arXiv:2303.04680v1 [math.PR] 8 Mar 2023

多重分数阶 Hermite 过程：定义与基本性质

L. Loosveldt*

2023年3月9日

摘要

我们定义了多重分数阶 Hermite 过程，它推广并统一了多重分形布朗运动与 Hermite 过程。具体而言，我们在 Hermite 过程作为多重维纳-伊藤积分的定义中，以赫斯特函数取代赫斯特参数。随后，我们研究了这些过程的逐点正则性、局部渐近自相似性，以及其图像的若干分形维数。我们的结果表明，多重分数阶 Hermite 过程的基本性质正如预期的那样由赫斯特函数支配。此外，我们利用马利亚万演算中的相关事实，给出了二阶 Wiener混沌中的一些补充结果。

关键词：高阶维纳混沌、Hermite 过程、多重分数阶过程、连续模、迭代对数律、局部渐近自相似性、分形维数、马利亚万演算

*2020*年数学学科分类：60G20, 60G17, 60H05, 60H07, 26A15, 28A78

1 引言

已知赫斯特参数为 $h \in (0, 1)$ 的分数布朗运动，是满足 $B_h(0) = 0$、均值为零且协方差函数为

$$\mathbb{E}[B_h(t)B_h(s)] = \frac{c_h}{2}\left(|t|^{2h} + |s|^{2h} - |t-s|^{2h}\right),$$

其中 c_h 是一个仅取决于 h 的正常数。Kolmogorov 于 1940年 引入了它，用以在希尔伯特空间中生成高斯“螺旋” [38]。它本身是著名的布朗运动的一种推广，其中 $h = 1/2$，由植物学家 Robert Brown 提出，用来描述悬浮在水中的 Clarkia Pulchella 植物的花粉粒的运动 [21]。分数布朗运动的首次系统研究可追溯到 Mandelbrot 和 Van Ness 于 1968年 发表的著名论文 [49] 。此后，分数布朗运动已广泛应用于电信、生物学、金融、图像处理等诸多现实领域 [29]。

在其最基本的性质中，分数布朗运动具有平稳增量，并且是 h-自相似的，这意味着，对所有 $a > 0$,

*卢森堡大学数学系（DMATH），Maison du Nombre，6, avenue de la Fonte，L-4364 埃施叙尔阿尔泽特，卢森堡大公国。laurent.loosveldt@uni.lu

过程 $\{a^{-h}B_h(at)\}_{t\in\mathbb{R}}$ 和 $\{B_h(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ 具有相同的有限维分布。赫斯特参数也决定了该过程的正则性，因为 B_h 的统一和逐点 Hölder 指数（定义见第 2 节）几乎必然为 h。事实上，对于某些应用而言，这些性质似乎并不理想。例如，分数布朗运动曾被用于图像合成，以模拟人工山脉 [16]，但由此获得的地形在各处具有相同的（不）正则性，这并不现实。为克服这一缺点，两篇论文 [55] 和 [17] 从两种不同视角独立引入了所谓的多重分形布朗运动。其定义是将赫斯特参数 h 替换为取值于 (0, 1) 中某个紧区间的赫斯特函数 $H(\cdot)$。在赫斯特函数满足某些正则性假设的条件下，见下文条件 2.8 (a)、(b) 和 (c)，可以证明，几乎必然地，函数 H 决定了多重分形布朗运动的赫尔德正则性。此外，自相似性被转化为局部渐近自相似性，见下文定义 2.12。

自多重分形布朗运动提出以来，许多作者从不同角度对这一过程进行了研究。例如，可以引用关于该过程局部时的论文 [20, 19] 、关于赫斯特函数统计估计的论文 [24, 43] 、计算分形维数的论文 [60, 23] 、研究精确逐点正则性的论文 [45, 30] ，以及定义关于多重分形布朗运动的随机微积分的论文 [41, 42, 44] 。此外，还提出了不同的推广，例如 [13, 14, 3], 考虑了更大类的赫斯特函数，使得该过程的 Hölder 指数几乎处处具有 [1, 26], 或[15, 12, 4] 中给出的最一般形式；在[15, 12, 4] 中，赫斯特函数还是随机的。最后，人们还利用与分数布朗运动密切相关的更大类过程给出了各种扩展，例如线性多重分形稳定运动[10, 11] 或 Surgailis 多重分形过程 [57, 7]。关于多重分形布朗运动及相关领域的已知事实，参见著作 [5]，其中有非常清晰的介绍。本文旨在利用分数布朗运动属于 Hermite 过程这一事实，定义任意 Wiener 混沌中的多重分形布朗运动扩展。

在本文中，对于 $d\in\mathbb{N}^*$ 和对称函数 $f\in L^2(\mathbb{R}^d)$，$I_d(f)$表示定义在概率空间 $(\Omega\ \mathcal{F},\mathbb{P})$ 上的布朗运动 $\{B(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ 相对于 f 的 d重维纳-伊藤积分。如果 f 具有如下形式

$$f=\sum_{j_1,\dots,j_d=1}^{n} a_{j_1,\dots,j_d}\,\mathbb{I}_{[s_{j_1},t_{j_1})}\otimes\cdots\otimes\mathbb{I}_{[s_{j_d},t_{j_d})}, \tag{1}$$

其中，$\otimes$ 表示张量积，$a_{j_1,\dots,j_d}$ 满足：对于任意置换 σ，$a_{\sigma(j_1)\dots,\sigma(j_d)}=a_{j_1,\dots,j_d}$ 以及 $a_{j_1,\dots,j_d}=0$ 在两个指标 j_1、…、j_d 相等时均为零；并且对于所有 $1\le\ell\neq\ell'\le d$，$[s_{j_\ell},t_{j_\ell})\cap[s_{j_{\ell'}},t_{j_{\ell'}})=\emptyset$，则

$$I_d(f):=\sum_{j_1,\dots,j_d=1}^{n} a_{j_1,\dots,j_d}(B(t_{j_1})-B(s_{j_1}))\times\dots(B(t_{j_d})-B(s_{j_d})). \tag{2}$$

显然，这个最后的随机变量属于 $L^2(\Omega)$。对于一般的对称 $f\in L^2(\mathbb{R}^d)$，随后通过利用形如 (1) 的函数在对称平方可积函数集合中的稠密性，并验证相应的随机变量 (2) 在 $L^2(\Omega)$ 中收敛，来定义 $I_d(f)$。

在该积分具有的诸多性质中，我们主要会用到所谓的等距性质：对于所有 f、g，分别属于 $L^2(\mathbb{R}^d)$ 和 $L^2(\mathbb{R}^{d'})$ 的对称函数，

$$\mathbb{E}\left[I_d(f)I_{d'}(g)\right] = \begin{cases} d!\langle f, g\rangle & \text{if } d = d' \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases} \tag{3}$$

其中 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 表示 $L^2(\mathbb{R}^d)$ 中的典范内积。d 阶维纳混沌定义为 $L^2(\Omega)$ 中由形如 $I_d(f)$ 的随机变量生成的闭线性子空间，其中 f 是 $L^2(\mathbb{R}^d)$ 中的对称函数。

现在，给定 $h \in (\frac{1}{2}, 1)$，我们对所有 $s \geq 0$ 定义函数

$$f_h(s, \bullet) : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}_+ : \mathbf{x} \mapsto \prod_{\ell=1}^{d} (s - x_\ell)_+^{\frac{h-1}{d} - \frac{1}{2}}. \tag{4}$$

容易证明，对于所有 $t \geq 0$，函数

$$\int_0^t f_h(s, \bullet)\, ds$$

是对称函数，且属于 $L^2(\mathbb{R}^d)$。于是，阶数为 d、赫斯特参数为 h 的 Hermite过程定义为[1]

$$\left\{ I_d\left(\int_0^t f_h(s, \bullet)\, ds \right) \right\}_{t \in \mathbb{R}_+}. \tag{5}$$

当 $d = 1$ 时，该过程退化为赫斯特参数为 h的分数布朗运动。只要 $d > 1$，阶数为 d 的 Hermite过程就已知是非高斯的。Hermite 过程最初作为相关随机变量部分和的极限出现在所谓的非中心极限定理中，参见[28, 58, 59]。除高斯性外，Hermite 过程还具有许多与分数布朗运动相同的性质，例如增量平稳性、h-自相似性以及赫尔德正则性。这些性质在应用中尤为有趣，因为我们需要对某种现象进行建模，而高斯性并非合理的假设。例如，参见 [61] ，其中表明，在单位根检验问题模型中，当误差是线性过程的非线性变换时，其渐近分布是 Hermite 过程的泛函。

本文通过将式 (5) 中的常数赫斯特参数替换为取值于 (1/2,1) 的某个紧区间内的赫斯特函数，定义多重分数阶 Hermite 过程。为此，我们首先引入以下随机场，称为“多重分数厄米特过程的生成元”。

定义 1.1。给定 $d \in \mathbb{N}^*$，阶数为 d的多重分数阶 Hermite 过程的生成元是实值中心化随机场 $\{X_d(t,h)\}_{(t,h)\in\mathbb{R}_+\times(1/2,1)}$，对所有 $(t,h) \in \mathbb{R}_+ \times (\frac{1}{2}, 1)$，其定义为多重维纳-伊藤积分

$$X_d(t,h) := I_d\left(\int_0^t f_h(s, \bullet)\, ds \right). \tag{6}$$

[1]一些作者在定义 Hermite过程时使用了归一化常数，以使该过程在时刻 1 的方差为单位方差。

请注意，若固定 $h \in (1/2, 1)$，则 $\{X_d(t,h)\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ 是阶数为 d、赫斯特参数为 h 的标准 Hermite 过程。在下文的命题 2.4 中，我们将证明，对于所有 d，都存在 $\{X_d(t,h)\}_{t\in\mathbb{R}_+,\ h\in(1/2,\ 1)}$ 的一个修正，以及一个概率为 1 的事件 Ω^*，使得在 Ω^* 上，该修正的轨道是（赫尔德）连续的。随后，我们将 $\{X_d(t,h)\}_{t\in\mathbb{R}_+,\ h\in(1/2,\ 1)}$ 与此修正等同，并如下定义多重分数阶 Hermite 过程。

定义1.2。给定 $d \in \mathbb{N}^*$、$(\frac{1}{2}, 1)$ 的一个紧集 K 以及一个函数 $H{:}\mathbb{R}_+ \to K$，阶数为 d、赫斯特函数为 H 的多重分数阶 ***Hermite*** 过程 d 和赫斯特函数 H 是过程 $\{X_d^{H(\cdot)}(t)\}_{t\in\mathbb{R}_+}$，对所有 $t \in \mathbb{R}_+$，定义为

$$X_d^{H(\cdot)}(t) = X_d(t, H(t)). \tag{7}$$

备注1.3。当然，多重分数阶 Hermite 过程的轨道及其相应的生成元都依赖于附加参数 $\omega \in \Omega$。为简化记号，在本文中，只要上下文清楚，我们就不明确写出这种依赖，而分别将 $X_d^{H(\cdot)}(\omega, t)$ 和 $X_d(\omega, t, h)$ 记作 $X_d^{H(\cdot)}(t)$ 和 $X_d(t, h)$。

当 $d = 2$ 时，多重分数阶 Hermite 过程对应于文献 [56] 中先前引入的多重分形Rosenblatt过程。不过，二阶维纳–伊藤积分具有特定性质（见本文第 2 节末尾及第8节）。因此，本文所进行的研究更为一般。此外，本文证明的一些结论在 [56] 中并未涉及。除其他内容外，我们在第 4 节计算了多重分形 Rosenblatt过程的精确 Hölder 指数（ [56] 中仅给出了上界），并在第 5 节建立了迭代对数律。此外，在第8节中，我们借助马利亚万演算证明，多重分形 Rosenblatt过程的增量存在连续有界密度。这有助于我们完善本文探讨的一些结论。

文献中已经定义了任意 Wiener 混沌中的其他多重分形过程。在论文 [8], 中，作者研究了 [2] 中引入的过程的一种多重分形推广。它们通过另一种核来定义，这种核便于计算小波型展开。此外，在论文 [50, 51], 中，作者将任意 Wiener 混沌中的一些多重分形过程构造为多重分形高斯场加权和的极限。原则上，这些过程与本文定义的过程并无直接关联；一阶混沌的情形也已如此，见 [25]。

