激光辅助光电离：超越偶极近似

R. Della Picca，[1]，* J. M. Randazzo，[1] S. D. López，[2] M. F. Ciappina，[3,4,5,†] 以及 D. G. Arbó[2,6]巴里洛切原子中心（*CNEA*）、*CONICET* 和巴尔塞罗研究所（*UNCuyo*），*8400* 巴里洛切，阿根廷[2]天文学与空间物理研究所 - *IAFE*（*UBA-Conicet*），布宜诺斯艾利斯，阿根廷[3]物理系，广东以色列理工学院，大学路*241*号，汕头，广东，中国，*515063*[4]以色列理工学院，海法，*32000*，以色列[5]广东省能源转换材料与技术重点实验室，广东以色列理工学院，大学路*241*号，汕头，广东，中国，*515063*[6]布宜诺斯艾利斯大学 - 精确与自然科学学院和共同基础课程，布宜诺斯艾利斯，阿根廷（日期：2023年3月9日）

arXiv:2303.04646v1 [physics.atom-ph] 8 Mar 2023

我们对超越偶极近似的原子激光辅助光电离发射（LAPE）进行了理论研究。通过采用非相对论非偶极强场近似（非偶极 Gordon-Volkov 波函数），我们分析了光电子能谱（PES）的不同贡献，这些贡献可用内周期和周期间因子表示。我们发现，我们的非偶极方法不仅会在光传播方向上产生不对称发射，还允许在偶极近似下禁戒的方向上发生发射。前一种特征既可归因于周期内干涉过程，也可归因于周期间干涉过程；后一种特征则源于边带能量对发射角的依赖，而发射角是相对于传播方向定义的。本文针对处于 $1s$ 量子态的氦原子提出的理论方案具有足够的普适性，可应用于其他原子种类和场构型。

PACS 编号：32.80.Wr、32.80.Fb、03.65.Sq

I. 引言

当极紫外（XUV）脉冲和红外（IR）激光场在时空中与物质重叠时，便会发生所谓的激光辅助光电离发射（LAPE）过程。根据XUV脉冲持续时间的不同，可区分两种主要且截然不同的方案，即：（i）条纹化区，此时XUV脉冲持续时间短于一个红外光学周期；（ii）边带区，此时XUV脉冲持续时间长于一个红外光学周期。XUV脉冲在红外场的作用下将电子波包激发至连续态。在（i）中，若能以亚飞秒时间分辨率控制XUV场和红外场，便可记录不同时间延迟下的光电子能谱。该谱图 包含 XUV场和红外场的结构、振幅及相位信息。通过采用成熟的重建算法 [1–4]，可以高效地提取这些参数。或者，在（ii）中，吸收一个XUV光子的同时，从红外激光场中交换一个或多个额外光子，会在能量分辨光电子能谱（PES）中产生等间距的“边带”（SB）峰。由于分别吸收和发射红外光子，这些峰位于XUV光电离能量值的高能侧和低能侧 [5, 6]。边带（SB）峰的首次理论预言发表于 [7]。此后，该领域涌现了大量实验和理论研究（例如参见 [5, 8–13] 及其中的参考文献）。

边带峰与广为人知的阈上电离（ATI）峰有很大相似之处，在多光子强场电离中，靶吸收的光子数超过使电子电离所需的光子数 [14]。这两类峰（ATI 和边带）的形成，理论上都可以解释为红外激光场不同光学周期释放的电子波包之间发生了相长干涉 [15–17]。

此前，我们成功识别了电子轨迹，并在 ATI [15, 18, 19] 和 LAPE [17, 20, 21]情形下，基于偶极近似中的强场近似（SFA），将光电子能谱（PES）描述为周期间干涉因子与周期内干涉因子的透明乘积。我们表明，周期间干涉解释了边带的形成，而周期内干涉则表现为对前者的调制。通过使用鞍点近似（SPA）计算跃迁矩阵（即进行时间积分），可以很容易地将这两类干涉解释为电子轨迹的相干叠加。然而，正如我们在文献 [22, 23]，中所展示的，采用 SPA 并非必要：我们证明，可以根据一个核量来计算 PES；该核量表示一个仅持续一个 IR 周期的 XUV 脉冲所对应的随时间变化的光电离跃迁矩阵。

在上述所有理论方法中，均采用了偶极近似，前提是：（i）红外激光足够弱；（ii）激光波长足够短，以至于可以忽略磁效应。在偶极近似下，光子会将能量传递给靶标（原子、分子或固体），但不会传递动量，因为激光电场被视为均匀场，磁场分量不产生贡献。当使用（i）超强激光场 [24] 以及（ii）中红外激光源 [25, 26] 时，必须重新审视这些假设。对于长波长高强度激光，非偶极效应源于

* renata@cab.cnea.gov.ar
† marcelo.ciappina@gtiit.edu.cn

磁场的洛伦兹力，并导致激光光子的动量沿传播方向传递给逸出电子。ATI 中相对论效应的贡献可以通过参数 [27–29]

$$q = \frac{U_p}{mc^2}, \tag{1}$$

这反映了有质动力能U_p相对于电子静止能量的重要性（m 为电子静止质量， c 为光速）。当q较小时，若忽略剩余离子实对光电子的库仑效应，则被电离电子的经典运动可视为两种运动的叠加：（i）电子在（偶极）激光电场作用下沿偏振方向振荡，其有质动力能如前所述；（ii）电子沿光传播方向漂移，同时叠加以激光频率两倍振荡的运动，形成著名的“8”字形运动；这一描述是在随电子平均漂移动量运动的参考系中给出的。每周期的漂移相对于（偶极）抖动振幅的大小可量化为$\pi\sqrt{q}$，而沿传播方向的“8”字形运动振幅 β_0 与沿偏振方向的振幅之比为$\sqrt{q}/4$。隧穿出口处沿激光传播方向的动量偏移，是阈上电离（ATI）中相对论动力学穿越隧穿势垒的标志 [30]。非偶极效应会打破电子发射的前向/后向对称性，大幅抑制高阶阈上电离（HATI）中的再碰撞，从而影响激光驱动离子的光子发射 [31]。

目前，关于光子动量转移在电子和离子之间如何分配仍存在争论 [31–39]。电子获得的部分光子动量偏移，源于电子隧穿由原子势和激光场形成的势垒时磁场的作用。其余部分光子动量则在电子于连续态中运动时转移给电子 [39–42]。已有研究报告称，线偏振下，动量分布的低能区域会沿传播方向的反方向发生偏移 [31, 36, 39]。近期研究表明，亚周期线性动量转移可通过非偶极效应与非绝热效应对隧穿动力学的共同作用来解释 [33]。与实验的比较显示，要准确描述ATI峰的能量，必须将激光束轮廓与非偶极效应一并考虑 [42, 43]。

尽管近期关于强场电离中非偶极效应的研究十分活跃（参见上一段引用的文献），但据我们所知，目前尚无研究探讨最低阶非偶极修正如何影响激光辅助光电效应（LAPE）。在这一背景下，我们考虑（i）吸收一个极紫外光子，随后（ii）多次吸收或发射红外光子。因此，在阶段（i）中，红外光子不可能向原子传递动量；红外光子的动量只会在连续态中的光电子运动期间传递（阶段 ii）。基于此，本文研究激光辅助光电效应中的非偶极效应。本研究旨在揭示光电子能谱结构中的非偶极特征，这些特征体现在周期间和周期内干涉图样中。我们还分析了非偶极效应如何移动经典允许区域的边界。

本文结构如下：在第II节中，我们简要回顾领先阶非偶极强场近似理论，并分析跃迁矩阵时间积分的性质。在第IIA节中，我们分析周期间贡献；随后在第IIB节中，我们考察周期内因子；最后在第IIC节中，我们分析非偶极条件下激光辅助光电效应的半经典模型。在所有情形中，我们都仔细考察前向与后向发射的不对称性。结论见第III节。除非另有说明，全文均采用原子单位。

