arXiv:2303.04631v1 [hep-th] 8 Mar 2023

用于 $\mathcal{N}=0$ 超引力的旋量双拷贝

Kymani Armstrong-Williams[1] and Chris D. White[2]

伦敦玛丽女王大学理论物理中心，物理与天文学系，英国伦敦 Mile End 路 327 号，邮编 E1 4NS

摘要

Weyl双拷贝是一个关联标量、规范理论和引力理论解的公式，并且与散射振幅的 BCJ 双拷贝有关。后者将杨-米尔斯理论与 $\mathcal{N}=0$ 超引力联系起来，其中除引力子外，还存在轴子和膨胀子。然而，传统的 Weyl双拷贝仅适用于纯引力解，因此它能否扩展到 $\mathcal{N}=0$ 超引力的完整谱仍有待探究。我们运用近期发展起来的扭量方法研究这一问题，并表明对于某些解，确实存在某种适用于 $\mathcal{N}=0$ 超引力的双拷贝公式。不过，它既不同于传统的 Weyl双拷贝形式，也不同于近期旨在将 Weyl双拷贝推广至非真空解的猜想。

1 引言

近几十年来，一种称为 双拷贝 的对偶性引起了广泛关注 [1]。这种关系最早于 20 世纪 80 年代被发现，涉及开弦和闭弦的树级散射振幅 [2], ，被称为 *KLT* 关系。在低能极限下，开弦和闭弦分别产生（非阿贝尔）规范玻色子和引力子，因此场论散射振幅之间也应存在一种关系——即双拷贝 [3, 4] 。值得注意的是，场论中的双拷贝已扩展至圈级，超越了其最初的弦论背景，从而为我们窥见各种基本相互作用理论背后深层的共同结构提供了令人振奋的线索。此外，后续研究将双拷贝扩展到了耦合常数 [5–8], 固定阶的散射振幅之外，也扩展到了经典解。经典解可以是精确解 [9–32] , ，也可以是微扰解 [33–52], ；后者因在引力波物理中的潜在应用而备受关注。文献 [52–64] 探讨了双拷贝的非微扰方面。关于双拷贝的最新综合综述可见文献 [1, 65–68]。

对于经典解，双拷贝的两种形式得到了特别深入的研究。第一种是文献 [9] 中的 Kerr-Schild 双拷贝（另见文献 [69–71]），它采用场论传统的张量形式体系，并指出，位置空间中的某些精确纯引力解

[1]k.t.k.armstrong-williams@qmul.ac.uk[2]
christopher.white@qmul.ac.uk

可以写成相应规范理论解中运动学信息的简单乘积。这适用于一类特殊解，它们恰好能使各自的场论线性化；在此过程中，会选定一种特定规范（在引力中对应于采用 Kerr-Schild 坐标）。与本文相关的第二种精确经典双拷贝是文献 [18]中的 Weyl双拷贝。它采用场论的旋量形式主义，并指出，广义相对论中规范无关的 Weyl 旋量可以写成电磁旋量与标量场的某种组合（关于这一思想更早的一种形式，见文献 [72, 73] ）。研究已表明，这种方法适用于任意真空 Petrov D 型解，以及一些与引力波相关的 N 型解 [21]。对于线性化规范／引力理论的解，文献 [22, 24] 发现了其他 Petrov 型的实例，但认为 Petrov I 型和 III 型需要对 Weyl双拷贝进行推广。近期，Weyl双拷贝也已得到扩展，可用于描述非真空解 [28, 74]。

确立 Weyl 双拷贝类公式的一般适用范围和有效性，仍是一个悬而未决的问题。我们也可以追问这些公式的来源，而近期已有多项研究对此提供了新的认识。首先，文献 [22, 24] 在扭量空间中构造了双拷贝。扭量空间中的某些“函数”通过一种称为彭罗斯变换的公式映射为时空旋量场；研究表明，扭量空间函数的某种乘积恰好再现了位置空间中的 Weyl 双拷贝。然而，这里存在一个概念上的困难：参与彭罗斯变换的量可以经过某些等价变换，而这些变换不会改变时空场。因此，严格来说，它们是上同调类的代表元，而非函数；正因如此，通常无法对它们进行有意义的相乘。这并不妨碍在实际计算中推导 Weyl 双拷贝，但确实需要制定一种规则，从扭量空间中选出“特殊”的代表元，以便得到正确的位置空间双拷贝。文献 [26, 75], 进一步探讨了这一问题，两篇文献都给出了适当的选取规则，尽管令人遗憾的是，这两种选择都明显无法对应文献 [22, 24]最初提出的扭量双拷贝。最后，文献 [76], 近期运用文献 [77–80]中发展的思想澄清了这一情况。后两篇文献表明，位置空间中的某些经典规范场／引力解 [3] 可以由动量空间三点振幅的壳上逆傅里叶变换得到。随后，文献 [78] 将这种变换拆分为两个阶段：第一阶段将振幅映射到扭量空间，第二阶段则对应从扭量空间到位置空间的彭罗斯变换。事实证明，第一阶段对应于对振幅关于能量进行拉普拉斯变换，而这一过程必然会选出扭量空间中的某个上同调代表元。正如文献 [76], 所示，标准三点振幅所得到的代表元，恰好就是文献 [22, 24]最初提出扭量双拷贝时所用的代表元。因此，对于三点振幅而言，BCJ 双拷贝、扭量双拷贝和位置空间 Weyl 双拷贝，在存在重叠的范围内完全等价。文献 [76] 还表明，扭量空间中双拷贝的简单乘积形式，在很大程度上依赖于三点振幅的关键性质。反过来说，位置空间中的精确双拷贝不太可能普遍成立。因此，扭量方法既能系统地推导 Weyl 双拷贝公式，也能确定其适用范围。

近期在三维时空中发现了 Weyl 双拷贝的一个有趣类比，称为 *Cotton* 双拷贝，它将拓扑质量

[3]正如文献 [78, 80] 及下文所明确指出的，这些经典解采用的是 (2,2) 度规，而非通常采用 (1,3) 度规的闵可夫斯基时空。后者可以通过对坐标进行解析延拓得到。

规范与引力理论的经典解，以恰当的旋量语言联系起来 [81,82]。不同于四维 Weyl 双拷贝，研究发现 Cotton 双拷贝仅适用于 Petrov N 型解。Reference [83]通过将类似的扭量方法应用于 ref. [76]，的四维情形，并将其置于三维背景下，证实了这一点。在这种情况下，恰当的扭量空间称为<бол小扭量空间；由于存在拓扑质量，必须使用适当推广的彭罗斯变换。通过应用 refs. [78–80]，中发展的类似方法，ref. [83] 表明，对三点振幅进行逆傅里叶变换后，这种有质量的彭罗斯变换确实会自然出现，完全独立于其最初在扭量文献中的提出方式 [84]。这类方法再次推导并约束类似 Weyl 双拷贝的公式所取得的成功表明，也应使用类似方法，在此前尚未考虑的情形中寻找可能存在的 Weyl 双拷贝。

基于这一动机，本文将考察 $\mathcal{N}=0$ 超引力，也称为 NS-NS 引力。该理论最初作为一种有效场论出现，源自闭玻色弦理论的低能极限（教科书式的介绍见例如文献 [85,86] ）。因此，从形式上说，它正是通过双拷贝与纯杨–米尔斯理论相关联的理论。事实上，以往的经典双拷贝形式体系不得不解释：为何通过双拷贝得到的是纯引力解，而完整 $\mathcal{N}=0$ 理论中自然预期会被激发的其他自由度却没有出现 [9,45,47,48,87]。后者包括一个标量——膨胀子——以及一个二形式场；在四维时空中，后者等价于一种称为轴子的赝标量。对于线性阶经典解，情况似乎是：在引力理论中，是否激发膨胀子和／或轴子，可以自行选择。然而，对于更高阶的经典修正和／或量子修正，如果不希望出现非引力自由度，就必须引入额外的处理步骤将其消除。这正是引力波物理中最常见的情况，但保留完整谱则为探讨双拷贝的概念性问题提供了机会。尤其是，针对完整 $\mathcal{N}=0$理论的精确位置空间经典双拷贝几乎尚未得到探索 [4]。此外，既然我们现在已经掌握了系统推导 Weyl双拷贝公式的技术，那么将这些技术应用于 $\mathcal{N}=0$超引力，再看看会有何结果，无疑是合理的。

近期的一些研究进一步带来了启发。首先，文献 [90]采用了与文献 [80] 类似的方法，将 $\mathcal{N}=0$ 超引力的位置空间解写成动量空间散射振幅的壳上逆傅里叶变换。他们研究了纯引力中著名的 Kerr 和 Taub-NUT 解的变体，其中膨胀子和／或轴子也被激发。其直接结果是，由此得到的解不再是引力中的真空解，因此，相较于文献 [18]传统的 Weyl双拷贝，需要更多种类的位置空间旋量场。作者将所有旋量场转化为张量语言，并证明黎曼张量一般可以写成规范理论场强张量与逆标量场的卷积。若该卷积等价于乘积，就会得到精确的位置空间双拷贝；文献 [90] 明确展示了在纯引力情况下，如何用张量语言实现这一点，但也指出，当膨胀子和轴子存在时，这种关系显然会被破坏。另一个启发来源是文献 [28,74], 近期的工作，该工作试图将纯引力中的 Weyl双拷贝扩展至非真空解。作者考察了这样一类解：其源流／能动张量可以写成若干项之和，并且每一项都可以在不同理论之间有意义地对应起来

[4]该领域早期的一项非常有趣的工作在双场理论框架下建立了 Kerr-Schild 设 ansatz [88,89], ，不过本文所讨论的解与这一形式体系有所不同。

。随后，他们为参与黎曼张量旋量分解的各种旋量场提出了类似 Weyl双拷贝的公式。接下来，我们将能够把本文的公式与这些猜想进行比较。

本文旨在将参考文献 [76,78,83] 中的扭量方法应用于参考文献 [90]的出发点。具体而言，我们将考察由 $\mathcal{N}=0$ 超引力中的三点振幅经过壳上傅里叶逆变换所生成的位置空间旋量场，并将该变换分为两个阶段，其中第一阶段将我们从动量空间带到扭量空间。这一额外步骤将使我们揭示位置空间旋量场之间的精确关系，而这些关系似乎在参考文献 [90]中被忽略了。对于不带 NUT 荷且无自旋的膨胀子-轴子解，这些关系确实呈现为位置空间旋量场的局部乘积，尽管还带有额外因子，因此并非传统的 Weyl 双拷贝形式。此外，对于自旋 / NUT 荷非零的情形，虽然可以写出类似的公式，但它们并没有直接明了的双拷贝解释，从而为参考文献 [90]的结果提供了更多见解。我们还将结果与参考文献 [28,74]提出的非真空 Weyl 双拷贝公式进行了比较。对于我们考察的情形，所得结果并不相同。鉴于我们研究的是不同理论中的不同情形，这并不构成问题。不过，这一比较或许表明，本文所用的类似方法也可能有助于研究非真空纯引力情形。

本文的结构如下。第 2 节回顾旋量形式主义的相关细节，以及文献 [76,78,80,90] 中的论证，这些内容将在下文中用到。第 3 节将扭量方法应用于无自旋且无 NUT 荷的 $\mathcal{N}=0$ 超引力解，并在位置空间中得到我们的第一个旋量双拷贝公式。第 4 节将分析扩展到包含非零 NUT 荷和自旋的情形。最后，我们在第 5 节讨论研究结果并作出总结。