本文旨在为进一步研究多重分数阶 Hermite 过程打开大门。我们相信，类似于对多重分形布朗运动所做的研究，许多有趣的研究问题都可以得到探讨。此外，我们认为，多重分数阶 Hermite 过程可用于对无法同时假定高斯性和恒定正则性的现象进行建模。为引入多重分数阶 Hermite 过程提供动机，我们聚焦于随机过程行为的一些首要重要性质：赫尔德正则性、迭代对数律、局部渐近自相似性以及图像的分形维数。第 2 节定义了这些概念，并介绍了用于陈述和证明主要定理的主要策略。第 3 节主要讨论多重分数阶 Hermite 过程的一致连续模。第 4 节中，我们给出了其振荡的一个下界

多重分数阶 Hermite 过程。第 5 节致力于证明一个迭代对数律。第6节讨论局部渐近自相似性。第 7 节处理多重分数阶 Hermite 过程图像的 Hausdorff 维数和盒计数维数的估计。最后，在第8节中，我们利用 2 阶维纳混沌和马利亚万演算中的特定论证，给出了关于多重分数阶 Rosenblatt过程图像分形维数的一些补充结果。

我们的结果表明，正如预期，多重分数阶 Hermite 过程的基本性质由其相应的赫斯特函数决定。

2 预备知识、研究策略与主要结果

如引言中所述，多重分数阶 Hermite 过程的定义依赖于对其生成元的修正，而该修正在几乎必然的意义下是赫尔德连续的。我们先回顾这一概念的定义。

定义 2.1. 若 f a 是定义在区间 I of $\mathbb{R}$ 上的（确定性）连续函数，则 f 在 I 上的振荡定义为

$$\mathrm{Osc}(f, I) := \sup_{t,s\in I} |f(t) - f(s)|. \tag{8}$$

如果存在 $R > 0$ 和 $C > 0$，使得对所有 $0 < r < R$，均有.....，则称 f 在 $t_0 \in I$ 处属于阶数为$\alpha \in$ (0,1) 的逐点赫尔德空间，

$$\mathrm{Osc}(f, [t_0 - r, t_0 + r] \cap I) \le Cr^{\alpha}. \tag{9}$$

在这种情况下，记作 $f \in C^{\alpha}(t_0)$。容易验证，若 $\alpha < \beta$，则$C^{\beta}(t_0) \subseteq C^{\alpha}(t_0)$。因此， f 在 t_0 处的逐点 Hölder 指数定义为

$$h_f(t_0) := \sup\{\alpha \in (0, 1) : f \in C^{\alpha}(t_0)\}.$$

如果对于所有 $t_0 \in I$, $f \in C^{\alpha}(t_0)$，式 (9) 中的常数 $C > 0$ 一致，我们就称 f 在 I 上是一致赫尔德 的，阶数为 α，记作 $f \in C^{\alpha}(I)$。于是，自然将 f 在 I 上的一致赫尔德指数定义为

$$H_f(I) := \sup\{\alpha \in (0, 1) : f \in C^{\alpha}(I)\}.$$

当然，对于所有 $t_0 \in I$，都有 $h_f(t_0) \ge H_f(I)$。

提供随机过程赫尔德正则性信息最简单、最常见的方法之一是使用柯尔莫哥洛夫连续性定理。为此，需要对过程增量在 $L^p(\Omega)$ 中的范数进行估计。这正是下一个命题的目的。事实上，这一结果在本文中许多地方都至关重要。

命题 2.2. 设 $d \in \mathbb{N}^*$, K是$(\frac{1}{2}, 1)$的一个紧集， I是 $\mathbb{R}_+$的一个紧区间。存在一个仅依赖于 d 和 K 的正确定性常数 c_1，以及一个仅依赖于 d、 K和 I的正确定性常数 c_2，使得对于所有 $t, u \in I$和 $h_1, h_2 \in K$，

$$\|X_d(t, h_1) - X_d(u, h_2)\|_{L^2(\Omega)}$$

上界为 $c_1|t - u|^{\min\{h_1,h_2\}} + c_2|h_1 - h_2|$，下界为 $c_1|t - u|^{\min\{h_1,h_2\}} - c_2|h_1 - h_2|$。

证明。不失一般性，可假设 $K=[a,b]$，其中 $\frac{1}{2}<a<b<1$且 $h_1<h_2$。对于所有 t、$u\in I$以及 h_1、$h_2\in K$，显然有

$$\begin{aligned}\|X_d(t,h_1)-X_d(u,h_1)\|_{L^2(\Omega)}-\|X_d(u,h_1)-X_d(u,h_2)\|_{L^2(\Omega)}\leq\\ \|X_d(t,h_1)-X_d(u,h_2)\|_{L^2(\Omega)}\\ \leq\|X_d(t,h_1)-X_d(u,h_1)\|_{L^2(\Omega)}+\|X_d(u,h_1)-X_d(u,h_2)\|_{L^2(\Omega)}.\end{aligned}\tag{10}$$

利用 Hermite 过程的自相似性和增量平稳性，我们知道存在一个确定性常数 $c_1>0$，它仅取决于 d 和 K，使得

$$\|X_d(t,h_1)-X_d(u,h_1)\|_{L^2(\Omega)}=c_d|t-u|^{h_1}.$$

因此，只需对 $\|X_d(u,h_1)-X_d(u,h_2)\|_{L^2(\Omega)}$ 进行有界估计。利用维纳–伊藤积分的等距性质 (3) 和定义 1.1，回忆记号 (4)，并将 $d\mathbf{x}$ 记作 $dx_1\dots dx_d$，我们知道，

$$\begin{aligned}&\|X_d(u,h_1)-X_d(u,h_2)\|_{L^2(\Omega)}\\ &\quad=d!\left(\int_{\mathbb{R}^d}\left(\int_0^u f_{h_1}(s,\mathbf{x})-f_{h_2}(s,\mathbf{x})\,ds\right)^2 d\mathbf{x}\right)^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}\tag{11}$$

对于所有满足 $\prod_{\ell=1}^d(s-x_\ell)_+>0$ 固定的 $(s,\mathbf{x})$，由中值定理，存在 $h'\in[h_1,h_2]$ 使得

$$|f_{h_1}(s,\mathbf{x})-f_{h_2}(s,\mathbf{x})|=|h_1-h_2|f_{h'}(s,\mathbf{x})\left|\ln\left(\prod_{\ell=1}^d(s-x_\ell)_+\right)\right|.$$

现在，利用对所有 $\varepsilon>0$ 均成立这一事实，

$$\lim_{x\to0^+}x^\varepsilon\log(x^{-1})=0^+\quad\text{et}\quad\lim_{x\to+\infty}\frac{\log(x)}{x^\varepsilon}=0^+,$$

可以选取 $\varepsilon>0$ 使得 $\frac{1}{2}<a-\varepsilon<b+\varepsilon<1$，并找到一个确定性常数 $c_\varepsilon>0$，使得对所有 $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^d$,

$$\left|\int_0^u f_{h_1}(s,\mathbf{x})-f_{h_2}(s,\mathbf{x})\,ds\right|\leq c_\varepsilon|h_1-h_2|\int_0^u f_{a-\varepsilon}(s,\mathbf{x})+f_{b+\varepsilon}(s,\mathbf{x})\,ds\tag{12}$$

将此代入（11），并再次利用 Wiener-Itô积分的等距性质（3），可得

$$\begin{aligned}&\|X_d(u,h_1)-X_d(u,h_2)\|_{L^2(\Omega)}\\ &\quad\leq c_\varepsilon|h_1-h_2|\left(\|X_d(u,a-\varepsilon)\|_{L^2(\Omega)}+\|X_d(u,b+\varepsilon)\|_{L^2(\Omega)}\right)\\ &\quad\leq c_dc_\varepsilon|h_1-h_2|(|u|^{a-\varepsilon}+|u|^{b+\varepsilon})\\ &\quad\leq c_2|h_1-h_2|,\end{aligned}$$

其中 $c_2>0$ 是仅依赖于 d、K 和 I 的正确定性常数 □

接下来的推论直接源于 Wiener 混沌上的超收缩性，见 [52, 定理 2.7.2]。

推论 2.3。给定 $d \in \mathbb{N}^*$ 和 K 一个 $\frac{1}{2}, 1$ 的紧集()，令 I 为 $\mathbb{R}_+$ 的一个紧区间。对于任意 $p \geq 1$，存在一个正的确定性常数 c_p，仅依赖于 d、p、K 和 I，使得对于所有 $t, u \in I$ 和 $h_1, h_2 \in K$，

$$\|X_d(t, h_1) - X_d(u, h_2)\|_{L^p(\Omega)} \leq c_p \left(|t-u|^{\min\{h_1, h_2\}} + |h_1 - h_2| \right). \tag{13}$$

不等式（13）结合 Kolmogorov 连续性定理，足以考察多重分数厄米特过程的生成元的赫尔德正则性。

命题 *2.4.* 给定 $d \in \mathbb{N}^*$，存在场 $\{X_d(t,h)\}_{(t,h)\in\mathbb{R}_+\times(1/2,1)}$ 的一个修正，也记作 $\{X_d(t,h)\}_{(t,h)\in\mathbb{R}_+\times(1/2,1)}$，以及 Ω^*，一个概率为 1 的事件，使得在 Ω^* 上，给定 I、$\mathbb{R}_+$ 的一个紧区间，以及 K、$(\frac{1}{2}, 1)$ 的一个紧集，对于所有 $0 < a < \inf K$，存在一个有限的正随机变量 C，使得对于所有 $t, u \in I$ 和 $h_1, h_2 \in K$，

$$|X_d(t, h_1) - X_d(u, h_2)| \leq C(|t-u| + |h_1 - h_2|)^a. \tag{14}$$

证明。利用（13），可知对于所有 $p > 0$，存在一个确定性常数$c > 0$，它仅依赖于d、p、I和 K，使得对于所有 $t, u \in I$ 和 $h_1, h_2 \in K$，

$$\|X_d(t, h_1) - X_d(u, h_2)\|_{L^p(\Omega)} \leq c(|t-u| + |h_1 - h_2|)^{\inf K}$$

通过应用 Kolmogorov 连续性定理的强版本即可得出结论，例如参见 [37, 定理 2.5.1，第 165 页及 166]。 □

从现在起，我们将多重分数阶 Hermite 过程的生成元与其连续修正视为相同对象。作出这一约定后，阶数为 d 、赫斯特函数为 H、
$\{X_d^{H(\cdot)}\ t\ \}_{t\in\mathbb{R}_+}$ 7 ( ) 的多重分数阶 Hermite 过程由等式 ( ) 定义。现在我们来介绍主要结果，这些结果聚焦于这类过程的基本性质。

赫尔德正则性能够很好地揭示我们所考虑函数的逐点行为和整体行为。然而，我们往往希望对振荡获得更精确的界。这可以通过连续模来实现。

定义 2.5。若 f a 是定义在 $\mathbb{R}$ 的区间 I 上的（确定性）函数，我们称定义在 $\mathbb{R}_+$ 上且满足 $\lim_{r\to 0^+} \rho(r) = 0$ 的连续递增函数 ρ 为 f 在 $t_0 \in I$ 处的连续模，如果

$$\limsup_{r\to 0^+} \frac{\mathrm{Osc}(f, [t_0 - r, t_0 + r] \cap I)}{\rho(r)} < +\infty. \tag{15}$$

此外，如果

$$\limsup_{r\to 0^+} \frac{\sup_{t_0\in I}\ \mathrm{Osc}(f, [t_0 - r, t_0 + r])}{\rho(r)} < +\infty$$

我们称 ρ 是 f 在 I上的一致连续模。

注 2.6。当然，如果 f 是 α-Hölder 的，那么函数 $r \mapsto r^\alpha$ 就是 f 的连续模。赫尔德正则性仅将振荡与幂函数进行比较，而借助连续模，可以推导出有关所分析函数的更精确且更有意义的信息。当我们考虑随机过程时，这一点尤其如此，例如参见 [31, 27, 30]。注意，可以定义与连续模 [39, 40, 46] 相关的广义 Hölder 空间，而这些空间会导出特定的多重分形形式体系 [47, 48]。

在考察多重分数阶 Hermite 过程 $X_d^{H(\cdot)}$ 时，我们称 h （分别为 ρ）是 $X_d^{H(\cdot)}$ 的（逐点或一致）Hölder 指数（分别为连续模），如果它对于概率为 1 的事件上的所有样本路径 $t \mapsto X_d^{H(\cdot)}(t)$ 而言都是 Hölder 指数（分别为连续模）。

记号 2.7。给定 $d \in \mathbb{N}^*$、$(\frac{1}{2}, 1)$ 的紧集 K 以及函数 $H: \mathbb{R}_+ \to K$，若 I 是 $\mathbb{R}_+$ 的紧区间，我们记

$$\underline{H}(I) := \min\{H(I)\} \quad \text{and} \quad \overline{H}(I) := \max\{H(I)\}.$$

