\infty} T_C(c\widetilde{g_u}) = T_C(c) \wedge T^*(0). \tag{6}$$

定理 2 表明，当将 CUSUM 检验 $T_C(c, r)$ 的常数控制限 c 分别替换为观测调整控制限 $\{cg_{u,r}(Z_n)\}$ 和 $\{c\widetilde{g_u}(Z_n)\}$ 时，相应的两个 CUSUM-OAL 检验 $\{T_C(cg_{u,} r)\}$ 和 $\{T_C(c\widetilde{g_u})\}$ 将分别收敛于最优 SLR 检验 $T^*(r)$ 和 CUSUM-SLR 检验 $T_C(c) \wedge T^*(0)$，其中 $u \to \infty$。换言之， $\{T_C(cg_{u,} r)\}$ 和 $\{T_C(c\widetilde{g_u})\}$ 能达到的最快报警时间分别为 $T^*(r)$ 和 $T_C(c) \wedge T^*(0)$。

注 2. 由于当 $u = 0$ 时， $T_C(cg_{0,r}) = T_C(c\widetilde{g_0}) = T_C(c)$，因此，$\{T_C(cg_{u,r}) : u \geq 0\}$和 $\{T_C(c\widetilde{g_u}) : u \geq 0\}$都可以看作连接 $T_C(c)$ 与 $T^*(r)$，以及 $T_C(c)$ 与 $T_C(c) \wedge T^*(0)$ 的两座“长桥”。

3 CUSUM-OAL 检验的 ARL 的估计与比较

本节将估计以下 CUSUM-OAL 检验的平均运行长度，其形式可写为

$$T_C(cg) = \min\{n \geq 1 : \max_{1\leq k\leq n} \sum_{i=n-k+1}^{n} Z_i \geq cg(\hat{Z}_n(ac))\}, \tag{7}$$

其中， $g(.)$ 是递减函数，$\hat{} Z_n(ac) = \frac{1}{j}\sum_{i=n-j+1}^{n} Z_i, j = \min\{n, [ac]\}$ for $ac \geq 1, a >\hat{} 0$, $c > 0$，且 $[x]$ 表示大于或等于 x 的最小整数。这里， $Z_n(ac)$ 是统计量 Z_i, $n-j+1 \leq i \leq n$ 的滑动平均，当 $a = \infty$ 时，它将变为 $\hat{}Z_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Z_i$。

接下来，我们将讨论变化后概率分布，以估计 $T_C(cg)$的平均运行长度。

通常，在观测过程的变化被检测到之前，我们很少知道其变化后概率分布 P_v 。但是，关于 P_v 可能的变化域及其边界（包括边界的大小和形式），可以通过工程知识、实践经验或统计数据确定。

因此，我们可以假设参数空间V的区域以及其上的概率分布 Q 已知。如果我们对变化时刻 τ之后 v 可能取值没有先验知识，则可以假设 v 在 V 上等可能出现，也就是说，概率分布 Q 在V上是等概率分布（或均匀分布）。例如，设 P_v为正态分布，且 $v=(\mu,\sigma)$，其中 μ和 σ分别表示均值和标准差；若已知数值 μ_1、 μ_2、 σ_1和 σ_2，那么当 v在V上等可能出现时，我们可以取集合 $V=\{(\mu,\sigma):\ \mu_1\le\mu\le\mu_2, 0<\sigma_1\le\sigma\le\sigma_2\}$，并令 Q 在 V上服从均匀分布 $U(V)$。这意味着我们知道可能的变化后分布的域 P_v、 $v\in V$，即参数空间 V的边界 ∂V是已知的。

接下来，我们将根据 Kullback–Leibler 信息距离把参数空间 V划分为三个子集 V^+、 V^0和 V^-。令

$$V^-=\{v:E_v(Z_1)<0\},\quad V^0=\{v:E_v(Z_1)=0\},\quad V^+=\{v:E_v(Z_1)>0\}$$

其中 $E_v(Z_1)=I(P_v|P_{v_0})-I(P_v|P_{v_1})$，并且

$$I(P_v|P_{v_0})=E_v(\log[\frac{P_v(X_1)}{P_{v_0}(X_1)}]),\qquad I(P_v|P_{v_1})=E_v(\log[\frac{P_v(X_1)}{P_{v_1}(X_1)}])$$

是 P_v、 P_{v_0}与 P_v、 P_{v_1}之间的两个 Kullback–Leibler 信息距离。由于对于两个概率测度 p 和 q， $I(p|q)=0$当且仅当 $p=q$，因此可得 $E_{v_0}(Z_1)=-I(P_{v_0}|P_{v_1})$，从而当 $P_{v_1}\ne P_{v_0}$时，$v_0\in V^-$。当 $v\in V^-$，即 $I(P_v|P_{v_0})<I(P_v|P_{v_1})$时，这意味着根据 Kullback–Leibler 信息距离， P_v 与P_{v_0} 的距离比与P_{v_1} 的距离更近。对于 $v\in V^+$或 $\in V^0$，也有类似的解释。

假设变化后分布 P_v和函数 $g(x)$ 满足以下条件:

（I）概率 P_v在 $E_v(Z_1)$处不是点质量，且 $P_v(Z_1>0)>0$。（II）矩生成函数 $h_v(\theta)=E_v(e^{\theta Z_1})$满足 $h_v(\theta)<\infty$，其中某个 $\theta>0$。（III）函数 $g(x)$是递减的，其二阶导函数 $g''(x)$连续且有界，并且存在一个正数 x^*，使得 $g(x^*)=0$。