2 关键思想回顾

2.1 旋量形式主义

本文将始终采用场论的旋量形式主义，在这种形式主义中，所有场方程都可以用双分量 Weyl旋量 π_A 和共轭旋量 $\omega_{\dot{A}}$ 表示。指标可以使用二维 Levi-Civita 符号升降:

$$\pi_A = \epsilon_{BA}\pi^B, \quad \pi^B = -\pi_A\epsilon^{AB}, \tag{1}$$

其中

$$\epsilon_{AB}\epsilon^{CB} = \delta_A^C, \quad \epsilon_{01} = 1, \tag{2}$$

点等价形式 ϵ^{AB} 也类似。任何张量量都可以通过将时空指标其时空指标[5] 与英费尔德–范德瓦尔登符号收缩，转换为（多指标）旋量

$$\sigma^a_{A\dot{A}} = (\mathrm{I}, i\sigma_y, \sigma_z, \sigma_x), \tag{3}$$

用泡利矩阵表示

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{4}$$

[5]全文中，我们分别用小写拉丁字母、大写拉丁字母和希腊字母表示洛伦兹指标、旋量指标和扭量指标。

这里我们采用了与参考文献 [80, 90], 相匹配的约定；这些约定适用于 (2,2) 度规，原因将在下文说明。举例来说，四维矢量的旋量表示为

$$V_{A\dot{A}} \equiv V_a \, \sigma^a_{A\dot{A}} = \begin{pmatrix} V_0 + V_2 & V_1 + V_3 \\ V_3 - V_1 & V_0 - V_2 \end{pmatrix}. \tag{5}$$

该矩阵的行列式为

$$|V_{A\dot{A}}| = \left(V_0^2 + V_1^2 - V_2^2 - V_3^2\right) = V^2, \tag{6}$$

对于零矢量，该行列式为零，因此对于后者，可以将式（5）分解为一个旋量与其共轭旋量的外积:

$$V_{A\dot{A}} = \pi_A \tilde{\pi}_{\dot{A}}, \quad V^2 = 0. \tag{7}$$

为便于后续使用，我们还注意到以下公式

$$V \cdot W = \frac{1}{2} V_{A\dot{A}} W^{A\dot{A}}. \tag{8}$$

旋量形式主义之所以得到广泛应用，是因为它能使某些结构一目了然，而这些结构在张量框架中较难看出。这种简化依赖于两个关键性质，而这两个性质归根结底都源于每个旋量指标只能取两个值之一。第一个性质是，所有多指标旋量对象都可以分解为对称旋量与 Levi-Civita符号乘积之和。本文所关注的是场强旋量在（线性化）规范理论中的旋量表示： F_{ab}

$$F_{ab} \to F_{A\dot{A}B\dot{B}} = \phi_{AB}\epsilon_{\dot{A}\dot{B}} + \tilde{\phi}_{\dot{A}\dot{B}}\epsilon_{AB}, \tag{9}$$

其中 ϕ_{AB} 和 $\phi_{\dot{A}\dot{B}}$ 关于其指标对称，分别表示该场的自对偶部分和反自对偶部分。在 $\mathcal{N} = 0$ 超引力中，文献 [90] 为 $\mathcal{N} = 0$ 超引力引入了广义黎曼张量 $\mathfrak{R}_{abcd}$，其分量表示引力子、膨胀子和轴子的组合。其旋量表示为

$$\mathfrak{R}_{A\dot{A}B\dot{B}C\dot{C}D\dot{D}} = \mathbf{X}_{ABCD}\,\epsilon_{\dot{A}\dot{B}}\,\epsilon_{\dot{C}\dot{D}} + \tilde{\mathbf{X}}_{\dot{A}\dot{B}\dot{C}\dot{D}}\,\epsilon_{AB}\,\epsilon_{CD} \tag{10}$$

$$+ \mathbf{\Phi}_{AB\dot{C}\dot{D}}\,\epsilon_{\dot{A}\dot{B}}\,\epsilon_{CD} + \tilde{\mathbf{\Phi}}_{\dot{A}\dot{B}CD}\,\epsilon_{AB}\,\epsilon_{\dot{C}\dot{D}}\ , \tag{11}$$

这与广义相对论中黎曼张量通常的旋量分解直接类似（例如参见文献 [91,92]）。对于纯引力的真空解，混合指标旋量不存在，而量 $\mathbf{X}_{ABCD}$ 则称为*Weyl*旋量；在此语境下，我们用 Φ_{ABCD} 表示它。正如文献 [18], 中首次提出的，对于某些解（即 Petrov D型解），Weyl旋量可以表示为规范理论场强旋量的对称乘积，再除以一个标量场 S（x）：

$$\Phi_{ABCD} = \frac{\Phi_{(AB}\Phi_{CD)}}{S}, \quad \tilde{\Phi}_{\dot{A}\dot{B}\dot{C}\dot{D}} = \frac{\tilde{\Phi}_{(\dot{A}\dot{B}}\tilde{\Phi}_{\dot{C}\dot{D})}}{\bar{S}}, \tag{12}$$

其中， S 是 S 的复共轭（在洛伦兹符号下），而两个 Weyl旋量分别表示自对偶和反自对偶引力子的自由度。这就是*Weyl*双拷贝；本文旨在探寻将这些公式推广至 $\mathcal{N} = 0$ 超引力的可能性。

2.2 扭量

扭量理论是一个成熟的框架，融合了代数几何、拓扑和复分析的要素（综述见例如 [93–95] ），如今已日益广泛地应用于散射振幅的前沿研究。介绍扭量的一种方式是将其视为扭量方程的解

$$\nabla^{(A}_{\dot{A}}\Omega^{B)} = 0, \tag{13}$$

其中 $\nabla_{A\dot{A}}$ 是时空协变导数的旋量表示，而 Ω^B 是一个旋量场。该方程在闵可夫斯基空间中的通解为

$$\Omega^A = \omega^A - x^{A\dot{A}}\pi_{\dot{A}}, \tag{14}$$

因此，每个解都可以用一个由两个旋量组成的四分量扭量来刻画：

$$Z^\alpha = \left(\omega^A, \pi_{\dot{A}}\right). \tag{15}$$

扭量空间 $\mathbb{T}$ 由所有这类对象组成。我们可以通过定义扭量在闵可夫斯基空间中的“位置”为旋量场 Ω^A 消失的点的轨迹，来定义从扭量空间到时空的映射。这意味着关联关系

$$\omega^A = x^{A\dot{A}}\pi_{\dot{A}}, \tag{16}$$

在对两边同时进行缩放时保持不变：

$$\omega^A \to \lambda\omega^A, \quad \pi_{\dot{A}} \to \lambda\pi_{\dot{A}}, \quad \lambda \in \mathbb{C}. \tag{17}$$

因此，满足关联关系的扭量构成射影扭量空间$\mathbb{PT}$中的点。时空与扭量空间之间的映射是非局域的：可以证明，时空中的一个点 $x^{A\dot{A}}$ 映射为 $\mathbb{PT}$中的一个黎曼球面 X。理解这一点的一种方式是注意到，方程 (16) 意味着，已知 $x^{A\dot{A}}$后，一个扭量完全由单个二旋量 $\pi_{\dot{A}}$确定。鉴于后者仅在射影意义下定义，我们可以用以下两种独立的参数化，来表示满足给定时空点关联关系的所有可能扭量

$$\pi_{\dot{A}} = (1, \xi), \quad \text{or} \quad \pi_{\dot{A}} = (\eta, 1), \quad \xi, \eta \in \mathbb{C}. \tag{18}$$

参数 ξ 和 η 确实对应于黎曼球面的两个常规坐标图，它们通过从北极或南极向穿过赤道的复平面进行立体投影来定义。在重叠区域上，令 $\xi \sim \eta^{-1}$。

扭量理论中的一个重要结果称为彭罗斯变换，它指出，自旋为 n 的旋量场的线性化真空场方程的解可通过围道积分获得

$$\tilde{\Phi}_{\dot{A}_1\dot{A}_2\ldots\dot{A}_{2n}}(x) = \frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma \pi_{\dot{E}} d\pi^{\dot{E}}\, \pi_{\dot{A}_1}\pi_{\dot{A}_2}\ldots\pi_{\dot{A}_{2n}}\rho_x[f(Z^\alpha)], \tag{19}$$

其中，$f(Z^\alpha)$ 是扭量变量的全纯函数，ρ_x 表示限制到与时空点 x^a相对应的黎曼球面 X，而 X 上的积分轮廓 Γ 应将函数 $f(Z^\alpha)$的任意极点分隔开。为了使该积分在射影扭量空间中有意义，函数 $f(Z^\alpha)$必须按如下方式缩放

$$f(\lambda Z^\alpha) = \lambda^{-2n-2} f(Z^\alpha). \tag{20}$$

此外，进入彭罗斯变换的量 $f(Z^\alpha)$严格来说并不是函数。我们可以根据以下等价变换对它们重新定义：

$$f(Z^\alpha) \to f(Z^\alpha) + f_N(\alpha) + f_S(Z^\alpha), \tag{21}$$

其中 $f_N(Z^\alpha)$（$f_S(Z^\alpha)$）仅在黎曼球面 X 的北（南）半球有极点。由于积分轮廓 Γ 的一侧只有极点，执行彭罗斯变换时这些贡献会消失。重新定义 $f(Z^\alpha)$ 的这种无限自由度，更形式化地说，就是将该量称为上同调类 [96]，的一个代表元；同一上同调类的不同代表元会导出相同的时空场。

请注意，式（19）的彭罗斯变换仅给出场的反自对偶部分。自对偶部分由一个无点旋量场给出，可以通过不同方式获得。一种方法是考虑式（13）中扭量方程的复共轭

$$\nabla_A^{(\dot{A}} \Lambda^{\dot{B})} = 0, \tag{22}$$

其一般解为：

$$\Lambda^{\dot{A}} = \mu^{\dot{A}} - x^{A\dot{A}} \lambda_A. \tag{23}$$

然后，我们可以将这里出现的旋量组合起来，构成一个对偶扭量

$$W_\alpha = \left(\lambda_A, \mu^{\dot{A}}\right), \tag{24}$$

满足关联关系

$$\mu^{\dot{A}} = x^{A\dot{A}} \lambda_A. \tag{25}$$

（对偶）扭量之间存在内积：

$$Z^\alpha W_\alpha = \omega^A \lambda_A + \mu^{\dot{A}} \pi_{\dot{A}}. \tag{26}$$

此外，式 (19) 中彭罗斯变换在对偶扭量空间中的对应形式为

$$\tilde{\Phi}_{A_1 A_2 \ldots A_{2n}}(x) = \frac{1}{2\pi i} \oint_\Gamma \lambda_E d\lambda^E \, \lambda_{A_1} \lambda_{A_2} \ldots \lambda_{A_{2n}} \rho_x[f(W_\alpha)], \tag{27}$$

其中，Γ 同样是黎曼球面 X 上的一条积分轮廓，位于射影对偶扭量空间中，并对应于时空中的点 x^a。对于初学者而言，上述概念会显得相当抽象，我们建议读者参阅详细综述以了解更多内容 [93–95]。本研究的意义在于，我们将看到，从动量空间散射振幅得到位置空间中的经典解时，上述彭罗斯变换会自然地显现出来。

2.3 从振幅得到旋量场

参考文献 [79] 提出了一种从散射振幅中获得经典解的系统方法，该方法后来被称为*KMOC* 形式体系。随后，文献 [80, 90] 和 $\mathcal{N} = 0$ 分别利用这一方法构造了纯引力和超引力中的线性化解。更具体地说，公式（11）中出现的具体旋量场可以通过在 (2,2) 度规下对三点振幅进行壳上逆傅里叶变换得到；之所以采用后者，是因为只有这样，在满足所有运动学约束后，相关振幅才不会为零。由此得到的