研究多重分形过程时，作者通常会对函数 H 提出正则性假设，以便考察过程本身的正则性，参见例如 [5, 17, 55]。在这里，我们也将采用此类条件。

条件 2.8。给定 $d \in \mathbb{N}^*$ 和 $(\frac{1}{2}, 1)$ 的紧集 K，如果赫斯特函数 $H: \mathbb{R}_+ \to K$ 满足

(a) 一致最小 Hölder 正则性条件：对于 $\mathbb{R}_+$ 的任意紧区间 I，存在 $\gamma \in (\underline{H}(I), 1)$，使得 $H \in C^\gamma(I)$；(b) 逐点 Hölder 条件：对于所有 $t \in \mathbb{R}_+$，存在 $\gamma \in (H(t), 1)$，使得 $H \in C^\gamma(t)$；(c) 局部 Hölder 条件：对于所有 $t \in \mathbb{R}_+$，存在一个紧区间 $I_t \subset \mathbb{R}_+$ 和 $\gamma \in (H(t), 1)$，使得 $t \in I_t$ 且 $H \in C^\gamma(I_t)$；

在本文中，为了尽可能保持一般性，我们交替使用条件 2.8（a）、（b）或（c）来陈述和证明结果。注意，若赫斯特函数 $H: \mathbb{R}_+ \to K$ 满足：对于 $\mathbb{R}_+$ 的每个紧区间 I，都存在 $\gamma \in (\overline{H}(I), 1)$，使得 $H \in C^\gamma(I)$，那么条件 2.8（a）、（b）和（c）显然均成立。

我们的第一个主要结果是在条件 2.8（a）下，为每个多重分数阶 Hermite 过程给出统一的连续模。在第 3 节中，我们证明以下定理。

定理 2.9。给定 $d \in \mathbb{N}^*$、$(\frac{1}{2}, 1)$ 的一个紧集 K，以及满足条件 *2.8*（*a*）的赫斯特函数 $H: \mathbb{R}_+ \to K$，存在 Ω_1^*，它是一个概率为 1 的事件，使得在 Ω_1^* 上，对于 $\mathbb{R}_+$ 的每个紧区间 I

$$\limsup_{r \to 0^+} \frac{\sup_{t_0 \in I} \operatorname{Osc}(X_d^{H(\cdot)}, [t_0 - r, t_0 + r] \cap I)}{r^{\underline{H}(I)} (\log r^{-1})^{\frac{d}{2}}} < +\infty.$$

在条件 2.8 (b) 下，可以计算该过程的逐点 Hölder 正则性。正如预期，它由赫斯特函数决定，正如我们在第二个主要定理中所述，该定理将在第 4 节中证明。

定理 2.10。给定 $d \in \mathbb{N}^*$、K 中的一个紧集（$\frac{1}{2}, 1$）以及满足条件 *2.8 (b)* 的 *Hurst* 函数 $H: \mathbb{R}_+ \to K$，存在 Ω_2^*，这是一个概率为1的事件，使得在 Ω_2^* 上，对于所有 $t_0 \in \mathbb{R}_+$，都有

$$h_{X_d^{H(\cdot)}}(t_0) = H(t_0).$$

事实上，定理 2.10 是下面更强的定理 4.1 的推论，后者给出了多重分形 Hermite 过程振荡的下界。

研究随机过程的逐点正则性时，我们常常会关注如何给出所谓的迭代对数律。它表明，几乎必然地，在几乎所有点（按勒贝格测度意义）处，振荡都可以用一个含有迭代对数的连续模从下方和上方进行界定。第 5 节中，我们证明多重分数阶 Hermite 过程具有这一性质。

定理 2.11. 给定 $d \in \mathbb{N}^*$、一个 $(\frac{1}{2}, 1)$ 的紧集 K 以及满足条件 *2.8 (c)* 的赫斯特函数 $H: \mathbb{R}_+ \to K$，存在一个概率为1的事件Ω，使得在Ω上，对于（勒贝格）几乎所有的 $t_0 \in \mathbb{R}_+$，都有

$$0 < \limsup_{r \to 0^+} \frac{\mathrm{Osc}(X_d^{H(\cdot)}, [t_0 - r, t_0 + r] \cap \mathbb{R}_+)}{r^{H(t)} (\log(\log r^{-1}))^{\frac{d}{2}}} < \infty. \tag{16}$$

如定理 2.10 所示，若函数 H 不是常数，则多重分数阶 Hermite 过程 $X_d^{H(\cdot)}$ 的逐点 Hölder 指数几乎必然会随点而变化。特别地，它不可能是自相似过程，参见 [5, 命题 1.60]。因此，我们更倾向于检验一个较弱的假设，即所谓的局部渐近自相似性。

定义 2.12. 若实值随机过程 $\{X(t)\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ 在点 t_0 处以切过程 $\{Y(t)\}_{t \geq 0}$ 为切过程，且过程序列 $\{\varepsilon^{-h}(X(t_0 + \varepsilon t) - X(t_0))\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ 在 $\varepsilon \to 0^+$时依有限维分布收敛到过程 $\{Y(t)\}_{t \in \mathbb{R}_+}$，则称其在点 t_0 处是 $h > 0$ 阶弱局部渐近自相似的。当 $\{X(t)\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ 且 $\{Y(t)\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ 几乎必然具有连续路径，并且前述收敛在 $\mathbb{R}_+$的任意紧集上也以连续函数意义成立时，我们称 $\{X(t)\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ 在点 t_0处是 $h > 0$ 阶强局部渐近自相似的，其切过程为 $\{Y(t)\}_{t \in \mathbb{R}_+}$。

当然，强局部渐近自相似性蕴含弱局部渐近自相似性。反过来，假设 $\{X(t)\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ 在点 t_0 处弱局部渐近自相似，阶数为 $h > 0$，其切过程为 $\{Y(t)\}_{t \in \mathbb{R}_+}$。令 $a > 0$ 为任意一个固定实数；对于 $\varepsilon > 0$，令 $\mathbb{P}_\varepsilon^a$ 为由 $\{\varepsilon^{-h}(X(t_0 + \varepsilon t) - X(t_0))\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ 在 [2] $C([0, a], \mathbb{R})$ 的 Borel σ-代数上诱导的概率测度。为了证明收敛在强意义下成立，只需证明，由于 $a > 0$ 是任意的，族 $(\mathbb{P}_\varepsilon^a)_{\varepsilon > 0}$ 相对紧。根据普罗霍罗夫判据（全面介绍见第 1] 章第 5 节 [18, ），问题归结为证明，对所有 $\delta > 0$

$$\lim_{\eta \to 0^+} \limsup_{\varepsilon \to 0^+} \mathbb{P}\left(\sup_{s,t \in [0,a], |t-s| \leq \eta} \left| \frac{X(t_0 + \varepsilon t) - X(t_0 + \varepsilon s)}{\varepsilon^h} \right| \geq \delta \right) = 0. \tag{17}$$

在第6节中，我们使用这一技巧证明多重分数阶 Hermite 过程的局部渐近自相似性。

定理 2.13。设 $d \in \mathbb{N}^*$, K 是（$\frac{1}{2}, 1$）的一个紧集，且 $H: \mathbb{R}_+ \to K$ 是一个赫斯特函数。若 H 满足条件 *2.8 (b)*，则对所有 $t_0 \geq 0$，多重分形 *Hermite*过程 $\{X_d^{H(\cdot)}(t): t \geq 0\}$ 是弱局部渐近

[2]与通常一样，$C([0, a], \mathbb{R})$ 表示定义在 $[0, a]$ 上的实连续函数集合。

自相似的，其阶数为 $H(t_0)$，在 t_0 处的切过程为 $\{X_d(t,\ H(t_0)):\ t\geq 0\}$，即阶数为 d、赫斯特参数为 $H(t_0)$ 的 *Hermite*过程。此外，若 H 满足条件 *2.8 (c)*，则该性质在强意义下也成立。

本文中，为研究给定多重分数阶 Hermite 过程的性质，我们最后考虑其图像的豪斯多夫维数和盒维数。有关这些量的细节和证明，请参阅基础著作 [32] 。

定义 2.14。给定 $d\in\mathbb{N}^*$、集合 $A\subseteq\mathbb{R}^d$ 和 $\varepsilon,h>0$，量

$$\mathcal{H}^h_\varepsilon(A):=\inf\{\sum_j \mathrm{diam}^h(A_j):A\subseteq\bigcup_j A_j \text{ and, } \forall j,\mathrm{diam}(A_j)<\varepsilon\}$$

其中，和通常一样，diam 表示直径，称为 A的（h,ε）-豪斯多夫外测度 。此外，对于所有 $h>0$，映射 $\varepsilon\mapsto\mathcal{H}^h_\varepsilon(A)$ 是递减的，因此 h维豪斯多夫外测度

$$\mathcal{H}^h(A):=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\mathcal{H}^h_\varepsilon(A)$$

是定义良好的。

豪斯多夫外测度的关键性质是，对于任意非空集合 A，存在一个临界值 h_0，使得

$$\mathcal{H}^h(A)=\infty\ \forall\, h<h_0\quad\text{and}\quad\mathcal{H}^h(A)=0\ \forall\, h>h_0.$$

定义 2.15。给定 $d\in\mathbb{N}^*$ 和非空集合 $A\subseteq\mathbb{R}^d$，的豪斯多夫维数 为

$$\dim_{\mathcal{H}}(A)=\sup\{h>0:\mathcal{H}^h(A)=\infty\}=\inf\{h>0:\mathcal{H}^h(A)=0\},$$

而按照惯例，$\dim_{\mathcal{H}}(\emptyset)=-\infty$。

分形集的另一种维数概念是盒计数维数。

定义 2.16。给定 $d\in\mathbb{N}^*$、一个非空有界集合 $A\subseteq\mathbb{R}^d$ 和 $\varepsilon>0$，令 $N_\varepsilon(A)$ 表示覆盖A所需的直径至多为 ε 的集合的最小数量。以下量

$$\underline{\dim}_{\mathcal{B}}(A):=\liminf_{\varepsilon\to 0^+}\frac{\log(N_\varepsilon(A))}{-\log(\varepsilon)}\text{ and }\overline{\dim}_{\mathcal{B}}(A):=\limsup_{\varepsilon\to 0^+}\frac{\log(N_\varepsilon(A))}{-\log(\varepsilon)}$$

分别是 A的下盒维数和上盒维数。如果二者相等，则其共同值称为 A 的盒维数，记作 $\dim_{\mathcal{B}}(A)$。

关于这些维数的所有性质，以及对其各自用途和含义的清晰介绍，我们还请参阅 [32] 。这里，我们主要利用以下事实：对于任意非空有界集合 $A\subseteq\mathbb{R}^d$，

$$\dim_{\mathcal{H}}(A)\leq\underline{\dim}_{\mathcal{B}}(A)\leq\overline{\dim}_{\mathcal{B}}(A).\tag{18}$$

此外，我们还利用以下事实：对于所有 A、B，它们都是 $\mathbb{R}^d$的子集，

$$(A \subseteq B) \Rightarrow \dim_{\mathcal{H}}(A) \leq \dim_{\mathcal{H}}(B) \tag{19}$$

在本文中，给定 $d \in \mathbb{N}^*$、$(\frac{1}{2}, 1)$ 的紧集 K、赫斯特函数 H:$\mathbb{R}_+ \to K$ 以及紧区间 $I \subset \mathbb{R}_+$，我们关注图像的维数

$$\mathcal{G}_d(I) := \{(t, X_d^{H(\cdot)}(t)) : t \in I\}$$

鉴于不等式 (18)，我们的策略是对（上）盒维数给出上界，并对豪斯多夫维数给出下界。第 7 节的主要定理可表述如下。

定理 2.17。给定 $d \in \mathbb{N}^*$、$(\frac{1}{2}, 1)$ 的紧集 K、满足条件 *2.8*（*a*）的赫斯特函数H：$\mathbb{R}_+ \to K$ 以及紧区间 $I \subset \mathbb{R}_+$，~存在 Ω（一个概率为 1 的事件），使得在 Ω 上，我们有

$$1 + \frac{1 - \underline{H}(I)}{d} \leq \dim_{\mathcal{H}}(\mathcal{G}_d(I)) \leq \overline{\dim}_{\mathcal{B}}(\mathcal{G}_d(I)) \leq 2 - \underline{H}(I).$$