II. 理论与结果

在单活性电子（SAE）近似下，含时薛定谔方程（TDSE）为

$$i\frac{\partial}{\partial t}\left|\psi(t)\right\rangle = \left[H_0 + H_{\rm int}(t)\right]\left|\psi(t)\right\rangle, \tag{2}$$

其中 $H_0 = \mathbf{p}^2/2 + V(r)$ 是与时间无关的原子哈密顿量，其中第一项对应电子动能，第二项对应电子-原子实库仑相互作用。式（2）右侧的第二项，即

$$H_{\rm int} = \left[\mathbf{r} - iz/c\nabla\right]\cdot\left(\mathbf{F}_X(\eta) + \mathbf{F}_L(\eta)\right), \tag{3}$$

描述原子与时变极紫外 $[\mathbf{F}_X(\eta)]$ 和红外 $[\mathbf{F}_L(\eta)]$ 电场在长度规范下的相互作用，其中 $\eta = \eta(t,\mathbf{r})$ [44]。我们假设极紫外脉冲足够弱且波长足够短，因此极紫外电离可在偶极近似下处理，而非偶极效应则留待随后 NIR 激光的作用来描述，即 $\mathbf{F}_X(\eta) = \mathbf{F}_X(\omega_X t)$。

最初束缚于原子态 $|\phi_i\rangle$ 中的电子被发射至最终连续态 $|\phi_f\rangle$，其末态动量为$\mathbf{k}$，能量为 $E = k^2/2$。于是，能量与角分辨光电子能谱（PES）可计算为

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}E\mathrm{d}\Omega} = \sqrt{2E}\,|T_{\rm if}|^2, \tag{4}$$

其中， $T_{\rm if}$ 是与跃迁 $\phi_i \to \phi_f$ 对应的 T矩阵元，$\mathrm{d}\Omega = \sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi$ 是立体角，其中 θ 和 ϕ 分别是激光电离电子的极角和方位角。

在含时畸变波理论中，先验形式的跃迁振幅表示为

$$T_{\rm if} = -i\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}t\,\langle\chi_f^-(\mathbf{r},t)|H_{\rm int}(\mathbf{r},t)|\phi_i(\mathbf{r},t)\rangle, \tag{5}$$

其中 $\phi_i(\mathbf{r}\ t) = \varphi_i(\mathbf{r})\,e^{iI_p t}$ 是初始原子态，其电离势为 I_p，而 $\chi_f^-(\mathbf{r}\ t)$ 是畸变末态。只要末态通道 $\chi_f^-(\mathbf{r}\ t)$是方程（2）的精确解，方程（5）就是精确的。然而，为求解方程（5），目前已考虑了多种近似方法。其中最广为人知的是强场近似（SFA）；该近似忽略了末态中被射出电子态因其与残余离子相互作用而产生的库仑畸变，

并舍弃激光场对初始基态 [45, 46]的影响。例如，强场近似能够模拟阈上电离光电子能谱中的“环形”结构 [47]。

在本研究中，我们考虑原子系统在有限时长 XUV 激光脉冲与红外激光共同作用下的电离。红外激光在 $\hat{}x, \hat{}y$ 平面（$\hat{}\varepsilon_L$）内偏振，并沿 $\hat{}z$ 方向传播，波矢为 $\mathbf{K}_L = K_L \hat{}z$。我们用矢势描述红外激光脉冲的空间和时间依赖性（见 [44]第 2.8 节）：

$$\mathbf{A}_L(\mathbf{r}, t) = \mathbf{A}_L(\eta) = \hat{\varepsilon}_L A_L(\eta), \tag{6}$$

其中 $\eta = \omega_L t - \mathbf{K}_L \cdot \mathbf{r} = \omega_L(t - z/c)$，相应的电场为：

$$\mathbf{F}_L(\eta) = -\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{A}_L(\eta) = \hat{\varepsilon}_L F_L(\eta). \tag{7}$$

我们关注非偶极效应对激光辅助光电效应过程的影响，因此考虑矢势在 $1/c$ 的最低阶空间依赖激光场

$$\begin{aligned}\mathbf{A}_L(\eta) &\simeq \mathbf{A}_L(\eta)\big|_{\mathbf{r}=0} + (\mathbf{r}\cdot\nabla)\mathbf{A}_L(\eta)\big|_{\mathbf{r}=0} \\ &\simeq \mathbf{A}_L(\omega_L t) + \frac{z}{c}\mathbf{F}_L(\omega_L t),\end{aligned} \tag{8}$$

其中 $\mathbf{A}_L(\eta)\big|_{\mathbf{r}=0} = \mathbf{A}_L(\omega_L t)$。随后，我们用长度规范下的非偶极 Gordon-Volkov 波函数近似畸变末态（见 [44]式 (2.199)）：

$$\begin{aligned}\chi_f^{V_{\rm ND}}(\mathbf{r}, t) = (2\pi)^{-3/2} \exp\{i\,\mathbf{\Pi}(\mathbf{k}, t)\cdot\mathbf{r}\} \\ \times \exp\left\{\frac{i}{2}\int_t^\infty \mathbf{\Pi}^2(\mathbf{k}, t')\mathrm{d}t'\right\},\end{aligned} \tag{9}$$

其中

$$\mathbf{\Pi}(\mathbf{k}, t) = \mathbf{k} + \mathbf{A}_L(\omega_L t) + \left[\mathbf{k}\cdot\mathbf{A}_L(\omega_L t) + \frac{1}{2}\mathbf{A}_L^2(\omega_L t)\right]\frac{\hat{z}}{c}, \tag{10}$$

and

$$\begin{aligned}\mathbf{\Pi}^2(\mathbf{k}, t) = k^2 + 2(\mathbf{k}\cdot\hat{\varepsilon}_L)[1 + \frac{\mathbf{k}\cdot\hat{z}}{c}]A_L(\omega_L t) \\ + [1 + \frac{\mathbf{k}\cdot\hat{z}}{c} + \frac{(\mathbf{k}\cdot\hat{\varepsilon}_L)^2}{c^2}]A_L^2(\omega_L t) \\ + \frac{\mathbf{k}\cdot\hat{\varepsilon}_L}{c^2}A_L^3(\omega_L t) + \frac{1}{4c^2}A_L^4(\omega_L t).\end{aligned} \tag{11}$$

这里，我们考虑到红外场对矢势的贡献占主导地位。由于 XUV脉冲的频率远高于红外场的频率，且 XUV场的强度远小于红外场，因此可以忽略 XUV场对矢势的贡献 [48, 49]。在偶极近似下（$1/c \to 0$ 极限），我们可以用 Volkov 函数近似畸变末态；该函数是均匀电磁场中自由电子的 TDSE 解 [50]。

通过适当选择红外和 XUV 激光参数，我们可以假设，激光辅助光电效应过程的能量范围与仅由红外激光引起的电离范围完全分离。换言之，在吸收一个 XUV 光子的能量范围内，红外电离的贡献可以忽略不计

发生时，则 $H_{\rm int} \simeq \mathbf{r}\cdot\mathbf{F}_X$。此外，我们将持续时间为 τ_X 的线偏振 XUV 脉冲的一般表达式设为

$$\mathbf{F}_X(\omega_L t) = -\hat{\varepsilon}_X F_{X0}(t)\cos(\omega_X t), \tag{12}$$

其中 $\hat{}\varepsilon_X$ 和 ω_X 分别是 XUV场的偏振矢量和载波频率。此外，$F_{X0}(t)$ 在时间区间 $t_0, t_0 + \tau_X)$ 内是非零包络函数，在其他时刻为零；我们将其近似为最大振幅，即 $F_{X0}(t) \approx F_{X0}$。因此，式（5）的矩阵元可写为

$$T_{\rm if} = \int_{t_0}^{t_0+\tau_X} \ell(t)\,\mathrm{e}^{iS(t)}\,\mathrm{d}t, \tag{13}$$

其中 $S(t)$ 为广义作用量

$$S(t) = (I_p - \omega_X)t + \frac{1}{2}\int^t \mathbf{\Pi}^2(\mathbf{k}, t')\,\mathrm{d}t', \tag{14}$$

and

$$\ell(t) = -\frac{i}{2}F_{X0}\hat{\varepsilon}_X\cdot\mathbf{d}\big[\mathbf{\Pi}(\mathbf{k}, t)\big], \tag{15}$$