场可以解析延拓到通常的洛伦兹度规号差（或者实际上任何其他度规号差）。我们定义有质量源粒子发射具有给定螺旋度（$h^{\pm}$）的引力子、膨胀子（ϕ）或轴子（B）辐射的三点振幅，其振幅为 $\mathcal{M}_X$、 $X \in \{h, \phi, B\}$。按照文献 [90], ，我们可以定义一个替代的振幅基 $\{\mathcal{M}_{\eta_1\eta_2}\}$ ，其中 $\eta_i \in \{+1, -1\}$，并且物理振幅由下式给出

$$\mathcal{M}_{h^{\pm}} = \mathcal{M}_{\pm\pm}; \tag{28}$$

$$\mathcal{M}_{\phi} = \frac{1}{2}\Big(\mathcal{M}_{+-} + \mathcal{M}_{-+}\Big);$$

$$\mathcal{M}_{B} = \frac{1}{2}\Big(\mathcal{M}_{+-} - \mathcal{M}_{-+}\Big). \tag{29}$$

这一设定的动机来自散射振幅的双拷贝：该原理指出， $\mathcal{N} = 0$ 超引力中的自由度可以由两个独立规范理论的偏振态经过特定组合得到。最简单的情况下，这一原理适用于平面波态；已知，对于给定螺旋度的引力子，其偏振张量可以写成光子偏振矢量的外积:

$$\epsilon^{\pm}_{ab} = \epsilon^{\pm}_{a}\epsilon^{\pm}_{b}. \tag{30}$$

同样，两个独立的组合

$$\frac{1}{2}\left(\epsilon^{+}_{a}\epsilon^{-}_{b} \pm \epsilon^{-}_{a}\epsilon^{+}_{b}\right) \tag{31}$$

最终分别描述膨胀子和轴子。双拷贝的非平凡之处在于，即使纳入相互作用，这种乘积结构依然成立，因此涉及引力子、轴子和膨胀子的多点振幅，可以通过适当组合规范理论振幅得到。对于涉及单个 ($h^{\pm}$, ϕ, B) 态辐射的三点振幅，情况非常简单，恰好对应公式（29）；其中振幅 $\mathcal{M}_{\eta_1\eta_2}$ 由具有相应螺旋度的规范理论三点振幅的简单乘积给出。受此启发，文献 [90]提出了一种稍微更一般的关系

$$\mathcal{M}_{\eta_L\eta_R} = -\frac{\kappa}{4\,Q^2}\, c_{\eta_L\eta_R}\, \mathcal{A}^{(L)}_{\eta_L}\, \mathcal{A}^{(R)}_{\eta_R}\ , \tag{32}$$

其中， $\kappa = \sqrt{32\pi G_N}$ 是以牛顿常数 G_N表示的引力耦合常数， Q 则是规范理论中源粒子的电磁耦合。我们还采用了文献 [90], 中的记号，将双拷贝后构成引力理论的两个规范理论称为“左”(L)和“右”(R)理论。附加常数 $\{c_{\eta_L\eta_R}\}$允许对不同的螺旋度组合采用不同的归一化；在传统的 BCJ 双拷贝中，这些常数均为 1。

利用文献 [79], 中所谓的 *KMOC* 形式体系，文献 [90] 表明，式（11）中出现的旋量场在经典观测下的线性化值——由量子场算符的期望值导出——可用上述振幅表示为

$$\mathbf{X}_{ABCD} = -\frac{\kappa^2 c_{++}}{2Q^2}\ \mathrm{Re}\ i\int \mathrm{d}\Phi(k)\hat{\delta}(2p\cdot k)\, \mathcal{A}^{(L)}_{+}\mathcal{A}^{(R)}_{+}\, |k\rangle_A|k\rangle_B|k\rangle_C|k\rangle_D\, e^{-ik\cdot x}\ , \tag{33}$$

$$\tilde{\mathbf{X}}_{\dot{A}\dot{B}\dot{C}\dot{D}} = -\frac{\kappa^2 c_{--}}{2Q^2}\,\mathrm{Re}\; i\int \mathrm{d}\Phi(k)\hat{\delta}(2p\cdot k)\,\mathcal{A}_-^{(L)}\mathcal{A}_-^{(R)}\,[k|_{\dot{A}}[k|_{\dot{B}}[k|_{\dot{C}}[k|_{\dot{D}}\,e^{-ik\cdot x}\;, \tag{34}$$

$$\mathbf{\Phi}_{AB\dot{C}\dot{D}} = +\frac{\kappa^2 c_{+-}}{2\,Q^2}\,\mathrm{Re}\, i\int \mathrm{d}\Phi(k)\hat{\delta}(2p\cdot k)\,\mathcal{A}_+^{(L)}\mathcal{A}_-^{(R)}\;|k\rangle_A|k\rangle_B[k|_{\dot{C}}[k|_{\dot{D}}\,e^{-ik\cdot x}\;, \tag{35}$$

$$\tilde{\mathbf{\Phi}}_{\dot{A}\dot{B}CD} = +\frac{\kappa^2 c_{-+}}{2\,Q^2}\,\mathrm{Re}\, i\int \mathrm{d}\Phi(k)\hat{\delta}(2p\cdot k)\,\mathcal{A}_-^{(L)}\mathcal{A}_+^{(R)}\;[k|_{\dot{A}}[k|_{\dot{B}}|k\rangle_C|k\rangle_D\,e^{-ik\cdot x}\;. \tag{36}$$

这里我们引入了洛伦兹不变相空间测度

$$d\Phi(k) = \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\hat{\delta}(k^2)\Theta(k^0), \tag{37}$$

归一化狄拉克 δ 函数

$$\hat{\delta}(x) = 2\pi\delta(x), \tag{38}$$

以及惯用的狄拉克符号，其中零辐射动量的旋量表示 k^a 写作

$$k_{A\dot{A}} = |k\rangle_A[k|_{\dot{A}}. \tag{39}$$

换言之，式 (33–36) 表明，在 $\mathcal{N}=0$ 超引力的线性化层次上，经典旋量场可以表示为三点振幅的壳上逆傅里叶变换，而后者是根据式 (32) 对规范理论振幅进行双拷贝得到的。文献 [90] 以这些公式为出发点，在将所有旋量场转换为张量语言后，考察能否为特定解构造精确的位置空间双拷贝。我们将在此考虑同一类解，即由规范理论振幅构造的解

$$\mathcal{A}_\eta^{(L,R)} = -2Q(p\cdot\epsilon_\eta)e^{\eta(\theta_{L,R}+ik\cdot a_{L,R})}, \tag{40}$$

对于某些矢量 $\{a_{R,L}\}$ 和常数参数 $\theta_{L,\ R}$。这里

$$p^a = Mu^a \tag{41}$$

是源的四动量，其质量为 M ，四速度为 u^a。我们还引入了各理论中光子的偏振矢量，其具体形式见（例如参见文献 [80]）

$$\epsilon_-^a = (\epsilon_+^a)^* = -\frac{\langle k|\sigma^a|l]}{\sqrt{2}[kl]}, \tag{42}$$

其中，$|l]^{\dot{A}}$ 是任意的零参考旋量，对应于一种规范选择。文献 [97]详细探讨了式（40）中振幅的物理诠释。若没有指数因子（即对于给定规范理论中的 $a^a=\theta=0$ ），该振幅描述了带电无自旋粒子的光子发射，因而产生库仑解。其在纯引力中的双拷贝为史瓦西解 [9], ，而在 $\mathcal{N}=0$ 超引力中则导向*JNW* 解 [98], ，其中一个静态、球对称黑洞具有非零的膨胀子分布。当在规范理论或纯引力中开启该矢量 a^a 时，源粒子会产生自旋，

使得 a^a 可被识别为其 Pauli-Lubanski 自旋赝矢量。在纯引力中，所得场为*Kerr*解 [99], ，其规范理论单拷贝被称为$\sqrt{\text{Kerr}}$。随后出现在式（40）中的指数因子构成*Newman-Janis* 位移，这是一种将施瓦西黑洞变换为克尔黑洞 [100]的复变换。指数中的附加常数因子在纯引力中变换为另一种解，即文献 [101, 102]中的*NUT* 解。这是对施瓦西黑洞的一种推广，其引力场在渐近无穷远处具有非零的旋转特征。其单拷贝是一个磁单极子-电荷，其中引力理论中的 NUT 荷映射为规范理论中的磁单极子电荷 [10]。因此，在 $\mathcal{N}=0$ 超引力中，对式（40）的振幅进行双拷贝将导向 JNW 黑洞的推广，其中同时存在自旋和 NUT 荷。这进而意味着，除了膨胀子之外，轴子也可能被开启，如文献 [90]所讨论。

在本文余下部分中，我们将采用文献 [90], 中式（33–36）所采用的出发点，但在寻找位置空间双拷贝时采取不同的方法。也就是说，我们将坚持使用旋量语言，并运用文献 [76, 78, 83], 中的扭量方法；这些方法近期已成功用于推导纯引力中的 Weyl 双拷贝公式。作为预热，我们将在下一节考察最简单的解——对应于对库仑荷进行双拷贝。

3 JNW 解的旋量双拷贝

3.1 从动量空间到扭量空间

在文献 [76, 83] 中（受文献 [78]启发），式（33–36）中出现的逆傅里叶变换被分为两个阶段，从而在动量空间与位置空间之间引入一个中间的扭量空间。这不仅带来了更多见解，使我们能够系统地推导位置空间双拷贝公式，还能确定这些公式在何种情况下适用。为说明这一思路，我们来关注式（33–36）的规范理论对应形式，即式（40）中振幅所对应的场强旋量为

$$\langle \Phi_{AB} \rangle = \mathrm{Re}\, \frac{\sqrt{2}}{M} \int \mathrm{d}\Phi(k) \hat{\delta}(u\cdot k)\, \mathcal{A}_+ \, |k\rangle_A |k\rangle_B \, e^{-ik\cdot x}\,, \tag{43}$$

$$\langle \tilde{\Phi}_{\dot{A}\dot{B}} \rangle = \mathrm{Re}\, \frac{\sqrt{2}}{M} \int \mathrm{d}\Phi(k) \hat{\delta}(u\cdot k)\, \mathcal{A}_- \, [k_{\dot{A}}| \, [k_{\dot{B}}| \, e^{-ik\cdot x}\,. \tag{44}$$

为执行相空间积分，可以进行如下变量变换

$$k_{A\dot{A}} = \omega \lambda_A \tilde{\lambda}_{\dot{A}} + \xi q_{A\dot{A}}, \tag{45}$$

其中， $q_{A\dot{A}}$ 是任意常数零四矢量的旋量表示，而旋量 λ_A 和$\tilde{\lambda}_{\dot{A}}$ 的定义只确定到整体缩放因子，该因子可以吸收到 ω中。于是，上述各种 bra-ket 符号在这些新变量下表示为

$$|k\rangle_A = \omega^{1/2}\lambda_A, \quad \langle k|^A = \omega^{1/2}\lambda^A, \quad [k|_{\dot{A}} = \omega^{1/2}\tilde{\lambda}_{\dot{A}}, \quad |k]^{\dot{A}} = \omega^{1/2}\tilde{\lambda}^{\dot{A}}. \tag{46}$$

如果我们选择通过以下方式对旋量进行参数化

$$\lambda_A = (1, z), \quad \tilde{\lambda}_{\dot{A}} = (1, \tilde{z}), \quad z, \tilde{z} \in \mathbb{C}, \tag{47}$$

那么，这一变量变换是从 k^a 的四个分量到集合 $(\omega,\ \xi,\ z,\ \tilde{z})$。计算雅可比行列式后，可得

$$d\Phi(k)=\frac{dzd\tilde{z}d\omega d\xi\delta(\xi)\omega}{4(2\pi)^3}, \tag{48}$$