当 $d = 1$时，定理 2.17 中的不等式成为等式，我们便得到 [55] 的众所周知结果。不幸的是，对于 $d > 1$，分形维数的下界与上界之间存在差异。这源于对概率所能作出的估计

$$\mathbb{P}(|X_d^{H(\cdot)}(t) - X_d^{H(\cdot)}(u)| \leq x), \tag{20}$$

关于 t、u、$x \geq 0$，见下文的命题 7.6。目前尚不清楚一般的（多重分数）Hermite过程是否具有连续有界密度，因此我们必须使用本文的引理 7.5 中所谓的 Carbery-Wright 不等式来估计 (20)，这会引入因子 $\frac{1}{d}$。不过，对于 $d = 2$，可以利用二阶Wiener混沌中的特定论证，见 [52, 第 2 节。4]事实上，若 f 是 L^2(ℝ²)中的对称函数，则考虑如下定义的希尔伯特-施密特算子：

$$\mathcal{A}_f : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R}) : g \mapsto \int_{\mathbb{R}} f(\cdot, y) g(y)\, dy.$$

接着，令 $\{\lambda_{f,j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ 和 $\{e_{f,j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ 分别表示 $\mathcal{A}_f$的特征值及其对应的特征向量。系统 $\{e_{f,j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ 在L^2(ℝ)中是正交归一的；对于所有 $p \geq 2$，序列 $\{\lambda_{f,j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ 都属于 ℓ^p，且 f 具有如下展开：

$$f = \sum_{j\in\mathbb{N}} \lambda_{f,j} e_{f,j} \otimes e_{f,j},$$

在 L^2(ℝ²) 中收敛。特别地，由最后这个等式可得

$$I_2(f) = \sum_{j\in\mathbb{N}} \lambda_{f,j} \left(I_1(e_{f,j})^2 - 1\right), \tag{21}$$

在 L^2(Ω) 中收敛。另请注意，$\{e_{f,j}\}_{j\in\mathbb{N}}$的正交归一性意味着

$$\|f\|^2_{L^2(\mathbb{R}^2} = \sum_{j\in\mathbb{N}} \lambda_{f,j}^2. \tag{22}$$

在第8节中，我们利用这一展开，结合马利亚万演算中的论证以及论文 [35], ，证明了二阶Wiener混沌中定理 2.17 的以下改进。我们回顾一下，在这种情况下，多重分数阶 Hermite 过程对应于多重分数阶 Rosenblatt 过程。

定理 2.18。 给定一个（ $K\frac{1}{2},1$）的紧集、一个赫斯特函数 H： $\mathbb{R}_+ \to_\sim K$ ，其满足条件 *2.8*（*a*） ，以及一个紧区间 $I \subset \mathbb{R}_+$，存在 $\Omega_2,\widetilde{}$一个概率为 1 的事件，使得在 Ω_2, 上有

$$\dim_{\mathcal{H}}\left(\mathcal{G}_2(I)\right) = \dim_{\mathcal{B}}\left(\mathcal{G}_2(I)\right) = 2 - \underline{H}(I).$$

请注意，这种结果上的差异在标准情形下也曾出现过，此时赫斯特函数为常数，见 [2]。我们猜想，事实上，对于任意（多重分数阶）Hermite 过程，该等式都成立。证明这一事实的一种策略是证明（多重分数阶）Hermite 过程具有连续且有界的密度。这仍然是一个悬而未决的问题，且远远超出了本文的范围。

3 连续性的统一模

现在我们将重点讨论多重分数阶 Hermite 过程的连续性和正则性。首先注意，在由命题 2.4 诱导的事件 Ω^* 上， $X_d^{H(\cdot)}$ 在 0 处总是连续的。事实上，若固定 $\omega \in \Omega^*$ ，且 $(t_j)_j$ 是一个收敛于 0 的序列，那么考虑 $(t_{k(j)})_j$ 的子序列 $(t_j)_j$。由于 H 具有紧像，存在一个子序列 $(t_{l(k(j)})_j$ ，使得$\sim$ $\sim H(t_{l(k(j))})$ $\to H_0$，其中某个 $H_0 \in K$。然后，不等式 (14) 得出

$$X_d^{H(\cdot)}(\omega, t_{l(k(j))}) = X_d(\omega, t_{l(k(j))}, H(t_{l(k(j))})) \to X_d(\omega, 0, \widetilde{H}_0) = 0 = X_d^{H(\cdot)}(\omega, 0).$$

因此， $(X_d^{H(\cdot)}(\omega, t_j))_j$ 的任意子序列都有一个收敛到 0 的子序列，这意味着 $(X_d^{H(\cdot)}(\omega, t_j))_j$ 也收敛到 0。

当然，如果 H 是一个连续函数，那么 (7) 和 (14) 表明，在 Ω^*上，$X_d^{H(\cdot)}$ $\mathbb{R}_+$ H 是连续的。相反，如果 在某点$t_0 \neq 0$处不连续，再次利用 H 的像是紧集这一事实，我们知道存在 $(t_j)_j$ ，使得 $t_j \to t_0$ 且 $t_j \to H_0 \neq H(t_0)$。于是，由维纳–伊藤积分的等距性质 (3)，我们得到

$$\begin{aligned}
&\|X_d(t_0, H_0) - X_d(t_0, H(t_0))\|_{L^2(\Omega)} \\
&= d! \left(\int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_0^{t_0} f_{H_0}(s, \mathbf{x}) - f_{H(t_0)}(s, \mathbf{x})\, ds \right)^2 d\mathbf{x} \right)^{\frac{1}{2}}. \\
&= d! \left(\int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_0^{t_0} \prod_{\ell=1}^{d} (s - x_\ell)_+^{\frac{H(t_0)-1}{d} - \frac{1}{2}} \left(\prod_{\ell=1}^{d} (s - x_\ell)_+^{\frac{H_0 - H(t_0)}{d}} - 1 \right) ds \right)^2 d\mathbf{x} \right)^{\frac{1}{2}} \\
&> 0.
\end{aligned}$$

这意味着可以找到一个概率为 1 的事件 Ω_{t_0} ，使得对于所有 $\omega \in \Omega_{t_0}$， $X_d^{H(\cdot)}$ 在 t_0 处不连续。

从这段讨论中，我们可以看出，为了确保多重分数阶 Hermite 过程几乎处处连续，我们必须假设赫斯特函数是连续的。

在条件 2.8（a）下，由命题 2.4 可知，几乎必然地，对于 $\mathbb{R}_+$ 的每个紧区间 I， $X_d^{H(\cdot)}$ 在 I 上赫尔德连续，且 Hölder 指数至少为 $\underline{H}(I)$。

这里，我们旨在给出一个更精确的结果，即提供 $X_d^{H(\cdot)}$ 的几乎必然的一致连续模。为此，我们回顾以下重要事实，参见例如 [36, 定理 6.7]。

引理 3.1. 对于所有 $d \geq 1$，存在一个普适的确定性常数$c_d > 0$，使得对于维纳混沌中阶数为 d 的任意随机变量 X，以及 $y \geq 2$,

$$\mathbb{P}(|X| \geq y\|X\|_{L^2(\Omega)}) \leq \exp(-c_d y^{\frac{2}{d}}).$$

引入一些记号。对于所有 $j \in \mathbb{N}$ 和 $t \in \mathbb{R}_+$， $k_j^-(t)$ 是满足 $t \in [k_j^-(t)2^{-j}$ 的唯一正整数，（$k_j^-(t) + 1$）2^{-j}），并且我们设 $k_j^+(t) := k_j^-(t) + 1$。注意，对于所有 $t \in \mathbb{R}_+$， $k_j^-(t)\ k_j^+(t) \to t$ 当$j \to +\infty$。此外，注意，对于所有 $j \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}\{k_{j+1}^-(t), k_{j+1}^+(t)\} &\subset \{2k_j^-(t), 2k_j^-(t)+1, 2k_j^-(t)+2\} \\ &= \{2k_j^+(t), 2k_j^+(t)-1, 2k_j^+(t)-2\}.\end{aligned}$$

定理 2.9 的证明。对于所有 $(j,k) \in \mathbb{N}^2$，我们记作 $X_{j,k} := X_d^{H(\cdot)}(k2^{-j})$ 令我们固定 $n \in \mathbb{N}$，并且如果 c_d 是引理 3.1 给出的常数， $c > \left(\frac{\ln(2)}{c_d}\right)^{\frac{d}{2}}$。对于所有$j \in \mathbb{N}$,

考虑由 A_j 定义的事件

$$\left(\exists 0 \leq k \leq n2^j, k' \in \{2k, 2k \pm 1, 2k \pm 2\} : \frac{|X_{j+1,k'} - X_{j,k}|}{\|X_{j+1,k'} - X_{j,k}\|_{L^2(\Omega)}} \geq cj^{\frac{d}{2}}\right).$$

如果 j 足够大，由引理 3.1 可得 $\mathbb{P}(A_j) \leq 5n2^j \exp(-c_d c^{\frac{2}{d}} j)$。因此，当 $c > \left(\frac{\ln(2)}{c_d}\right)^{\frac{d}{2}}$ 时，我们有 $\sum_{j=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_j) < \infty$。Borel-Cantelli 引理推出存在 $\Omega_{n,1}$，这是一个概率为 1 的事件，使得在 $\Omega_{n,1}$ 上，存在$J_1 \in \mathbb{N}$，对所有 $j \geq J_1$ 以及所有 $0 \leq k \leq n2^j$，都有 $k' \in \{2k, 2k \pm 1, 2k \pm 2\}$,

$$|X_{j+1,k'} - X_{j,k}| \leq cj^{\frac{d}{2}} \|X_{j+1,k'} - X_{j,k}\|_{L^2(\Omega)}. \tag{23}$$

现在，固定一个紧区间 $I \subseteq [0,n]$。存在 $J_2 \in \mathbb{N}$，使得对于所有 $j \geq J_2$, $22^{-j} \leq \text{diam}(I)$。特别地，这意味着对于所有 $t \in I$，以及所有 $j \geq J_2$， $k_j^-(t) \in I$ 或 $k_j(t)^+ \in I$。接下来，对于所有这样的 t 和 j，我们选择 $k_j(t) \in \{k_j^-(t)\ k_j^+(t)\}$，使得 $k_j(t) \in I$。在命题 2.4 给出的事件 Ω^* 上，我们可以写出，对于所有 $j_0 \geq J_2$

$$X_d^{H(\cdot)}(t) = X_{j_0,k_{j_0}(t)} + \sum_{j \geq j_0} (X_{j+1,k_{j+1}(t)} - X_{j,k_j(t)}).$$

因此，在概率 1 的事件 $\Omega_n = \Omega_{n,\,1} \cap \Omega^*$ 上，若 s、$t \in I$ 满足

对于某个 $j_0 \geq \max\{J_1, J_2\}$，则我们记为 $2^{-(j_0+1)} \leq |s-t| \leq 2^{-j_0}$

$$\begin{aligned} |X_d^{H(\cdot)}(t) - X_d^{H(\cdot)}(s)| \leq & |X_{j_0,k_{j_0}(t)} - X_{j_0,k_{j_0}(s)}| \\ & + \sum_{j \geq j_0} |X_{j+1,k_{j+1}(t)} - X_{j,k_j(t)}| \\ & + \sum_{j \geq j_0} |X_{j+1,k_{j+1}(s)} - X_{j,k_j(s)}|. \end{aligned} \tag{24}$$

根据命题 2.2 和不等式（23），由于 H 满足条件 2.8（a），存在一个常数 c_1，它仅取决于 d、I、K 和 c，使得对所有 $j \geq j_0$，

$$\max\{|X_{j+1,k_{j+1}(t)} - X_{j,k_j(t)}|, |X_{j+1,k_{j+1}(s)} - X_{j,k_j(s)}|\} \leq c_1 j^{\frac{d}{2}} 2^{-\underline{H}(I)(j+1)}.$$

此外，由于 $|k_J(t) - k_J(s)| \leq 2 2^{-j_0} + 2^{-j_0} \leq 2^{-j_0+2}$，根据命题 2.2 和不等式（23），我们仍有：

$$|X_{J,k_J(t)} - X_{J,k_J(s)}| \leq c_1 j_0^{\frac{d}{2}} 2^{-\underline{H}(I)(j_0+2)}.$$

总之，存在一个常数 c_2，它仅取决于 d，I，K 和c，使得对所有 s，$t \in I$ 满足 $2^{-(j_0+1)} \leq |s-t| \leq 2^{-j_0}$

$$|X_d^{H(\cdot)}(t) - X_d^{H(\cdot)}(s)| \leq c_2 j_0^{\frac{d}{2}} 2^{-\underline{H}(I) j_0} \leq c_2 |\log|s-t||^{\frac{d}{2}} |s-t|^{\underline{H}(I)}.$$