Let $\tilde{Z}_1=Z_1+|g'(\mu)|(Z_1-\mu)/a$, $\tilde{h}(\theta)=\mathbf{E}_v(e^{\theta\tilde{Z}_1})$ and

$$H_v(\theta)=\frac{au}{g(\mu)}\ln\tilde{h}_v(\theta)+(1-\frac{au}{g(\mu)})\ln h_v(\theta)$$

对于 $\theta\ge0$，其中 $E_v(Z_1)=\mu<0$， $a\le g(\mu)/u$ 以及 $u=H_v'(\theta_v^*)$，其中 $\theta_v^*>0$ 满足$H_v(\theta_v^*)=0$。注意， $H_v(\theta)$ 是一个凸函数，且 $H_v'(0)=\mu<0$。由此可知，存在唯一的正数 $\theta_v^*>0$，使得 $H_v(\theta_v^*)=0$。

注意，以下函数

$$\Theta(x)=\theta(\frac{1}{x})-xH_v(\theta(\frac{1}{x}))-2\theta_v^*$$

满足 $\Theta(1/u) = \theta(u) - 2\theta_v^* = -\theta_v^*$，其中 $\theta(u) = \theta_v^*$，

$$\Theta'(x) = -\frac{1}{x^2}\theta'(\frac{1}{x}) - H_v(\theta(\frac{1}{x})) + \frac{1}{x}\theta'(\frac{1}{x})H_v'(\theta(\frac{1}{x})) = -H_v(\theta(\frac{1}{x}))$$

因此，$\Theta'(\theta(u)) = -H(\theta(u)) = -H(\theta_v^*) = 0$, $\Theta'(\theta(1/x)) > 0$ 在 $x > 1/u$ 和$\Theta'(\theta(1/x)) < 0$ 在 $x > 1/u$时成立。因此，存在一个在（??）中定义的正数 b。

可以看出，当过程 $\{Z_k : k \geq 0\}$ 无变化或相对于 P_{v_0} 到 P_v 分别发生“小变化”、“中等变化”和“大变化”时，ARL$_v(T_c(g))$ 的主要部分将分别是 c 的指数函数、平方函数和线性函数。这里，“小变化”（$v \in V^-$）表示 P_v 比 P_{v_1} 更接近 P_{v_0}，即 $I(P_v|P_{v_0}) < I(P_v|P_{v_1})$; 而“大变化”则恰好相反。“中等变化”（$v \in V^0$）对应于$I(P_v|P_{v_0}) = I(P_v|P_{v_1})$。

本文将采用另一种方法证明定理3，因为当 g 不是常数时，Wald恒等式和鞅方法无法成立，或无法用于证明检验 $T_c(g)$的平均运行长度估计。

接下来，我们利用定理4.1中的（??），比较CUSUM-OAL检验（ARL$_v(T_{c'}(g)$）与CUSUM检验（ARL$_v(T_C(c)$）的检测性能。

当 c'和 c足够大时，令ARL$_{v_0}(T_{c'}(g)) =$ARL$_{v_0}(T_C(c))$。我们有 $c = c'\theta_{v_0}^* g(\mu_0) + o(1)$。因此

$$\mathbf{ARL}_v(T_C(c)) > \mathbf{ARL}_v(T_c(g))$$

当 $\mu_0 < \mu < 0$ 时，$s_v^*\theta_{v_0}^* > g(\mu)\theta_v^*/g(\mu_0)$；当 $\mu \geq 0$时，$\theta_{v_0}^* > g(\mu)/g(\mu_0)$。这意味着，只要对所有$\mu > \mu_0$，$g(\mu)/g(\mu_0)$足够小，ARL$_v(T_c(g))$就可能小于ARL$_v(T_C(c))$。

4 数值模拟与真实案例说明

4.1 $\tau \geq 1$的平均运行长度数值模拟

根据表1中的平均运行长度模拟结果可知，对于较大的 u，$T^*(r)$、$T_C(c) \wedge T^*(0)$、$T^*(0)$和 $T_C(c\widetilde{g_u})$的检测性能远优于针对 $\tau = 1$的传统CUSUM检验 T_C。

下面的表2展示了九种检验在六个变点 τ_i、$1 \leq i \leq 6$ 之后检测两个均值偏移 $v = 0.1$ 和 $v = 1$ 时的 E$_{\tau_i,v}$ 和 J$_{ACE}$ 模拟值，其中 ARL$_0(T) =$ E$_0(T) \approx 500$。

表2。　　用于检测两个均值偏移 $v = 0.1, v = 1$ 的 $\mathrm{E}_{\tau_i,v}$ 和 J_{ACE} 模拟　　.

