arXiv:2303.04665v2 [math.AG] 5 May 2023

.

圆锥曲线-直线配置的雅可比概形与特征概形

VALENTINA BEORCHIA 和 ROSA M. MIR´O-ROIG

Abstract. 约化奇异射影平面曲线的雅可比概形是一个零维概形，其齐次理想由定义多项式的偏导数生成。此类概形的次数称为全局 Tjurina 数。对于非共点直线组成的曲线，A.A. du Plessis 和 C.T.C. Wall 给出了依赖于曲线次数和雅可比关系最小次数的上下界。

本文对全局 Tjurina 数达到上界的圆锥曲线-直线配置给出了完整的几何刻画。此外，我们还刻画了在所有具有线性雅可比关系的曲线中，全局 Tjurina 数达到下界的圆锥曲线-直线配置。

作为一项应用，我们刻画雅可比概形等于某个三元张量的特征概形的圆锥曲线—直线配置，并研究其极映射的几何性质。

1. Introduction

约化奇异射影平面曲线 $C = V(f) \subseteq \mathbb{P}^2$ 的雅可比概形 Σ_f 是一个零维概形，其齐次理想由 f的偏导数生成。这种概形的次数称为全局 Tjurina 数 $\tau(C)$；若C 由共点直线构成，则其值等于 $(d-1)^2$, ；在其他所有情况下，A.A. du Plessis 和 C.T.C. Wall 在 [21] 中的一条定理给出了以下关于 $\tau(C)$ 的界，其中涉及三个偏导数之间奇异关系的最小次数 r ：

$$(d-1)(d-r-1) \leq \tau(C) \leq (d-1)(d-r-1) + r^2.$$

特别地，我们有 $\tau(C) \leq (d-1)(d-2) + 1$。

一般而言，即使对于不可约曲线，雅可比概形的概形结构也尚未得到完全理解。例如，某类有理尖点曲线可达到上述界，且对任意 $r \geq 2$ 均成立，如 [14, 定理 1.1]所示。达到最大界或比最大界低一的曲线似乎种类繁多； [3, 定理 3.9 和定理 3.11]中给出了亏格较高且分支众多的例子。据我们所知，唯一的刻画结果是针对具有线性雅可比关系的情形，由 A.A. du Plessis 和 C.T.C. Wall 在 [22, 命题 1.1], 中给出：当且仅当该曲线具有一维对称性时， $r = 1$ 成立；也就是说，该曲线的自同构群包含一个一维代数子群 $PGL_2(\mathbb{C})$。

本文聚焦于具有线性雅可比关系的圆锥曲线-直线配置。 [11], 中给出了仅含节点、尖点和普通三重点的圆锥曲线-直线配置的一些结果，但在次数为 $d \geq 5$ 时，有 $r \geq 2$。关于属于特定线束的圆锥曲线配置的雅可比 syzygy 和全局 Tjurina 数，可参见 [23], [25] 和 [8]。

假设 $r = 1$ 蕴含 $(d-1)(d-2) \leq \tau(C) \leq (d-1)(d-2) + 1$，并且根据 [22, 命题 1.3], 任何达到上界的曲线都是可约的。关于下界，存在具有线性关系的不可约曲线满足 $\tau(C) = (d-1)(d-2)$，例如某些 Sebastiani–Thom 有理尖点曲线（见 [13, 命题 2.11]）。

第一作者是 INdAM 下属 GNSAGA 的成员，受到的里雅斯特大学基金 Universit`a degli Studi di Trieste - FRA 2023 的资助。第二作者部分受到资助项目 PID2019-104844GB-I00 的支持。

我们给出了达到 $r = 1$ 两个界的圆锥曲线-直线配置的完整几何刻画。关于上界， [9, 命题 4.7(5)] 所述的例子是由 $d-1$ 条共点直线与一条一般直线之并构成的直线配置。我们的第一个主要结果如下（见定理 3.5）：

定理 A. 设 $C = V(f)$ 是 $\mathbb{P}^2$ 中次数为 $d \geq 5$ 的圆锥曲线-直线配置。那么， $\tau(C) = (d-1)(d-2) + 1$ 当且仅当 C 是以下之一：

- $\mathcal{L}$：一个包含 $d-1$ 条共点直线和一条一般直线的直线配置；
- $\mathcal{C}_1$：属于一个超密切铅笔的圆锥曲线之并，即基点集支撑在一个点上；
- $\mathcal{CL}_1$：属于一个超密切铅笔的圆锥曲线与超密切点处的切线之并；
- $\mathcal{CL}_2$：属于一个双切线铅笔的圆锥曲线与其中一个双切点处的切线之并；
- $\mathcal{CL}_3$：属于一个双切线铅笔的圆锥曲线与经过双切点的两条切线的并集；
- $\mathcal{CL}_4$：属于一个双切线铅笔的圆锥曲线、一条经过一个切点的切线，以及连接两个切点的直线的并集；
- $\mathcal{CL}_5$：属于一个双切线铅笔的圆锥曲线、经过双切点的两条切线，以及连接两个切点的直线的并集。

在 $\tau(C) = (d-1)(d-2)$ 的情形下，圆锥曲线-直线配置的刻画由以下结果给出（见定理 3.6）：

定理 B. 设 $C = V(f)$ 是 $\mathbb{P}^2$ 中次数为 $d \geq 6$ 的约化圆锥曲线-直线配置。那么，$\tau(C) = d^2 - 3d + 2$ 当且仅当 C 属于以下情形之一：

- $\mathcal{C}_2$：由属于一个双切线铅笔的圆锥曲线之并集给出的圆锥曲线配置；
- $\mathcal{CL}_6$：由属于一族双切线铅笔的圆锥曲线，以及经过两个双切点的直线之并构成的圆锥曲线-直线配置。

作为第一个结果的推论，我们可以确定具有拟齐次奇点的圆锥曲线-直线配置的极映射次数，即总米尔诺数 $\mu(C)$（见定义 2.3）等于总 Tjurina 数的情形。事实上，回顾一下，当 $C = V(f)$ 不是由共点直线构成的集合时，与 f 相关联的极映射 ∇f 定义了一个一般有限的有理映射 $\nabla f : \mathbb{P}^2 \dashrightarrow \mathbb{P}^2$，其次数为 $(d-1)^2 - \mu(C)$。因此，当 $\mu(C) = \tau(C)$ 且 $\tau(C)$ 取最大值时，这样的次数最小，等于 $d-2$。这发生在情形 $\mathcal{L}$ 和 $\mathcal{CL}_2$ 中。

另一个相关问题是 Dolgachev 和 Kapranov 提出的 Torelli型问题（见[15]）：该问题询问对数向量场的秩2向量丛 $\mathcal{T}\langle C\rangle$（它是以下映射的核）是否

$$(\partial_x f, \partial_y f, \partial_z f) : \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}^{\oplus 3}(1) \to \mathcal{J}_f(d),$$

借助 $\mathcal{J}_f$ 层化的雅可比理想，可以唯一确定该曲线，另见 [12] 和 [7]。但在所考虑的情形中，这一结果并不成立。

最后，我们注意到，在具有最大蒂朱纳数且由三个线性无关形式给出的线性关系的情形下，雅可比概形 Σ_f 也恰好是适当的 $d-1$ 阶部分对称张量的特征概形（定义见 2.6）。这发生在 $\mathcal{L}$ 和 $\mathcal{CL}_2$ 的情形中，因此我们可以应用 [20] 和 [4] 的结果。特别地，这类概形也可作为扭曲切丛 $\mathcal{T}_{\mathbb{P}^2}(d-3)$ 的截面的零点出现；并且我们有，爆破 $\mathrm{Bl}_{\Sigma_f}\mathbb{P}^2 \subset \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2$ 是射影丛 $\mathbb{P}(\mathcal{T}_{\mathbb{P}^2})$ 与一个双次数为 $(1, d-2)$ 的除子的完全交，极映射可能收缩的曲线只有直线。因此，次数为 k $(d-1)$ 的子概形不包含在任何次数为 k 的曲线中，对任意 $2 \leq k \leq d-2$ 均如此。我们进一步指出，在线配置的情形 $\mathcal{L}$ 中，被收缩的直线恰好是 $V(f)$ 的分支；而在圆锥曲线-直线配置中，唯一被收缩的直线是配置 $V(f)$ 中出现的切线。

研究具有次数较高的最小雅可比合 syzygy 的奇异曲线，似乎十分复杂且难以驾驭。我们认为，围绕极映射纤维展开的研究方法值得进一步探讨。

我们研究中所用的技术依赖于这样一个结果：该结果将无公因子的多项式乘积的 syzygy 模，与 [10, 定理 5.1 和推论 5.3]，中给出的结果联系起来；此外，还依赖于 [5, 定理 3.5] 中对具有特定线性雅可比 syzygy 的情形下希尔伯特–伯奇矩阵的刻画。我们主要结果的证明基于对所研究曲线任意子曲线可能具有的雅可比 syzygy 进行细致分析。

本文的结构如下：下一节将回顾有关雅可比理想、雅可比 syzygy 以及三元张量的特征概形的定义和预备结果。

在第 3 节中，我们将确定对应于具有线性关系的雅可比理想的雅可比概形的几何分类。

最后，在第 4 节中，我们刻画具有雅可比概形的圆锥曲线-直线配置，该概形同时也是某个三元张量的特征概形。对于这类曲线，我们描述一般有限极映射的次数 $d-2$，并刻画其收缩曲线。