因此，带有点指标的场强旋量变为

$$\tilde{\Phi}_{\dot{A}\dot{B}}=\frac{2\sqrt{2}}{4M(2\pi)^2}\,\mathrm{Re}\int dzd\tilde{z}d\omega d\xi\,\delta(\xi)\delta(u\cdot k)\omega^2\Theta(\omega)\mathcal{A}_-\,\tilde{\lambda}_{\dot{A}}\tilde{\lambda}_{\dot{B}}e^{-ik\cdot x}. \tag{49}$$

ξ 积分可以立即完成，并直接给出 $\xi=0$。这对应于以下事实：式（45）中的 ξ 刻画了 k^a 偏离零向量（因而偏离壳上条件）的程度。然而，式（43）显然包含一个壳上傅里叶变换，因此 ξ 的消失确保了这一壳上条件。为继续计算该积分，我们代入库仑振幅的显式形式，即将 $\theta=a^a=0$ 代入式（40）所得的形式。由式（42）可得

$$\mathcal{A}_-=\frac{2MQ}{\sqrt{2}}\frac{u_{A\dot{A}}\lambda^A l^{\dot{A}}}{\tilde{\lambda}_{\dot{B}}l^{\dot{B}}}, \tag{50}$$

因此，式（49）变为

$$\begin{aligned}\tilde{\Phi}_{\dot{A}\dot{B}}=\frac{Q}{(2\pi)^2}\,\mathrm{Re}\int dzd\tilde{z}d\omega\delta\left(u_{A\dot{A}}\lambda^A\tilde{\lambda}^{\dot{A}}\right)\omega\Theta(\omega)\tilde{\lambda}_{\dot{A}}\tilde{\lambda}_{\dot{B}}e^{-\frac{i\omega}{2}\lambda_A\tilde{\lambda}_{\dot{A}}x^{A\dot{A}}}\\ \times\frac{u_{A\dot{A}}\lambda^A l^{\dot{A}}}{\tilde{\lambda}_{\dot{B}}l^{\dot{B}}}.\end{aligned} \tag{51}$$

剩下的狄拉克δ函数给出

$$\lambda_A\propto u_{A\dot{A}}\tilde{\lambda}^{\dot{A}} \tag{52}$$

正如文献 [76],所强调的，通过重新参数化可以将其化为等式

$$\lambda_A=\left(\frac{1}{\sqrt{z}},\sqrt{z}\right),\quad \tilde{\lambda}_{\dot{A}}=\left(\frac{1}{\sqrt{-\tilde{z}}},-\sqrt{-\tilde{z}}\right). \tag{53}$$

随后可以利用狄拉克δ函数消去 z 积分，得到

$$\tilde{\Phi}_{\dot{A}\dot{B}}=\frac{Q}{(2\pi)^2}\,\mathrm{Re}\int d\tilde{z}\,\tilde{\lambda}_{\dot{A}}\tilde{\lambda}_{\dot{B}}\mathfrak{M}(\tilde{\lambda}_{\dot{A}}), \tag{54}$$

其中

$$\begin{aligned}\mathfrak{M}(\tilde{\lambda}_{\dot{A}})&=\int d\omega\,\omega\,\Theta(\omega)e^{-\frac{i\omega}{2}u_A{}^{\dot{B}}x^{A\dot{A}}\tilde{\lambda}_{\dot{A}}\tilde{\lambda}_{\dot{B}}}\\ &=-\frac{4}{[u_A{}^{\dot{B}}x^{A\dot{A}}\tilde{\lambda}_{\dot{A}}\tilde{\lambda}_{\dot{B}}]^2}.\end{aligned} \tag{55}$$

在这一阶段，我们可以重新参数化，回到 $\tilde{z}$ 的原始定义。由式（47）可得

$$d\tilde{z}=\tilde{\lambda}_{\dot{E}}d\lambda^{\dot{E}} \tag{56}$$

是黎曼球面上的射影测度，该球面由 $\tilde{z}$ 参数化（在一个特定的坐标图中）~ ~ ~。
接下来，我们可以注意到 $\mathfrak{M}(\lambda_{\dot{A}})$ 通过特定组合 $\lambda_{\dot{A}}$ 和依赖于 $\lambda_{\dot{A}}$

$$\omega^A = x^{A\dot{A}}\tilde{\lambda}_{\dot{A}},$$

在这里，我们可以认出式 (16) 中的关联关系。因此，量

$$Z^\alpha = (\tilde{\lambda}_{\dot{A}}, \omega^A) \tag{57}$$

是射影扭量空间 $\mathbb{PT}$ 中一个真正的点！因此，我们还可以将式 (55) 中的函数依赖关系写为 $\mathfrak{M}(\lambda_{\dot{A}})$ $\equiv \rho_x[\mathfrak{M}(Z^\alpha)],$，这样式 (54) 就变为

$$\tilde{\Phi}_{\dot{A}\dot{B}} = -\frac{Q}{(2\pi)^2}\,\mathrm{Re}\oint \tilde{\lambda}_{\dot{E}} d\tilde{\lambda}^{\dot{E}}\,\tilde{\lambda}_{\dot{A}}\tilde{\lambda}_{\dot{B}}\,\rho_x[\mathfrak{M}(Z^\alpha)]. \tag{58}$$

现在很容易认出式 (19) 中的彭罗斯变换。此外，式 (55) 中的函数~在对 Z^α （因而也对 $\lambda_{\dot{A}}$）进行缩放时是 -4 次齐次的，这与式 (20) 一致。

我们来总结一下整个过程。首先，我们将时空（旋量）场表示为动量空间散射振幅的逆壳上傅里叶变换。接着，我们变换到旋量变量，并发现进行傅里叶变换的“一半”便可将振幅变换到扭量空间。事实上，式 (55) 是一种变体，即文献 [103]，开创性工作中所用的所谓半傅里叶变换；该工作开创了现代扭量方法在散射振幅研究中的应用。在这里，它表现为关于 ω 的拉普拉斯变换，根据式 (45)， ω 可解释为辐射的能量。请注意，在为 $\mathfrak{M}(Z^\alpha)$ 定义精确形式时，半变换为给定的经典时空场在扭量空间中定义了一个特定的上同调代表元，也就是说，这个代表元是由振幅“选取”的。文献 [76] 利用这一观察解决了文献 [22, 24] 中扭量双拷贝的上同调歧义。

3.2 (反)自对偶场强旋量之间的一致性关系

在式（58）中，我们已经证明，反自对偶场强旋量可以通过对一个由动量空间散射振幅导出的上同调代表元进行显式的彭罗斯变换而得到。我们也可以从式（43）出发，对自对偶旋量进行类似的推导，从而得到式（51）的对应形式：

$$\begin{aligned}\Phi_{AB} = \frac{Q}{(2\pi)^2}\,\mathrm{Re}\int dz d\tilde{z} d\omega \delta\left(u_{A\dot{A}}\lambda^A\tilde{\lambda}^{\dot{A}}\right)\omega\Theta(\omega)\lambda_A\lambda_B e^{-\frac{i\omega}{2}\lambda_A\tilde{\lambda}_{\dot{A}}x^{A\dot{A}}} \\ \times \frac{u_{A\dot{A}}l^A\tilde{\lambda}^{\dot{A}}}{l^A\lambda_A}.\end{aligned} \tag{59}$$

在这种情况下，我们可以利用狄拉克δ函数令

$$\tilde{\lambda}_{\dot{A}} = u_{A\dot{A}}\lambda^A, \tag{60}$$

即公式（52）的逆关系。这样便可消去公式（59）中的 $\tilde{z}$ 积分，从而得到

$$\Phi_{AB} = \frac{Q}{(2\pi)^2}\,\mathrm{Re}\int dz \lambda_A\lambda_B\mathfrak{N}(\lambda_A), \tag{61}$$

其中

$$\begin{aligned}\mathfrak{N}(\lambda_A) &= \int d\omega\omega\Theta(\omega)e^{\frac{i\omega}{2}u^B{}_{\dot{A}}x^{A\dot{A}}\lambda_A\lambda_B} \\ &= \frac{-4}{[u^B{}_{\dot{A}}x^{A\dot{A}}\lambda_A\lambda_B]^2}.\end{aligned} \tag{62}$$

注意到这只依赖于 λ_A 和

$$\mu^{\dot{A}} = x^{A\dot{A}}\lambda_A,$$

我们看到， $\mathfrak{N}(\lambda_A) \equiv \rho_x[\mathfrak{N}(W_\alpha)]$ 定义在对偶扭量空间上，其中 W_α 的定义如方程（24）所示。于是方程（61）变为

$$\Phi_{AB} = \frac{Q}{(2\pi)^2}\,\mathrm{Re}\oint \lambda_E d\lambda^E\,\lambda_A\lambda_B\rho_x[\mathfrak{N}(W_\alpha)], \tag{63}$$

由此我们得到了众所周知的结果：反自对偶（自对偶）解分别与来自扭量空间（对偶扭量空间）的彭罗斯变换相关联。然而，近期文献 [76] 中忽略了这样一个事实：对于这一特定解，也可以推导出反自对偶与自对偶旋量场之间的一致性关系。回到方程（51），我们可以选择˜，利用狄拉克δ函数消去$\lambda_{\dot{A}}$，而不是选择 λ_A；也就是说，使用方程（60）而非方程（52）。于是得到

$$\tilde{\Phi}_{\dot{A}\dot{B}} = u^A{}_{\dot{A}}u^B{}_{\dot{B}}\left[\frac{Q}{(2\pi)^2}\,\mathrm{Re}\int dz\,\lambda_A\lambda_B\rho_x[\mathfrak{N}(\lambda_A)]\right], \tag{64}$$

其中 $\mathfrak{N}$ (λ_A)的定义如方程（62）所示。换言之，我们得到了关系 ip

$$\tilde{\Phi}_{\dot{A}\dot{B}}(x) = u^A{}_{\dot{A}}u^B{}_{\dot{B}}\Phi_{AB}(x), \tag{65}$$

其逆式——可通过将式（52）代入式（59）推导得到——为

$$\Phi_{AB} = u_A{}^{\dot{A}}u_B{}^{\dot{B}}\tilde{\Phi}_{\dot{A}\dot{B}}. \tag{66}$$

通过求出式（58、63）的彭罗斯变换所隐含的旋量场的显式形式，可以直观地了解这一关系在实际中如何发挥作用。首先注意到，利用式（47）的参数化，我们可以将式（55）中出现的组合写为

$$u_A{}^{\dot{B}}x^{A\dot{A}}\tilde{\lambda}_{\dot{A}}\tilde{\lambda}_{\dot{B}} = \tilde{N}^{-1}(x)(\tilde{z}-\tilde{z}_1)(\tilde{z}-\tilde{z}_2), \tag{67}$$

其中，经过显式计算可得

$$\tilde{N}^{-1}(x) = x^{0\dot{1}}, \quad \tilde{z}_{1,2} = \frac{\left(x^{1\dot{1}} - x^{0\dot{0}}\right) \pm \sqrt{(x^{0\dot{0}})^2 + (x^{1\dot{1}})^2 - 2x^{0\dot{0}}x^{1\dot{1}} + 4x^{0\dot{1}}x^{1\dot{0}}}}{2x^{0\dot{1}}}. \tag{68}$$

由式 (54, 55)，我们得到

$$\tilde{\Phi}_{\dot{A}\dot{B}} = \frac{4Q}{4\pi^2}\tilde{N}^2(x)\,\mathrm{Re}\oint d\tilde{z}\frac{(1,\tilde{z})_{\dot{A}}(1,\tilde{z})_{\dot{B}}}{(\tilde{z}-\tilde{z}_1)^2(\tilde{z}-\tilde{z}_2)^2}, \tag{69}$$