检验	v	$\mathbf{E}_{0,v}$ τ_0=0	$\mathbf{E}_{1,v}$ τ_1=1	$\mathbf{E}_{10,v}$ τ_2=10	$\mathbf{E}_{50,v}$ τ_3=50	$\mathbf{E}_{100,v}$ τ_4=100	$\mathbf{E}_{150,v}$ τ_5=150	$\mathbf{E}_{200,v}$ τ_6=200	$\mathbf{J}_{ACE}$
$T_C(c)$		参数 c=*4*.3867							
	v=0.1	498.55	247.25	241.73	243.52	243.87	244.23	243.28	243.98
		(493.25)	(241.76)	(243.46)	(263.86)	(288.53)	(314.22)	(339.73)	
	v=1	498.55	9.15	8.48	8.46	8.46	8.46	8.46	8.58
		(493.25)	(5.00)	(5.13)	(5.87)	(6.77)	(7.63)	(8.49)	
$T_C(c\tilde{g}_{100})$		参数 c=*6*.5839							
	v=0.1	498.11	8.06	41.52	95.15	136.72	167.20	193.34	107.00
		(6540.43)	(29.29)	(184.62)	(501.30)	(781.77)	(1013.44)	(1225.66)	
	v=1	498.11	1.25	4.15	9.03	12.38	14.69	16.60	9.68
		(6540.43)	(0.73)	(10.64)	(34.72)	(56.19)	(72.86)	(88.02)	
$T^*(r)$		参数 r=*0*.00137							
	v=0.1	499.43	7.44	38.03	87.34	123.01	150.69	172.79	96.55
		(16588.89)	(26.07)	(168.31)	(473.17)	(734.40)	(966.69)	(1164.92)	
	v=1	499.43	1.25	4.11	9.02	12.73	15.51	17.86	10.08
		(16588.89)	(0.71)	(10.72)	(36.12)	(61.00)	(82.62)	(102.32)	
$T_C(c)$ $\wedge$ $T^*(0)$		参数 c=*10*.4889							
	v=0.1	499.58	7.50	38.30	88.61	125.16	152.58	179.39	98.59
		(10932.09)	(26.43)	(170.16)	(476.22)	(746.80)	(966.95)	(1202.64)	
	v=1	499.58	1.25	4.11	9.04	12.10	13.88	15.10	9.25
		(10932.09)	(0.72)	(10.70)	(35.90)	(56.80)	(71.61)	(83.38)	
$T^*(0)$	v=0.1	∞	7.50	38.58	88.64	125.00	152.92	177.42	98.34
		(∞)	(26.54)	(170.58)	(475.69)	(743.32)	(972.55)	(1191.50)	
	v=1	∞	1.25	4.12	9.09	12.77	15.60	18.02	10.14
		(∞)	(0.72)	(10.75)	(36.28)	(60.67)	(82.23)	(101.86)	
$T_C(ch_m)$		参数	*m=50*	c=*5*.8093	*p=1*				
	v=0.1	500.87	164.18	251.68	266.00	266.51	266.07	266.44	246.81
		(686.03)	(239.82)	(348.33)	(377.68)	(399.06)	(418.45)	(438.60)	
	v=1	500.87	2.68	7.34	9.41	9.34	9.35	9.36	7.91
		(686.03)	(2.94)	(7.25)	(9.45)	(10.04)	(10.70)	(11.36)	
		参数	*m=30*	c=*6*.7701	*p=1*				
	v=0.1	500.64	174.61	259.52	264.36	264.87	264.67	264.55	248.76
		(666.64)	(244.09)	(345.62)	(366.62)	(388.06)	(407.65)	(428.29)	
	v=1	500.64	2.80	8.07	9.36	9.37	9.36	9.36	8.05
		(666.64)	(3.18)	(7.68)	(8.82)	(9.52)	(10.18)	(10.84)	
		参数	*m=10*	c=*26*.3031	*p=1*				
	v=0.1	500.12	218.56	288.10	287.93	287.44	287.59	287.68	276.22
		(613.17)	(276.99)	(356.17)	(375.19)	(398.04)	(422.13)	(447.11)	
	v=1	500.12	3.77	9.35	9.31	9.30	9.30	9.30	8.39
		(613.17)	(4.83)	(7.44)	(8.02)	(8.73)	(9.47)	(10.23)	
T_M^*	v=0.1	500.38	6.89	32.94	58.76	46.86	7.57	88.88	40.32
		(15373.79)	(19.02)	(116.99)	(248.01)	(223.84)	(130.62)	(2208.53)	
	v=1	500.38	1.25	4.11	9.07	12.79	1.25	9.12	6.27
		(15373.79)	(0.72)	(10.72)	(36.27)	(60.88)	(6.60)	(175.62)	

表注：　T_M^* 的参数为 k***1=1***、k***2=150***、　$r_1 = 5.2 * 10^{-5}$、　$r_2 = 1.1 * 10^{-5}$；两种情况下的期望和标准差分别为 1717.06 和 13459.80，以及 3918.33 和 16893.25。

4.2 一个实际示例

5 结论

本文的贡献可概括为以下三个方面。

(1) 我们提出了广义 ARL_0 条件下、满足有限 $\mathrm{E}_0(T^*(r))$ 的最优检验 $T^*(r)$。

(2) 为提高 CUSUM 检验检测分布变化的灵敏度，我们提出了一种采用实时观测控制限的累积和型检验（CUSUM-OAL）。数值模拟表明，CUSUM-OAL 检验的失控平均运行长度显著小于 CUSUM 检验的失控平均运行长度。但在受控状态下，CUSUM-OAL 检验的标准差大于 CUSUM 检验。此外，我们还得到了 CUSUM-OAL 检验的平均运行长度估计。理论估计和数值模拟均表明，当 $\tau = 1$ 时，CUSUM-OAL 检验的表现远优于 CUSUM 检验。

附录：定理的证明

定理1的证明。设 $v \in V^-$。我们首先证明

$$e^{cg(\mu)\theta_v^*(1+o(1))}/bc \le E_v(T_c(g)) \le cu^{-1}g(\mu)e^{cg(\mu)\theta_v^*(1+o(1))} \tag{A. 1}$$

当 c 足够大时。

接下来，我们首先证明式 (36) 的向上不等式。令 $m_1 = \lceil cu^{-1}g(\mu) \rceil$, $m_k = \lceil km_1 \rceil$ for $k \ge 0$ and $m = \lceil tm_1 \exp\{cg(\mu)\theta_v^*(1+o(1))\} \rceil$ for $t > 0$, 其中 $\lceil x \rceil$ 表示大于或等于 x 的最小整数。不失一般性，当 x 足够大时，以下将用 x 替换数值 $\lceil x \rceil$ 。因此

$$\begin{aligned} P_v(T_c(g) > m) &= P_v(\sum_{i=n-k+1}^{n} Z_i < cg(\hat{Z}_n(ac)), \quad 1 \le k \le n, 1 \le n \le m) \\ &\le P_v(\sum_{i=m_j-m_1+1}^{m_j} Z_i < cg(\hat{Z}_{m_j}(ac)),\ 1 \le j \le m/m_1) \\ &= [P_v(\sum_{i=1}^{m_1} Z_i < cg(\hat{Z}_{m_1}(ac))]^{m/m_1} \end{aligned} \tag{A. 2}$$