致谢。本文的大部分工作是在第一作者作为 Universitat de Barcelona 的访问学者期间完成的，她谨向数学与计算机科学系的各位致以谢意，感谢他们的热情款待。

2. Preliminaries

本节介绍与约化奇异平面曲线相关的雅可比理想以及特征概形的基本定义和结果，并为后续各节的结果奠定基础。

从现在起，我们固定多项式环 $R=\mathbb{C}[x,y,z]$，并将由齐次多项式 $f\in R_d$ 定义的复射影平面 $\mathbb{P}^2=\mathrm{Proj}(R)$ 中次数为 d 的约化曲线记作 $C=V(f)$。

2.1. 约化曲线的雅可比理想。次数为 d 的约化奇异平面曲线 $C=V(f)$ 的雅可比理想 J_f 定义为 R 中由三个偏导数 $\partial_x f$、$\partial_y f$ 和 $\partial_z f$ 生成的齐次理想。我们用 $\mathrm{Syz}(J_f)$ 表示关于 f 的所有雅可比关系构成的分次 R-模，即

$$\mathrm{Syz}(J_f):=\{(a,b,c)\in R^3 \mid a\partial_x f+b\partial_y f+c\partial_z f=0\}.$$

我们用 $\mathrm{Syz}(J_f)_t$ 表示分次 R-模 $\mathrm{Syz}(J_f)$ 中次数为 t 的齐次部分；对于任意 $t\geq 0$，$\mathrm{Syz}(J_f)_t$ 是有限维的 $\mathbb{C}$-向量空间。关于 f 的雅可比关系的最小次数是整数 $\mathrm{mrd}(f)$，定义为满足以下条件的最小整数 r：存在一个非平凡关系 $a\partial_x f+b\partial_y+c\partial_z=0$，其系数为 a、b、$c\in R_r$，涉及 f 的偏导数 $\partial_x f$、$\partial_y f$ 和 $\partial_z f$。更确切地说，我们有：

$$\mathrm{mrd}(f)=min\{n\in\mathbb{N} \mid \mathrm{Syz}(J_f)_n\neq 0\}.$$

众所周知，若 $\mathrm{mrd}(f)=0$，即三个偏导数 $\partial_x f$、$\partial_y f$ 和 $\partial_z f$ 线性相关，当且仅当 C 是经过同一个点 $p\in\mathbb{P}^2$ 的直线并。因此，我们始终假设 $\mathrm{mrd}(f)>0$，我们的目标之一是对次数为 d 且满足 $\mathrm{mrd}(f)=1$ 的圆锥曲线-直线配置 $C=V(f)$ 进行几何分类，参见定理 3.5 和 3.6。

定义 2.1. 设 $C=V(f)$ 是一条次数为 d 的约化奇异平面曲线。若由 f 的所有雅可比关系构成的分次 R-模 $\mathrm{Syz}(J_f)$ 是一个自由 R-模，则称 C 是自由的，即

$$\mathrm{Syz}(J_f)=R(-d_1)\oplus R(-d_2) \tag{2.1}$$

其中 $d_1+d_2=d-1$。此时，(d_1,d_2) 称为 C 的指数。

如果 C 的 $\mathrm{Syz}(J_f)$ 的最小自由分解如下所示，则称其为近自由：

$$0\longrightarrow R(-d-d_2)\longrightarrow R(1-d-d_1)\oplus R(1-d-d_2)^2\longrightarrow \mathrm{Syz}(J_f)\longrightarrow 0 \tag{2.2}$$

其中 $d_1 \leq d_2$ 和 $d_1 + d_2 = d$。

例2.2. (1) 方程为 $C = V(f) = V(y^4z + x^5 + x^2y^3)$ 的有理尖点五次曲线 $C \subset \mathbb{P}^2$ 是自由的。事实上，$J_f = (5x^4 + 2xy^3, 3x^2y^2 + 4y^3z, y^4) \subset R$，且它有如下类型的最小自由$R$-分解：

$$0 \longrightarrow R(-6)^2 \longrightarrow R(-4)^3 \longrightarrow J_f \longrightarrow 0.$$

我们有 $\mathrm{mrd}(f) = 2$，$\deg(J_f) = 12$，且 C 是自由的。

(2) 方程为 $C = V(f) = V(y^4z + x^5)$ 的有理尖点五次曲线 $C \subset \mathbb{P}^2$ 是近自由的。事实上，$J_f = (5x^4, 4y^3z, y^4) \subset R$，且它有如下类型的最小自由 R-分解：

$$0 \longrightarrow R(-9) \longrightarrow R(-5) \oplus R(-8)^2 \longrightarrow R(-4)^3 \longrightarrow J_f \longrightarrow 0.$$

f的 mrd 为 $= 1$，$\deg(J_f)$ 为 $= 12$，而 C不是自由的，但它是近自由的。

(3) 方程为 $C = V((x^2 + y^2 + z^2)(x^3 + y^3 + z^3))$ 的节点五次曲线 $C \subset \mathbb{P}^2$ 既不是自由的，也不是近自由的。事实上，$J_f = (5x^4 + 3x^2(y^2 + z^2) + 2x(y^3 + z^3)\ 2x^3y + 3x^2y^2 + 5y^4 + 3y^2z^2 + 2yz^3, 2x^3z + 2y^3z + 3x^2z^2 + 3y^2z^2 + 5z^4) \subset R$，且它具有以下类型的最小自由 R-分解：

$$0 \longrightarrow R(-9) \oplus R(-10) \longrightarrow R(-7) \oplus R(-8)^3 \longrightarrow R(-4)^3 \longrightarrow J_f \longrightarrow 0.$$

f的 mrd 为 $= 3$，且 $\deg(J_f)$ 为 $= 6$。

一般而言，约化奇异曲线 $C = V(f)$ 在 $\mathbb{P}^2$ 中为自由曲线，当且仅当其雅可比理想 J_f 的 f 是余维二的算术 Cohen-Macaulay；这类理想可由希尔伯特-伯奇定理 [16]完全刻画：如果 $I = \langle g_1, \ldots\ldots, g_m \rangle \subset R$是一个余维二的 Cohen-Macaulay 理想，那么 I 由该理想 I的第一 syzygies 所构成的 $(m + 1) \times m$ 矩阵的极大子式定义。将此与齐次多项式的欧拉公式结合起来，我们得到自由曲线 $C = V(f)$ 在 $\mathbb{P}^2$ 中具有受到严格约束的结构：$f = \det(M)$，其中 3×3矩阵 M的一行由 3 个变量组成，其余 2 行是 J_f的最小第一 syzygies。

自由曲线与总 Tjurina 数有关。我们首先回顾奇点理论中的一些概念。

设 $C = V(f) \subset \mathbb{A}^2$ 是一条约化的、不一定不可约的平面曲线，并固定一个奇点 $p \in C$。令 $\mathbb{C}\{x, y\}$ 表示收敛幂级数环。

定义 2.3. 约化平面曲线 $C = V(f)$ 在 (0, 0) 处的米尔诺数 $\in C$ 为 s

$$\mu_{(0,0)}(C) = \dim \mathbb{C}\{x, y\}/\langle \partial_x f, \partial_y f \rangle.$$

约化平面曲线 $C = V(f)$ 在 (0, 0) 处的 Tjurina 数 $\in C$ 为

$$\tau_{(0,0)}(C) = \dim \mathbb{C}\{x, y\}/\langle \partial_x f, \partial_y f, f \rangle.$$

为了定义任意点 p 处的 $\mu_p(C)$ 和 $\tau_p(C)$，将 p 平移到原点。

显然有 $\tau_{(0,0)}(C) \leq \mu_{(0,0)}(C)$。对于射影平面曲线 $C = V(f) \subset \mathbb{P}^2$，有：

$$\tau(C) := \deg J_f = \sum_{P \in Sing(C)} \tau_p(C)$$

其中 J_f 是雅可比理想。我们将 C 的总 Tjurina 数称为 $\tau(C)$。

du Plessis 和 Wall 的一项漂亮结果给出了约化平面曲线 $C = V(f)$ 的总 Tjurina 数$\tau(C)$的上下界，这些界由其次数 d和雅可比理想 J_f 的奇异关系的最小次数 $\mathrm{mrd}(f)$ 决定，并将曲线的自由性与 $\tau(C)$ 联系起来。更准确地说，我们有：

命题 2.4. 设 $C = V(f)$ 是次数为 d 的约化奇异平面曲线，且 $r := \mathrm{mrd}(f)$。则有：

$$(d-1)(d-r-1) \leq \tau(C) \leq (d-1)(d-r-1) + r^2.$$

此外，如果 $\tau(C) = (d-1)(d-r-1) + r^2$，那么曲线 C 是自由的；当 $d > 2r$ 时，这一条件也是充分的。

证明。参见 [21,定理 3.2] 和 [6,推论 1.2]。 □

下一个结果将在下一节中发挥重要作用。它将可约平面曲线 $C = C_1 \cup C_2 = V(f_1 f_2)$ 的雅可比理想的奇异关系的最小次数 $\mathrm{mrd}(f)$，分别与 $C_1 = V(f_1)$ 和 $C_2 = V(f_2)$ 的雅可比奇异关系的最小次数 $\mathrm{mrd}(f_1)$ 和 $\mathrm{mrd}(f_2)$ 联系起来。注意，奇异关系模可以识别为消去多项式 g 的导子模，即自由 R-模 $D(g) = \{\delta = a\partial_x + b\partial_y + c\partial_z$ 的子模 $D_0(g)$：a、b、$c \in R\}$，其中的 $\mathbb{C}$-导子属于被 g 湮灭的多项式环 R：

$$D_0(g) = \{\delta \in D(g) \ : \ \delta g = 0\}.$$

对于光滑曲线 $V(g)$，其 syzygy 模是平凡的，因此我们确实考虑模 $D_0(g)$，而不是 $\mathrm{Syz}(J_g)$。

定理 2.5. 设 $C_i = V(f_i)$ 和 $i = 1,2$ 是 $\mathbb{P}^2$ 中没有公共不可约分支的两条约化曲线。令 $d_i = \deg f_i$，且 $r_i = \mathrm{mrd}(f_i)$，其中 $i = 1,2$。令 $C = V(f_1 f_2)$ 为 C_1 与 C_2 的并，令 $d = d_1 + d_2 = \deg f$，且 $r = \mathrm{mrd}(f)$。则有：