偶极矩定义为 $\mathbf{d(v)}\,(2\pi)^{-3/2}\langle e^{i\mathbf{v}\cdot\mathbf{r}}|\mathbf{r}|\varphi_i\mathbf{(r)}\rangle$（见附录）。在方程中，我们采用了旋转波近似（RWA）；在本例中，该近似只考虑吸收一个 XUV 光子，因此忽略了极紫外光电发射的贡献。此外，在 XUV 脉冲作用期间，红外线性偏振电场可建模为余弦型波，因此矢势可写为

$$\mathbf{A}_L(\omega_L t) = \frac{F_{L0}}{\omega_L}\,\sin(\omega_L t)\,\hat{\varepsilon}_L, \tag{16}$$

其中 F_{L0} 为电场峰值振幅。考虑到方程（16）中矢势的 $T = 2\pi/\omega_L$ 周期性，即 $T = 2\pi/\omega_L$，以及 $\mathbf{\Pi}$ 通过 $\mathbf{A}_L(\omega_L t)$随时间的变化，偶极矩也满足：

$$\mathbf{d}\big[\mathbf{\Pi}(t + jT)\big] = \mathbf{d}\big[\mathbf{\Pi}(t)\big], \tag{17}$$

对于每个整数 j。

现在我们来分析 T矩阵（方程（13））的一些特征。为此，我们注意到，作用量 $S(t)$ 在方程（14）中定义，可写为：

$$\begin{aligned}S(t) = at + b\cos(\omega_L t) + f\sin(2\omega_L t) \\ + d\cos(3\omega_L t) + e\sin(4\omega_L t),\end{aligned} \tag{18}$$

其中

$$\begin{aligned}a &= \frac{k^2}{2} + I_p - \omega_X + U_p\Big[1 + \frac{\mathbf{k}\cdot\hat{z}}{c} + \frac{(\mathbf{k}\cdot\hat{\varepsilon}_L)^2}{c^2} + \frac{3U_p}{4c^2}\Big], \\ b &= \frac{-F_{L0}}{\omega_L^2}(\mathbf{k}\cdot\hat{\varepsilon}_L)\Big[1 + \frac{\mathbf{k}\cdot\hat{z}}{c} + \frac{3U_p}{2c^2}\Big], \\ f &= \frac{-U_p}{2\omega_L}\Big[1 + \frac{\mathbf{k}\cdot\hat{z}}{c} + \frac{(\mathbf{k}\cdot\hat{\varepsilon}_L)^2}{c^2} + \frac{U_p}{c^2}\Big], \\ d &= (\mathbf{k}\cdot\hat{\varepsilon}_L)\frac{F_{L0}U_p}{6\omega^2 c^2} \\ e &= \frac{U_p^4}{16\omega c^2}.\end{aligned} \tag{19}$$

这里， U_p =$(F_{L0}/2\omega_L)^2$ 是均匀场的有质动力能。

然后我们观察到 $[S(t) - at]$ 是一个随时间振荡的函数，其周期与红外激光场的周期 T 相同，即，

$$S(t + jT) = S(t) + ajT. \tag{20}$$

鉴于这些周期性特征 [式（17）和（20）], 我们可以仅根据第一个红外周期的贡献来改写跃迁矩阵 [式（13）], 正如我们在 [22] 偶极近似下所展示的那样。为此，我们引入核量 I（t），将其定义为从零时刻到时间 t的跃迁振幅贡献，即

$$I(t) = \int_0^t \ell(t')\, \mathrm{e}^{iS(t')}\, \mathrm{d}t', \tag{21}$$

在 $0 \le t \le T$ 的条件下。根据其定义可清楚看出， $I(t)$ 从 $t = 0$ 时刻的零值开始增加，并且同时取决于电子能量以及 $\hat{}\varepsilon_X$、$\hat{}\varepsilon_L$、$\hat{}z$ 与电子发射 $\hat{}$方向 k 之间的几何构型。

在先前的工作中 [22] 我们给出了跃迁矩阵关于核量 I 的表达式，涵盖了激光辅助光电效应过程的几种情形：条纹化、边带和脉冲列模式。由于这些公式的推导基于当前工作中式（17）和（20）所具有的相同周期性特征，我们最终发现，在非偶极情形下， [22] 中的式（18）、（21）、（22）、（23）、（33）和（36）仍然成立。在三种可能的模式中，边带（SB）情形最为重要，因为它被描述为两类干涉的乘积：周期内和周期间贡献；而其他情形也可以根据这两个因素进行解释，但其公式比简单乘积更为复杂。因此，在当前工作中，我们仅关注 SB 模式（不设置 XUV 延迟，即$t_0 = 0$ 和 $\tau_X = NT$ 其中 N 为整数），此时光电子能谱与 [成正比，见 [22]]中的式（23）：

$$|T_{\mathrm{if}}^{SB}|^2 = \underbrace{|I(T)|^2}_{\text{intracycle}} \underbrace{\left[\frac{\sin(aTN/2)}{\sin(aT/2)}\right]^2}_{\text{intercycle}}. \tag{22}$$

下面我们将在超越偶极近似的情况下，分析周期间和周期内的贡献。不过，我们的处理仍限定在 $q \ll 1$的条件下，即采用包含非偶极效应的非相对论描述。因此，在方程（11）和（19）中，将忽略 $1/c^2$ 阶的项，并且仅将与$\hat{}z/c$ 成正比的项作为对偶极近似的修正纳入。

我们以氦(1s)的电离为例，并将红外偏振矢量固定在$\hat{}x$ 方向，将极紫外偏振矢量设置为平行于红外传播方向的$\hat{}z$，即，

$$\hat{\varepsilon}_L = \hat{x}, \qquad \hat{\varepsilon}_X = \hat{z}.$$

在表I 中，我们列出了若干研究案例的其余激光参数，这些参数的选取使得 $\omega_X - I_p - U_p = 2.596$与 0 阶侧带位置相对应，且在所有案例中均相同。

A. 周期间因子

周期间因子分母的零点，即满足 $aT/2 = n\pi$ 的能量值，是可去奇点，因为分子也会在这些点抵消，且这些点处会达到极大值。这些极大值在光电子能谱中表现为侧带峰。在 $1/c \to 0$ 极限下，也就是在偶极近似内，n 阶侧带峰出现在 E_n^D =$n\omega_L + \omega_X - I_p - U_p$，对应于吸收（$n > 0$）或发射（$n < 0$） n 个红外光子，且此前吸收了一个 XUV光子。然而，在当前情况下，$aT/2 = n\pi$ 会导出关于$k_n = \sqrt{2E_n}$的二次方程：

$$E_n = n\omega_L + \omega_X - I_p - U_p\Big[1 + \frac{\mathbf{k}_n \cdot \hat{z}}{c}\Big]. \tag{23}$$

将该方程改写为相对于传播方向的动量电子的平行分量（k_{nz}）和垂直分量（$k_{n\perp}$）后，可得

$$\frac{k_{n\perp}^2}{2} + \frac{1}{2}\Big(k_{nz} + \frac{U_p}{c}\Big)^2 \simeq n\omega_L + \omega_X - I_p - U_p, \tag{24}$$

在 O阶$(1/c)$下，这可以理解为动量空间中半径为 $\sqrt{2(n\omega_L + \omega_X - I_p - U_p)}$的环，并沿$\hat{}z$ 方向移动了 $-U_p/c$ 。需要指出的是，对于ATI峰也能得到类似结果，例如参见 [36]。我们观察到，SB峰的新位置取决于发射方向在红外传播轴上的投影：$\mathbf{k} \cdot \hat{}z$ =$k\cos\theta$。