我们可以通过围住 $\tilde{z}=\tilde{z}_1$ 处的极点来计算 $\tilde{z}$ 积分（类似计算可参见文献 [24] ）。结果为

$$\tilde{\Phi}_{\dot{A}\dot{B}}=-\frac{4Q}{2\pi}\frac{1}{[x^{0\dot{1}}]^2}\,\mathrm{Re}\,i\left[\frac{\tilde{\alpha}_{(\dot{A}}\tilde{\beta}_{\dot{B})}}{(\tilde{z}_1-\tilde{z}_2)^3}\right], \tag{70}$$

其中主旋量为

$$\tilde{\alpha}_{\dot{A}}=(1,\tilde{z}_1),\quad \tilde{\beta}_{\dot{B}}=(1,\tilde{z}_2). \tag{71}$$

代入式 (68) 的结果并化简，可得

$$\tilde{\Phi}_{\dot{A}\dot{B}}=\frac{4Q}{2\pi}\,\mathrm{Re}\,i\left[\frac{1}{\Lambda^{3/2}(x)}\begin{pmatrix} x^{0\dot{1}} & x^{1\dot{1}}-x^{0\dot{0}} \\ x^{1\dot{1}}-x^{0\dot{0}} & -x^{1\dot{0}}\end{pmatrix}\right], \tag{72}$$

其中

$$\Lambda=(x^{0\dot{0}})^2+(x^{1\dot{1}})^2-2x^{0\dot{0}}x^{1\dot{1}}+4x^{0\dot{1}}x^{1\dot{0}}. \tag{73}$$

同样，可以对式 (63) 进行彭罗斯变换，结果为

$$\Phi_{AB}=-\frac{4Q}{2\pi}\,\mathrm{Re}\,i\left[\frac{1}{\Lambda^{3/2}(x)}\begin{pmatrix} x^{1\dot{0}} & x^{1\dot{1}}-x^{0\dot{0}} \\ x^{1\dot{1}}-x^{0\dot{0}} & -x^{0\dot{1}}\end{pmatrix}\right]. \tag{74}$$

为确认式 (65) 的关系，我们注意到静态四维速度 $u^a=$ (1，0)意味着

$$u^{A}{}_{\dot{A}}=\epsilon^{BA}u_{A\dot{A}}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0\end{pmatrix}. \tag{75}$$

于是有

$$u^{A}{}_{\dot{A}}u^{B}{}_{\dot{B}}\Phi_{AB}=-\frac{4Q}{2\pi}\,\mathrm{Re}\,i\left[\frac{1}{\Lambda^{3/2}(x)}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x^{1\dot{0}} & x^{1\dot{1}}-x^{0\dot{0}} \\ x^{1\dot{1}}-x^{0\dot{0}} & -x^{0\dot{1}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0\end{pmatrix}\right],$$

这确实与方程（72）一致。请注意，这里我们选择用分量 $x^{A\dot{A}}$ 表示场强旋量，而不是代入显式的时空坐标。随后便可轻松地计算出这些公式在 (2,2) 或 (1,3) 度规下的结果。

3.3 JNW 解的双拷贝公式

现在，我们已经具备了所需的全部要素，可以判断 JNW 解是否存在双重˜拷贝公式。让我们从旋量 $\mathbf{X}_{\dot{A}\dot{B}\dot{C}\dot{D}}$ 开始，它由式（33）中的振幅表示。仿照推导式（58）的步骤，我们得到

$$\tilde{\mathbf{X}}_{\dot{A}\dot{B}\dot{C}\dot{D}}=\frac{\kappa^2 c_{--}M}{(2\pi)^2}\,\mathrm{Re}\oint\tilde{\lambda}_{\dot{E}}d\tilde{\lambda}^{\dot{E}}\,\tilde{\lambda}_{\dot{A}}\tilde{\lambda}_{\dot{B}}\tilde{\lambda}_{\dot{C}}\tilde{\lambda}_{\dot{D}}\,\rho_x\left[\frac{4}{(\tilde{\lambda}_{\dot{A}}U_A{}^{\dot{B}}\tilde{\lambda}_{\dot{B}}x^{A\dot{A}})^3}\right], \tag{76}$$

这里我们代入了式（40）中振幅的显式形式，并再次利用狄拉克δ函数 $\delta(u\cdot k)$ 来施加式（52）的条件。使用式（47）的参数化进行彭罗斯变换（类似计算可参见文献 [24] ），可得

$$\tilde{\mathbf{X}}_{\dot{A}\dot{B}\dot{C}\dot{D}} = \frac{\kappa^2 c_{--} iM}{2\pi}\,\mathrm{Re}\left[\frac{\tilde{N}^3(x)}{(\tilde{z}_1-\tilde{z}_2)^5}\tilde{\alpha}_{(\dot{A}}\tilde{\beta}_{\dot{B}}\tilde{\alpha}_{\dot{C}}\tilde{\beta}_{\dot{D})},\right] \tag{77}$$

其中 $\tilde{N}(x)$, $\tilde{z}_{1,\,2}$ 以及主旋量 $\tilde{\alpha}_{\dot{A}}$ 和 $\tilde{\beta}_{\dot{A}}$ 已在式（68、71）中定义。还可以定义一个标量场

$$\tilde{S} \propto \frac{N(x)}{\tilde{z}_1-\tilde{z}_2}, \tag{78}$$

可以证明它满足无质量克莱因–戈尔登方程。随后，将该式与式（70、78）比较可得如下关系 (77)

$$\tilde{\mathbf{X}}_{\dot{A}\dot{B}\dot{C}\dot{D}} = \frac{\tilde{\Phi}_{(\dot{A}\dot{B}}\tilde{\Phi}_{\dot{C}\dot{D})}}{\tilde{S}}, \tag{79}$$

其中所有常数因子都已吸收到标量函数 $S(x)$中。这与式（12）的 Weyl双拷贝公式完全类似；事实上，使用扭量方法推导该公式的过程与参考文献 [76]中的完全相同。采用类似的论证，可以验证相应的关系

$$\mathbf{X}_{ABCD} = \frac{\Phi_{(AB}\Phi_{CD)}}{S}, \tag{80}$$

其中标量场 S 定义为

$$S(x) \propto \frac{N(x)}{z_1-z_2}, \quad N^{-1}(x) = x^{1\dot{0}}. \tag{81}$$

鉴于这些公式与纯引力中的对应公式十分相似，它们的出现或许并不令人意外。一个更有趣的问题是，对于式（11）中出现的混合指标旋量，是否也存在双拷贝公式；在纯引力的真空解中，这些旋量并无对应物。我们先来考虑

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{\Phi}_{AB\dot{C}\dot{D}}\rangle = \frac{\kappa^2 c_{+-} M^2}{4(2\pi)^2}\,\mathrm{Re}\; i\int dz d\tilde{z} d\omega\omega^3\Theta(\omega)\delta(2p\cdot k)\,\lambda_A\lambda_B\tilde{\lambda}_{\dot{C}}\tilde{\lambda}_{\dot{D}}\,e^{-\frac{i\omega}{2}\lambda_A\tilde{\lambda}_{\dot{A}}x^{A\dot{A}}}\\ \times\left(\frac{u_{A\dot{A}}\lambda^A l^{\dot{A}}}{\tilde{\lambda}_{\dot{B}}l^{\dot{B}}}\right)\left(\frac{u_{D\dot{D}}l^D\tilde{\lambda}^{\dot{D}}}{l^C\lambda_C}\right)\,,\end{aligned} \tag{82}$$

其中，我们将式（40）的振幅代入了式（35）。随后，我们可以利用狄拉克δ函数来实现式（52）或式（60）中的任一条件。选择前者，我们得到

$$\langle \mathbf{\Phi}_{AB\dot{C}\dot{D}}\rangle = \frac{\kappa^2 c_{+-} M}{4(2\pi)^2} u^C{}_{\dot{C}} u^D{}_{\dot{D}}\,\mathrm{Re}\; i\int dz d\omega\omega^2\Theta(\omega)\,\lambda_A\lambda_B\lambda_C\lambda_D\,e^{\frac{i\omega}{2}\lambda_A u^B{}_{\dot{A}}\lambda_B x^{A\dot{A}}}\,, \tag{83}$$

这里出现的积分恰好就是生成$\mathbf{X}_{ABCD}$的积分。利用式（80），我们便可立即得到

$$\mathbf{\Phi}_{AB\dot{C}\dot{D}} = u^C{}_{\dot{C}} u^D{}_{\dot{D}}\left(\frac{\Phi_{(AB}\Phi_{CD)}}{S}\right). \tag{84}$$

这确实是混合指标黎曼旋量的一个双拷贝公式。然而，它的形式不同于此前在真空纯引力解的Weyl双拷贝中出现的式（12）等公式。具体而言，分子并非只包含电磁场强度张量的乘积，而是还涉及一个取决于静态源四速度的额外投影算符。要阐明这一结构，关键在于将 JNW 解的动量空间振幅变换到中间的扭量空间；正是这一步使我们能够确定式（52）中的关系，而该关系最终导致了式（84）中的额外前因子。事实上，式（84）与式（65）中针对库仑解得到的一致性关系颇为相似，这不禁令人疑惑：式（84）是否具有完全普遍性，还是说这种形式高度特化于我们在此考察的特定 JNW 解？我们将在下一节更全面地讨论这一点；但首先值得注意的是，我们的结果与近期文献 [28, 74], 进行比较颇有意思，该文探讨了如何将纯引力中的 Weyl双拷贝推广至非真空解。文中针对不同类型的解，为黎曼旋量提出了多种公式，其中包括如下组合：

$$\Phi_{AB\dot{C}\dot{D}} \propto \Phi_{AB}\tilde{\Phi}_{\dot{C}\dot{D}} \tag{85}$$

也就是说，涉及两个不同规范理论场强旋量的乘积。有趣的是，式（84）的公式并非如此。为此，注意到对称化括号可展开为

$$\mathbf{\Phi}_{AB\dot{C}\dot{D}} = u^{C}{}_{\dot{C}}u^{D}{}_{\dot{D}}\frac{1}{S}\left(\Phi_{AB}\Phi_{CD} + \Phi_{AC}\Phi_{BD} + \Phi_{AD}\Phi_{BC}\right). \tag{86}$$

在第一项中，可以利用式（65）的一致性关系，将混合指标黎曼旋量表示为规范理论场强的乘积。然而，第二项和第三项则不行，它们一般不为零。为说明这一点，可以令

$$\Phi_{AB} \propto \alpha_{(A}\beta_{B)}, \quad I_{ABCD} = u^{C}{}_{\dot{C}}u^{D}{}_{\dot{D}}\Big[\Phi_{AC}\Phi_{BD} + \Phi_{AD}\Phi_{BC}\Big],$$

并进行显式计算，得到

$$I_{0011} \propto \alpha_0^2\beta_0^2. \tag{87}$$

若要使 I_{ABCD} 为零，则必须有 $\alpha_0 = 0$ 或 $\beta_0 = 0$，不失一般性，我们可以选择前者。于是得到

$$I_{0000} \propto \alpha_1^2\beta_0^2. \tag{88}$$

现在，若选择 $\alpha_1 = 0$ ，整个旋量场 $\mathbf{\Phi}_{AB\dot{C}\dot{D}}$ 就会为零。因此，我们必须选择 $\beta_0 = 0$，这进一步意味着

$$I_{1111} = \alpha_2^2\beta_2^2. \tag{89}$$

现在我们不得不在 $\alpha_2 = 0$ 或 $\beta_2 = 0$ 中作出选择，使得 I_{ABCD} 唯一能够消失的条件是 $\mathbf{\Phi}_{AB\dot{C}\dot{D}=0^\circ}$ 因此，式 (86) 中的第二项和第三项一般确实不为零。由此，扭量方法得到的双拷贝公式明显不同于文献中出现的其他双拷贝 ans¨atz。这一点本身并不令人意外，因为文献 [90], 的研究结果表明，在张量语言中，对于 JNW 解，无法在位置空间中对规范理论场强进行纯双拷贝。