(1) 若 $\delta_1 \in D_0(f_1)$，则

$$\delta = f_2\delta_1 - \frac{1}{d}\delta_1(f_2)\ E \in D_0(f),$$

其中 $E = x\partial_x + y\partial_y + z\partial_z$ 表示欧拉导子；

(2) $D_0(f) \subset D_0(f_1) \cap D_0(f_2)$；更准确地说，对于 $\delta \neq 0$，有 $\delta \in D_0(f)$ 当且仅当δ 可唯一地写成如下形式：$\delta = h\ E + \delta_1 = -h\ E + \delta_2$，其中 h 是适当的齐次多项式，且对于 $j = 1, 2$，$\delta_j \in D_0(f_j)$ 均非零。(3) 特别地，我们有

$$\max(r_1, r_2) \leq r \leq \min(r_1 + d_2, r_2 + d_1).$$

且 r是满足下列条件之一的最小整数：t $D_0(f_1)_t \cap D_0(f_2)_t \neq 0$或 $D_0(f_1)_t + D_0(f_2)_t$包含欧拉导子的一个非零倍数 E。

证明。见 [10,定理 5.1] 和 [10, 推论 5.3]。 □

2.2. $\mathbb{P}^2$中的特征概形。由于我们将考察一个雅可比概形是否也是某个张量的特征概形，因此以张量特征概形的基本定义和结果作为预备部分的结尾。

张量的特征向量和特征值有几种不同的概念，分别由 [19] 和 [24]独立引入。这里我们关注代数几何观点。我们为 $\mathbb{C}^3$选取一组基，将部分对称张量 T 与三个次数为 $d-2$ 的齐次多项式对应起来，并通过一个齐次矩阵的子式消失，代数地描述张量 T 的特征点。更确切地说，我们有：

定义 2.6. 设 $T = (g_1, g_2, g_3) \in (Sym^{d-2}\mathbb{C}^3)^{\oplus 3}$ 是一个部分对称张量。T 的特征概形是闭子概形 $E(T) \subset \mathbb{P}^2$，由齐次矩阵的 2×2 子式定义

$$M = \begin{pmatrix} x & y & z \\ g_1 & g_2 & g_3 \end{pmatrix}. \tag{2.3}$$

若 T 为一般的，则 $E(T)$ 是一个零维概形（例如参见 [1]）。此外，由 Hochster-Eagon 定理 [18], , 坐标环 $R/I(E(T))$ 是 Cohen-Macaulay 环，因此齐次理想 $I(E(T))$ 是饱和的。因此，$E(T)$ 是一个标准

行列式方案。当张量 T 是对称的，即存在齐次多项式f，且 $g_0 = \partial_x f$、 $g_1 = \partial_y f$ 和 $g_2 = \partial_z f$ 时，我们将其特征概形记为 $E(f)$。

值得指出的是，对于对应于某个齐次多项式 f 的对称张量，其特征点就是极映射

$$\nabla f = (\partial_x f, \partial_y f, \partial_z f) : \mathbb{P}^2 \dashrightarrow \mathbb{P}^2$$

f的不动点。

例 2.7。考虑费马三次曲线 $V(f)$，其中 $f = x^3 + y^3 + z^3 \in \mathbb{C}[x, y, z]$。特征概形 $E(f)$ 是 $\mathbb{P}^2$ 的一个长度为 7 的零维子方案，由以下矩阵的极大子式定义：

$$M = \begin{pmatrix} x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{pmatrix}.$$

因此， $E(f) = \{(1, 0, 0,)、(0, 1, 0)、(0, 0, 1)、(1, 1, 0)、(1, 0, 1)、(0, 1, 1)、(1, 1, 1)\}$.

若固定一个整数 $d \geq 2$，且 $T = (g_1, g_2, g_3) \in (Sym^{d-2}\mathbb{C}^3)^{\oplus 3}$ 是一般部分对称张量，则有（参见 [16, 定理 A2.10]）：

(1) $E(T)$ 是一个长度为 $d^2 - 3d + 3$ 的约化零维方案。(2) 齐次理想 $I(E(T)) \subset R$ 具有一个最小自由 R-分解

$$0 \longrightarrow R(-2d+3) \oplus R(-d) \longrightarrow R(-d+1)^3 \longrightarrow I(E(T)) \longrightarrow 0.$$

上述两个条件对于平面零维子方案成为特征概形而言并不充分，以下结果给出了一个刻画（见 [2, 命题 5.2]）。

命题 2.8. 设 Z 是 $\mathbb{P}^2$ 中次数为 $d^2 - 3d + 3$ 的零维子概形。那么， Z 是某个张量的特征概形，当且仅当其希尔伯特–伯奇矩阵具有如下形式

$$\begin{pmatrix} L_1 & G_1 \\ L_2 & G_2 \\ L_3 & G_3 \end{pmatrix},$$

其中 L_1、 L_2、 L_3 是线性无关的线性形式。

3. Conic-line arrangements with a linear Jacobian syzygy

本节从两组约化圆锥曲线-直线配置的例子开始。所有这些例子都将发挥重要作用，因为正如我们将看到的，它们是 $\mathbb{P}^2$ 中唯一的约化圆锥曲线-直线配置 C，其雅可比理想具有一个线性奇异关系。

下文将使用 [5, R. O. Buchweitz 和 A. Conca 提出的5], 定理 3.5], ，该定理确定了满足形如 (ax, by, cz) 的线性奇异关系的雅可比概形的希尔伯特–伯奇矩阵，其中系数为 $a, b, c \in \mathbb{C}$。为完整起见，现回顾其表述：

定理 3.1（Buchweitz - Conca）。设 K 为特征为零的域， $f \in K[x, y, z]$为三个变量中的次数为 d 的约化多项式，使得 f 包含于其偏导数生成的理想中。进一步假设存在由 K 中的元素构成的三元组 (a, b, c)，且它们不全为零，使得 $ax\ \partial_x f + by\ \partial_y f + cz\ \partial_z f = 0$。

于是，除变量重命名外，我们得到以下可能性：

(1) 若 $abc \neq 0$，则 f 是一个自由除子，其希尔伯特–伯奇矩阵为

$$\begin{pmatrix} ax & \left(\frac{1}{c} - \frac{1}{b}\right) & (d+2)^{-1}\partial_{yz} f \\ by & \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{c}\right) & (d+2)^{-1}\partial_{xz} f \\ cz & \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right) & (d+2)^{-1}\partial_{xy} f \end{pmatrix}, \tag{3.1}$$

其中 $\partial_{**} f$ 表示 f对应的二阶导数。

(2) 如果 $a = 0$，但 $bc \neq 0$，那么 f 是自由除子，当且仅当 $\partial_x f \in (y, z)$。如果该条件得到验证且 $\partial_x f = yg + zh$，那么 $\frac{\partial f_y}{cz} = \frac{-\partial_z f}{by}$是 $K[x, y, z]$的一个元素，且希尔伯特–伯奇矩阵为

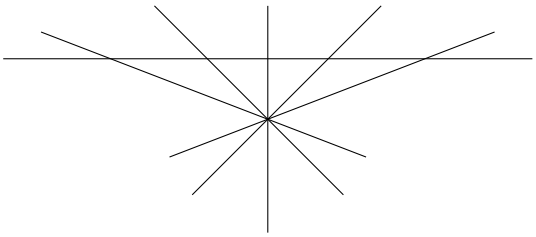
$$\begin{pmatrix} 0 & \partial_y f/cz \\ by & -h/c \\ cz & g/b \end{pmatrix}. \tag{3.2}$$

(3) 如果 $a = b = 0$，那么 f 与 z 无关，因此，作为一个约化平面曲线的悬挂，它是一个自由除子。

现在我们聚焦于圆锥曲线-直线配置。第一组例子对应于次数为 d 的约化圆锥曲线-直线配置 $C = V(f)$，其中 $\mathrm{mrd}(f) = 1$，并且具有最大 Tjurina 数 $\tau(C) = (d-1)(d-2) + 1 = d^2 - 3d + 3$。