当 c 足够大时，其中 $\hat{} Z_{m_j}(ac)) = (ac)^{-1} \sum_{i=m_j-ac+1}^{m_j} Z_i$，最后一个等式成立是因为这些事件

$$\{\sum_{i=m_j-m_1+1}^{m_j} Z_i < cg(\hat{Z}_{m_j}(ac))\},$$

$\hat{}1 \le j \le m/m_1$ 相互独立且服从恒等分布。由于 $Z_{m_1}(ac)$ $\mu \to 0$ $a.s.$ ac Z_{m_1} ac $-\mu$ $^2 \Rightarrow \chi^2$ χ^2 $c \to \infty$ _ ( ) 且 ($\hat{}$ ( )) (-分布) as ，因此

$$g(\hat{Z}_{m_1}(ac)) = g(\mu) + g'(\mu)(\hat{Z}_{m_1}(ac) - \mu) + O(1/c)$$

and

$$P_v(\sum_{i=1}^{m_1} Z_i < cg(\hat{Z}_{m_1}(ac)) = P_v(\sum_{i=m_1-ac+1}^{m_1} \tilde{Z}_i + \sum_{i=1}^{m_1-ac} Z_i < c(g(\mu) + O(1/c)))$$

对于较大的 c，其中 $\tilde{Z}_i = Z_i + a^{-1}|g'(\mu)|(Z_i - \mu)$。令

$$\tilde{h}_v(\theta) = E_v(e^{\theta \tilde{Z}_1}), \ \ h_v(\theta) = E_v(e^{\theta Z_1}).$$

and

$$H_v(\theta) = \frac{au}{g(\mu)} \ln \tilde{h}_v(\theta) + (1 - \frac{au}{g(\mu)}) \ln h_v(\theta).$$

注意， $H_v(\theta)$ 是一个凸函数，且 $H_v'(0) = \mu < 0$。这意味着存在唯一的正数 $\theta_v^* > 0$，使得 $H_v(\theta_v^*) = 0$。令 $u = H_v'(\theta_v^*)$。由 (A.9) 可得

$$\begin{aligned}
&P_v(\sum_{i=m_1-ac+1}^{m_1} \tilde{Z}_i + \sum_{i=1}^{m_1-ac} Z_i \geq c(g(\mu) + O(1/c))) \\
&= P_v(\sum_{i=m_1-ac+1}^{m_1} \tilde{Z}_i + \sum_{i=1}^{m_1-ac} Z_i \geq m_1 u(1 + O(1/c))) \\
&\geq \exp\{-m_1(\theta u' - H_v(\theta) + \frac{1}{m_1}\log(F_\theta^{m_1}(m_1 u') - F_\theta^{m_1}(m_1 u)) + o(1))\} \\
&= \exp\{-cg(\mu)(\theta\frac{u'}{u} - \frac{1}{u}H_v(\theta) + o(1))\}
\end{aligned}$$

当 c 足够大时。取 $\theta \searrow \theta_v^*$ 和 $u' \searrow u$，可得

$$P_v(\sum_{i=m_1-ac+1}^{m_1} \tilde{Z}_i + \sum_{i=1}^{m_1-ac} Z_i < c(g(\mu) + O(1/c))) \leq 1 - \exp\{-cg(\mu)\theta_v^*(1 + o(1))\}$$

当 c 足够大时。因此，由 (A.11) 可得

$$P_v(T_c(g) > m) \leq [1 - \exp\{-cg(\mu)\theta_v^*(1 + o(1))\}]^{m/m_1} \to e^{-t}. \tag{A. 3}$$

当 $c \to \infty$ 时。根据指数分布的性质，可得

$$E_v(T_c(g))) \leq cu^{-1}g(\mu)e^{cg(\mu)\theta_v^*(1+o(1))}$$

当 c 足够大时。

为证明 (A.10) 的下界不等式，令

$$\begin{aligned}
U_m &= \{\sum_{i=n-k+1}^{n} Z_i < cg(\hat{Z}_n(ac)),\ 1 \leq k \leq ac-1,\ bc \leq n \leq m\} \\
V_m &= \{\sum_{i=n-k+1}^{n} Z_i < cg(\hat{Z}_n(ac)),\ ac \leq k \leq bc-1,\ bc \leq n \leq m\} \\
W_m &= \{\sum_{i=n-k+1}^{n} Z_i < cg(\hat{Z}_n(ac)),\ bc \leq k \leq n,\ bc \leq n \leq m\} \\
S_{bc} &= \{\sum_{i=n-k+1}^{n} Z_i < cg(\hat{Z}_n(ac)),\ 1 \leq k \leq n,\ 1 \leq n \leq bc-1\},
\end{aligned}$$

其中 b 在（??）中定义，且不失一般性地，假设 $b > a$。显然，$\{T_c(g) > m\} = U_m V_m W_m S_{bc}$。

令 $k = xcg(\mu)$。根据切比雪夫不等式，有

$$\begin{aligned} P_v(\sum_{i=n-k+1}^{n} Z_i < cg(\hat{Z}_n(ac))) &= P_v\Big(\sum_{i=n-k+1}^{n} \tilde{Z}_i + \sum_{i=n-ac+1}^{n-k} \tilde{\tilde{Z}}_i < cg(\mu)(1+o(1))\Big) \\ &\geq 1 - \exp\{-cg(\mu)(\theta - x\tilde{H}_v(\theta) + o(1))\} \end{aligned}$$