最后，我们注意到，另一个混合指标黎曼旋量对应的式 (84) 可推导为

$$\tilde{\mathbf{\Phi}}_{\dot{A}\dot{B}CD} = u_C{}^{\dot{C}} u_D{}^{\dot{D}} \left(\frac{\tilde{\Phi}_{(\dot{A}\dot{B}} \tilde{\Phi}_{\dot{C}\dot{D})}}{\tilde{S}} \right), \tag{90}$$

它与式（84）仅有简单的关联，因此上述类似的观察同样适用。

在本节中，我们考察了 $\mathcal{N} = 0$ 超引力中的 JNW 解，发现确实可以为参与式（11）分解的所有旋量构造旋量双拷贝公式。其中两个公式是纯引力真空解的 Weyl 双拷贝的直接对应形式，而混合指标双拷贝公式则与以往遇到的任何公式都不同。为了探究这类公式具有多大的普适性，我们必须不再局限于式（40）中的无自旋、无磁荷情形。下一节将讨论这一问题。

4 非零自旋和 NUT 电荷的情形

利用式（40）的完整振幅，我们可以将库仑解推广到包含非零磁单极子电荷和自旋的情形；在每个理论中，参数 $\alpha \equiv (a,\ \theta)$ 均取非零值。为了考察这对推广旋量双拷贝的影响，我们先回顾文献 [76]，中纯引力的相关结果。

4.1 纯引力中的 Kerr-Taub-NUT 解

在第 3 节中，我们根据式 (32)，用规范理论振幅表示了导出 JNW 解的引力振幅。然而，对于纯引力中对应于非零自旋和／或 NUT 荷的振幅，通常将其写成如下形式（参见例如文献 [76, 90]）

$$\mathcal{M}_{\pm} \sim \frac{\mathcal{A}_{\pm}\mathcal{A}_{\pm}}{\mathcal{A}_{\pm}^{\text{scal.}}}. \tag{91}$$

这里，$\mathcal{A}_{\pm}^{\text{scal.}}$ 是一个三点振幅，描述无质量标量从一个旋转和／或带有“磁”荷的粒子中发射出来。与该振幅对应的经典解，是 $\sqrt{\text{Kerr}}$ 解或 Taub-NUT 解所谓的零阶拷贝，它由线性化双伴随标量场论的一个解构成。对于（反）自对偶情形，零阶拷贝场确实有所不同，因此标量振幅上标有 $\pm$ 。为了进一步理解式 (91) 中为何需要标量振幅，只需考虑自旋为 a^a 的 Kerr 解；其反自对偶部分对应的相关三点振幅为

$$\mathcal{M}_{+} = e^{ik\cdot a}\mathcal{M}_{+}^{(0)}, \tag{92}$$

其中，$\mathcal{M}^{(0)}$ 表示无自旋（施瓦西）振幅。相应$\sqrt{\text{Kerr}}$解的光子振幅为

$$\mathcal{A}_{+} = e^{ik\cdot a}\mathcal{A}_{+}^{(0)}, \tag{93}$$

其中，$\mathcal{A}_{+}^{(0)}$ 表示库仑振幅。因此，如果我们只是按照式（32）对式（93）进行平方，得到的将是引力振幅

$$e^{2ik\cdot a}\mathcal{M}_{+}^{(0)},$$

其自旋是通常 Kerr 解的两倍。为了构建常规√Kerr解与 Kerr 解之间的双拷贝，接下来必须引入标量振幅

$$\mathcal{A}_{+}^{\text{scal.}} = e^{ik\cdot a}\mathcal{A}^{(0),\text{scal.}}, \tag{94}$$

其中 $\mathcal{A}^{\text{scal.}}$ 是无自旋粒子发射标量的振幅（实际上只是一个常数）。随后，式（91）的组合实现了相关的双拷贝。参考文献 [90] 指出，这会导致双拷贝存在歧义：可以选择不同的标量函数，使 Kerr 解的自旋以不同方式分配到两个规范理论振幅中。然而，事实仍然是，只有其中一种选择与 Kerr 解原有的 Kerr-Schild 和 Weyl 双拷贝相符 [9, 18]。事实上，位置空间中存在局域双拷贝这一要求本身就能确定相关的标量振幅，这一点可由参考文献 [76]中的论证得出。该文指出，式（34、44）以及无质量标量场对应的式子：

$$\phi = \text{Re}\, i \int d\Phi(k)\hat{\delta}(2p\cdot k)\mathcal{A}_{+}^{\text{scal.}}e^{-ik\cdot x}, \tag{95}$$

为每种理论在扭量空间中生成上同调代表元；在某些情况下，这些代表元之间存在简单的类乘积关系

$$\mathfrak{M}_{\text{grav.}} = \frac{\mathfrak{M}_{\text{EM}}\mathfrak{M}_{\text{EM}}}{\mathfrak{M}_{\text{scal.}}}. \tag{96}$$

这正是参考文献 [22, 24], 中的扭量双拷贝；文献证明，它作为彭罗斯变换的推论，导出了参考文献 [18] 中的位置空间 Weyl双拷贝。此外，每个扭量量 $\mathfrak{M}$ 都源自对某个散射振幅的精确积分变换，这一事实提供了一条选取特定上同调代表元的规则，从而解开了如何在扭量空间中“相乘”函数这一谜题。

正如参考文献 [76] 所阐明的，双拷贝在扭量空间中具有局部乘积结构并非普遍现象，而是依赖于某些特定三点散射振幅的特殊性质。例如，在公式 (55) 中，我们看到，从动量空间到扭量空间的变换是关于能量 ω 的拉普拉斯变换。鉴于三点振幅的双拷贝在动量空间中确实是乘积，只有当每个振幅对应的 ω 积分的被积函数由这样的函数构成——其卷积等价于相似函数的乘积——扭量空间中才可能得到局部乘积。对于 ω 的纯幂函数而言，这一条件成立；它们确实对应于无自旋粒子的三点振幅（即产生库仑解和施瓦西解的振幅）。但这并非唯一的可能性：我们也可以平移拉普拉斯变换中的共轭变量：

$$e^{\omega U} \to e^{\omega(U+V)}, \tag{97}$$

鉴于这一操作与卷积可交换。事实上，式（92、93、94）正是如此，因为四动量 k^a 关于 ω呈线性。因此，作用于三点振幅的 Newman-Janis 位移能够保持扭量空间中的局域双拷贝。然而，至关重要的是，只有当作用于引力、规范场和标量振幅的位移相同时，这一方法才行得通；其物理含义是，相应的时空场必须通过传统的单拷贝和零拷贝相互关联。一旦在扭量空间中得到局域乘积，通过彭罗斯变换便会自动产生局域时空旋量双拷贝，正如文献 [76]所示。

4.2 推广至 $\mathcal{N}=0$ 超引力

回到 $\mathcal{N}=0$ 超引力的完整谱，我们现在希望考察式（79、80、84、90）的双拷贝公式能否推广到存在非零自旋和/或 NUT 荷的情形。鉴于这两种情形的论证相似，这里我们仅考虑每个源粒子都具有非零自旋向量 a^a 的情况。此时，式（33–36）的 KMOC 公式变为

$$\mathbf{X}_{ABCD} = -\frac{\kappa^2 c_{++}}{2Q^2}\,\mathrm{Re}\; i\int \mathrm{d}\Phi(k)\hat{\delta}(2p\cdot k)\, e^{-ik\cdot(a_L+a_R)}\mathcal{A}^{(0)}_{+}\mathcal{A}^{(0)}_{+}\,|k\rangle_A|k\rangle_B|k\rangle_C|k\rangle_D\, e^{-ik\cdot x}\ , \tag{98}$$

$$\tilde{\mathbf{X}}_{\dot{A}\dot{B}\dot{C}\dot{D}} = -\frac{\kappa^2 c_{--}}{2Q^2}\,\mathrm{Re}\; i\int \mathrm{d}\Phi(k)\hat{\delta}(2p\cdot k)\, e^{ik\cdot(a_L+a_R)}\mathcal{A}^{(0)}_{-}\mathcal{A}^{(0)}_{-}\,[k|_{\dot{A}}[k|_{\dot{B}}[k|_{\dot{C}}[k|_{\dot{D}}\, e^{-ik\cdot x}\ , \tag{99}$$

$$\mathbf{\Phi}_{AB\dot{C}\dot{D}} = +\frac{\kappa^2 c_{+-}}{2\,Q^2}\,\mathrm{Re}\, i\int \mathrm{d}\Phi(k)\hat{\delta}(2p\cdot k)\, e^{-ik\cdot(a_L-a_R)}\mathcal{A}^{(0)}_{+}\mathcal{A}^{(0)}_{-}\,\,|k\rangle_A|k\rangle_B[k|_{\dot{C}}[k|_{\dot{D}}\, e^{-ik\cdot x}\ , \tag{100}$$

$$\tilde{\mathbf{\Phi}}_{\dot{A}\dot{B}CD} = +\frac{\kappa^2 c_{-+}}{2\,Q^2}\,\mathrm{Re}\, i\int \mathrm{d}\Phi(k)\hat{\delta}(2p\cdot k)\, e^{ik\cdot(a_L-a_R)}\mathcal{A}^{(0)}_{-}\mathcal{A}^{(0)}_{+}\,\,[k|_{\dot{A}}[k|_{\dot{B}}|k\rangle_C|k\rangle_D\, e^{-ik\cdot x}\ , \tag{101}$$

其中，$a^a_{L,R}$ 是两个规范理论解的自旋矢量，而 $\mathcal{A}^{(0)}_{\pm}$ 则是无自旋情形下的光子振幅。遵循与上一节完全类似的论证，我们可以将振幅（及自旋因子）的每个乘积写成无自旋标量振幅与规范理论振幅的组合，并且每一项都乘以相同的指数因子：

$$e^{\alpha_{\eta_L\eta_R}}\mathcal{A}_{\eta_L}\mathcal{A}_{\eta_R} \to \frac{[e^{\alpha_{\eta_L\eta_R}}\mathcal{A}^{(0)}_{\eta_L}][e^{\alpha_{\eta_L\eta_R}}\mathcal{A}^{(0)}_{\eta_R}]}{[e^{\alpha_{\eta_L\eta_R}}\mathcal{A}^{(0),\mathrm{scal.}}]}, \tag{102}$$

其中我们定义

$$\alpha_{\eta_L\eta_R} = -ik\cdot(\eta_L a_L + \eta_R a_R). \tag{103}$$

现在，应用第 3 节中的论证显然易行，结果是，式 (79、80、84、90) 被替换为

$$\tilde{\mathbf{X}}_{\dot{A}\dot{B}\dot{C}\dot{D}}[a_R+a_L] = \frac{\Phi_{(\dot{A}\dot{B}}[a_R+a_L]\Phi_{\dot{C}\dot{D})}[a_R+a_L]}{\tilde{S}[a_R+a_L]}, \tag{104}$$

$$\mathbf{X}_{ABCD}[a_R+a_L] = \frac{\Phi_{(AB}[a_R+a_L]\Phi_{\dot{C}\dot{D})}[a_R+a_L]}{S[a_R+a_L]}, \tag{105}$$

and

$$\mathbf{\Phi}_{AB\dot{C}\dot{D}}[a_R-a_L] = u^{C}{}_{\dot{C}}u^{D}{}_{\dot{D}}\left(\frac{\Phi_{(AB}[a_R-a_L]\Phi_{CD)}[a_R-a_L]}{S[a_R-a_L]}\right), \tag{106}$$

$$\mathbf{\Phi}_{\dot{A}\dot{B}CD}[a_R-a_L] = u_{C}{}^{\dot{C}}u_{D}{}^{\dot{D}}\left(\frac{\tilde{\Phi}_{(\dot{A}\dot{B}}[a_R-a_L]\tilde{\Phi}_{\dot{C}\dot{D})}[a_R-a_L]}{\tilde{S}[a_R-a_L]}\right). \tag{107}$$