例 3.2。(1) 固定一个整数 $d \geq 3$。设 $\mathcal{L}$ 是一个直线配置，其中有 $d-1$ 条直线通过点 p，另有一条直线处于一般位置。不失一般性，我们可以假设 $p = (0:0:1)$，且一般直线为 $V(x)$，因此直线配置 $\mathcal{L}$ 的方程为

$$\mathcal{L}: \ z\prod_{i=1}^{d-1}(a_i x + b_i y) = 0$$



其中 $a_i : b_i, \neq (a_j : b_j)$ 对应于 $i \neq j$。通过观察 $\partial_z f = \prod_{i=1}^{d-1}(a_i x + b_i y)$，很容易确定 f 的三个偏导数之间的一个线性关系。因此，我们有

$$f = z\ \partial_z f.$$

另一方面，根据欧拉公式，我们还有 $f = \frac{1}{d}(x\ \partial_x f + y\partial_y f + z\ \partial_x f)$，因此得到恒等式

$$x\ \partial_x f + y\ \partial_y f + (1-d)z\ \partial_x f = 0.$$

因此，根据定理 3.1（1），J_f 的希尔伯特–伯奇矩阵为

$$\begin{pmatrix} x & \frac{1}{(1-d)}\ \partial_{yz} f \\ y & \frac{1}{(d-1)}\partial_{xz} f \\ (1-d)z & 0 \end{pmatrix}, \tag{3.3}$$

J_f 的一个极小自由 R-分解为:

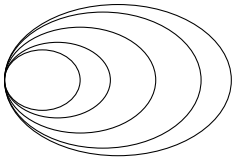
$$0 \longrightarrow R(-d) \oplus R(-2d+3) \longrightarrow R(-d+1)^3 \longrightarrow J_f \longrightarrow 0,$$

$\mathcal{L}$ 是自由的，指数为 $(1, d-2)$，全局 Tjurina 数为 $d^2 - 3d + 3$。

值得指出的是，这个线性关系的 3 个条目（x、y、$(1-d)\ z$）$\in \mathrm{Syz}(J_f)_1$ 线性无关。

(2) 固定一个偶整数 $d = 2m \geq 4$。设 $\mathcal{C}_1$ 是一个由 m 条圆锥曲线组成的配置$C_1, \ldots,$ C_m，满足存在一点 $p \in \mathbb{P}^2$，对于所有 $i, j, 1 \leq i < j \leq m$，均有$C_i \cap C_j = \{p\}$，且交点 p 是 $C_i \cup C_j$的一个奇点 A_7。换言之，这些 m 条圆锥曲线属于一个超密切线束；这样的曲线在 [25]中称为偶数 Płoski 曲线。不失一般性，我们可以假设 $p = (0:0:1)$，并且圆锥曲线配置 $\mathcal{C}_1$ 的方程为

$$\mathcal{C}_1:\ f=\prod_{i=1}^{m}(x^2+a_i(xz+y^2))=0,$$



其中 $a_i\neq 0$ 且 $a_i\neq a_j$，当 $i\neq j$ 时。约化平面曲线 $\mathcal{C}_1$ 的次数为 $d=2m$。观察到 $(0,x,-2y)$ 是 f_i 的雅可比理想的一个线性关系：$=x^2+a_i(xz+y^2)$，对任意 $i=1,\ldots,m$，因此我们推得 $\mathrm{Syz}(J_f)_1$ 也由 $(0,x,-2y)$ 生成。

此外，我们断言 $\mathcal{C}_1$ 是自由的，其指数为 $(1,d-2)$，因此全局 Tjurina 数为 d^2-3d+3。

为证明该断言，注意到由于 $r=1$，圆锥曲线配置 $\mathcal{C}_1$ 要么是自由的，要么是近自由的；根据 (2.1) 和 (2.2)，当且仅当 J_f 存在一个次数为$d-2$的奇异关系，且该关系不与 $(0,x,-2y)$ 成比例时，它才是自由的。下面用关于圆锥曲线数量 m 的归纳法证明后一个事实。

If $m=2$给出了一个次数为 2 的奇异关系，它不与 $(0,x,-2y)$ 成比例：

$$(-(a_1+a_2)x^2-2a_1a_2(y^2+xz)\ a_1a_2yz,4x^2+2(a_1+a_2)y^2+3(a_1+a_2)xz+2a_1a_2z^2).$$

现在假设 $m\geq 3$，并且任意由属于超密切线束的 $m-1$ 条圆锥曲线构成的圆锥曲线配置，都存在一个次数为 $2m-4$ 的奇异关系，且它不与 $(0,x,-2y)$ 成比例。令 $f=\prod_{i=1}^{m}(x^2+a_i(xz+y^2))$，并设

$$f_1=\prod_{i=1}^{m-1}(x^2+a_i(xz+y^2)),\qquad f_2=x^2+a_m(xz+y^2).$$

根据归纳假设，J_{f_1} 存在一个奇异关系 $\delta_1\in\mathrm{Syz}(J_{f_1})_{2m-4}$，其中 $\delta_1\notin\langle(0,x,-2y)\rangle$；由定理 2.5 的 (1)，我们有

$$\delta=f_2\delta_1-\frac{1}{2m}(\delta_1\cdot\nabla f_2)\ E\in\mathrm{Syz}(J_f)_{2m-2},$$

其中我们设 $\delta_1\cdot\nabla f_2=h_1\partial_x f_2+h_2\partial_y f_2+h_3\partial_z f_2$，而 $E=(x,y,z)$ 是欧拉关系。正如该定理证明中所观察到的（见 [10, 定理 5.1]），由于 $\delta_1\neq 0$，它也满足 $\delta\neq 0$。最后，我们断言 $\delta\notin\langle(0,x,-2y)\rangle$。事实上，若 $\delta_1\cdot\nabla f_2=0$，则有 $\delta=f_2\delta_1$；又因为根据归纳假设 $\delta_1\notin\langle(0,x,-2y)\rangle$，故断言成立。若$\delta_1\cdot\nabla f_2\neq 0$，则可见

$$\delta\cdot\nabla f_1=f_2\delta_1\cdot\nabla f_1-\frac{1}{2m}(\delta_1\cdot\nabla f_2)\ E\cdot\nabla f_1=-\frac{2m-2}{2m}(\delta_1\cdot\nabla f_2)f_1\neq 0.$$

另一方面, 如果对于某个多项式 h，有 $\delta=h\,(0,x,-2y)$，那么我们就有

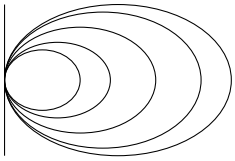
$$\delta\cdot\nabla f_1=h\ (0,x,-2y)\cdot\nabla f_1=0,$$

因为 $(0,x,-2y)\ \in\mathrm{Syz}(J_{f_1})$。

需要指出的是，在这种情况下，J_f 的线性关系只有 2 个线性无关项，而且这类例子不属于 Buchweitz - Conca 定理 3.1 所考虑的类型。

(3) 固定一个奇整数 $d=2m+1\geq 5$。设 $\mathcal{CL}_1$ 是一个由 m 条圆锥曲线 C_1、.....、C_m 和一条直线 ℓ 构成的圆锥曲线-直线配置，且存在一点 $p\in\mathbb{P}^2$，使得 ℓ 是所有 C_i 的公切线，$C_i\cap C_j=\{p\}$ 且交点 p 是 A_7 上的一个奇点，对所有 i、j、$1\leq i<j\leq m$ 均如此。换言之，这些圆锥曲线属于一个超密切铅笔；这种曲线在 [25] 中称为奇数 P loski 曲线。不失一般性，我们可以假设 $p=$=(0 : 0 : 1)，直线 $\ell=V(x)$，且圆锥曲线-直线配置 $\mathcal{CL}_1$ 的方程为

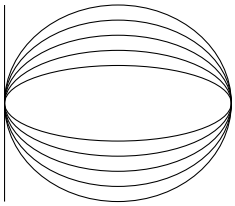
$$\mathcal{CL}_1:\ f = x\prod_{i=1}^{m}(x^2 + a_i(xz + y^2)) = 0$$



其中 $a_i \neq 0$，且当 $1 \neq j$ 时，$i \neq j$ 为 $a_i \neq a_j$。约化平面曲线 $\mathcal{CL}_1$ 的次数为 $d = 2m + 1$；使用与前一个例子相同的论证，不难看出 $\mathcal{CL}_1$ 是自由的，指数为 $(1, d-2)$，全局 Tjurina 数为$d^2 - 3d + 3$。Syz$(J_f)_1$ 的线性关系由 $(0, x, -2y)$ 生成。因此，同样地，f 的雅可比理想的线性关系只有两个线性无关的分量，并非 Buchweitz - Conca 定理 3.1 所讨论的类型。

(4) 固定一个奇整数 $d = 2m + 1 \geq 5$。设 $\mathcal{CL}_2$ 是一个圆锥曲线-直线配置，其中有 m 条圆锥曲线 $C_1, \ldots, C_m$ 以及一条直线 ℓ，且存在两个点 $p, q \in \mathbb{P}^2$，使得 $C_i \cap C_j = \{p, q\}$，并且两个交点 p, q 是 $C_i \cup C_j$ 的尖点，对所有 i, j, $1 \leq i < j \leq m$ 均如此；此外，ℓ 是在所有 p 处与各条 C_i 公切的直线。不失一般性，可以假设 $p = (0:0:1)$，$q = (1:0:0)$，$\ell = V(x)$，因此圆锥曲线-直线配置 $\mathcal{CL}_2$ 的方程为

$$\mathcal{CL}_2:\ f = x\prod_{i=1}^{m}(xz + a_i y^2) = 0$$



对所有 i, $1 \leq i \leq m$，均有 $a_i \neq 0$；若 $1 \neq j$，则 $a_i \neq a_j$。约化奇异平面曲线 $\mathcal{CL}_2$ 的次数为 $d = 2m+1$。我们断言 $Syz(J_f)_1 = \langle((d-1)x, -y, -(d+1)z)\rangle$。事实上，令 $q_i(x, y, z) = xz + a_i y^2$。我们有

$$\partial_x f = \prod_{i=1}^{m} q_i + xz\left(\sum_{j=1}^{m}\prod_{i=1, i\neq j}^{m} q_i\right),\ \partial_y f = 2xy\left(\sum_{j=1}^{m} a_j \prod_{i=1, i\neq j}^{m} q_i\right),\ \partial_z f = x^2\left(\sum_{j=1}^{m}\prod_{i=1, i\neq j}^{m} q_i\right),$$