在图 1中，我们展示了情况 A 的周期间因子（见表 I），它是两个能量范围内光电子能量和 $\cos\theta$ 的函数，每个范围各包含 10 条侧带。在图1(a) 中，我们显示，偶极近似下的侧带能量不依赖于发射角。相反，纳入非偶极效应会使侧带倾斜 [见图 1(b) 和图 1(c)]。竖直虚线标出了偶极近似下某些阶数边带峰对应的若干参考值 n。当发射方向与红外传播方向相反（$\cos\theta < 0$）时，边带向较高能量移动。相反，当 $\cos\theta > 0$时，能量向较低方向移动。因此，发射不对称性取决于发射方向与激光传播方向是平行还是反平行。对于每个 n 阶边带，向前（-）和向后（+）的能量位移为

$$\Delta E \simeq \mp\frac{U_p}{c}\sqrt{2E_n^D}, \tag{25}$$

分别地。我们还观察到，根据方程（25），随着能量增加，侧带的斜率也会增加：图1（c）中的侧带比图1（b）中的更加倾斜。因此，在更高能量下，前后向不对称发射更加明显。由于侧带在整个焦体积中都是非常稳健的结构， [51], 测量侧带的相对能量位移，即 $\Delta E/\omega = \mp 2\beta_0\sqrt{2E_n^D}$，可能有助于通过参数 $\beta_0 = qc/2\omega_L$确定实验上难以确定的强激光和/或低频近红外激光的强度。

表 I. 各研究案例的原子单位激光参数。 $F_{X0}=0.01$ 和 $\tau_X=NT$，其中 $N=1$ 或 2。

CASE	F_{L0}	ω_L （λ_L，单位：nm）	U_p	ω_X	$\sqrt{q}$	$\beta_0=q\ c/2\omega_L$
A	0.05	0.05（911.26 nm）	1/4	3.75	$0.5/c$	$2.5/c$
B	$0.05/\sqrt{5}\simeq 0.02$	$0.05/\sqrt{5}$（2037.6 nm）	1/4	3.75	$0.5/c$	$5.6/c$
C	$0.05/\sqrt{5}\simeq 0.02$	$0.05/\sqrt{10}$（2881.6 nm）	1/2	4.0	$0.7/c$	$16/c$
D	$0.05/\sqrt{5}\simeq 0.02$	$0.05/\sqrt{20}$（4075.3 nm）	1	4.5	$1/c$	$45/c$
E	$0.05/\sqrt{2}\simeq 0.03$	$0.05/\sqrt{12}$ (3156.7 nm)	3/2	5	$1.2/c$	$52/c$

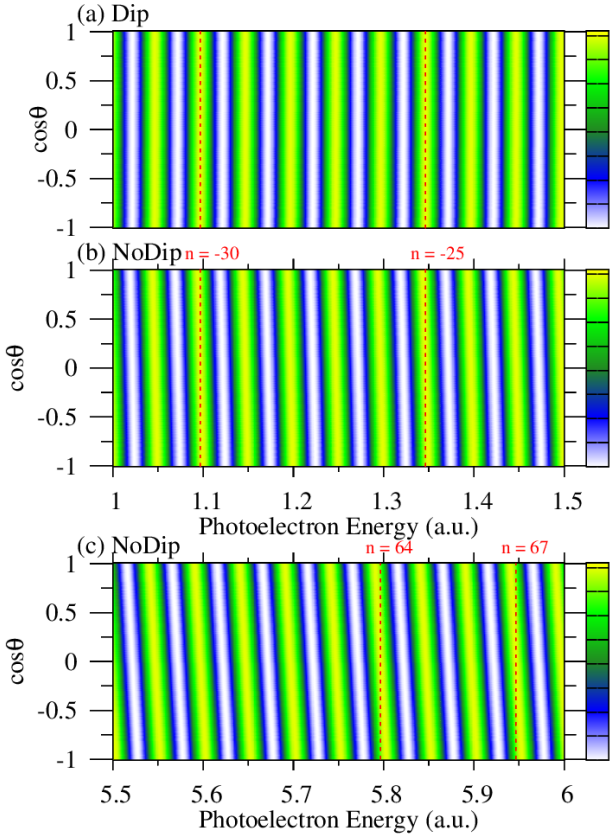

图 1.（在线彩色）情况 A（见表I）参数下的周期间因子，以及 $N=2$在 (a) 偶极近似、(b) 和 (c) 非偶极近似中的结果。竖直虚线标示了偶极近似下 SB 的位置：E_n^D对于 $n=-30$ -25 和 $n=64$ 67，在 (a) 和 (b) 中；而 在 (c) 中。

B. 周期内因子

在此前的研究中，我们已表明，源自周期间干涉的边带结构受到周期内因子 [17] 的调制。因此，本节将分析非偶极描述如何影响 $|I(T)|^2$ 调制。

在图2(a)中，我们展示了乘以 k后的周期内因子，针对情况 A（见表I）以及$\mathbf{k}=k_z\hat{}z+k_\perp\hat{}x$的情形，即在平面$(xz)$内发射。这等于公式（4）中的光电子能谱，无论 $N=1$如何。在图3中，我们展示了图2各图的不同截面：图3(a)中固定θ，图3(b)中则在固定能量下展示发射角的函数关系。我们观察到，周期内因子存在一个由特定能量和角度值界定的区域，在该区域之外其值为零。在先前的一项工作中 [17]，在半经典模型下，这一事实被解释为经典允许区域。与偶极描述一样，在允许区域内，周期内因子呈现条纹。比较偶极结果与非偶极结果，我们没有观察到这些条纹存在显著的定性差异（未显示）。然而，由于引入了 $1/c$阶的非偶极项，我们可以预期，最明显的变化将出现在接近零发射 |的区域，即图2(a)中的白色区域|。因此，我们在图2(b)中引入参数A，用于量化非偶极效应的相对重要性：

$$A(E,\theta)=\frac{\frac{\mathrm{d}P^{\mathrm{ND}}}{\mathrm{d}E\mathrm{d}\cos\theta}}{\frac{\mathrm{d}P^{\mathrm{ND}}}{\mathrm{d}E\mathrm{d}\cos\theta}+\frac{\mathrm{d}P^{\mathrm{D}}}{\mathrm{d}E\mathrm{d}\cos\theta}}, \tag{26}$$

其中，ND 和 D 分别对应非偶极分布和偶极分布。当非偶极效应可以忽略时，参数 $A(E,\ \theta)$ 将为 0；当非偶极效应占主导时，该参数接近 1；$1/2$ 当其与偶极情形没有差异时亦如此。

在零发射区域（图2(a) 中的白色区域）附近，我们在图 2(b) 中观察到红色或蓝色区域，这些区域体现了非偶极贡献。我们还注意到，下半平面中的蓝色结构（$\cos\theta<0$）在上半平面（$\cos\theta>0$）中会变成红色，反之亦然；这表明相对于红外传播方向，前向与后向发射存在不对称性。例如，在图 3(b) 中也可以观察到这种不对称性，其中右侧的峰值高于左侧相应的峰值。

因此，我们可以得出以下结论：(i) 前向—后向发射不对称性并非仅限于侧带的倾斜。周期内因子也有显著贡献；(ii) 光电子能谱呈现出明确的区域，在这些区域中，发射概率显著较高，这与偶极激光辅助光电效应的经典允许区域相似。在这些区域的边界处，光电子能谱接近于零，$O(1/c)$ 的贡献将会显现。由此出发，探究非偶极效应是否会导致经典极限发生修正，或许很有意义。下一节将对此进行讨论。