这里，所有电磁旋量和标量场分别对应于 $\sqrt{}$Kerr 解和零阶拷贝Kerr 解，但其中自旋取为 a_R 和 a_L 的特定组合，

如各场的参数所示。与上一节讨论的 JNW 解一样，混合指标旋量的双拷贝公式包含一个前因子，该因子取决于源粒子的四速度。有趣的是，这与无自旋情形中出现的因子相同；归根结底，这是因为该解是静态的，前因子源自方程 (98–101) 中的狄拉克δ函数 $\delta(2p\cdot k)$。然而，方程 (104–107) 中的自旋参数使得这些公式无法获得严格的双拷贝诠释。要满足上一节概述的位置空间局域双拷贝要求，每个电磁旋量和标量场的自旋参数 a^a 必须相同。这也意味着，每个电磁旋量中出现的自旋向量组合都取决于两者 a_R 和 a_L ，也就是说，取决于双拷贝中涉及的两种规范理论各自的自旋向量。当然，存在一种特殊情形，此时确实可以获得双拷贝诠释，即 $a_R = a_L$。这与纯引力中 Kerr 解的情形相符，但此时轴子会自动消失。此外，膨胀子会呈现为由无自旋粒子产生的膨胀子；目前尚不清楚这种解是否能在线性化阶以外满足爱因斯坦-膨胀子运动方程（相关工作见例如文献 [104]）。

或许值得强调的是，尽管式（104–107）缺乏严格意义上的双拷贝解释，但它们仍然构成了 $\mathcal{N}=0$ 超引力在线性化阶解的精确位置空间关系。因此，即使适用范围有限，它们或许仍有用处。

5 讨论

本文探讨了这样一个问题： $\mathcal{N}=0$ 超引力是否存在类似于著名的 Weyl 双拷贝 [18]的位置空间双拷贝公式。为此，我们采用了近期发展的方法，该方法将经典解表示为散射振幅 [79], 的壳上逆傅里叶变换，并结合相关论证，将这一变换分为两个阶段 [78]。第一阶段将振幅映射到扭量空间，从而得到文献 [22, 24] 中的扭量双拷贝。第二阶段则是从扭量空间到位置空间的著名彭罗斯变换，由此可以辨明位置空间双拷贝公式是否存在。这一论证链此前曾用于推导最初的 Weyl 双拷贝 [76], ，以及所谓的 Cotton 双拷贝；后者适用于三维时空中的拓扑质量解 [81–83]。因此，自然可以尝试将其应用于 $\mathcal{N}=0$超引力，毕竟它是已知的杨-米尔斯理论的“完整”双拷贝。

近期，文献 [90], 探讨了 $\mathcal{N}=0$ 超引力是否存在位置空间双拷贝；该研究确实启发了本文。在那项研究中，作者使用张量形式体系，发现当膨胀子和／或轴子开启时，不存在双拷贝。本文的论证表明，情况并非完全如此：至少对于由不带 NUT 荷的无自旋粒子作为源的 JNW 解，我们确实可以为式（11）广义黎曼张量中出现的所有旋量场写出双拷贝公式。对于只有一种类型指标的旋量，这些公式与纯引力情形下的公式完全一致。然而，对于混合指标旋量，公式中还包含与源粒子四速度有关的额外因子。这些因子未在文献 [90] 中考虑，可能是因为该文着重研究位置空间双拷贝的张量公式，而从旋量转化为张量的过程可能会掩盖前一种表述中简洁明了的性质。此外，本文采用的扭量方法对于推导出额外前因子的存在至关重要；我们还指出，近期的相关研究中也没有这一因子

猜想 关于如何对非真空引力解的旋量进行双拷贝的猜想 [28, 74] .

当存在非零自旋和／或 NUT 荷时，同样可以为 $\mathcal{N} = 0$ 超引力的解写出形式上的位置空间双拷贝公式，其前因子也与 JNW 情形类似。然而，这些公式的解释并不自然，因为它们必须涉及电磁旋量的乘积，而每个电磁旋量都包含完整引力解的自旋／NUT 参数。这类公式是否有用仍有争议，但无论如何，令人感兴趣的是，扭量方法（如参考文献 [76, 83], 所示）再次能够确定旋量双拷贝公式的存在，以及其适用范围和条件。值得研究的是，类似方法能否为参考文献 [28, 74], 中探讨的广义（非真空）双拷贝提供启示，或者应用于其他理论和／或解的类型。

致谢

我们感谢 Tucker Manton 和 Ricardo Monteiro 所进行的有益讨论。本研究得到英国科学与技术设施委员会（STFC）综合资助项目 ST/P000754/1“弦理论、规范理论与对偶性”的支持。KAW 获得英国工程与自然科学研究委员会（EPSRC）提供的学生资助。

参考文献

[1] Z. Bern, J. J. Carrasco, M. Chiodaroli, H. Johansson 和 R. Roiban, 《颜色与运动学之间的对偶性及其应用》, 1909.01358。[2] H. Kawai、D. Lewellen 和 S. Tye, 《闭弦与开弦树振幅之间的关系》, 《*Nucl.Phys.* **B269** (1986) 1。[3] Z. Bern、J. J. M. Carrasco 和 H. Johansson, 《作为规范理论双拷贝的微扰量子引力》, 《物理评论快报》**105** (2010) 061602, 1004.0476。[4] Z. Bern、T. Dennen、Y.-t. Huang 和 M. Kiermaier, 《作为规范理论平方的引力》, 《物理评论》**D82** (2010) 065003, 1004.0693。[5] S. Oxburgh 和 C. White, 《软极限下的 BCJ 对偶性与双拷贝》, 《高能物理学杂志》**1302**(2013) 127, 1210.1110。[6] A. Sabio Vera、E. Serna Campillo 和 M. A. Vazquez-Mozo, 《非弹性振幅的颜色-运动学对偶性与 Regge 极限》, 《高能物理学杂志》**1304** (2013) 086, 1212.5103。[7] H. Johansson、A. Sabio Vera、E. Serna Campillo 和 M. A. Vazquez-Mozo, 《多重 Regge 运动学中的颜色-运动学对偶性与维数约化》, 《高能物理学杂志》**1310** (2013) 215, 1307.3106。[8] R. Saotome 和 R. Akhoury, 《高能极限下引力与规范散射之间的关系》, 《高能物理学杂志》**1301** (2013) 123, 1210.8111。[9] R. Monteiro、D. O’Connell 和 C. D. White, 《黑洞与双拷贝》, 《高能物理学杂志》**1412** (2014) 056, 1410.0239。

[10] A. Luna、R. Monteiro、D. O'Connell 和 C. D. White，《Taub-NUT 时空的经典双拷贝》，《物理快报》**B750** (2015) 272–277，1507.01869。[11] A. K. Ridgway 和 M. B. Wise，《静态球对称 Kerr-Schild 度规及其对经典双拷贝的意义》，《物理评论》**D94** (2016)，第 4 期，044023，1512.02243。[12] N. Bahjat-Abbas、A. Luna 和 C. D. White，《弯曲时空中的 Kerr-Schild 双拷贝》，《高能物理学杂志》**12** (2017) 004，1710.01953。[13] M. Carrillo-Gonz´alez、R. Penco 和 M. Trodden，《最大对称时空中的经典双拷贝》，《高能物理学杂志》**04** (2018) 028，1711.01296。[14] M. Carrillo Gonz´alez、B. Melcher、K. Ratliff、S. Watson 和 C. D. White，《三维时空中的经典双拷贝》，《高能物理学杂志》**07** (2019) 167，1904.11001。[15] I. Bah、R. Dempsey 和 P. Weck，《Kerr-Schild 双拷贝与复世界线》，1910.04197。[16] G. Alkac、M. K. Gumus 和 M. A. Olpak，《三维库仑解的 Kerr-Schild 双拷贝》，2105.11550。[17] G. Alkac、M. K. Gumus 和 M. A. Olpak，《三维 Kerr-Schild 双拷贝中的广义黑洞》，《物理评论*D*》**106** (2022)，第 2 期，026013，2205.08503。[18] A. Luna、R. Monteiro、I. Nicholson 和 D. O'Connell，《D 型时空与 Weyl 双拷贝》，《经典与量子引力》**36** (2019) 065003，1810.08183。[19] S. Sabharwal 和 J. W. Dalhuisen，《反自对偶时空、引力瞬子与 Weyl 张量的纽结零点》，《高能物理学杂志》**07** (2019) 004，1904.06030。[20] R. Alawadhi、D. S. Berman 和 B. Spence，《Weyl 加倍》，《高能物理学杂志》**09** (2020) 127，2007.03264。[21] H. Godazgar、M. Godazgar、R. Monteiro、D. Peinador Veiga 和 C.N. Pope，《Weyl 双重

e

引力波双拷贝，"《物理评论快报》**126** (2021)，第 10 期，101103，2010.02925。[22] C. D. White，《经典双拷贝的扭量基础》，《物理评论快报》**126**(2021)，第 6 期，061602，2012.02479。[23] E. Chac´on、H. Garc´ıa-Compe´an、A. Luna、R. Monteiro 和 C. D. White，《新的天体双拷贝》，《高能物理学杂志》**03** (2021) 247，2008.09603。[24] E. Chac´on、S. Nagy 和 C. D. White，《来自扭量空间的Weyl双拷贝》，《高能物理学杂志》**05** (2021) 2239，2103.16441。[25] E. Chac´on、A. Luna 和 C. D. White，《多极展开的双拷贝》，2108.07702。[26] E. Chac´on、S. Nagy 和 C. D. White，《扭量双拷贝的替代表述》，《高能物理学杂志》**03** (2022) 180，2112.06764。

[27] R. Dempsey 和 P. Weck, 《紧化 Kerr-Schild 双拷贝》, 2211.14327。[28] D. A. Easson、T. Manton 和 A. Svesko, 《爱因斯坦–麦克斯韦理论与Weyl双拷贝》, 2210.16339。[29] S. Chawla 和 C. Keeler, 《对齐场双拷贝至 Kerr-NUT-(A)dS》, 2209.09275

.

[30] S. Han, 《含宇宙学常数的真空时空中的Weyl双拷贝》, 《高能物理学杂志》 *P* **09** （2022）238, 2205.08654。[31] K. Armstrong-Williams、C. D. White 和 S. Wikeley, 《自对偶双拷贝的非微扰方面》, 《高能物理学杂志》**08** （2022）160, 2205.02136。[32] S. Han, 《弯曲时空中Weyl双拷贝与无质量自由场》, 2204.01907。[33] G. Elor、K. Farnsworth、M. L. Graesser 和 G. Herczeg, 《纽曼–彭罗斯映射与经典双拷贝》, 2006.08630。[34] K. Farnsworth、M. L. Graesser 和 G. Herczeg, 《纽曼–彭罗斯映射的扭量空间起源》, 2104.09525。[35] A. Anastasiou、L. Borsten、M. J. Duff、L. J. Hughes 和 S. Nagy, 《引力对称性的杨–米尔斯起源》, 《物理评论快报》**113** （2014）, 第23期, 231606, 1408.4434。[36] G. Lopes Cardoso、G. Inverso、S. Nagy 和 S. Nampuri, 《关于引力理论双拷贝构造的评述》, 载于第*17*届希腊基本粒子物理与引力学校及研讨会（*CORFU2017*）, 希腊科孚岛, *2017*年*9*月*2*日至*28*日。2018年。1803.07670。[37] A. Anastasiou、L. Borsten、M. J. Duff、S. Nagy 和 M. Zoccali, 《引力作为规范理论

y

平方：鬼故事”, 《物理评论快报》**121** (2018年), no. 21, 211601, 1807.02486.[38] A. Luna、S. Nagy 和 C. White, “卷积双拷贝：一个点的案例研究”, 《高能物理学杂志》**09** (2020) 062, 2004.11254.[39] L. Borsten 和 S. Nagy, “从双拷贝到三次阶的纯 BRST 爱因斯坦–希尔伯特拉格朗日量”, 《高能物理学杂志》**07** (2020) 093, 2004.14945.[40] L. Borsten、B. Jurco、H. Kim、T. Macrelli、C. Saemann 和 M. Wolf, “杨-米尔斯理论的贝基–鲁埃–斯托拉–泰廷拉格朗日量双拷贝”, 《物理评论快报》**126** (2021年), no. 19, 191601, 2007.13803.[41] W. D. Goldberger、S. G. Prabhu 和 J. O. Thompson, “双伴随标量双拷贝中的经典胶子与引力子辐射”, 物理评论**D96** (2017), no. 6, 065009, 1705.09263.[42] W. D. Goldberger 和 A. K. Ridgway, “束缚态与经典双拷贝”, 物理

.