这尤其给出

$$f = x\ \partial_x f - z\ \partial_z f.$$

因此，根据欧拉恒等式，我们得到

$$(d-1)x\ \partial_x f - y\ \partial_y f - (d+1)z\ \partial_z f = 0.$$

因此，f 的雅可比理想的线性奇异关系再次具有 3 个线性无关的分量。

因此，根据定理 3.1 的 (1)，曲线 $\mathcal{CL}_2$ 是自由曲线，其全局 Tjurina 数为 $d^2 - 3d + 3$，而 J_f 的希尔伯特–伯奇矩阵为

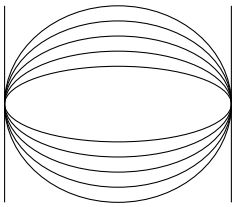
$$\begin{pmatrix} (d-1)x & \frac{1}{(d+1)}\ \partial_{yz} f \\ -y & \frac{2}{(d^2-1)}\partial_{xz} f \\ -(d+1)z & -\frac{1}{(d-1)}\partial_{xy} f \end{pmatrix}. \tag{3.4}$$

(5) 以下三个例子属于 [5, 例 3.7], 所述的类型，并且它们都对应于指数为 $(1, d-2)$ 的自由曲线，且 Syz$(J_f)_1$ 由 $(x, 0, -z)$ 生成。

- 设 $d = 2m + 2 \geq 6$，并设 $\mathcal{CL}_3$ 为一个次数为 d 的圆锥曲线-直线配置，其中包含 m条圆锥曲线 C_1，…，C_m以及两条直线 ℓ_1和 ℓ_2，使得存在两点 p、$q \in \mathbb{P}^2$满足 $C_i \cap C_j = \{p, q\}$，且两个交点 p、q对于$C_i \cup C_j$而言均为尖点；对所有 i，j，$1 \leq i < j \leq m$，ℓ_1是在 p处所有 C_i的公切线，ℓ_2是在 q处所有 C_i的公切线。不失一般性，我们可以假设

$p = (0:0:1)$, $q = (1:0:0)$, $\ell_1 = V(x)$, $\ell_2 = V(z)$, 从而圆锥曲线-直线配置 $\mathcal{CL}_3$ 的方程为

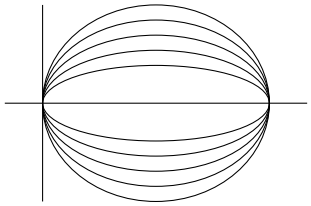
$$\mathcal{CL}_3 : \ f = xz\prod_{i=1}^{m}(xz + a_i y^2)) = 0$$



对于所有 $i, 1 \le i \le m$, 且当 $1 \ne j$ 时, $a_i \ne 0$ 均成立。

• 设 $d = 2m + 2 \ge 6$, 并设 $\mathcal{CL}_4$ 是次数为 d 的圆锥曲线-直线配置, 其中包含 m 条圆锥曲线 $C_1, \ldots, C_m$ 和两条直线 ℓ_1 与 ℓ_2, 满足存在两个点 $p, q \in \mathbb{P}^2$, 使得 $C_i \cap C_j = \{p, q\}$, 且两个交点 p, q 是 $C_i \cup C_j$ 的尖点。对于所有 i, j, $1 \le i < j \le m$, ℓ_1 都是所有 C_i 在 p 处的公切线, ℓ_2 是连接 p 与 q 的直线。不失一般性, 我们可以假设 $p = (0:0:1)$, $q = (1:0:0)$, $\ell_1 = V(x)$, $\ell_2 = V(y)$, 因此圆锥曲线-直线配置 $\mathcal{CL}_4$ 的方程为

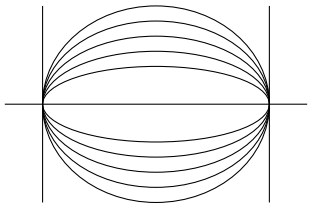
$$\mathcal{CL}_4 : \ f = xy\prod_{i=1}^{m}(xz + a_i y^2)) = 0$$



对于所有 i、 $1 \le i \le m$, 且当 $1 \ne j$ 时, $a_i \ne 0$ $a_i \ne a_j$。

• 设 $d = 2m + 3 \ge 6$, 并设 $\mathcal{CL}_5$ 是一个次数为 d、由 m 条圆锥曲线 C_1、.....、C_m 和三条直线 ℓ_1、 ℓ_2、 ℓ_3 构成的圆锥曲线-直线配置, 使得存在两点 p、 $q \in \mathbb{P}^2$ 满足 $C_i \cap C_j = \{p, q\}$, 且两个交点 p、 q 是 $C_i \cup C_j$ 的尖点。对于所有 i、 j、 $1 \le i < j \le m$, ℓ_1 是所有 C_i 在 p 处的公切线, ℓ_2 是所有 C_i 在 q 处的公切线, ell_3 是连接 p 和 q 的直线。不失一般性, 可设 $p = (0:0:1)$、 $q = (1:0:0)$、 $\ell_1 = V(x)$、$\ell_2 = V(z)$ 且 $\ell_3 = V(y)$, 因此圆锥曲线-直线配置 $\mathcal{CL}_5$ 的方程为

$$\mathcal{CL}_5 : \ f = xyz\prod_{i=1}^{m}(xz + a_i y^2)) = 0$$



对所有 i, $1 \le i \le m$, 均有 $a_i \ne 0$, 且当 $1 \ne j$ 时有 $a_i \ne a_j$。

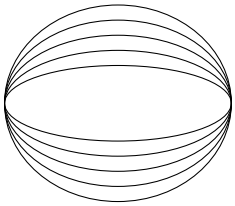
接下来的一系列例子对应于次数为 d、具有 $\mathrm{mrd}(f) = 1$ 和 $\tau(C) = d^2 - 3d + 2$的约自由平面曲线 $C = V(f)$。

例3.3. 根据 [5, 例3.7], , 接下来的例子具有这样的性质: $\mathrm{Syz}(J_f)_1$ 由 $(x, 0, -z)$ 生成, 并且它们不是自由的。由于 $r = 1$, 我们有 $\tau(C) = (d-1)(d-2)$, 根据引理 3.4, 它们是近自由的。

(1) 设 $\mathcal{C}_2$ 是由 m 条圆锥曲线 C_1, ..., C_m 组成的圆锥曲线配置, 使得存在两个点 p、 $q \in \mathbb{P}^2$ 满足 $C_i \cap C_j = \{p, q\}$, 且交点 p、 q 对于所有 i、 j、 $1 \le i < j \le m$ 都是 $C_i \cup C_j$ 的尖点。

不失一般性，我们可以假设 $p=(0:0:1)$、$q=(1:0:0)$，于是圆锥曲线配置的方程为

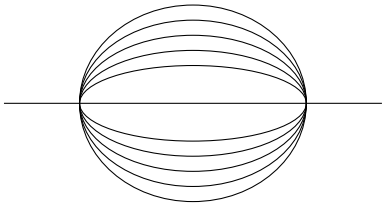
$$\mathcal{C}_2:\ f=\prod_{i=1}^{m}(xz+a_iy^2)=0$$



其中 $a_i\neq 0$ 对所有 i、$1\leq i\leq m$ 均成立，并且当 $1\neq j$ 时 $a_i\neq a_j$ 成立。

(2) 设 $\mathcal{CL}_6$ 是一个圆锥曲线-直线配置，包含 m 条圆锥曲线 $C_1,\ldots,C_m$ 以及一条直线 ℓ，且存在两点 p、$q\in\mathbb{P}^2$，使得 $C_i\cap C_j=\{p,q\}$，并且两个交点p、q对于 $C_i\cup C_j$ 均为尖点，其中 i、j、$1\leq i<j\leq m$ 均成立，且 ℓ 是经过 p 和q 的直线。我们可以假设 $p=(0:0:1)$、$q=(1:0:0)$、$\ell=V(y)$，并且该圆锥曲线-直线配置的方程为

$$\mathcal{CL}_6:\ f=y\prod_{i=1}^{m}(xz+a_iy^2)=0$$



其中 $a_i\neq 0$ 对所有 i、$1\leq i\leq m$ 均成立，并且当 $i\neq j$ 时 $a_i\neq a_j$ 成立。

我们的下一个目标是建立所有次数为 $d\geq 3$ 的约化圆锥曲线-直线配置 $C=V(f)$ 在 $\mathbb{P}^2$ 中的几何刻画，其雅可比理想 J_f 具有线性关系，即 $\mathrm{mrd}(f)=1$。

引理 3.4. 设 $C=V(f)$ 是 $\mathbb{P}^2$ 中次数为 $d\geq 3$ 的约化奇异曲线，且 $J_f=(f_x,f_y,f_z)$ 是其雅可比理想。假设 $\mathrm{mrd}(f)=1$。那么 $d^2-3d+2\leq\tau(C)\leq d^2-3d+3$。此外，若 $\tau(C)=d^2-3d+3$（分别地，若 $\tau(C)=d^2-3d+2$），则 C 是自由的（近自由的）。