C. 非偶极经典极限

半经典模型（SCM）通过使用鞍点近似（SPA）求解公式（13）中的时间积分，其中主要贡献来自作用量处于驻态的时刻 t_s，即$dS/dt=0$。在非偶极方法中，这意味着[见公式（14）]:

$$\mathbf{\Pi}^2(\mathbf{k},t_s)=v_0^2, \tag{27}$$

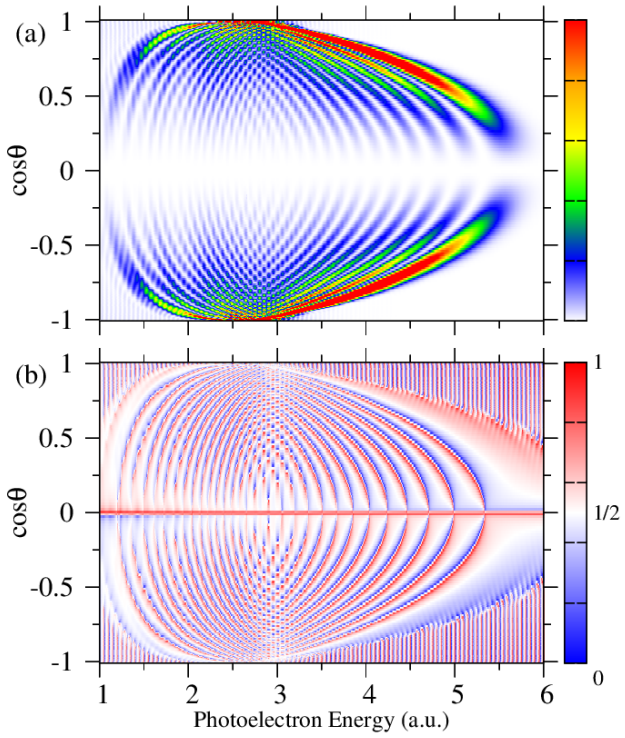

图3 2 $N=$ 。（在线彩色）(a) 情况 A 下氦的非偶极激光辅助光电子能谱（含 ）（参见表 I）。(b) 不对称因子，见式（26）。

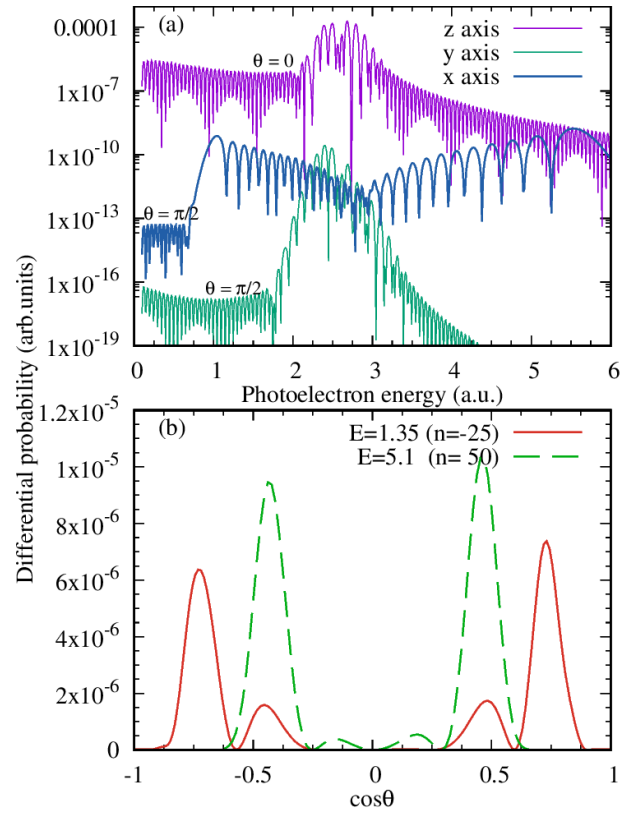

图3。（在线彩色）氦（$1s$）在非偶极情况 A 下的激光辅助光电效应周期内因子（参见表 I）。(a) 固定发射角时；(b) 固定能量值时。

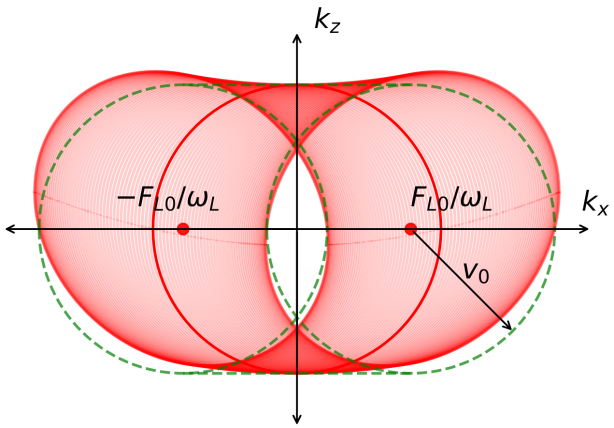

图4。（在线彩色）动量空间（k_x，k_z）中的示意性经典极限。深绿色虚线表示偶极结果（参见文献 [17]）。

其中，$v_0^2/2=\omega_X-I_p$ 对应于在没有NIR激光时由XUV脉冲电离产生的光电子的平均能量。随后，跃迁概率可以表示为从广义作用量 $S(t)$的驻点 t_s 出发、具有最终动量k的所有经典电子轨迹的振幅的相干叠加。复数电离时刻会产生带有指数衰减因子的非经典轨迹，因此，与取实值的经典轨迹相比，其重要性较低。换言之，对于满足公式（27）且 t_s 取实值的动量k，这些动量值定义了经典允许动量区域。考虑 k_x、k_z 平面，并在偶极近似下忽略 $1/c$ 阶项，可得到一个振荡的圆周，正如 [17] 中所述。沿NIR场方向的振荡是简谐的，即 k_x，其振幅为 F_{L0}/ω_L，频率为 ω_L。图4展示了这些区域。在 $t_s=0$ 处，我们得到红色圆，而两个虚线绿色圆周对应极端区域。在当前情况下，$O(1/c)$贡献引入了一个小修正。为了使其清晰可见，我们取 $c=13.7$ 的一个人为值，在图（4）中生成红色椭圆。它们源于圆周随 t_s 连续运动和变形，而这种变化由非偶极贡献产生。

如 [17], 所示，通过比较量子SFA和TDSE结果可知，SCM 在光电子能谱不可忽略的区域给出了极佳的预测。因此，我们可以预期经典极限会有较小的非偶极变化。为分析这一变化，我们考虑三个主要方向：$\hat{x}$，$\hat{y}$ 和$\hat{z}$。图 5 展示了 D 情形（参见表I）下的周期内因子：图 $\hat{z}$ 和$\hat{y}$ 方向上的发射见图 5(a)，$\hat{x}$ 方向上的发射见图 5(b)。竖直虚线表示按如下方式得到的经典极限。式（27）（忽略式（ $1/c^2$ 11）中的项）给出

$$v_0^2=k^2+A_L^2+\frac{A_L^2k}{c} \qquad \text{if (i)} \quad \mathbf{k}=k\hat{z} \tag{28}$$

$$v_0^2=k^2+A_L^2 \qquad \text{if (ii)} \quad \mathbf{k}=k\hat{y} \tag{29}$$

$$v_0^2=(k+A_L)^2 \qquad \text{如果 (iii)} \quad \mathbf{k}=k\hat{x}. \tag{30}$$

经典上允许的 k 值的最大值和最小值，是上述方程达到极值时对应的值

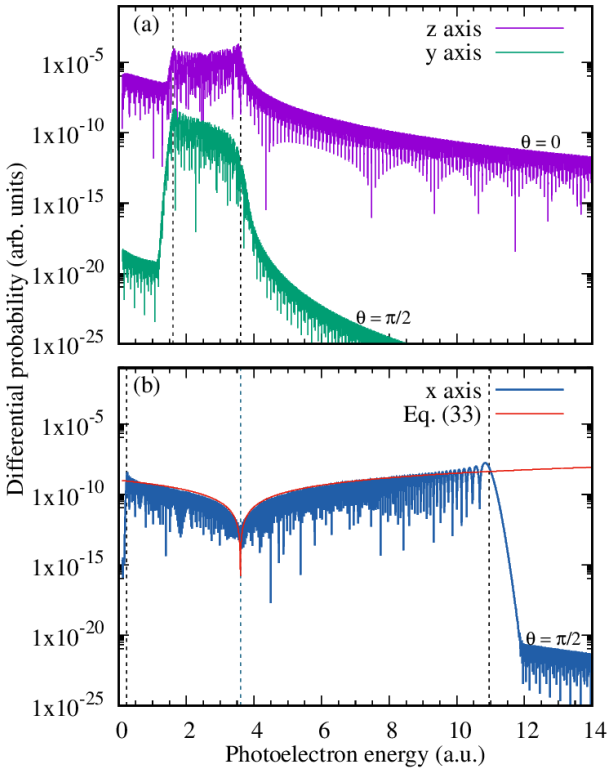

图 5.（彩色在线版）固定发射角时，D 情形的周期内因子随光电子能量的变化。在 (a) 中，光电子动量为 $\mathbf{k} = k\hat{z}$（紫色曲线）和 $\mathbf{k} = k\hat{y}$（绿色曲线，且低了几个数量级）。黑色竖直虚线标示半经典极限，分别位于 $E_{\rm low} = 1.6$ 和 $E_{\rm up} = 3.6$ 原子单位处。在 (b) 中，$\mathbf{k} = k\hat{x}$ 用蓝色实线表示，二次近似式 (33) 用红色细线表示。黑色竖直虚线标示半经典极限，分别位于 $E_{\rm low} = 0.2$ 和 $E_{\rm up} = 11$ 原子单位处；在 $v_0^2/2 = 3.6$ 处（蓝色竖直虚线），光电子能谱出现一个极小值。