对于 $1 \leq k \leq ac-1$, $bc \leq n \leq m$，其中 $Z_i = -g'(\mu)(Z_i - \mu)/a$ 且

$$\tilde{H}_v(\theta) = \ln \tilde{h}_v(\theta) + (\frac{ac}{k} - 1)\ln \hat{h}_v(\theta), \quad \hat{h}_v(\theta) = E_v(e^{\theta \tilde{\tilde{Z}}_i}).$$

由于 $H_v(\theta)$ 和 $H_v(\theta)$ 是两个凸函数，且

$$\begin{aligned} &\tilde{H}'_v(0) - H'_v(0) = 0, \\ &\tilde{H}''_v(0) - H''_v(0) = \sigma^2[(1 + \frac{g'(\mu)}{a})^2 + (\frac{ac}{k} - 1) - \frac{au}{g(\mu)}(1 - \frac{g'(\mu)}{a})^2 + \frac{au}{g(\mu)} - 1] > 0, \end{aligned}$$

因此 $\theta_v^* \geq \theta_v^*$，其中 θ_v^* 和 θ_v^* 满足 $H_v(\theta_v^*) = H_v(\theta_v^*) = 0$。因此

$$\begin{aligned} P_v(\sum_{i=n-k+1}^{n} \tilde{Z}_i + \sum_{i=n-ac+1}^{n-k} \tilde{\tilde{Z}}_i < cg(\mu)(1+o(1))) \\ \geq 1 - \exp\{-cg(\mu)\theta_v^*(1+o(1))\} \end{aligned} \tag{A. 4}$$

对于 $1 \leq k \leq ac-1$, $bc \leq n \leq m$。类似地，我们可以得到

$$\begin{aligned} P_v(\sum_{i=n-ac+1}^{n} \tilde{Z}_i + \sum_{i=n-k+1}^{n-ac} Z_i < cg(\mu)(1+o(1))) \\ \geq 1 - \exp\{-cg(\mu)\theta_v^*(1+o(1))\} \end{aligned} \tag{A. 5}$$

对于 $ac \leq k \leq bc-1$, $bc \leq n \leq m$，且

$$\begin{aligned} P_v(\sum_{i=n-ac+1}^{n} \tilde{Z}_i + \sum_{i=n-k+1}^{n-ac} Z_i &< cg(\mu)(1+o(1))) \\ &\geq 1 - \exp\{-2cg(\mu)\theta_v^*(1+o(1))\} \end{aligned} \tag{A. 6}$$

对于 $bc \leq k \leq n$, $bc \leq n \leq m$。

令 $m = tcg(\mu)\theta_v^*/bc$，其中 $t > 0$。由 Esary、Proschan 和 Walkup (1967) 中的 (A.13)、(A.14)、(A.15) 和定理 5.1 可得

$$\begin{aligned} P_v(U_m V_m) &\geq \prod_{n=bc}^{m}\prod_{k=1}^{bc-1} P_v(\sum_{i=n-k+1}^{n} \tilde{Z}_i - \frac{g'(\mu)}{a}\sum_{i=n-ac+1}^{n-k}(Z_i - \mu) < cg(\mu)(1+o(1))) \\ &\geq [1 - \exp\{-cg(\mu)\theta_v^*(1+o(1))\}]^{bcm} \to e^{-t} \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} P_v(W_m) &\geq \prod_{n=bc}^{m}\prod_{k=bc}^{n} P_v(\sum_{i=n-ac+1}^{n}\tilde{Z}_i + \sum_{i=n-k+1}^{n-ac} Z_i < cg(\mu)(1+o(1))) \\ &\geq [1-\exp\{-2cg(\mu)\theta_v^*(1+o(1))\}]^{(m-bc)^2} \to 1 \end{aligned}$$

当 $c \to +\infty$ 时。

最后,

$$\begin{aligned} P_v(S_{bc}) &\geq P_v(\sum_{i=n-k+1}^{n} Z_i < cg_0,\ 1 \leq k \leq n,\ 1 \leq n \leq bc-1) \\ &\geq \prod_{n=1}^{bc-1}\prod_{k=1}^{n}(1-\exp\{-cg_0\theta + k\ln h_v(\theta)\}) \\ &\geq [1-\exp\{-cg_0\theta_0\}]^{(bc)^2} \to 1 \end{aligned}$$

因为 $c \to +\infty$, 其中 $\theta_0 > 0$ 满足 $h_v(\theta_0) = 1$。

Thus

$$P_v(T_c(g) > m) = P_v(U_m V_m W_m S_{bc}) \searrow e^{-t}.$$

因为 $c \to \infty$。这意味着

$$E_v(T_c(g)) \geq e^{cg(\mu)\theta_v^*(1+o(1))}/bc$$

当 c 足够大时。这就完成了 (A.10) 的证明。

令 $v \in V^0$。

设 $m_1 = (cg(0))^2/\sigma^2$。由此可得

$$\begin{aligned} E_v(T_c(g)) &= \sum_{n=0}^{\infty} P_v(T_c(g) > n) \\ &\leq m_1 + \sum_{n=m_1}^{2m_1} P_v(T_c(g) > n) + ... + \sum_{n=km_1}^{(k+1)m_1} P_v(T_c(g) > n) + ... \\ &\leq m_1[1 + \sum_{k=1}^{\infty} P_v(T_c(g) > km_1)]. \end{aligned}$$