证明。由命题 2.4 可得 $d^2-3d+2\leq\tau(C)\leq d^2-3d+3$。根据 $[6,$ 定理 1.2$]$（另见 $[17,$ 命题 $26]$），若 $\tau(C)=d^2-3d+3$（分别地，若 d^2-3d+2），则 C 是自由的（近自由的）。□

3.1. 具有线性雅可比关系的自由圆锥曲线-直线配置。我们的首要目标是对次数为 d、位于 $\mathbb{P}^2$ 中且满足 $r=\mathrm{mrd}(f)=1$ 的自由圆锥曲线-直线配置 $C=V(f)$ 进行分类；这类曲线具有最大的 Tjurina 数 $\tau(C)=d^2-3d+3$。我们有

定理 3.5. 设 $C=V(f)$ 是 $\mathbb{P}^2$ 中次数为 $d\geq 5$ 的圆锥曲线-直线配置。那么，$\tau(C)=d^2-3d+3$ 当且仅当 C 是如下配置之一：例 3.2(1) 中的直线配置 $\mathcal{L}$，例 3.2(2) 中的圆锥曲线配置 $\mathcal{C}_1$，或例 3.2(3)-(7) 中的圆锥曲线-直线配置 $\mathcal{CL}_1$、$\mathcal{CL}_2$、$\mathcal{CL}_3$、$\mathcal{CL}_4$ 或 $\mathcal{CL}_5$。

证明. 例 3.2(1)-(7) 中描述的所有圆锥曲线-直线配置 $C\subset\mathbb{P}^2$ 的总 Tjurina 数均为 $\tau(C)=d^2-3d+3$，且 $\mathrm{mdr}(f)=1$。我们来证明反向结论。假设 $\tau(C)=d^2-3d+3$，则由命题 2.4 可得 $\mathrm{mrd}(f)=1$。我们分几种情况讨论：

情形 1：C是一个直线配置。根据 $[9,$ 命题 4.7(5)$]$，C是经过一个点 p的 $d-1$ 条直线与另一条处于一般位置的直线的并集。

情形 2：设 $C=\cup_{i=1}^{m}C_i:\quad f=\prod_{i=1}^{m}f_i=0$ 为一个圆锥曲线配置。根据定理 2.5 的 (3)，每当我们取出两个圆锥曲线的并集 $C'=C_1\cup C_2$ 时，相对 $r'=\mathrm{mrd}(C')=1$，因此根据

[10, 命题 5.5], 中的分类，唯一可能的情形是：要么 $|C_1 \cap C_2| = 2$且两个交点是 C'的两个尖点，要么 $|C_1 \cap C_2| = 1$ 且奇点是一个 A_7 奇点（两条圆锥曲线超密切）。由于第一种情形下总 Tjurina 数为 $\tau = 6$，因此不会出现。由此情形 $d = 4$得以解决。现在假设 $d \geq 6$。

断言：每当我们取出三个圆锥曲线的并 $C_{i_1} \cup C_{i_2} \cup C_{i_3}$ 时，它们都属于同一线束，因此它们要么相切，要么超密切。
断言的证明。事实上，先假设 $C_{i_1} \cap C_{i_2} = \{p, q\}$ 和 p、q 是 $C_{i_1} \cup C_{i_2}$ 的两个尖点。不失一般性，我们可以假设

$$C_{i_1} = V(f_{i_1}) = V(xz + a_{i_1} y^2), \qquad C_{i_2} = V(f_{i_2}) = V(xz + a_{i_2} y^2)$$

其中 a_{i_1}、$a_{i_2} \in \mathbb{C}$。因此，$D_0(f_{i_1})_1 = D_0(f_{i_2})_1 \cong \mathrm{Syz}(f_{i_1} f_{i_2})_1 = \langle (x, 0, -z) \rangle$。根据假设，$\mathrm{mrd}(f_{i_1} f_{i_2} f_{i_3}) = 1$。所以，应用定理 2.5，我们得到

$$D_0(f_{i_3})_1 \cap \langle (x, 0, -z) \rangle \neq 0, \text{ or } \alpha(x, 0, -z) + \beta(x, y, z) \in D_0(f_{i_3})_1.$$

直接计算可得，必有 $C_{i_3} = V(f_{i_3}) = V(\lambda xz + \mu y^2)$。

现在假设 $C_{i_1} \cap C_{i_2} = \{p\}$ 和 p 是 $C_{i_1} \cup C_{i_2}$的一个奇点 A_7。不失一般性，我们可以假设

$$C_{i_1} = V(f_{i_1}) = V(x^2 + a_{i_1}(xz + y^2)), \qquad C_{i_2} = V(f_{i_2}) = V(x^2 + a_{i_2}(xz + y^2))$$

其中 a_{i_1}，$a_{i_2} \in \mathbb{C}$。因此，$D_0(f_{i_1})_1 = D_0(f_{i_2})_1 \cong \mathrm{Syz}(f_{i_1} f_{i_2})_1 = \langle (0, x, -2y) \rangle$。根据假设，$\mathrm{mrd}(f_{i_1} f_{i_2} f_{i_3}) = 1$，故由定理 2.5，我们在此情形下有

$$D_0(f_{i_3})_1 \cap \langle (0, x, -2y)) \rangle \neq 0, \text{ or } \alpha(0, x, -2y) + \beta(x, y, z) \in D_0(f_{i_3})_1.$$

直接计算可得，在此情形下必有 $C_{i_3} = V(f_{i_3}) = V(\lambda x^2 + \mu(xz + y^2))$。

由该断言可知，$C = \cup_{i=1}^m C_i$ 的不可约分支要么属于一个双切线铅笔，要么属于一个超密切二次曲线铅笔。第一种情形下，我们有$\tau(C) = (2m)^2 - 3(2m) + 2$（见例3.3(1)）；第二种情形下，则有 $\tau(C) = (2m)^2 - 3(2m) + 3$（见例 3.2(2)），这就证明了我们要证明的结论。

情形 3:：设 $C = \cup_{i=1}^m C_i \bigcup \cup_{j=1}^s L_j$： $f = \prod_{i=1}^m f_i \cdot \prod_{j=1}^s \ell_j = 0$ 是一个圆锥曲线-直线配置。根据定理 2.5，圆锥曲线配置 $\cup_{i=1}^m C_i$ 满足 $\mathrm{mrd}(\prod_{i=1}^m f_i) = 1$。根据上述讨论，$\cup_{i=1}^m C_i$ 的分量要么属于一个超密切铅笔，要么属于一个双切线铅笔。我们分别分析这两种情况。

首先假设 $\cup_{i=1}^m C_i = V(\prod_{i=1}^m (x^2 + a_i(xz + y^2)))$ 属于一个以超密切点 $p = (0 : 0 : 1)$ 为基点的圆锥曲线束。因此，$\mathrm{Syz}(\prod_{i=1}^m f_i)_1 = \langle (0, x, -2y) \rangle$。我们寻找一条直线 $L = V(\ell) = V(ax + by + cz)$，使得 $\mathrm{mrd}((ax + by + cz) \prod_{i=1}^m (x^2 + a_i(xz + y^2))) = 1$。根据定理 2.5，(3)，若设

$$f_1 = ax + by + cz, \quad f_2 = \prod_{i=1}^m (x^2 + a_i(xz + y^2)),$$

我们有：要么 $D_0(f_1)_1 \cap D_0(f_2)_1 \neq 0$，要么对于某个非零常数 α，$\alpha(x\partial_x + y\partial_y + z\partial_z) \in D_0(f_1)_1 + D_0(f_2)_1$。至于直线 $V(f_1)$，如果 $a \neq 0$，我们有

$$D_0(f_1)_1 = \{L_1(-b\partial_x + a\partial_y) + L_2(-c\partial_x + a\partial_z) \ : \ L_1, L_2 \in R_1\},$$

而 $D_0(f_2) = \langle x\partial_y - 2y\partial_z \rangle$。

条件 $D_0(f_1)_1 \cap D_0(f_2)_1 \neq 0$ 永远不满足，而对于 $\alpha \neq 0$，条件 $\alpha(x\partial_x + y\partial_y + z\partial_z) = L_1(-b\partial_x + a\partial_y) + L_2(-c\partial_x + a\partial_z) + \beta x\partial_y - 2\beta y\partial_z$ 的唯一解为 $b = c = 0$。由此可得

$$\ell = x.$$

情形 $a = 0$ 也可以用类似的方法处理，而且不会出现。

接下来可以用类似的方法验证，$h = x(ax + by + cz) \prod_{i=1}^m (x^2 + a_i(xz + y^2))$ 具有线性雅可比关系，当且仅当 $b = c = 0$，但这将产生一个非约化多项式。

因此， C 如例 3.2 所示。

现在假设 $\cup_{i=1}^{m} C_i = V(\prod_{i=1}^{m}(xz + a_{i_1}y^2))$ 属于一个圆锥曲线束，其中所有圆锥曲线都在 $\{p = (1:0:0)\ q = (0:0:1)\}$ 处与直线相切，因此我们有线性奇异关系 $(x, 0, -z)$。按照上文的论证，我们可以确定能够添加到此圆锥曲线配置中的直线，使得新的圆锥曲线-直线配置的雅可比理想具有线性奇异关系。结果表明，我们只有六种可能：

$$x\prod_{i=1}^{m}(xz + a_{i_1}y^2), \quad y\prod_{i=1}^{m}(xz + a_{i_1}y^2), \quad z\prod_{i=1}^{m}(xz + a_{i_1}y^2),$$

$$xz\prod_{i=1}^{m}(xz + a_{i_1}y^2), \quad yz\prod_{i=1}^{m}(xz + a_{i_1}y^2), \quad xyz\prod_{i=1}^{m}(xz + a_{i_1}y^2).$$