（最大值和最小值），即场 $A_L(\omega_L t)$ 或 $A_L^2(\omega_L t)$ 的极值。因此，在第二种情形（ii）中，0 和 $(F_{L0}/\omega_L)^2 = 4U_p$ 分别使场 $A_L^2(\omega_L t)$ 取得最小值和最大值，从而得到经典极限：$E_{\rm low} \simeq (v_0^2 - 4U_p)/2$ 和 $E_{\rm up} = v_0^2/2$。对于情形（iii），极限为 $E_{\rm low,up} = (v_0 \mp F_{L0}/\omega_L)^2/2$。这两种情形（ii）和（iii）与偶极近似所预期的结果完全一致（见 [17]，其中发射方向分别“垂直于”和“平行于”驱动 NIR 场）。而对于情形（i），在低能量下，偶极经典极限存在一个很小的非偶极修正。鉴于 $E_{\rm up} = v_0^2/2$，下限为

$$E_{\rm low} = \frac{v_0^2}{2} - 2U_p(1 \pm \frac{1}{c}\sqrt{v_0^2 - 4U_p}). \qquad (31)$$

我们从图 5中观察到，较大的发射概率实际上仅限于半经典模型范围内，该范围由经典边界 $E_{\rm low、up}$限定。

与偶极结果相比，最显著的差异在于，在 $\hat{x}$ 方向上的发射并非禁戒，见图5(b)。事实上，在偶极近似下，偶极矩阵元 $\mathbf{d}(\mathbf{k} + \mathbf{A})$ 与 $\hat{z}$方向上的极紫外偏振矢量正交，因此沿 $\hat{x}$ 方向的发射是禁戒的。相反，根据式（A3），超越偶极近似后，我们可以预期存在量级为 $O(1/c)$的贡献。因此，该方向上的所有贡献都是纯非偶极贡献。此外，我们还可以观察到一个非常明显的结构：在 $E = v_0^2/2$处有一个极小值。借助半经典模型，可以轻松理解这一结构：由于时间积分的主要贡献来自满足式（ t_s （27）的实时间 $\ell(t)$，我们可以将

$$\ell(t_s) \propto \frac{1}{c(v_0^2+\alpha^2)^3}\left(kA_L(\omega_L t_s) + \frac{A_L^2(\omega_L t_s)}{2}\right) \propto \frac{v_0^2}{2} - \frac{k^2}{2}, \qquad (32)$$

其中我们结合了方程（27）、（30）和（A3）。我们注意到，该表达式不依赖于时间 t_s，而依赖于能量 $E = k^2/2$，并且在特定值 $E = v_0^2/2$处为零。由于它代表矩阵元的一个零点，我们可以称之为“类库珀极小值”。因此，周期内因子与能量的一个二次函数成正比，该函数在类库珀极小值处为零：

$$|I(T)|^2 \propto |\ell(t_s)|^2 \sim (\frac{v_0^2}{2} - E)^2 \qquad (33)$$

图5（b）中以红色细线绘出了这个二次函数，归一化常数任意选取。两者吻合得非常好。

现在，我们希望通过增大 q参数，探究周期内因子的行为及其与经典极限的关系如何随激光构型变化。该参数表明非偶极贡献有所增强。为此，我们考虑表I中的B、C、D和E情况。图6 展示了此前考虑的三个主要发射方向上的光谱。我们观察到，光谱仍受经典值限制，并且随着 q 增大而展宽。我们还看到，光谱的定性形状并未改变；值得注意的是，随着极紫外频率变化，类库珀极小值仍然存在（见图6（c）），但其对应的能量位置不同。

最后，我们想研究经典极限下是否存在某种前后向不对称性。为此，我们比较相对于红外传播方向的平行（$\hat{z}$）和反平行（$-\hat{z}$）方向上的发射。在图 7 中，我们比较了 E 情况下的这两种情形。除接近较低经典极限处外，在整个范围内都观察到了非常好的定性一致性。根据公式（28）[1]，，较低经典极限取决于发射方向（前向或后向，即 $\pm\hat{z}$），具体关系见公式（31）。比较前向和后向光谱可以观察到这一微小差异：蓝色曲线比红色曲线更早“上升”（分别在 $E_{\rm low+} = 1.06$ 和 $E_{\rm low-} = 1.13$）。在偶极近似下，两条曲线在较低经典极限处完全重合 $E_{\rm low} = 1.09$；该极限恰好位于两者的中间（图中未示）。

总结本节可知，经典极限能够准确确定能量和发射角范围。这些极限会受到非偶极效应的轻微影响，表现为前后不对称发射。此外，在偶极近似之外，

[1] 对于反平行发射，该方程的第三项为负。

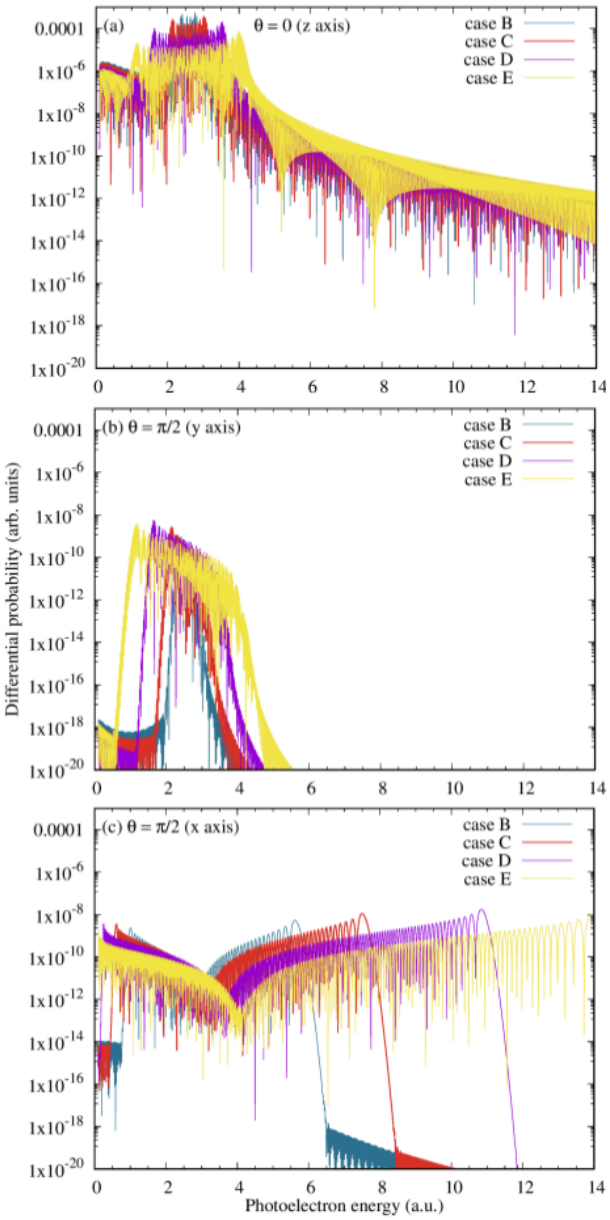

图6.（在线彩色）在发射方向上的周期内因子 (a) $\mathbf{k} = k\hat{z}$，(b) $\mathbf{k} = k\hat{}y$ 和 (c) $\mathbf{k} = k\hat{x}$，对应于不同激光参数下的 B、C、D 和 E 情况（见表 I）。