注意到

$$P_v(T_c(g) > km_1) \le P_v\Big(\sum_{i=(j-1)m_1+1}^{jm_1} Z_i + \sum_{i=jm_1-ac+1}^{jm_1} Z_i' < cg(0)(1+o(1)),\ 1 \le j \le k\Big)$$

$$= [P_v\Big(\sum_{i=1}^{m_1} Z_i + \sum_{i=m_1-ac+1}^{m_1} Z_i' < cg(0)(1+o(1))\Big)]^k$$

$$= [P_v\Big(\sum_{i=1}^{m_1-ac} Z_i + \sum_{i=m_1-ac+1}^{m_1} (1+A)Z_i < cg(0)(1+o(1))\Big)]^k$$

$$= [P_v\Big(\frac{\sum_{i=1}^{m_1-ac} Z_i}{cg(0)} + \frac{\sum_{i=m_1-ac+1}^{m_1}(1+A)Z_i}{cg(0)} < (1+o(1))\Big)]^k$$

当 c 较大时，其中 $A = |g'(0)|/a$，且

$$\frac{\sum_{i=1}^{m_1-ac} Z_i}{cg(0)} \Rightarrow X \sim N(0,1), \qquad \frac{\sum_{i=m_1-ac+1}^{m_1}(1+A)Z_i}{cg(0)} \to 0$$

当 $c \to \infty$ 时。因此

$$E_v(T_c(g)) \le m_1[1 + \sum_{k=1}^{\infty}[\Phi(1+o(1))]^k] = \frac{(cg(0))^2}{\sigma^2}\frac{(1+o(1))}{1-\Phi(1)},$$

其中 $\Phi(.)$ 是标准正态分布。

令 $m_2 = (cg(0))^2/(8\sigma^2 \ln c)$。注意

$$\prod_{n=1}^{ac}\prod_{k=1}^{n} P_v\Big(\sum_{i=n-k+1}^{n} Z_i + c|g'(0)|n^{-1}\sum_{i=1}^{n} Z_i < cg(0)(1+o(1))\Big)$$

$$\ge [P_v\Big(\sum_{i=1}^{ac} Z_i + \sum_{i=1}^{ac} Z_i' < cg(0)(1+o(1))\Big)]^{(ac)^2} = (1+o(1))(1-\Phi(\frac{\sqrt{c}g(0)}{\sqrt{a}(1+A)}))^{(ac)^2} \to 1$$

作为 $c \to \infty$，由于

$$P_v(\frac{\sum_{i=1}^{ac} Z_i + \sum_{i=1}^{ac} Z_i'}{\sigma(1+A)\sqrt{ac}}) \Rightarrow X \sim N(0,1)$$

作为 $c \to \infty$。由此可得

$$\begin{aligned}
& E_v(T_c(g)) \geq \sum_{n=0}^{m_2} P_v(T_c(g) > n) \geq m_2 P_v(T_c(g) > m_2) \\
\geq\ & m_2(1+o(1)) \prod_{n=ac+1}^{m_1} \prod_{k=1}^{n} P_v\Big(\sum_{i=n-k+1}^{n} Z_i + \sum_{i=n-ac+1}^{n} Z_i' < cg(0)(1+o(1))\Big) \\
\geq\ & m_2(1+o(1))[P_v\Big(\sum_{i=1}^{m_2} Z_i + \sum_{i=m_2-ac+1}^{m_2} Z_i' < cg(0)(1+o(1))\Big)]^{m_2^2} \\
=\ & m_2(1+o(1))[P_v\Big(\frac{\sum_{i=1}^{m_2} Z_i + \sum_{i=m_2-ac+1}^{m_2} Z_i'}{\sqrt{m_2}\sigma} < \sqrt{8\ln c}(1+o(1))\Big)]^{m_2^2} \\
=\ & m_2(1+o(1))[\Phi(\sqrt{8\ln c})]^{m_2^2} = m_2(1+o(1))[1 - \frac{1}{c^4\sqrt{8\ln c}}]^{m_2^2} \to m_2(1+o(1))
\end{aligned}$$

当 $c \to \infty$ 时，其中第三个不等式来自 Esary、Proschan 和 Walkup（1967）的定理 5.1。因此，我们有

$$\frac{(cg(0))^2}{8\sigma^2 \ln c}(1+o(1)) \leq E_v(T_c(g)) \leq \frac{(cg(0))^2}{\sigma^2(1-\Phi(1))}(1+o(1)).$$

设 $v \in V^+$，并令

$$T_0 = \min\{n : \sum_{i=1}^{n} Z_i + \frac{ac}{(ac) \wedge n} \sum_{i=n-(ac)\wedge n+1}^{n} Z_i' \geq c\}.$$

$\{T_c(g)/c\}$ 对于 $c \geq 1$ 的一致可积性，源于众所周知的 $\{T_0/c\}$ 的一致可积性（参见 Gut（1988））。

根据强大数定律，我们有

$$\begin{aligned}
\mu &= \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=1}^{n} Z_i}{n} \\
&= \lim_{n\to\infty} \max_{1\leq j\leq n} \frac{1}{n}[\sum_{i=j}^{n} Z_i + g'(\mu)a^{-1} \sum_{i=n-ac+1}^{n} (Z_i - \mu)]
\end{aligned}$$

注意，$T_c(g) \to \infty$ 当 $c \to \infty$ 时，

$$\max_{1\leq j\leq T_c(g)} [\sum_{i=j}^{T_c(g)} Z_i + g'(\mu)a^{-1} \sum_{i=T_c(g)-ac+1}^{T_c(g)} (Z_i - \mu)] \geq cg(\mu)(1+o(1)),$$

and

$$\max_{1\leq j\leq T_c(g)-1} [\sum_{i=j}^{T_c(g)-1} Z_i + g'(\mu)a^{-1} \sum_{i=T_c(g)-ac}^{T_c(g)-1} (Z_i - \mu)] \leq cg(\mu)(1+o(1)).$$