根据定理 3.1 (2)，情形 $y\prod_{i=1}^{m}(xz + a_{i_1}y^2) = 0$ 并非自由。注意到第一种和第三种情形射影等价，即可完成证明。□

3.2. 具有线性雅可比关系的近自由圆锥曲线-直线配置。在本小节中，我们对次数为 d、具有 $r = \mathrm{mrd}(f) = 1$ 和最小 Tjurina 数 $\tau(C) = d^2 - 3d + 2$ 的 $\mathbb{P}^2$ 中的圆锥曲线-直线配置 $C = V(f)$ 进行分类。

定理 3.6. 设 $C = V(f)$ 是 $\mathbb{P}^2$ 中一个次数为 $d \geq 6$ 的圆锥曲线-直线配置。那么， $= d^2 - 3d + 2$ $\tau(C)$ 当且仅当 C 是例 3.3(1) 中的圆锥曲线配置 $\mathcal{C}_2$，或例 3.3(2) 中的圆锥曲线 - 直线配置 $\mathcal{CL}_6$ 。

证明。例 3.3(1)-(2) 中描述的所有圆锥曲线-直线配置 $C \subset \mathbb{P}^2$ 的总 Tjurina 数均为 $\tau(C) = d^2 - 3d + 2$。

我们来证明逆命题。假设 $\tau(C) = d^2 - 3d + 2, d \geq 6$，由命题 2.4 可得 $\mathrm{mrd}(f) = 1$。根据命题 4.3], ，不存在满足 $\mathrm{mrd}(f) = 1$ 且$\tau(C) = d^2 - 3d + 2$的直线配置。因此，只有两种可能：C是圆锥曲线配置，或者 C 是圆锥曲线-直线配置。仿照定理 3.5 的证明即可得出结论。□

4. 应用

将前述结果应用于本文的主要结论，我们确定了圆锥曲线-直线配置的雅可比理想何时是某个特征概形的理想。更准确地说，我们有：

定理 4.1. 设 $C = V(f)$ 是 $\mathbb{P}^2$ 中次数为 $d \geq 4$ 的圆锥曲线-直线配置。 f 的雅可比理想 J_f 是特征概形 $E(T)$ 的理想，当且仅当 C 是直线配置$\mathcal{L}$或圆锥曲线-直线配置 $\mathcal{CL}_2$。

证明. 设 $C = V$（分别为 f）是定理陈述中所述的直线配置（分别为圆锥曲线-直线配置）。我们在例 3.2(1)（分别为例 3.2(4)）中看到， C 的雅可比理想 J_f 由矩阵的极大子式定义

$$\begin{pmatrix} (d-1)x & g_0 \\ -y & g_1 \\ -(1+d)z & g_2 \end{pmatrix}, \quad \text{resp.} \quad \begin{pmatrix} x & h_0 \\ y & h_1 \\ (1-d)z & h_2 \end{pmatrix}.$$

等价地，雅可比理想由矩阵的子式生成

$$\begin{pmatrix} x & \frac{1}{d-1}g_0 \\ y & -g_1 \\ z & -\frac{1}{d+1}g_2 \end{pmatrix}, \quad \text{resp.} \quad \begin{pmatrix} x & h_0 \\ y & h_1 \\ z & \frac{1}{d-1}h_2 \end{pmatrix}.$$

根据定义，我们有 $J_f = I(E(T))$，其中 $T = (\frac{1}{d-1}g_0, -g_1, -\frac{1}{d+1}g_2) \in (Sym^{d-1}\mathbb{C}^3)^{\oplus(3)}$，分别地，$T = (h_0, h_1, \frac{1}{d-1}h_2) \in (Sym^{d-1}\mathbb{C}^3)^{\oplus(3)}$ 是部分对称张量。

我们来证明逆命题。假设存在一个部分对称张量 $T=(g_1,g_2,g_3)\in(Sym^{d-1}\mathbb{C}^3)^{\oplus(3)}$，使得 $I(E(T))=J_f$。这意味着 C 是自由的，$\tau(C)=d^2-3d+3$，$\mathrm{mrd}(f)=1$，并且 $\mathrm{Syz}(J_f)_1$ 由三个线性无关的线性形式生成。例 3.2 与命题 3.5 一同证明了我们要证明的结论。□

注 4.2. 存在一些约化平面曲线 $C=V(f)\subset\mathbb{P}^2$，其雅可比理想$J_f$ 是某个特征概形的理想 $E(T)$，但它们并非圆锥曲线-直线配置。例如，$f=y(x^3-y^2z)$。

注 4.3. 特别地，类型为$\mathcal{L}$ 的直线配置或圆锥曲线-直线配置 $\mathcal{CL}_2$ 的雅可比概形的几何性质，已由 [4, 定理 5.5 和注 5.8]完全描述。我们注意到，所引用的结果仅涉及约化特征概形，但不难看出，它可以推广到所有非约化的零维特征概形。

具体而言，若 $k\in\{2,\dots,d-1\}$，则 Σ_f上次数为 kd的任何子概形都不包含在次数为 k 的曲线上。此外，$S=\mathrm{Bl}_{\Sigma_f}\mathbb{P}^2$ 在肖氏环 $A(\mathbb{P}^2\times\mathbb{P}^2)$ 中的类可以确定。选取 L_1 和 L_2 作为两个因子的皮卡群的生成元，并令 $p_i\colon\mathbb{P}^2\times\mathbb{P}^2\to\mathbb{P}^2$ 为两个投影，则两个除子 $h_1=p_1^\star L_1$和 $h_2=p_2^\star L_2$ 是 $A(\mathbb{P}^2\times\mathbb{P}^2)$的生成元。于是容易验证，$S$ 在$A(\mathbb{P}^2\times\mathbb{P}^2)$中的类为

$$[S]=(d-1)h_1^2+dh_1h_2+h_2^2,$$

并且，考虑到式（3.3）和（3.4）中给出的希尔伯特-伯奇矩阵，曲面 S 恰为两个因子 $T\sim h_1+h_1$ 和 $D\sim(d-2)\,h_1+h_2$ 的完全交，其定义如下

$$T=V(p_0x+p_1y+(1-d)p_2z),\quad D=V(p_0\partial_{yz}f+p_1\partial_{xz}f)$$

分别适用于 $\mathcal{L}$ 的情形

$$T=V((d-1)p_0x-p_1y-(d+1)p_2z),\quad D=V((d-1)\,p_0\partial_{yz}f+2p_1\partial_{xz}f-(d+1)p_2\partial_{xy}f),$$

适用于 $\mathcal{CL}_2$ 的情形，其中 $((x\colon y\colon z),(p_0\colon p_1\colon p_2))\in\mathbb{P}^2\times\mathbb{P}^2$。

最后，我们注意到，根据 [20] 或引理 5.6], ，每个平面特征概形都是截面 $s\in H^0(\mathcal{T}_{\mathbb{P}^2}(d-2))$ 的零点轨迹，其中 $\mathcal{T}_{\mathbb{P}^2}$ 表示 $\mathbb{P}^2$ 的切丛。

接下来，我们将研究与 $\mathcal{L}$ 和 $\mathcal{CL}_2$ 配置相关的极映射。注意，由于我们关注的是总 Tjurina 数最大的曲线和准齐次奇点，一般有限极映射的次数为$(d-1)^2-\mu(C)=d-2$。

注 4.4. 我们可以应用证明 [4, 定理 5.5] 中所用的论证，并由此得知，与类型为 $\mathcal{L}$ 的直线配置或 $\mathcal{CL}_2$ 圆锥曲线-直线配置相关联的极映射所收缩的曲线只能是直线。

事实上，我们观察到，对于任意 $p=(p_0\colon p_1\colon p_2)\notin\Sigma_f$，点 $\nabla f(p)$ 是两条不同直线的交点

$$\nabla f(p)\colon\begin{cases}p_0x+p_1y+(1-d)p_2z=0\\ \partial_{yz}f(p)x+\partial_{xz}f(p)y=0.\end{cases}$$

因此，∇f 在任意点 $q=(q_0:q_1:q_2)\in\mathbb{P}^2$ 上方的纤维由以下方程的零点轨迹给出

$$\begin{cases}q_0x+q_1y+(1-d)q_2z=0\\ q_0\partial_{yz}f+q_1\partial_{xz}f=0.\end{cases}$$

Sinc由于第一个方程无论如何选择 $q\in\mathbb{P}^2$ 都表示一条直线，断言得证 s.

我们将在下一个结果中看到，对于 $\mathcal{L}$ 和 $\mathcal{CL}_2$ 配置，收缩直线的存在确实总能得到确认。回顾一下，极映射的临界轨迹由海森曲线给出，它由收缩曲线和极映射的分歧点组成。

命题 4.5. 设 $C = V(f)$ 是 $\mathbb{P}^2$ 中次数为 d 的圆锥曲线-直线配置，且 f 的雅可比理想 J_f 是特征概形 $E(T)$ 的理想。

那么，在 $\mathcal{L}$ 的情形下， ∇f 的临界轨迹由 $3(d-2)$ 条同类型的直线组成，即 $\mathcal{L}$，它包含 $\mathcal{L}$，而 ∇f 所收缩的直线恰好是 $\mathcal{L}$ 中的直线。

在 $\mathcal{CL}_2$ 的情形下，临界轨迹包含切线 ℓ，且它是唯一的收缩直线 .