取 $\Omega_1^* = \bigcap_n \Omega_n$ 即得结论。 □

4 逐点 Hölder 指数

现在，我们要证明该过程的逐点正则性由赫斯特函数决定。在条件 2.8 (b) 下，借助命题 2.4 很容易证明，几乎必然地，对任意 $t_0 \in \mathbb{R}_+$，

$$h_{X_d^{H(\cdot)}}(t_0) \geq H(t_0).$$

为证明反向不等式，我们将证明以下定理。

定理 4.1. 给定 $d \in \mathbb{N}^*$、$K \subset (\frac{1}{2}, 1)$ 以及满足条件 *2.8 (b)* 的赫斯特函数$H : \mathbb{R}_+ \to K$ *s*，存在Ω，它是一个概率1的事件，并且在Ω上，对所有 $t_0 \in \mathbb{R}_+$，

$$\limsup_{r \to 0^+} \frac{\mathrm{Osc}(X_d^{H(\cdot)}, [t_0 - r, t_0 + r] \cap \mathbb{R}_+)}{r^{H(t_0)} \left(\log r^{-1}\right)^{\frac{-d^2 H(t_0)}{2(1-H(t_0))}}} > 0 \tag{25}$$

为此，我们采用对论文 [6, 9, 27] 中若干已有思路组合的推广。首先注意，与定理 2.9 的证明类似，只需证明对所有 $n \in \mathbb{N}$，存在 Ω_n，它是一个概率 1 的事件，并且在 Ω_n 上，对所有 $t_0 \in [n, n+1]$，(25)成立。取 $\Omega = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \Omega_n$ 即可得到结论。为使记号简洁，我们对 $n = 0$ 证明此结果。

先约定一些记号。对于所有的 $(j,k) \in \mathbb{N}^2$, $\lambda_{j,k}$ 表示尺度为 j 、明确给定为 $[k2^{-j}, (k+1)2^{-j})$ 的二进区间， Λ_j 表示所有

尺度为 j 且满足 $\Lambda := \bigcup_j \Lambda_j$ 的二进区间组成的集合。如果 $\lambda = \lambda_{j,\,k} \in \Lambda_j$，$3\lambda$ 表示集合 $\{\lambda_{j,k-1}, \lambda_{j,k}, \lambda_{j,k+1}\}$。最后，对于所有的 $j \in \mathbb{N}$ 和 $t_0 \in \mathbb{R}_+$，$\lambda_j(t_0)$ 是 Λ_j 中满足 $t_0 \in \lambda_j(t_0)$ 的唯一区间。如果 $x \in [0,1]$ 且 $\lambda \in \Lambda$，我们可以写作 $x \in 3\lambda$，表示存在 $\lambda' \in 3\lambda$ 使得 $x \in \lambda'$。类似地，$\lambda'' \subseteq 3\lambda$ 表示存在 $\lambda' \in 3\lambda$ 使得 $\lambda'' \subseteq \lambda'$。

对于所有 $(j,k) \in \mathbb{N} \times \{0, \ldots, 2^j - 1\}$，令

$$\begin{aligned}\Delta_{j,k} &:= X_d^{H(\cdot)}\left(\frac{k+1}{2^j}\right) - X_d^{H(\cdot)}\left(\frac{k}{2^j}\right) \\ &= X_d\left(\frac{k+1}{2^j}, H\left(\frac{k+1}{2^j}\right)\right) - X_d\left(\frac{k}{2^j}, H\left(\frac{k}{2^j}\right)\right).\end{aligned}$$

如果 $\lambda = \lambda_{j,\,k}$，我们也将 Δ_λ 记作 $\Delta_{j,\,k}$。显然，对于所有 $j \in \mathbb{N}$，

$$\sup_{\lambda \subseteq 3\lambda_j(t)} |\Delta_\lambda| \leq \operatorname{Osc}(X_d^{H(\cdot)}, [t - 22^{-j}, t + 22^{-j}]). \tag{26}$$

回顾 (6) 及记号 (4)，我们记

$$\begin{aligned}&X_d^{H(\cdot)}\left(\frac{k+1}{2^j}, H\left(\frac{k+1}{2^j}\right)\right) - X_d\left(\frac{k}{2^j}, H\left(\frac{k+1}{2^j}\right)\right) \\ &= I_d\left(\int_{\frac{k}{2^j}}^{\frac{k+1}{2^j}} f_{H\left(\frac{k+1}{2^j}\right)}(s, \bullet)\, ds\right) \\ &= I_d\left(\mathbb{I}_{(-\infty, \frac{k+1}{2^j}]^d}\left(\int_{\frac{k}{2^j}}^{\frac{k+1}{2^j}} f_{H\left(\frac{k+1}{2^j}\right)}(s, \bullet)\, ds\right)\right)\end{aligned}$$

因为，只要 $s \in [\frac{k}{2^j}, \frac{k+1}{2^j}]$，$f_{H(\frac{y+k}{2^j})}(s, \mathrm{x})$ 在 $\mathrm{x} \notin (-\infty, \frac{k+1}{2^j}]^d$ 时都为零。[6] 提出的绝妙想法是将这个最后的积分分成两部分，其中一部分相较于另一部分是“可忽略的”，而后者具有某种独立性性质。

定义 4.2。给定一个整数 $M \geq 0$，对于所有 $(j,k) \in \mathbb{N} \times \{0, \ldots, 2^j - 1\}$，我们考虑扩大的二进区间

$$\lambda_{j,k}^M := \left(\frac{k-M}{2^j}, \frac{k+1}{2^j}\right]^d$$

以及随机变量

$$\widetilde{\Delta_{j,k}}^M := I_d\left(\mathbb{I}_{\lambda_{j,k}^M}\left(\int_{\frac{k}{2^j}}^{\frac{k+1}{2^j}} f_{H\left(\frac{k+1}{2^j}\right)}(s, \bullet)\, ds\right)\right) \tag{27}$$

and

$$\widetilde{\Delta_{j,k}}^M := I_d\left(\mathbb{I}_{(-\infty, \frac{k+1}{2^j}]^d \setminus \lambda_{j,k}^M}\left(\int_{\frac{k}{2^j}}^{\frac{k+1}{2^j}} f_{H\left(\frac{k+1}{2^j}\right)}(s, \bullet)\, ds\right)\right)$$

对于所有 $(j,k) \in \mathbb{N} \times \{0, \ldots, 2^j - 1\}$，如果我们还令

$$\widehat{\Delta_{j,k}} := X_d\left(\frac{k}{2^j}, H\left(\frac{k+1}{2^j}\right)\right) - X_d\left(\frac{k}{2^j}, H\left(\frac{k}{2^j}\right)\right),$$

给定 $M \geq 0$，显然有

$$\Delta_{j,k} = \widetilde{\Delta_{j,k}}^{M} + \widetilde{\Delta_{j,k}}^{M} + \widehat{\Delta_{j,k}}.$$

此外，根据维纳–伊藤积分的定义，我们知道，$\widetilde{\Delta_{j\ ,\ k}}^{M}$ 关于 σ-代数可测

$$\sigma(\{B(t_2) - B(t_1) \,:\, t_1, t_2 \in \lambda_{j,k}^{M}\}),$$

参见 [6, 引理 2.1]。因此，若 M_1、.....、M_n 为固定的正实数，则只要满足条件，$\widetilde{\ \ }^{M_1}$ $\widetilde{\ \ }^{M_n}$随机变量 $\Delta_{j_1,\ k_1}$、.....、$\Delta_{j_n,\ k_n}$ 就相互独立

$$\lambda_{j_\ell,k_\ell}^{M_\ell} \cap \lambda_{j_{\ell'},k_{\ell'}}^{M_{\ell'}} = \emptyset \text{ for all } 1 \leq \ell, \ell' \leq n \tag{28}$$

成立。

现在我们给出这些随机变量在 $L^2(\Omega)$ 中范数的若干下界和上界。下面的命题受到 [6, 引理 2.2 和 2.3；] 的启发，其中主要的修改源于我们这里使用的是赫斯特函数，而不是常数赫斯特参数。

命题 4.3。给定 $d \in \mathbb{N}^*$、K 中的一个紧集$(\frac{1}{2}, 1)$ 以及赫斯特函数H：$\mathbb{R}_+ \to K$，存在一个正的确定性常数 c，仅依赖于 d 和 K，使得对于所有$(j,\ k) \in \mathbb{N} \times \{0, \ldots, 2^j - 1\}$ 和 $M > 0$，均有

1. $c^{-1} 2^{-H(\frac{k+1}{2^j})j} \leq \|\widetilde{\Delta_{j,k}}^{M}\|_{L^2(\Omega)} \leq c 2^{-H(\frac{k+1}{2^j})j}$;
2. $\|\widetilde{\Delta_{j,k}}^{M}\|_{L^2(\Omega)} \leq cM \frac{H(\frac{k+1}{2^j})-1}{d} 2^{-H(\frac{k+1}{2^j})j}$;
3. $\|\widehat{\Delta_{j,k}}\|_{L^2(\Omega)} \leq c\ \mathrm{Osc}(H, \lambda_{j,k})$.

证明。首先证明第一点。利用维纳–伊藤积分的等距性质，对于所有 $\mathbb{N} \times \mathbb{Z}$ 和 $M > 0$，作变量代换 $s \mapsto 2^{-j}(u + k)$ 和 $\mathbf{w} = 2^j \mathbf{x} - k\mathbf{1}$，可得:

$$\begin{aligned}
\|\widetilde{\Delta_{j,k}}^{M}\|_{L^2(\Omega)}^2 &= d! \int_{\lambda_{j,k}^{M}} \left(\int_{\frac{k}{2^j}}^{\frac{k+1}{2^j}} f_{H(\frac{k+1}{2^j})}(s, \mathbf{x})\, ds \right)^2 d\mathbf{x} \\
&= d! 2^{-2H(\frac{k+1}{2^j})j} \int_{(-M,1]^d} \left(\int_0^1 f_{H(\frac{k+1}{2^j})}(u, \mathbf{w})\, du \right)^2 d\mathbf{w}.
\end{aligned}$$

注意，若 $(u, \mathbf{w}) \in [0,1] \times [0,1]^d$, $\prod_{\ell=1}^{d} (u - w_\ell)_+ \in [0,1]$，则

$$f_{H(\frac{k+1}{2^j})}(u, \mathbf{w}) \geq f_{\sup K}(u, \mathbf{w}).$$

因此，我们得出结论

$$\|\widetilde{\Delta_{j,k}}^{M}\|_{L^2(\Omega)} \geq \sqrt{d!} 2^{-H(\frac{k+1}{2^j})j} \left\| \int_0^1 f_{\sup K}(u, \bullet)\, du \right\|_{L^2([0,1]^d)}.$$

对于反向不等式，只需指出

$$\int_{(-\infty,1]^d}\left(\int_0^1 f_{H\left(\frac{k+1}{2^j}\right)}(u,\mathbf{w})\,du\right)^2 d\mathbf{w}$$
$$\leq \int_{(-\infty,1]^d}\left(\int_0^1 (f_{\inf K}(u,\mathbf{w})+(f_{\sup K}(u,\mathbf{w}))du\right)^2 d\mathbf{w}.$$

对于第二点，对所有 $(j,k) \in \mathbb{N}\times\{0,\ldots,2^j-1\}$,$H_{j,\ k}:=\ ^{H}(\ \frac{k+1}{2^j})$ $_{d}\ ^{-1}-\frac{1}{2}$，我们记为。再次利用维纳–伊藤积分的等距性质 (3)，可得

$$\|\widetilde{\Delta_{j,k}}^M\|^2_{L^2(\Omega)}$$
$$\leq d!\int_{-\infty}^{\frac{k-M}{2^j}}(\frac{k}{2^j}-x_1)^{2H_{j,k}}dx_1\times\int_{\mathbb{R}^{d-1}}\left(\int_{\frac{k}{2^j}}^{\frac{k+1}{2^j}}\prod_{\ell=2}^{d}(s-x_\ell)_+^{H_{j,k}}\,ds\right)^2 dx_2\ldots dx_d.$$

首先，我们有

$$\int_{-\infty}^{\frac{k-M}{2^j}}(\frac{k}{2^j}-x_1)^{2H_{j,k}}dx_1=(M2^{-j})^{2\frac{(H\left(\frac{k+1}{2^j}\right)-1)}{d}}$$