由此可得

$$\begin{aligned}
\mu \longleftarrow & \max_{1\le j\le T_c(g)} \frac{1}{T_c(g)}[\sum_{i=j}^{T_c(g)} Z_i + g'(\mu)a^{-1} \sum_{i=T_c(g)-ac+1}^{T_c(g)} (Z_i-\mu)] \\
\ge & \frac{cg(\mu)(1+o(1))}{T_c(g)} \\
\ge & \max_{1\le j\le T_k-1} \frac{1}{T_c(g)-1}[\sum_{i=j}^{T_c(g)-1} Z_i + g'(\mu)a^{-1} \sum_{i=T_c(g)-ac}^{T_c(g)-1} (Z_i-\mu)] \longrightarrow \mu
\end{aligned}$$

如 $c\to\infty$。由于 $\{T_c(g)/c\}$ 一致可积性，并利用 Gut 的书（1988）中的定理 A.1.1，我们得到

$$E_v(T_c(g)) = (1+o(1))\frac{cg(\mu)}{\mu}$$

当 c 足够大时。定理 2 的证明至此完成。

定理 4 的证明。由于对于 $x>a^*$, $g(x)<0$，且 $a^*\le\mu^*$ 和 $\mu^*\ge 0$，可得

$$P_v\Big(m\hat{Z}_m < cg(\hat{Z}_m),\ \hat{Z}_m > a^*\Big) \le P_v(\hat{Z}_m<\mu^*)$$

and

$$\begin{aligned}
P_v(T_c(g)>m) &= P_v\Big(\sum_{i=n-k+1}^{n} Z_i < cg(\hat{Z}_n),\ 1\le k\le n,\ 1\le n\le m\Big) \le P_v\Big(m\hat{Z}_m < cg(\hat{Z}_m)\Big) \\
&= P_v\Big(m\hat{Z}_m < cg(\hat{Z}_m),\ \hat{Z}_m\le a^*\Big) + P_v\Big(m\hat{Z}_m < cg(\hat{Z}_m),\ \hat{Z}_m > a^*\Big) \\
&\le 2P_v(\hat{Z}_m<\mu^*).
\end{aligned}$$

此外，

$$\begin{aligned}
P_v(\hat{Z}_m<\mu^*) &= P_v(\sum_i^m -Z_i > -m\mu^*) = P_v(\sum_i^m(\mu-Z_i) > m(\mu-\mu^*)) \\
&= P_v(e^{\theta\sum_i^m(\mu-Z_i)} > e^{\theta m(\mu-\mu^*)}) \le e^{-m[\theta(\mu-\mu^*)-\ln M(\theta)]},
\end{aligned}$$

其中 $M(\theta)=E_v(e^{\theta(\mu-Z_1)})$，最后一个不等式由切比雪夫不等式推出。注意，$h(\theta)=\theta(\mu-\mu^*)-\ln M(\theta)$ 在 $h(\theta^*)=\theta^*(\mu-\mu^*)-\ln M(\theta^*)>0$处取得最大值，其中 $\theta=\theta^*>0$，且 $h'(\theta^*)=0$。因此，

$$E_v(T_c(g)) = 1+\sum_{m=1}^{\infty} P_v(T_c(g)>m) \le 1+2\sum_{m=1}^{\infty} e^{-m[\theta^*(\mu-\mu^*)-\ln M(\theta^*)]} = \frac{e^{\theta^*(\mu-\mu^*)-\ln M(\theta^*)}+1}{e^{\theta^*(\mu-\mu^*)-\ln M(\theta^*)}-1}.$$

设 $k>1$。由此可得

$$\begin{aligned} E_{vk}(T_c(g)-k+1)^+ &= \sum_{m=1}^{\infty} P_{vk}(T_c(g)>m+k-1, T_c(g)>k-1) \\ &\le (a_0+1)(k-1)P_0(T_c(g)>k-1)+\sum_{m\ge(a_0+1)(k-1)}^{\infty} P_{vk}(T_c(g)>m+k-1). \end{aligned}$$

同理，我们有

$$\begin{aligned} & P_{vk}(T_c(g)>m+k-1) \\ = \; & P_{vk}\Big(\sum_{i=n-k+1}^{n} Z_i < cg(\hat{Z}_n),\ 1\le k\le n,\ 1\le n\le m+k-1\Big) \le 2P_{vk}(\hat{Z}_{m+k-1}<\mu^*) \\ = \; & 2P_{vk}\Big(\sum_{i=k-1}^{m+k-1}(\mu-Z_i)+\sum_{i=1}^{k-1}(\mu_0-Z_i) > m(\mu-\mu^*)+(k-1)(\mu_0-\mu^*)\Big) \\ \le \; & 2\exp\{-m\Big(\theta^*(\mu-\mu^*)-\ln M(\theta^*)+\frac{k-1}{m}[\mu_0-\mu^*-\ln M_0(\theta^*)]\Big)\} \le e^{-mb} \end{aligned}$$

对于 $m\ge(a_0+1)(k-1)$，由于

$$\theta^*(\mu-\mu^*)-\ln M(\theta^*)+\frac{k-1}{m}[\mu_0-\mu^*-\ln M_0(\theta^*)]\ge b$$