在$\hat{}x$ 方向的发射不受限制；在这种情况下，半经典模型能够完美预测光谱的形状，以及能量等于 $v_0^2/2$ 时类库珀极小值的出现。

III. 结论

我们在包含非偶极修正的非相对论强场近似（SFA）描述下，研究了激光辅助光电子发射（LAPE）过程。基于其周期性特征，并沿用我们先前工作的思路[22], ，我们可以将光电子能谱（PES）改写为两个主要贡献的函数：内周期因子和周期间因子。我们分析了这两个因子，以及非偶极效应对它们各自带来的改变。为了考察一个具体的研究案例，我们分析了特定几何构型下氦（$1s$）的激光辅助光电子发射（LAPE）

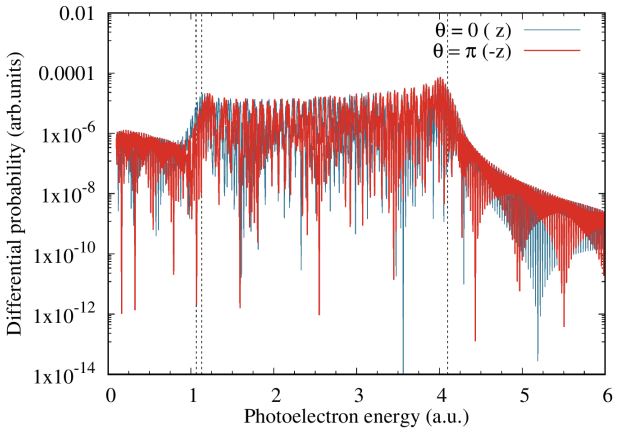

图7.（在线彩色）E情况下（见表 $\hat{z}$（蓝色）和 $-\hat{z}$（红色）的发射方向上的周期内因子。虚线表示 $E_{\text{low+}} = 1.06$、$E_{\text{low-}} = 1.13$ $E_{\text{up}} = 4.09$ 原子单位处的经典极限。

其中包括极紫外（XUV）和红外（IR）偏振矢量的方向、红外传播方向，以及若干红外激光参数。由于周期间干涉，边带图样呈现出角度依赖性（倾斜），且这种倾斜随能量增加而加剧。此前在偶极近似下研究的经典允许角度-能量区域，会受到 $O(c^{-1})$ 阶修正的影响。特别是，我们发现，在$\hat{}x$ 方向上的发射限制在非偶极方法下不再成立。非偶极半经典模型与强场近似结果高度吻合，并对其最显著的结构——类库珀极小值——给出了有益的解释。在内周期因子和周期间因子中，以及在经典允许区域的边界处，我们都观察并刻画了前后不对称性；这种不对称性源于优先方向的存在，即红外传播方向。对这种不对称性的更详细分析有待未来研究。

A. 附录：跃迁矩阵偶极元 ment

偶极跃迁矩阵元定义如下：

$$\mathbf{d}(\mathbf{v}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \mathrm{d}\mathbf{r}\, \exp(-i\mathbf{v}\cdot\mathbf{r})\, \mathbf{r}\, \phi_i(\mathbf{r}), \qquad \text{(A1)}$$

其中，ϕ_i 是一个类氢束缚态。对于氢样 $1s$ 态，可以写成

$$\mathbf{d}(\mathbf{v}) = -\frac{i}{\pi}\, 2^{7/2}\alpha^{5/2}\, \frac{\mathbf{v}}{(v^2+\alpha^2)^3} \qquad \text{(A2)}$$

其中 $\alpha = \sqrt{2I_{p^\circ}}$ 在本研究中，我们考虑了氦的 $1s$ 态的电离能 $I_p = 24.587$ eV（$= 0.90356$ 原子单位）（$Z_{\text{eff}} = 1.34429$）。

为了计算所呈现的结果，需要求出 $\ell(t)$ (式（15）），并考虑 $\hat{}\varepsilon_X = \hat{}z$ 和$\hat{}\varepsilon_L = \hat{}x$。因此，

$$\ell(t) = -\frac{F_{X0}}{\pi}(2\alpha)^{5/2}\frac{\hat{z}\cdot\mathbf{\Pi}(\mathbf{k},t)}{(\mathbf{\Pi}^2(\mathbf{k},t)+\alpha^2)^3} \qquad \text{(A3)}$$
$$= \frac{-F_{X0}(2\alpha)^{5/2}}{(\mathbf{\Pi}^2(\mathbf{k},t)+\alpha^2)^3\pi}[\mathbf{k}\cdot\hat{z} + \frac{\mathbf{k}\cdot\mathbf{A}_L(\omega_L t)}{c} + \frac{\mathbf{A}_L^2(\omega_L t)}{2c}].$$

其中 $\mathbf{\Pi}^2$ 在式（11）中有详细说明。

致谢

本研究得到阿根廷国家科学技术促进局（ANPCyT）的 PICT 2020-01755、2020-01434 和 PICT-2017-2945 项目资助，CONICET（阿根廷）的 PIP 2022-2024 11220210100468CO 项目。M.F.C. 感谢广东省科技重大专项（极端条件下的未来功能材料，2021B0301030005）提供的经费支持。