另一方面，由维纳–伊藤积分的等距性质 (3) 和命题 2.2，存在一个确定性常数 $c_1>0$，它仅依赖于d、 K 和 $[0,1]$, ，使得

$$(d-1)!\int_{\mathbb{R}^{d-1}}\left(\int_{\frac{k}{2^j}}^{\frac{k+1}{2^j}}\prod_{\ell=2}^{d}(s-x_\ell)_+^{H_{j,k}}\,ds\right)^2 dx_2\ldots dx_d$$
$$=\left\|X_{d-1}(\frac{k+1}{2^j},\frac{(d-1)H\left(\frac{k+1}{2^j}\right)+1}{d})-X_{d-1}(\frac{k}{2^j},\frac{(d-1)H\left(\frac{k+1}{2^j}\right)+1}{d})\right\|^2_{L^2(\Omega)}$$
$$\leq c_1 2^{-2j\frac{(d-1)H\left(\frac{k+1}{2^j}\right)+1}{d}}.$$

总之，我们找到了一个正的确定性常数 c_2，它仅依赖于d 、 K 和 $[0,1]$, ，使得

$$\|\widetilde{\Delta_{j,k}}^M\|_{L^2(\Omega)}\leq c_2 M^{\frac{\sup K-1}{d}}2^{-H\left(\frac{k+1}{2^j}\right)j}.$$

第三点也是最后一点，是命题 2.2 的直接推论。

□

鉴于最后一个性质，我们称形如 $\widetilde{\Delta}_\lambda^M$的随机变量为主导随机变量。

最后，让我们回顾一下给定维纳混沌中的随机变量所具有的以下重要事实；证明见 [36, 定理6.9和注记6.10]。

引理 4.4。 给定 $d\in\mathbb{N}^*$，存在一个通用的确定性常数$\gamma_d\in[0,1)$ ，使得对于任意属于d阶维纳混沌的随机变量 X ，都有

$$\mathbb{P}\left(|X|\leq\frac{1}{2}\|X\|_{L^2(\Omega)}\right)\leq\gamma_d.$$

现在我们已经掌握了足够的材料，可以给出多重分数阶 Hermite 过程振荡的下界。

定理 *4.1* 的证明。如前所述，我们可以将注意力缩小到区间 $[0,1)$。

若 $c_d>0$ 是引理 3.1 中的常数，我们固定 $c'>\left(\frac{\ln(2)}{c_d}\right)^{\frac{d}{2}}$。再令 c 为命题 4.3 给出的常数。对于所有 $\lambda_{j,\,k}\in\Lambda$，我们定义

$$M_\lambda := (8c^2c'j^{\frac{d}{2}})^{\frac{d}{1-H\left(\frac{k+1}{2^j}\right)}}. \tag{29}$$

首先，我们考虑主导随机变量。我们需要固定一些记号。若 $\lambda=\lambda_{j,\,k}$ 是一个二进区间，且 $m\in\mathbb{N}$, $\mathcal{S}_{\lambda,\,m}=\mathcal{S}_{j,\,k,\,m}$ 表示一个基数为 2^m 的有限集合，其元素为包含在 $\lambda_{j,\,k}$中的尺度为$j+m$ 的二进区间。形式上，$\mathcal{S}_{j,\,k,\,m}:=\{\lambda\in\Lambda_{j+m}:\lambda\subset\lambda_{j,\,k}\}$。

若 $\gamma_d\in[0,1)$ 是引理 4.4 给出的常数，则可以找到 $\ell_d\in\mathbb{N}$，使得

$$\gamma^{\ell_d}<2^{-1}. \tag{30}$$

若二进区间 $\lambda_{j,\,k}$ 和 $m\in\mathbb{N}$ 固定，且 $S\in\mathcal{S}_{j,\,k,\,m}$，我们按如下方式定义二进区间序列 $(I_n)_{0\le n\le m}$ 和 $(T_n)_{1\le n\le m}$：

- $I_0=\lambda_{j,\,k}$:
- $I_m=S$;
- 对所有 $1\le n\le m$，$I_{n-1}=I_n\cup T_n$均成立。

现在，对于任意 $1\le n\le m$，存在 ℓ_d 个二进区间 $(T_n^\ell=\lambda_{j_n^{(\ell)},\,k_n^{(\ell)}})_{1\le\ell\le\ell_d}$，它们属于 $S_{T_n,\,\lfloor\log_2(\ell_d M_{T_n})\rfloor+1}$，使得对所有 $1\le\ell\le\ell_d$

$$\left(\frac{k_n^{(\ell)}-M_{T_n}}{2^{j_n^{(\ell)}}},\frac{k_n^{(\ell)}+1}{2^{j_n^{(\ell)}}}\right)\subseteq T_n$$

并且，若 $\ell\neq\ell'$,

$$\left(\frac{k_n^{(\ell)}-M_{T_n}}{2^{j_n^{(\ell)}}},\frac{k_n^{(\ell)}+1}{2^{j_n^{(\ell)}}}\right)\cap\left(\frac{k_n^{(\ell')}-M_{T_n}}{2^{j_n^{(\ell')}}},\frac{k_n^{(\ell')}+1}{2^{j_n^{(\ell')}}}\right)=\emptyset.$$

因此，二进区间 $(T_n^\ell)_{1\le n\le m}^{1\le\ell\le\ell_d}$ 满足条件 (28)（其中 $M_n=M_{T_n}$），从而确保随机变量 $(\widetilde{\Delta_{T_n^\ell}}^{M_{T_n}})_{1\le n\le m}^{1\le\ell\le\ell_d}$ 的独立性。由此，对于所有 $S\in\mathcal{S}_{j,\,k,\,m}$，我们定义伯努利随机变量

$$\mathcal{B}_{j,k,m}(S)=\prod_{1\le n\le m,1\le\ell\le\ell_d}\mathbb{I}_{\{|\widetilde{\Delta_{T_n^\ell}}^{M_{T_n}}|<2^{-1}\|\widetilde{\Delta_{T_n^\ell}}^{M_{T_n}}\|_{L^2(\Omega)}\}}.$$

利用引理 4.4 以及随机变量 $(\widetilde{\Delta_{T_n^\ell}}^{M_{T_n}})_{1\le n\le m}^{1\le\ell\le\ell_d}$ 的独立性，我们得出

$$\mathbb{E}[\mathcal{B}_{j,k,m}(S)]\le\gamma^{m\ell_d}.$$

因此，如果我们定义随机变量

$$\mathcal{G}_{j,k,m} = \sum_{S\in\mathcal{S}_{j,k,m}} \mathcal{B}_{j,k,m}(S)$$

于是 $\mathbb{E}[\mathcal{G}_{j,k,m}] \le (2\gamma^{\ell_d})^m$。由不等式 (30) 和 Fatou引理可得

$$\mathbb{E}\left[\liminf_{m\to+\infty} \mathcal{G}_{j,k,m}\right] = 0.$$

因此，$\Omega_1 = \bigcap_{j\in\mathbb{N},\ 0\le k<2^j}\{\omega : \liminf_{m\to+\infty}\mathcal{G}_{j,\ k,\ m}(\omega) = 0\}$ 是一个概率为 1 的事件。

现在，若 $\omega\in\Omega_1$ 且 $t_0\in[0,1)$，我们取 $j\in\mathbb{N}$ 和 $k = k_j(t_0)$，并且由于对所有 m，$\mathcal{G}_{jk_j(t_0)\,m}$ 的取值均属于 $\{0,\dots,2^m\}$，因此我们得出存在无穷多个 m，使得对每个 $S\in\mathcal{S}_j,\ _{k_j(t_0)\,m}$，$\mathcal{B}_{jkm}(S) = 0$。考虑这样的一个$m$ 和 $S = \lambda_{j+m}(t_0)$，首先注意到，对所有 $1\le n\le m$，$I_n = \lambda_{j+n}(t_0)$，因此 $T_n\in 3\lambda_{j+n}(t_0)$。现在，由于 $\mathcal{B}_{jkm}(\lambda_{j+m}(t_0)) = 0$，可以找到 $1\le n\le m$和 $1\le\ell\le\ell_d$，使得

$$|\widetilde{\Delta_{T_n^\ell}}^{M_{T_n}}(\omega)| \ge \frac{1}{2}\|\widetilde{\Delta_{T_n^\ell}}^{M_{T_n}}\|_{L^2(\Omega)}.$$

简言之，我们已经证明，对于所有 $\omega\in\Omega_1$ 和 $t_0\in[0,1)$，存在无穷多个 $j\in\mathbb{N}$，使得存在 $\lambda\in 3\lambda_j(t_0)$ 和 $\lambda'\in\mathcal{S}_{\lambda,\ \lfloor\log_2(\ell_d M_\lambda)\rfloor+1}$，满足

$$|\widetilde{\Delta_{\lambda'}^{M_\lambda}}(\omega)| \ge \frac{1}{2}\|\widetilde{\Delta_{\lambda'}^{M_\lambda}}\|_{L^2(\Omega)}. \tag{31}$$

另一方面，由引理 3.1 可知，对于所有足够大的 j，

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}\left(\exists\lambda\in\Lambda_j,\lambda'\in\mathcal{S}_{\lambda,\lfloor\log_2(\ell_d M_\lambda)\rfloor+1} : \left|\widetilde{\Delta_{\lambda'}}^{M_\lambda}\right| \ge c' j^{\frac{d}{2}}\left\|\widetilde{\Delta_{\lambda'}}^{M_\lambda}\right\|_{L^2(\Omega)}\right)\\ &\quad\le 2\ell_d\sup_{\lambda\in\Lambda_j} M_\lambda 2^j\exp(-c_d(c')^{\frac{2}{d}}j).\end{aligned}$$

因此，当 $c' > \left(\frac{\ln(2)}{c_d}\right)^{\frac{d}{2}}$ 时，回顾显式表达式 (29)，我们有

$$\sum_{j=0}^{+\infty}\mathbb{P}\left(\exists\lambda\in\Lambda_j,\lambda'\in\mathcal{S}_{\lambda,\lfloor\log_2(\ell_d M_\lambda)\rfloor+1} : \left|\widetilde{\Delta_{\lambda'}}^{M_\lambda}\right| \ge c' j^{\frac{d}{2}}\left\|\widetilde{\Delta_{\lambda'}}^{M_\lambda}\right\|_{L^2(\Omega)}\right) < \infty$$

由此，根据 Borel-Cantelli 引理，我们可以推出存在 Ω_2, 这一概率为 1 的事件，使得对于所有 $\omega\in\Omega_2$, ，存在 $J_2\in\mathbb{N}$，使得对于所有$j\ge J_2$、$\lambda\in\Lambda_j$ 和 $\lambda'\in S_{\lambda,\ \lfloor\log_2(\ell_d M_\lambda)\rfloor+1}$,

$$\left|\widetilde{\Delta_{\lambda'}}^{M_\lambda}(\omega)\right| \le c' j^{\frac{d}{2}}\left\|\widetilde{\Delta_{\lambda'}}^{M_\lambda}\right\|_{L^2(\Omega)}. \tag{32}$$

类似地，我们证明存在 Ω_3, 这一概率为 1 的事件，使得对于所有 $\omega\in\Omega_3$, ，都存在 $J_3\in\mathbb{N}$，使得对于所有 $j\ge J_3$, $\lambda\in\Lambda_j$ 和$\lambda'\in S_{\lambda,\ \lfloor\log_2(\ell_d M_\lambda)\rfloor+1}$,

$$\left|\widehat{\Delta_{\lambda'}}(\omega)\right| \le c' j^{\frac{d}{2}}\left\|\widehat{\Delta_{\lambda'}}\right\|_{L^2(\Omega)}. \tag{33}$$

现在，若 ω 满足不等式 (31)、(32) 和 (33)，其中 $\lambda \in 3\lambda_j(t_0)$ 且 $\lambda' = \lambda_{j',k'} \in S_{\lambda,\ \lfloor \log_2(\ell_d M_\lambda)\rfloor+1}$，那么由命题 4.3 可推得

$$\begin{aligned}|\Delta_{\lambda'}(\omega)| &\geq |\widetilde{\Delta_{\lambda'}^{M_\lambda}}(\omega)| - \left(\left|\widetilde{\Delta_{\lambda'}}^{M_\lambda}(\omega)\right| + \left|\widehat{\Delta_{\lambda'}}(\omega)\right|\right) \\ &\geq \frac{c^{-1}}{2} 2^{-j' H\left(\frac{k'+1}{j'}\right)} - cc' \left((8c^2 c' j^{\frac{d}{2}})^{\frac{H\left(\frac{k'+1}{2^{j'}}\right)-1}{1-H\left(\frac{k+1}{2^j}\right)}} j^{\frac{d}{2}} 2^{-j' H\left(\frac{k'+1}{j'}\right)} + \ \mathrm{Osc}(H, \lambda') \right).\end{aligned}$$