对于 $m\ge(a_0+1)(k-1)$。因此，

$$\begin{aligned} E_{vk}(T_c(g)-k+1)^+ &\le (a_0+1)(k-1)P_0(T_c(g)\ge k)+2\sum_{m\ge(a_0+1)(k-1)}^{\infty} e^{-mb} \\ &\le (a_0+1)(k-1)P_0(T_c(g)>\ge k)+\frac{2e^{-(a_0+1)(k-1)b}}{1-e^{-b}}. \end{aligned}$$

参考文献

[1] Basseville, M. 和 Nikiforov, I. (1993) *Detection of Abrupt Changes*：*Theory and Applications*. Prentice-Hall，恩格尔伍德克利夫斯。[2] Bersimis, S.、Sgora, A. 和 Psarakis, S. (2018) 非工业过程中的多元统计过程监控应用。*Qual. Reliab. Engng. Int.*，15，526-549。[3] Bersimis,S.、Psarakis, S. 和 Panaretos, J. (2007) 多元统计过程控制图：概述。*Qual. Reliab. Engng. Int.*，23，517-543。[4] Celano, G. 和 Castagliola, P. (2018)。适用于有限时域过程且具有变化的控制限的EWMA符号控制图。*Qual. Reliab. Engng. Int.*，34，1717-C1731[5]Chakrabortia, S. 和 Graham, M. A. (2019)。非参数（无分布）控- 制图：更新的概述及一些结果。*Qual. Engineering*，数字对象标识符：10.1080/08982112.2018.1549330[6] Chatterjee, S. 和 Qiu, P. (2009)。使用基于自助法的控制限的无分布累积和控制图。*Ann. Appl. Statistics*. 3，349-369。[7] Durrett, R. (2000)。*Probability Theory and Examples*.第四版，剑桥大- 学出版社。[8] Fris´en, M. (2003) 统计监测、最优性与方法。《国际统计评论》，71，403-434。[9] Huang, W. P.、Shu, L. J.、Woodall, W. H. 和 Tsui, K. L. (2016)。用于监控可变样本量过程且具有概率控制限的CUSUM程序。*IIE Trans*。48，759-771。[10]Lai, T. L. (2001) 序贯分析：一些经典问题与新挑战。*Statist Sinica*，11，303-408。[11] Lai, T. L. (1995)。质量控制和动力系统中的序贯变点检测。*J. R. Statist Soc.* B. 57，613-658。[12] Lai, T. L. (1998)。随机系统中参数变化的信息界限与快速检测。《IEEE信息论汇刊》，44，2917-2929。[13] Lee, P. H.、Huang, Y. H.、Kuo, T. I. 和 Wang, C. C. (2013)。具有可变控制限的单值控制图对河流污染监测的影响。*Qual Quant*，47，1803- 1812。[14] Margavio, T. M.、Conerly, M. D.、Woodall, W. H. 和 Drake, L. G. (1995)。质量控制图的报警率。*Stat. Probab. Lett.*，24，219-C224

[15] Montgomery, D. C.（2009） *Introduction to Statistical Quality Control*。第6版。纽约：约翰·威立父子出版公司。[16] Page, E. S.（1954）。连续检验方案， *Biometrika* 41, 100-115[17] Poor, H.V. 和 Hadjiliadis, O.（2009）。 *Quickest Detection*，剑桥大学出版社，Camridge，纽约。[18] Qiu, P.（2014） *Introduction to Statistical Process Control*。佛罗里达州博卡拉顿：Chapman and Hall/CRC。[19]Shen, X.、Zou, C. L.、Jiang, W. 和 Tsung, F. G.（2013）在样本量随时间变化时，使用概率控制限监测泊松计数数据。 *Naval Research Logistics*，60，625-C636[20] Shewhart, W. A.（1931） *Economic Control of Quality of Manufactured Product*。纽约：Van Nostrand。[21] Siegmund, D.（1985）。*Sequential Analysis*：*Tests and Confidence Intervals*。Springer，纽约。[22] Sogandi, F.、Aminnayeri, M.、Mohammadpour, A. 和 Amiri, A.（2019）基于带有潜在风险变量和动态概率控制限的状态空间模型，在多阶段医疗保健流程中使用风险调整伯努利图。 *Comp. Industr. Engin.* 130，699-713[23] Steiner, S. H.（1999）。具有时变控制限和快速初始响应的EWMA控制图。 *J. Quality Technology*，31，75-86。[24] Stoumbos, Z. G.、Reynolds, M. R.、Ryan, T. P. 和 Woodall, W. H.（2000）迈入21世纪之际统计过程控制的现状。 *J. Amer. Statist. Assoc.*，95，992-998。[25]Verdier, G.、Hilgert, N. 和 Vila, J. P.（2008）。用于变化检测和隔离问题的CUSUM类程序的自适应阈值计算。*Computational Statistics.* & *Data Analysis*，52，4161-4171。[26] Wald, A. 和 Wolfowitz, J.（1948）。序贯概率比检验的最优性质。 *Ann. Math. Sattist.*，19，326-339。[27] Woodall, W. H.、Zhao, M. J.、Paynabar, K.、Sparks, R. 和 Wilson, J. D.（2017）社交网络监测概述与展望。 *IIE Trans.*，49，354-365。[28] Yang, W. W.、Zou, C. L. 和 Wang, Z. J.（2017）。使用动态概率控制限进行非参数轮廓监测。 *Qual. Reliab. Engng. Int.*，33，1131-C1142[29] Zhang, X. 和 Woodal, W. H.（2015）。风险调整伯努利CUSUM图的动态概率控制限。 *Statist. Med.*，34，3336-C3348

[30] Zhang, X. 和 Woodal, W. H.（2017）。通过动态概率控制限降低估计误差对风险调整伯努利累积和控制图受控状态性能的影响。 $Qual.\ Reliab.\ Engng.\ Int.$，33，381-C386