《物理评论快报》**D97** （2018年）, 第8期, 085019, 1711.09493。[43] W. D. Goldberger、J. Li 和 S. G. Prabhu, 《自旋粒子、轴子辐射与经典双拷贝》, 《物理评论 *D*》**D97** （2018年）, 第10期, 105018, 1712.09250。

[44] W. D. Goldberger 和 J. Li, 《弦、延展物体与经典双拷贝》, 1912.01650。[45] W. D. Goldberger 和 A. K. Ridgway, 《色荷的辐射与经典双拷贝》, 《物理评论*D*》**D95** (2017年), 第12期, 125010, 1611.03493。[46] S. G. Prabhu, 《弯曲时空中的经典双拷贝: 由双伴随标量得到微扰杨-米尔斯理论》, 2011.06588。[47] A. Luna、R. Monteiro、I. Nicholson、A. Ochirov、D. O'Connell、N. Westerberg 和 C. D. White, 《杨-米尔斯理论产生的微扰时空》, 《高能物理学杂志》**04** (2017) 069, 1611.07508。[48] A. Luna、I. Nicholson、D. O'Connell 和 C. D. White, 《带电标量振幅引发的非弹性黑洞散射》, 《高能物理学杂志》**03** (2018年) 044, 1711.03901。[49] C. Cheung 和 C.-H. Shen, 《由作用量导出的味-运动学对偶对称性》, 《物理评论快报》**118** (2017年), 第12期, 121601, 1612.00868。[50] C. Cheung 和 J. Mangan, 《协变色-运动学对偶》, 《高能物理学杂志》**11** (2021) 069, 2108.02276。[51] C. Cheung、A. Helset 和 J. Parra-Martinez, 《几何-运动学对偶》, 《物理评论*D*》**106** (2022年), 第4期, 045016, 2202.06972。[52] C. Cheung、J. Mangan、J. Parra-Martinez 和 N. Shah, 《平坦地中的非微扰双拷贝》, 《物理评论快报》**129** (2022年), 第22期, 221602, 2204.07130。[53] R. Monteiro 和 D. O'Connell, 《自对偶扇区的运动学代数》, 《高能物理学杂志》**1107** (2011) 007, 1105.2565。[54] Borsten、Leron、Kim、Hyungrok、Jurco、Branislav、Macrelli、Tommaso、Saemann、Christian 和 Wolf、Martin, 《同伦代数中的双拷贝》, 2102.11390。[55] R. Alawadhi、D. S. Berman、B. Spence 和 D. Peinador Veiga, 《S对偶与双拷贝》, 《高能物理学杂志》**03** (2020) 059, 1911.06797。[56] A. Banerjee、E. Colg´ain、J. A. Rosabal 和 H. Yavartanoo, 《双拷贝中的Ehlers作为电磁对偶》, 1912.02597。[57] Y.-T. Huang、U. Kol 和 D. O'Connell, 《电磁对偶的双拷贝》, 1911.06318。[58] D. S. Berman、E. Chac´on、A. Luna 和 C. D. White, 《自对偶经典双拷贝与Eguchi-Hanson瞬子》, 1809.04063。[59] L. Alfonsi、C. D. White 和 S. Wikeley, 《拓扑与威尔逊线: 双拷贝的整体性质》, 《高能物理学杂志》**07** (2020) 091, 2004.07181。[60] R. Alawadhi、D. S. Berman、C. D. White 和 S. Wikeley, 《引力整体性的单拷贝》, 2107.01114。

[61] C. D. White, 《双伴随标量场的精确解》, 《物理快报B》763（2016年）365–369, 1606.04724。[62] P.-J. De Smet 和 C. D. White, 《双伴随标量场的扩展解》, 《物理快报B》775（2017年）163–167, 1708.01103。[63] N. Bahjat-Abbas、R. Stark-Much˜ao 和 C. D. White, 《双伴随线》, 《物理快报B》788（2019年）274–279, 1810.08118。[64] L. Borsten、B. Jurco、H. Kim、T. Macrelli、C. Saemann 和 M. Wolf, 《源自扭量空间的运动学李代数》, 2211.13261。[65] L. Borsten, 《引力作为规范理论的平方：综述》, 《新综述》43（2020年）, 第3期, 97–186。[66] T. Adamo、J. J. M. Carrasco、M. Carrillo-Gonz´alez、M. Chiodaroli、H. Elvang、H. Johansson、D. O'Connell、R. Roiban 和 O. Schlotterer, 《Snowmass白皮书：双拷贝及其应用》, 载于《2022年Snowmass夏季研究》。4, 2022年。2204.06547。[67] Z. Bern、J. J. Carrasco、M. Chiodaroli、H. Johansson 和 R. Roiban, 《第2章：颜色-运动学对偶性与双拷贝导论》, 《物理学杂志A》55（2022年）, 第44期, 443003, 2203.13013。[68] C. D. White, 《双拷贝——从光学到量子引力：教程》, 《美国光学学会杂志B》38（2021年）, 第11期, 3319–3330, 2105.06809。[69] V. E. Didenko、A. S. Matveev 和 M. A. Vasiliev, 《AdS(4) Kerr黑洞的非缠绕描述》, 《物理快报B》665（2008年）284–293, 0801.2213。[70] V. E. Didenko 和 M. A. Vasiliev, 《四维高自旋规范理论中的静态BPS黑洞》, 《物理快报B》682（2009年）305–315, 0906.3898。 [勘误：《物理快报B》722, 389（2013年）]。[71] V. E. Didenko 和 N. K. Dosmanbetov, 《经典双拷贝与高自旋场》, 2210.04704。[72] M. Walker 和 R. Penrose, 《关于特[22]时空测地线方程的二次第一积分》, 《数学物理通讯》18（1970年）265–274。[73] L. P. Hughston、R. Penrose、P. Sommers 和 M. Walker, 《关于带电Kerr解中带电粒子轨道的一个二次第一积分》, 《数学物理通讯》27（1972年）303–308。[74] D. A. Easson、T. Manton 和 A. Svesko, 《Weyl双拷贝中的源》, 《物理评论快报》127（2021年）, 第27期, 271101, 2110.02293。[75] T. Adamo 和 U. Kol, 《无穷远处的经典双拷贝》, 《经典与量子引力》39（2022年）, 第10期, 105007, 2109.07832。[76] A. Luna、N. Moynihan 和 C. D. White, 《为什么Weyl双拷贝在位置空间中是局域的？》, 《高能物理学杂志》12（2022年）046, 2208.08548。

[77] E. Crawley、A. Guevara、N. Miller 和 A. Strominger，《Klein空间中的黑洞》，2112.03954。[78] A. Guevara，《从扭量空间中的S矩阵重构经典时空》，2112.05111。[79] D. A. Kosower、B. Maybee 和 D. O'Connell，《振幅、可观测量与经典散射》，《高能物理学杂志》**02** （2019年）137，1811.10950。[80] R. Monteiro、D. O'Connell、D. Peinador Veiga 和 M. Sergola，《分裂号差中的经典解及其双拷贝》，《高能物理学杂志》**05** （2021年）268，2012.11190。[81] W. T. Emond 和 N. Moynihan，《散射振幅与Cotton双拷贝》，2202.10499。[82] M. C. Gonz´alez、A. Momeni 和 J. Rumbutis，《引力波的Cotton双拷贝》，2202.10476。[83] M. Carrillo Gonz´alez、W. T. Emond、N. Moynihan、J. Rumbutis 和 C. D. White，《迷你扭量与Cotton双拷贝》，2212.04783。[84] C.-c. Tsai，爱因斯坦–*Weyl*及相关空间的彭罗斯变换。博士论文，1996年。[85] M. B. Green、J. H. Schwarz 和 E. Witten，超弦理论。第*1*卷：导论。剑桥数学物理专著。7，1988年。[86] J. Polchinski，弦理论。第*1*卷：玻色弦导论。剑桥数学物理专著。剑桥大学出版社，12，2007年。[87] K. Kim、K. Lee、R. Monteiro、I. Nicholson 和 D. Peinador Veiga，《点电荷的经典双拷贝》，《高能物理学杂志》**02** （2020年）046，1912.02177。[88] K. Lee，《Kerr-Schild双场理论与经典双拷贝》，《高能物理学杂志》**10** （2018年）027，1807.08443。[89] W. Cho 和 K. Lee，《异质Kerr-Schild双场论与经典双拷贝》，《高能物理学杂志》**07** （2019年）030，1904.11650。[90] R. Monteiro、S. Nagy、D. O'Connell、D. Peinador Veiga 和 M. Sergola，《NS-NS时空

s

来自振幅，”《高能物理学杂志》 **06** (2022) 021, 2112.08336.[91] R. Penrose 和 W. Rindler，旋量与时空。《剑桥数学物理专著》。剑桥大学出版社，英国剑桥，4，2011.[92] J. Stewart，高级广义相对论。《剑桥数学物理专著》。剑桥大学出版社，4，1994.[93] R. Penrose 和 W. Rindler，《旋量与时空》第*2*卷：时空几何中的旋量与扭量方法。《剑桥数学物理专著》。剑桥大学出版社，4，1988年。

[94] S. Huggett 和 K. Tod，《扭量理论导论》。9，1986年。

[95] T. Adamo，“扭量理论讲义”，*PoS* **Modave2017** （2018年）003，1712.02196。[96] M. G. Eastwood、R. Penrose 和 R. O. Wells，“上同调与无质量场”，《数学物理通讯》**78** （1981年）305–351。[97] W. T. Emond、Y.-T. Huang、U. Kol、N. Moynihan 和 D. O’Connell，“从库仑到 Kerr-Taub-NUT 的振幅”，《高能物理学杂志》**05** （2022年）055，2010.07861。[98] A. I. Janis、E. T. Newman 和 J. Winicour，“史瓦西奇点的实在性”，《物理评论快报》**20** （1968年）878–880。[99] R. P. Kerr，“自旋质量的引力场：代数特殊度规的一个例子”，《物理评论快报》**11** （1963年）237–238。[100] E. T. Newman 和 A. I. Janis，“关于 Kerr 自旋粒子度规的注记”，《数学物理学杂志》**6** （1965年）915–917。[101] A. H. Taub，“允许三参数运动群的真空时空”，《数学年刊》**53** （1951年），第3期，第472–490页。[102] E. Newman、L. Tamburino 和 T. Unti，“史瓦西度规的真空推广”，《数学物理学杂志》**4** （1963年），第7期，915–923。[103] E. Witten，“作为弦理论的扭量空间中的微扰规范理论”，《数学物理通讯》**252** （2004年）189–258，hep-th/0312171。[104] I. Bogush 和 D. Gal’tsov，“爱因斯坦-标量引力中的旋转解生成”，《物理评论*D*》**102** （2020年），第12期，124006，2001.02936。