首先，根据条件 2.8 (b)，我们知道存在 $c'' > 0$ 和 $\gamma > H(t_0)$，使得

$$\mathrm{Osc}(H, \lambda') \leq c'' 2^{-\gamma j}. \tag{34}$$

我们注意到

$$\lim_{j\to+\infty} j^{\frac{d}{2}\left(1+\frac{H\left(\frac{k'+1}{2^{j'}}\right)-1}{1-H\left(\frac{k+1}{2^j}\right)}\right)} = \lim_{j\to+\infty} \exp\left(\ln(j)\frac{d}{2}\left(\frac{H\left(\frac{k'+1}{2^{j'}}\right) - H\left(\frac{k+1}{2^j}\right)}{1-H\left(\frac{k+1}{2^j}\right)}\right)\right)$$

并且，由于

$$\left|\frac{H\left(\frac{k'+1}{2^{j'}}\right) - H\left(\frac{k+1}{2^j}\right)}{1-H\left(\frac{k+1}{2^j}\right)}\right| \leq c'' \frac{2^{-\gamma j}}{1-\sup K},$$

我们得到

$$\lim_{j\to+\infty} j^{\frac{d}{2}\left(1+\frac{H\left(\frac{k'+1}{2^{j'}}\right)-1}{1-H\left(\frac{k+1}{2^j}\right)}\right)} = 1$$

同样，我们也有

$$\lim_{j\to+\infty} (8c^2c')^{\frac{H\left(\frac{k'+1}{2^{j'}}\right)-1}{1-H\left(\frac{k+1}{2^j}\right)}} = (8c^2c')^{-1}$$

特别地，如果 j 足够大，$H\left(\frac{k'+1}{j'}\right)$ 也严格小于 γ，因此可以写成

$$cc'\ \mathrm{Osc}(H, \lambda') \leq \frac{c^{-1}}{8} (8c^2 c' j^{\frac{d}{2}})^{-\frac{dH\left(\frac{k'+1}{j'}\right)}{1-H\left(\frac{k+1}{2^j}\right)}} 2^{-jH\left(\frac{k'+1}{j'}\right)}.$$

综上所述，我们得出，对于所有充分大的 j，

$$\begin{aligned}|\Delta_{\lambda'}(\omega)| &\geq \frac{c^{-1}}{4} 2^{-j' H\left(\frac{k'+1}{j'}\right)} - \frac{c^{-1}}{8} (8c^2 c' j^{\frac{d}{2}})^{-\frac{dH\left(\frac{k'+1}{j'}\right)}{1-H\left(\frac{k+1}{2^j}\right)}} 2^{-jH\left(\frac{k'+1}{j'}\right)} \\ &\geq \frac{c^{-1}}{8} (8c^2 c' j^{\frac{d}{2}})^{-\frac{dH\left(\frac{k'+1}{j'}\right)}{1-H\left(\frac{k+1}{2^j}\right)}} 2^{-jH\left(\frac{k'+1}{j'}\right)}.\end{aligned} \tag{35}$$

总之，在 $\Omega_1 \cap \Omega_2 \cap \Omega_3$，（这是一个概率为 1 的事件）上，对于所有 $t_0 \in [0,1)$，根据方程 (26)、(35) 以及关于 H的条件 2.8 (b)，我们有：

$$\limsup_{j\to+\infty} \frac{\mathrm{Osc}(X_d^{H(\cdot)}, [t_0 - 22^{-j}, t_0 + 22^{-j}] \cap \mathbb{R}_+)}{2^{-jH(t_0)} j^{-\frac{d^2 H(t_0)}{2(1-H(t_0))}}} > 0.$$

□

定理 2.10 随即由命题 2.4 和定理 4.1 直接推出。

定理 *2.10* 的证明。 考虑分别由命题 2.4 和定理 4.1 给出的事件 Ω^* 和 Ω_2^* 。于是，$\Omega^* \cap \Omega$ 是一个概率为 1 的事件，在该事件上：

- for all $t \geq 0$, $h_{X_d^{H(\cdot)}}(t_0) \geq H(t_0)$, by Proposition 2.4 and Condition 2.8 (b);
- for all $t \geq 0$, $h_{X_d^{H(\cdot)}}(t_0) \leq H(t_0)$, by Theorem 4.1.

□

注 4.5。 回顾一下，对于任意连续函数 f、任意区间 I以及任意 $t_0 \in I$， $H_f(I) \leq h_f(t_0)$。因此，定理 2.9 和定理 2.10 的一个直接推论是：如果赫斯特函数 H 满足条件 2.8 (a) 和 (b)，那么在概率为 1 的事件 $\Omega_1^* \cap \Omega_2^*$ 上，对于任意区间 $I \subseteq \mathbb{R}_+$

$$H_{X_d^{H(\cdot)}}(I) = \underline{H}(I). \tag{36}$$

请注意，推导这一结论只需要条件 (a)。事实上，如果$t_0 \in I$ 满足 $H(t_0) = \underline{H}(I)$，那么仍然可以在 t_0 处得到界 (34)，进而得到 (35)。于是，在 Ω 上，(25) 在 t_0处成立。由此可知，在 Ω 上

$$H_{X_d^{H(\cdot)}}(I) \leq h_{X_d^{H(\cdot)}}(t_0) \leq H(t_0) = \underline{H}(I)$$

且等式 (36) 在 $\Omega \cap \Omega^*$ 上成立。

5 迭代对数律

现在我们来证明，多重分数阶 Hermite 过程满足迭代对数律。我们采用与第 3 节和第 4 节中类似的论证，但在某种程度上对其进行“局部化”。这种局部化有助于我们在每个点处推导出更精确的连续模，从上方和下方界定过程在该点附近的振荡。我们先来证明 (16) 中极限的正性。

命题 5.1。 给定 $d \in \mathbb{N}^*$、一个 K 紧集 $(\frac{1}{2}, 1)$ 以及满足条件 *2.8 (c)* 的赫斯特函数 $H : \mathbb{R}_+ \to K$ ，存在 Ω_1，这样一个概率为 1 的事件，使得在 Ω_1，上，对（勒贝格）几乎处处的 $t_0 \in \mathbb{R}_+$，都有

$$\limsup_{r\to 0^+} \frac{\mathrm{Osc}(X_d^{H(\cdot)}, [t_0 - r, t_0 + r] \cap \mathbb{R}_+)}{r^{H(t_0)} (\log(\log r^{-1}))^{\frac{d}{2}}} < \infty. \tag{37}$$

证明。我们使用定理 2.9 证明之前引入的记号。令我们固定 $t_0 \in [0,1)$ 和 $c > c_d{}^a$，其中 $c_d > 0$ 为引理 3.1 中的常数。对所有 $j_0 \in \mathbb{N}$，令 $A_{j_0}(t)$ 表示由下式定义的事件

$$\left(\exists j \geq j_0, \lambda_{k,j}, \lambda_{k',j} \subseteq 3\lambda_{j_0}(t_0) : \frac{|X_{j,k'} - X_{j,k}|}{\|X_{j,k'} - X_{j,k}\|_{L^2(\Omega)}} \geq c \log(j_0)^{\frac{d}{2}} (j - j_0 + 1)^{\frac{d}{2}}\right).$$

如果 j_0 足够大，则根据引理 3.1，有

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A_{j_0}(t)) &\leq \sum_{j \geq j_0} 32^{j-j_0} \exp(-c_d c^{\frac{2}{d}} \log(j_0)(j - j_0 + 1)) \\ &\leq c' \exp(-c_d c^{\frac{2}{d}} \log(j_0)),\end{aligned}$$

对于一个与任何相关量无关的确定性常数 $c' > 0$。因此，当 $c > c_d^{\frac{-2}{d}}$ 时，有 $\sum_{j_0=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_{j_0}(t)) < \infty$，而 Borel-Cantelli 引理蕴含着存在 Ω_{t_0}（一个概率为 1 的事件），使得在 Ω_{t_0} 上，存在 $J \in \mathbb{N}$，对于所有 $j \geq j_0 \geq J$，$\lambda_{k,\,j}$，$\lambda_{k',\,j} \subseteq 3\lambda_{j_0}(t_0)$，

$$|X_{j,k'} - X_{j,k}| \leq c \log(j_0)^{\frac{d}{2}} (j - j_0 + 1)^{\frac{d}{2}} \|X_{j,k'} - X_{j,k}\|_{L^2(\Omega)}. \tag{38}$$

接下来考虑 $j_0 \geq J$ 和 $s,\ t \in [t_0 - r, t_0 + r]$，其中 $2^{-(j_0+1)} \leq r \leq 2^{-j_0}$。对于任意 $j \geq j_0$ 和 $x \in \{s,t\}$，$\lambda_j(x) \subseteq 3\lambda_{j_0}(t_0)$。因此，如有必要增大 j_0，根据命题 2.2 以及关于 H 的条件 2.8 (c)，可以写成

$$\begin{aligned}\|X_{j,k_j(t)} - X_{j,k_j(s)}\|_{L^2(\Omega)} &\leq c_1 \left(2^{-j \min\{H(k_j(t)2^{-j}), H(k_j(s)2^{-j})\}} + 2^{-jH(t_0)}\right) \\ &\leq c_1 \left(2^{-j \min\{H(t), H(s)\}} 2^{-j2^{-jH(t_0)}} + 2^{-jH(t_0)}\right) \\ &\leq 2c_1 2^{-j \min\{H(t_0), H(t), H(s)\}} \end{aligned} \tag{39}$$

对于一个确定性常数 $c_1 > 0$，它仅取决于 d、K 和 $[0,1]$。

在命题 2.4 给出的事件 Ω_* 上，可以写成

$$\begin{aligned}X_d^{H(\cdot)}(t) - X_d^{H(\cdot)}(s) &= X_{j_0,k_{j_0}(t)} - X_{j,k_{j_0}(s)} \\ &\quad + \sum_{j \geq j_0} \left(X_{j+1,k_{j+1}(t)} - X_{j+1,k_{j+1}(s)} - X_{j,k_j(t)} + X_{j,k_j(s)}\right).\end{aligned}$$

由不等式 (38) 和 (39) 可知，在 $\Omega^* \cap \Omega_{t_0}$ 上，存在一个常数 $c_2 > 0$，它仅取决于 d、K 和 $[0,1]$，使得

$$|X_d^{H(\cdot)}(t) - X_d^{H(\cdot)}(s)| \leq c_2 2^{-j_0 \min\{H(t_0), H(t), H(s)\}} \log(j_0)^{\frac{d}{2}}.$$

如有必要，增大 j_0，则关于 H 的条件 2.8 (c) 以及不等式 $2^{-(j_0+1)} \leq r \leq 2^{-j_0}$ 最终给出

$$|X_d^{H(\cdot)}(t) - X_d^{H(\cdot)}(s)| \leq 2c_2 r^{H(t_0)} (\log(\log(r^{-1})))^{\frac{d}{2}}.$$

总之，我们已经证明，对于任意 $t_0 \in [0,1]$，存在 Ω_{t_0}，这是一个概率为 1 的事件，在该事件上 (37) 成立。由可数交集和富比尼定理即可得出结论。 □

现在我们来关注 (16) 中极限的正性。我们再次使用定义 4.2 中引入的随机变量。首先，我们需要给以下概率找到一个下界

$$\mathbb{P}(|\widetilde{\Delta}_{j,k}^{M}| \geq y2^{-jH\left(\frac{k+1}{2^j}\right)}) \tag{40}$$

对于（j，k）$\in \mathbb{N} \times \{0, \ldots, 2^j - 1\}$ 和 $M > 0$。我们知道，对于维纳混沌中阶数为 d 的任意变量 X，存在两个确定性常数 $y_0 \geq 0$ 和 $c > 0$，使得对所有 $y \geq y_0$，

$$\mathbb{P}(|X| \geq y) \geq \exp(-cy^{\frac{2}{d}}),$$

参见 [36, 定理 6.12]。但遗憾的是，这些常数取决于 X 的分布，并非普适常数，这在我们的语境中并不理想。不过，借助 $L^2(\Omega)$ 中的一些收敛，我们仍设法对概率 (40) 给出一个“统一”的下界。

引理 5.2。设 $d \in \mathbb{N}^*$, K 为（$\frac{1}{2}, 1$）的一个紧集，且 $H\colon \mathbb{R}_+ \to K$ 为连续赫斯特函数。对于所有 $t_0 \in \mathbb{R}_+$，存在四个确定性常数 $c_{t_0} > 0$, $y_{t_0} > 0$, $j_0 \in \mathbb{N}$ 和 $M_0 > 0$，使得对于所有 $\lambda_{j,\,k} \subseteq 3\lambda_{j_0}(t_0)$，$M \geq M_0$ 和 $y > y_{t_0}$，有

$$\mathbb{P}(|\widetilde{\Delta}_{j,k}^{M}| \geq y2^{-jH\left(\frac{k+1}{2^j}\right)}) \geq \exp(-c_{t_0}y^{\frac{2}{d}}). \tag{41}$$