[1] Y. Mairesse and F. Quéré, 《物理评论 A》71, 011401(R) (2005). [2] E. Goulielmakis, M. Schultze, M. Hofstetter, V. S. Yakovlev, J. Gagnon, M. Uiberacker, L. A. Aquila, E. M. Gullikson, D. T. Attwood, R. Kienberger, F. Krausz, and U. Kleineberg, Science 320, 1614 (2008). [3] E. Goulielmakis, M. Uiberacker, R. Kienberger, A. Baltu˘ska, V. Yakovlev, A. Scrinzi, T. Westerwalbesloh, U. Kleineberg, U. Heinzmann, M. Drescher, and F. Krausz, Science 305, 1267 (2004). [4] J. Gagnon and V. S. Yakovlev, Opt. Exp. 17, 17678 (2009). [5] M. Drescher and F. Krausz, 《物理学杂志B》38, S727 (2005). [6] M. Meyer, J. T. Costello, S. Düsterer, W. B. Li, and P. Radcliffe, 《物理学杂志B》43, 194006 (2010). [7] V. Véniard, R. Taïeb, and A. Maquet, 《物理评论快报》74, 4161 (1995). [8] J. Itatani, F. Quéré, G. L. Yudin, M. Y. Ivanov, F. Krausz, and P. B. Corkum, 《物理评论快报》88, 173903 2002( ). [9] A. Maquet and R. Taïeb, J. Mod. Opt. 54, 1847 (2007). [10] P. Radcliffe, M. Arbeiter, W. B. Li, S. Düsterer, H. Redlin, P. Hayden, P. Hough, V. Richardson, J. T. Costello, T. Fennel, and M. Meyer, New J. Phys. 14, 043008 2012( ). [11] M. Meyer, P. Radcliffe, T. Tschentscher, J. T. Costello, A. L. Cavalieri, I. Grguras, A. R. Maier, R. Kienberger, J. Bozek, C. Bostedt, S. Schorb, R. Coffee, M. Messer- schmidt, C. Roedig, E. Sistrunk, L. F. Di Mauro, G. Doumy, K. Ueda, S. Wada, S. Düsterer, A. K. Kazan- sky, and N. M. Kabachnik, 《物理评论快报》108, 063007 (2012). [12] T. Mazza, M. Ilchen, A. J. Rafipoor, C. Callegari, P. Finetti, O. Plekan, K. C. Prince, R. Richter, M. B. Danailov, A. Demidovich, G. De Ninno, C. Grazioli, R. Ivanov, N. Mahne, L. Raimondi, C. Svetina, L. Avaldi, P. Bolognesi, M. Coreno, P. O'Keeffe, M. Di Fraia, M. Devetta, Y. Ovcharenko, T. Möller, V. Lyamayev, F. Stienkemeier, S. Düsterer, K. Ueda, J. T. Costello, A. K. Kazansky, N. M. Kabachnik, and M. Meyer, 《自然·通讯》5, 3648 (2014). [13] S. Düsterer, G. Hartmann, C. Bomme, R. Boll, J. T. Costello, B. Erk, A. D. Fanis, M. Ilchen, P. Johns- son, T. J. Kelly, B. Manschwetus, T. Mazza, M. Meyer, C. Passow, D. Rompotis, L. Varvarezos, A. K. Kazansky, and N. M. Kabachnik, New J. Phys. 21, 063034 (2019). [14] D. B. Milošević, G. G. Paulus, D. Bauer, and W. Becker, 《物理学杂志B》39, R203 (2006). [15] D. G. Arbó, K. L. Ishikawa, K. Schiessl, E. Persson, and J. Burgdörfer, 《物理评论 A》81, 021403 (2010). [16] A. K. Kazansky, I. P. Sazhina, and N. M. Kabachnik, 《物理评论 A》82, 033420 (2010). [17] A. A. Gramajo, R. Della Picca, S. D. López, and D. G. Arbó, 《物理学杂志B》51, 055603 (2018). [18] D. G. Arbó, K. L. Ishikawa, K. Schiessl, E. Persson, and J. Burgdörfer, 《物理评论 A》82, 043426 (2010). [19] D. G. Arbó, K. L. Ishikawa, E. Persson, a nd J. Burgdör- fer, Nucl. Instrum. Meth. Phys. Res. B 279, 24 (2012). [20] A. A. Gramajo, R. Della Picca, C. R. Garibotti, and D. G. Arbó, 《物理评论 A》94, 053404 (2016). [21] A. A. Gramajo, R. Della Picca, 和 D. G. Arbó, 《物理评论 A》96, 023414（2017年）。[22] R. Della Picca, M. F. Ciappina, M. Lewenstein, 和 D. G. Arbó, 《物理评论 A》102, 043106（2020年）。[23] R. Della Picca, A. A. Gramajo, S. D. López, 和 D. G. Arbó, 《物理学会议系列》1412, 042002（2020年）。[24] S. Weber, S. Bechet, S. Borneis, L. Brabec, M. Bučka, E. Chacon-Golcher, M. Ciappina, M. DeMarco, A. Fa- jstavr, K. Falk, E.-R. Garcia, J. Grosz, Y.-J. Gu, J.-C. Hernandez, M. Holec, P. Janečka, M. Jantač, M. Jirka, H. Kadlecova, D. Khikhlukha, O. Klimo, G. Korn, D. Kramer, D. Kumar, T. Lastovička, P. Lutoslawski, L. Morejon, V. Olšovcová, M. Rajdl, O. Renner, B. Rus, S. Singh, M. Šmid, M. Sokol, R. Versaci, R. Vrána, M. Vranic, J. Vyskočil, A. Wolf, 和 Q. Yu, Matter Radiat. at Extremes 2, 149（2017年）。[25] U. Elu, T. Steinle, D. Sánchez, L. Maidment, K. Zawilski, P. Schunemann, U. D. Zeitner, C. Simon-Boisson, 和 J. Biegert, 《光学快报》44, 3194（2019年）。[26] U. Elu, L. Maidment, L. Vamos, F. Tani, D. Novoa, M. H. Frosz, V. Badikov, D. Badikov, V. Petrov, P. S. J. Russell, 和 J. Biegert, 《自然·光子学》15, 277（2021年）。[27] H. R. Reiss, 《物理评论快报》101, 043002（2008年）。[28] H. R. Reiss, 《物理评论快报》101, 159901（2008年）。[29] H. R. Reiss, 《物理学杂志B》47, 204006（2014年）。[30] C. C. Chirilă, N. J. Kylstra, R. M. Potvliege, 和 C. J. Joachain, 《物理评论 A》66, 063411（2002年）。[31] S. Brennecke 和 M. Lein, 《物理评论 A》98, 063414（2018年）。[32] M. Klaiber, E. Yakaboylu, H. Bauke, K. Z. Hatsagort- syan, 和 C. H. Keitel, 《物理评论快报》110, 153004（2013年）。[33] H. Ni, S. Brennecke, X. Gao, P.-L. He, S. Donsa, I. Březi- nová, F. He, J. Wu, M. Lein, X.-M. Tong, 和 J. Burgdör- fer, 《物理评论快报》125, 073202（2020年）。[34] S. Fritzsche 和 B. Böning, 《物理评论：研究》4, 033031（2022年）。[35] J. Maurer 和 U. Keller, 《物理学杂志B》54, 094001（2021年）。[36] R. Kahvedžić 和 S. Gräfe, 《物理评论 A》105, 063102（2022年）。[37] V. S. Popov, 《俄罗斯物理学进展》47, 855（2004年）。[38] W.-C. Jiang, M.-X. Wang, L.-Y. Peng, 和 J. Burgdörfer, 《物理评论 A》105, 023104（2022年）。[39] K. Lin, S. Brennecke, H. Ni, X. Chen, A. Hartung, D. Trabert, K. Fehre, J. Rist, X.-M. Tong, J. Burgdörfer, L. P. H. Schmidt, M. S. Schöffler, T. Jahnke, M. Kunit- ski, F. He, M. Lein, S. Eckart, 和 R. Dörner, 《物理评论快报》128, 023201（2022年）。[40] S. Chelkowski, A. D. Bandrauk, 和 P. B. Corkum, 《物理评论快报》113, 263005（2014年）。[41] B. Willenberg, J. Maurer, B. W. Mayer, 和 U. Keller, 《自然·通讯》10, 5548（2019年）。[42] A. Hartung, S. Eckart, S. Brennecke, J. Rist, D. Tra- bert, K. Fehre, M. Richter, H. Sann, S. Zeller, K. Hen- richs, G. Kastirke, J. Hoehl, A. Kalinin, M. S. Schöffler, T. Jahnke, L. P. H. Schmidt, M. Lein, M. Kunitski, 和 R. Dörner, 《自然·物理》15, 1222（2019年）。[43] B. Böning 和 S. Fritzsche, 《物理学杂志B》54, 144002（2021年）。[44] C. Joachain, N. Kylstra, 和 R. Potvliege, 《强激光场中的原子》（剑桥大学

出版社，英国剑桥，2012年）。[45] M. Lewenstein, P. Balcou, M. Y. Ivanov, A. L'Huillier, 和 P. B. Corkum, 《物理评论 A》**49**, 2117（1994年）。[46] K. Amini, J. Biegert, F. Calegari, A. Chacón, M. F. Ciap- pina, A. Dauphin, D. K. Efimov, C. F. de Morisson Faria, K. Giergiel, P. Gniewek, A. S. Landsman, M. Lesiuk, M. Mandrysz, A. S. Maxwell, R. Moszyński, L. Ortmann, J. A. Pérez-Hernández, A. Picón, E. Pisanty, J. Prauzner- Bechcicki, K. Sacha, N. Suárez, A. Zaïr, J. Zakrzewski, 和 M. Lewenstein, 《物理学进展报告》**82**（2019年）。[47] M. Lewenstein, K. C. Kulander, K. J. Schafer, 和 P. H. Bucksbaum, 《物理评论 A》**51**，1495（1995年）。[48] S. Nagele、R. Pazourek、J. Feist、K. Doblhoff-Dier、C. Lemell、K. Tokési 和 J. Burgdörfer, 《物理学杂志B》**44**，081001（2011年）。[49] R. Della Picca、J. Fiol 和 P. D. Fainstein, 《物理学杂志B》**46**, 175603（2013年）。[50] D. Wolkow, 《物理学杂志》**94**，250（1935年）。[51] J. Hummert、M.Kubin、S. López、J. I.Fuks、F. Morales、M. J. Vrakking、O. Kornilov 和 D. G. Arbó, 《物理学杂志B》（2020年）。