证明。众所周知，直线配置中的所有直线都包含在海森曲线中。

现在我们验证， $\mathcal{L}$ 在 Hess(f) 中的剩余曲线由 $3(d-2)$ 条经过 $O = (0:0:1)$ 的 $-d = 2d-6$共点直线组成，并且这些剩余直线不会被 ∇f收缩。

将海森矩阵明确写出，即可得到第一个断言:

$$\mathrm{Hess}(f) = \begin{pmatrix} \partial_{xx}f & \partial_{xy}f & \partial_{xz}f \\ \partial_{xy}f & \partial_{yy}f & \partial_{yz}f \\ \partial_{xz}f & \partial_{yz}f & 0 \end{pmatrix}.$$

由于 $\partial_{xz}f$ 和 $\partial_{yz}f$ 都只是 x 和 y 的多项式，对行列式 $h(f) = \det \mathrm{Hess}(f)$ 按最后一行展开，可知 $h(f)$ f是 x和 y的多项式。此外，由于极映射由下式给出

$$\nabla f = \left(x_2 \left(\sum_{i=1}^{d-1} a_i \prod_{j\neq i, j=1}^{d-1} (a_j x + b_j y) \right), z \left(\sum_{i=1}^{d-1} b_i \prod_{j\neq i, j=1}^{d-1} (a_j x + b_j y) \right), \prod_{i=1}^{d-1} (a_i x + b_i y) \right),$$

可知，直线 $z = 0$ 被收缩到点 $(0:0:1)$，而直线 $a_i x + b_i y = 0$ 被收缩到点 $(a_i : b_i : 0)$。

最后，为了证明不存在其他被收缩的直线，我们回顾一下， J_f 的希尔伯特–伯奇矩阵由 (3.1) 给出，而 ∇f 由其 2×2 个子式给出。因此，对任意$p = (p_0 : p_1 : p_2) \notin \Sigma_f$，点 $\nabla f(p)$ 是以下两条不同直线的交点

$$\nabla f(p): \begin{cases} p_0 x + p_1 y + (1-d)p_2 z = 0 \\ \partial_{yz}f(p)x + \partial_{xz}f(p)y = 0. \end{cases}$$

因此， ∇f 在点 $q = (q_0 : q_1 : q_2) \in \mathbb{P}^2$ 上方的纤维由以下多项式的零点轨迹给出

$$\begin{cases} q_0 x + q_1 y + (1-d)q_2 z = 0 \\ q_0 \partial_{yz}f + q_1 \partial_{xz}f = 0. \end{cases}$$

特别地，当且仅当由方程 $q_0\partial_{yz}f + q_1\partial_{xz}f = 0$ 给出的、经过 $(0:0:1)$ 的 $d-2$ 共点直线集合中包含一条（非约化的）重直线时，纤维中才会出现分歧点。因此，问题在于确定线束 $q_0\partial_{yz}f + q_1\partial_{xz}f$ 中的非约化元素。不过，后者可以视为 $\mathbb{P}^1$中的一个除子线束，确切地说，是多项式 $\partial_2 f$的雅可比铅笔。若 f的因子处于一般位置，则多项式 $\partial_2 f \in \mathbb{C}[x,y]_{d-1}$ 也处于一般位置。因此，极映射 $\nabla\partial_2 f$ 的分歧点由其海森矩阵给出。

最后，我们讨论一个 $\mathcal{CL}_2$ 排列的情形。众所周知，平面曲线的任何线性分支都包含在海森曲线中。此外，若 $f = x\prod_{i=1}^{m}(xz + a_i y^2)$，则极映射为

$$\nabla f = \left(\prod_{i=1}^{m} q_i + xz \left(\sum_{j=1}^{m} \prod_{i=1, i\neq j}^{m} q_i \right), 2xy \left(\sum_{j=1}^{m} a_j \prod_{i=1, i\neq j}^{m} q_i \right), x^2 \left(\sum_{j=1}^{m} \prod_{i=1, i\neq j}^{m} q_i \right) \right),$$

其中我们设定 $q_i = xz + a_i y^2$；我们看到直线 $V(x)$ 被收缩为一个点。为证明不存在其他收缩直线，我们注意到，这样的直线必须在雅可比概形中包含次数至少为 $d-1$ 的子概形；唯一可能的候选是圆锥曲线第二个密切点处的切线，即直线 $V(z)$，或者连接两个奇点的直线 $V(y)$；但我们可以直接验证，这些情况都不会出现。

□

最后我们指出，极映射的几何似乎编码了关于给定曲线奇点拓扑类型的一些信息，因此我们认为值得对此作进一步研究。

References

[1] H. Abo, *On the discriminant locus of a rank $n-1$ vector bundle on $\mathbb{P}^{n-1}$*, Portugaliae Mathematica, 77, n. 3-4 (2020), 299–343. [2] H. Abo, A. Seigal and B. Sturmfels, *Eigenconfigurations of Tensors*, 离散数学中的代数与几何方法, 当代数学 685, 美国数学学会, 普罗维登斯, RI, (2017), 1–25. [3] E. Artal Bartolo, L. Gorrochategui, I. Luengo, A. Melle-Hern

´ *On Some Conjectures About Free and* andez, , *Nearly Free Divisors*
in Decker, W., Pfister, G., Schulze, M. (eds), 奇点与计算机代数. 施普林格 (2017). [4] V. Beorchia, F. Galuppi, and L. Venturello, *Eigenschemes of ternary tensors*, SIAM J. Appl. Algebra Geom., 5 (2021) n. 4, 620–650. [5] R.O. Buchweitz and A. Conca, *New free divisors from old*, 交换代数杂志 5 (2013), 17-47. [6] A. Dimca,

Freeness versus maximal global Tjurina number for plane curves, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc., 163 (2017), 1, 161–172. [7] A. Dimca,

Jacobian syzygies stable reflexive sheaves and Torelli properties for projective hypersurfaces with , , , 代数 *isolated singularities* 4 3 2017 290 303
几何 ( ) ( ), - . [8] A. Dimca, *Free and nearly free curves from conic pencils*, J. Korean Math. Soc. 55 (2018), No. 3, pp. 705-717. [9] A. Dimca, D. Ibadula and D.A. Macinic, *Numerical invariants and moduli spaces for line arrangements*, Osaka J. Math. 57 (2020), 847–870. [10] A. Dimca, G. Ilardi and G. Sticlaru,

Addition-deletion results for the minimal degree of a Jacobian syzygy of a union of two curves **615** 2023 77 102 , 代数杂志, ( ), - . [11] A. Dimca and P. Pokora, *On conic-line arrangements with nodes, tacnodes, and ordinary triple points*, 代数组合学杂志, 56, n. 2 (2022), 403–424.[12] A. Dimca and E. Sernesi,

Syzygies and logarithmic vector fields along plane curves, J. ´Ec. polytech. Math., 1, (2014), 247–267. [13] A. Dimca and G. Sticlaru, *Free and Nearly Free Curves vs. Rational Cuspidal Plane Curves*, Publ. RIMS Kyoto Univ. 54 (2018), 163-179. [14] A. Dimca and G. Sticlaru, *On the exponents of free and nearly free projective plane curves*, Rev. Mat. Complut. 30 (2017), 259-268. [15] I. V. Dolgachev and M. Kapranov.

Arrangements of hyperplanes and vector bundles on $\mathbb{P}^n$, Duke Math. J. 71 (1993), no. 3, 633-664. [16] D. Eisenbud,

Commutative Algebra with a view towards Algebraic Geometry, 数学研究生教材, vol. 150, 施普林格-Verlag, 柏林-海德堡-纽约, 1995. [17] Ph. Ellia, *Quasi-complete intersections and global tjurina number of plane curves*,

[18] *Cohen-Macaulay rings invariant theory and the generic perfection of deter-* M. *minantal loci* 1971 1020 1058
Hochster, John A. Eagon, , , , Amer. J. Math., 93, ( ), – . [19] L.H. Lim,

Singular values and eigenvalues of tensors: a variational approach. In 1st IEEE 多传感器自适应处理计算进展国际研讨会, (2005) 129 - 132. [20] L. Oeding and G. Ottaviani,

Eigenvectors of tensors and algorithms for Waring decomposition, 符号计算杂志, 54 (2013), 9 - 33. [21] A.A. du Plessis and C.T.C. Wall, *Application of the theory of the discriminant to highly singular plane curves*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 126 (1999), no. 2, 259-266. [22] A.A. du Plessis and C.T.C. Wall, *Curves in $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ with 1-dimensional symmetry*, Rev. Mat. Complut. 12 (1999), no. 1, 117-132. [23] A. P loski,

A bound for the Milnor number of plane curve singularities 12 2014 5, , Cent. 688 693
Eur. J. Math. ( ), no. - .[24] L. Qi. *Eigenvalues of a real supersymmetric tensor*, 符号计算杂志 40 (2005), 1302–1324. [25] J. Shin, *A bound for the Milnor sum of projective plane curves in terms of GIT*, J. Korean Math. Soc. 53 (2016), no. 2, 461-473.

Dipartimento di Matematica e Geoscienze, Università di Trieste, Via Valerio 12/1, 34127 Trieste,Italy*Email address*: beorchia@units.it, ORCID 0000-0003-3681-9045

Facultat de Matemàtiques i Informàtica, Universitat de Barcelona, Gran Via des les Corts Catalanes 585, 08007 Barcelona, Spain*Email address*: miro@ub.edu, ORCID 0000-0003-1375-6547