证明。对于所有 $j \in \mathbb{N}$、$k \in \{0, \ldots 2^j - 1\}$ 和 $M \in \mathbb{N}$，根据标准 Hermite 过程的自相似性和增量平稳性，我们知道这些随机变量

$$\widetilde{\Delta}_{j,k}^{M} + \check{\Delta}_{j,k}^{M} \text{ and } 2^{-jH\left(\frac{k+1}{2^j}\right)} X_d\left(1, H\left(\frac{k+1}{2^j}\right)\right)$$

在分布上相等。我们还知道存在两个确定性常数$c_{t_0}^1 > 0$ 和 $y_{t_0}^1 > 0$，使得对于所有 $y > y_{t_0}^1$

$$\mathbb{P}\left(|X_d(1, t_0)| \geq y\right) \geq \exp(-c_{t_0}^1 y^{\frac{2}{d}}).$$

对于所有 $y > 0$，记

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\left((|\widetilde{\Delta}_{j,k}^{M}| \geq y2^{-jH\left(\frac{k+1}{2^j}\right)}\right) \\
&\quad \geq \mathbb{P}\left(\left|X_d\left(1, H\left(\frac{k+1}{2^j}\right)\right)\right| \geq 2y\right) - \mathbb{P}(|\check{\Delta}_{j,k}^{M}| > y2^{-jH\left(\frac{k+1}{2^j}\right)}).
\end{aligned}$$

根据引理 3.1 和命题 4.3，我们知道，对于所有 j、k，以及所有充分大的 M 和 y，

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(|\check{\Delta}_{j,k}^{M}| > y2^{-jH\left(\frac{k+1}{2^j}\right)}\right) &\leq \exp\left(-c_d\left(yc^{-1}M^{\frac{1-H\left(\frac{k+1}{2^j}\right)}{d}}\right)^{\frac{2}{d}}\right) \\
&\leq \exp\left(-c_d\left(yc^{-1}M^{\frac{1-\sup K}{d}}\right)^{\frac{2}{d}}\right)
\end{aligned}$$

当 $1 - \sup K > 0$ 时，如果 M 足够大，便可得出

$$\mathbb{P}\left(|\check{\Delta}_{j,k}^{M}| > y2^{-jH\left(\frac{k+1}{2^j}\right)}\right) \leq \frac{1}{4}\exp(-3c_{t_0}^1 y^{\frac{2}{d}}).$$

另一方面，我们有

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}\left(\left|X_d\left(1,H\left(\frac{k+1}{2^j}\right)\right)\right|\geq 2y\right)\\&\quad\geq \mathbb{P}\left(|X_d(1,t_0)|\geq 3y\right)-\mathbb{P}\left(\left|X_d(1,H(t_0))-X_d\left(1,H\left(\frac{k+1}{2^j}\right)\right)\right|>y\right).\end{aligned}$$

再次利用引理 3.1，根据命题 2.2，我们知道存在一个确定性常数 $c_2>0$，它仅依赖于 d、K 和 $[0,1],$，使得对于所有足够大的 j_0，

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}\left(\left|X_d(1,H(t_0))-X_d\left(1,H\left(\frac{k+1}{2^j}\right)\right)\right|>y\right)\\&\quad\leq \exp\left(-c_d\left\|X_d(1,H(t_0))-X_d\left(1,H\left(\frac{k+1}{2^j}\right)\right)\right\|_{L^2(\Omega)}^{\frac{-2}{d}}y^{\frac{2}{d}}\right)\\&\quad\leq \exp\left(-c_d c_2^{\frac{-2}{d}}\left|H(t_0)-H\left(\frac{k+1}{2^j}\right)\right|^{\frac{-2}{d}}y^{\frac{2}{d}}\right).\end{aligned}$$

H 的连续性保证，只要 j 足够大，

$$\mathbb{P}\left(\left|X_d(1,H(t_0))-X_d\left(1,H\left(\frac{k+1}{2^j}\right)\right)\right|>y\right)\leq\frac{1}{4}\exp(-3c_{t_0}^1y^{\frac{2}{d}}).$$

综合以上结果，我们得出存在具有所需性质的 $c_{t_0}>0$ 和 $y_{t_0}>0$。

□

我们用最后这个引理证明 (16) 中极限的正性。

命题 5.3. 给定 $d\in\mathbb{N}^*$、一个 $(\frac{1}{2},1)$ 的紧集 K，以及一个满足条件 *2.8 (b)* 的赫斯特函数 $H:\ \mathbb{R}_+\to K$，存在 Ω_2，这样一个概率为 1的事件，使得在 Ω_2，上，对于（勒贝格）几乎处处的 $t_0\in\overline{\mathbb{R}}_+$，我们有

$$0<\limsup_{r\to0^+}\frac{\mathrm{Osc}(X_d^{H(\cdot)},[t_0-r,t_0+r]\cap\mathbb{R}_+)}{r^{H(t_0)}(\log(\log r^{-1}))^{\frac{d}{2}}}.$$

证明。我们采用定理 4.1 证明中的相同记号。固定 $t_0\in[0,1)$。若 M 和 j 充分大，使得 (41) 对所有充分大的 y都成立，那么对于任意 $m\in\mathbb{N}$ 和 $\lambda\in\mathcal{S}_{\lambda_j(t_0)\,m}$，令 $(I_n)_{0\leq n\leq m}$ 和 $(T_n)_{1\leq n\leq m}$ 为满足 $I_0=\lambda_j(t_0)$ 的二进区间序列；$I_m=\lambda$ 并且对于所有 $1\leq n\leq m$，$I_{n-1}=I_n\cup T_n$。对于所有 $1\leq n\leq m$，也令 $T_n^\star=\lambda_{k_n,}$ $_{j_n}\in S_{T_n,\lfloor\log_2(M)\rfloor+1}$ 满足 $(T_n^\star)^M\subseteq T_n$。特别地，对于所有 $n\neq n'$，$(T_n^\star)^M\cap(T_{n'}^\star)^M=\emptyset$，且随机变量 $(\widetilde{\Delta}_{T_n^\star}^M)_{1\leq n\leq m}$ 相互独立。

若 $c_{t_0}>0$ 是引理 5.2 中给出的常数，且 c_1 是一个满足 $0<c_{t_0}c_1^{\overline{d}}<1$ 的确定性$_2$常数，则考虑事件

$$\mathcal{E}_{j,m}(t_0)=\left\{\omega\in\Omega:\ \max_{1\leq n\leq m}\left|\frac{\widetilde{\Delta}_{T_n^\star}^M}{2^{-j_nH\left(\frac{k_n+1}{2^{j_n}}\right)}}\right|\geq c_1\log(2m)^{\frac{d}{2}}\right\}.$$

利用随机变量 $(\widetilde{\Delta}^M_{T^\star_n})_{1\le n\le m}$ 的独立性、引理 5.2 以及对所有 $x\in\in(0,1)$ 成立的不等式 $\log(1-x)\le -x$，可得，若 m 足够大，

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\mathcal{E}_{j,m}(t_0)) &= 1-\prod_{n=1}^{m}\mathbb{P}\left(\left|\frac{\widetilde{\Delta}^M_{T^\star_n}}{2^{-j_nH\left(\frac{k_n+1}{2^{j_n}}\right)}}\right|<c_1\log(2m)^{\frac{d}{2}}\right)\\ &\ge 1-(1-\exp(-c_{t_0}c_1^{\frac{2}{d}}\log(2m))^m\\ &\ge 1-\exp\left(\frac{m}{(2m)^{c_{t_0}c_1^{\frac{2}{d}}}}\right)\\ &= 1-\exp\left(\frac{m^{1-c_tc_1^{\frac{2}{d}}}}{2^{c_{t_0}c_1^{\frac{2}{d}}}}\right).\end{aligned}$$

[2]因此，当 $0<c_{t_0}c_1^{\frac{2}{d}}<1$ 时，我们得到

$$\sum_{p\in\mathbb{N}}\mathbb{P}(\mathcal{E}_{2^p,2^p}(t_0))=\infty$$

而 Borel-Cantelli 引理与事件 $(\mathcal{E}_{2^p,2^p}(t_0))_p$ 的独立性相结合，可推出

$$\mathbb{P}\left(\limsup_{p\to+\infty}\mathcal{E}_{2^p,2^p}(t_0)\right)=1.$$

换言之，存在 $\Omega^1_{t_0}$，一个概率为 1 的事件，使得对于所有 $\omega\in\Omega^1_{t_0}$，都有无穷多个 $j\in\mathbb{N}$，使得存在 $\lambda\in 3\lambda_j(t_0)$ 和 $\lambda'_{j',k'}\in S_{\lambda,\lfloor\log_2(M)\rfloor+1}$，满足

$$|\widetilde{\Delta}^M_{\lambda'}(\omega)|\ge c_1\log(j)^{\frac{d}{2}}2^{-j'H\left(\frac{k'+1}{2^{j'}}\right)}. \tag{42}$$

另一方面，若 c_2 是一个确定性常数，且满足 $c_2>c_d^{\frac{d}{2}}$，由引理 3.1 和命题 4.3 可知，对所有 $j\in\mathbb{N}$

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}\left(\exists\lambda\in 3\lambda_j(t_0),\lambda'\in S_{\lambda,\lfloor\log_2(M)\rfloor+1}:\left|\check{\Delta}^M_{\lambda'}\right|\ge c_2\log(j)^{\frac{d}{2}}\left\|\check{\Delta}^M_{\lambda'}\right\|_{L^2(\Omega)}\right)\\ &\le 3M\exp(-c_dc_2^{\frac{d}{2}}\log(j)).\end{aligned}$$

[2]由 $c_2>c_d^{\frac{d}{2}}$ 这一事实和 Borel-Cantelli 引理可推出，存在 $\Omega^2_{t_0}$，一个概率为 1 的事件，使得对所有 $\omega\in\Omega^2_{t_0}$，都存在 $J\in\mathbb{N}$，使得对所有 $j\ge J$，$\lambda\in 3\lambda_j(t_0)$ 和 $\lambda'_{j',k'}\in S_{\lambda,\lfloor\log_2(M)\rfloor+1}$，

$$|\check{\Delta}^M_{\lambda'}(\omega)|\le c_2\left\|\check{\Delta}^M_{\lambda'}\right\|_{L^2(\Omega)}\le c_2cM^{\frac{H\left(\frac{k'+1}{2^{j'}}\right)-1}{d}}\log(j)^{\frac{d}{2}}2^{-j'H\left(\frac{k'+1}{2^{j'}}\right)}, \tag{43}$$

其中 $c>0$ 是命题 4.3 给出的确定性常数。类似地，存在一个概率为 1 的事件 $\Omega^3_{t_0}$，使得对所有 $\omega\in\Omega^3_{t_0}$，都存在$J\in\mathbb{N}$，并且对所有 $j\ge J$，$\lambda\in 3\lambda_j(t_0)$ 和 $\lambda'\in S_{\lambda,\lfloor\log_2(M)\rfloor+1}$，

$$|\widehat{\Delta}_{\lambda'}(\omega)|\le c_2c\log(j)^{\frac{d}{2}}\ \mathrm{Osc}(H,\lambda'). \tag{44}$$

由于 sup $K<1$，必要时增大 M，我们可以得到 $c_2 c M_{\sup^d}^{K-1}<\frac{c_1}{4}$。~~此外~~，根据关于 H 的条件 2.8 (b)，存在 $c_3>0$ 和 $\gamma>H(t_0)$，使得对所有 $\lambda'\in S_{\lambda,\ \lfloor\log_2(M)\rfloor+1}$，

$$\mathrm{Osc}(H,\lambda')\le c_3 2^{-j\gamma}\le c_3 M^{\gamma}2^{-j'\gamma}.$$

如有必要增大 j，我们可以得到

$$c_2 c\ \mathrm{Osc}(H,\lambda')\le \frac{c_1}{4}2^{-j'H\left(\frac{k'+1}{2j'}\right)}.$$

因此，如果不等式 (42)、(43) 和 (44) 成立，则对于所有足够大的 M 和 j，有

$$\begin{aligned}|\Delta_{\lambda'}(\omega)|&\ge \frac{c_1}{2}\log(j)^{\frac{d}{2}}2^{-j'H\left(\frac{k'+1}{2j'}\right)}\\&\ge \frac{c_1}{2}\log(j)^{\frac{d}{2}}M^{-H\left(\frac{k'+1}{2j'}\right)}2^{-jH\left(\frac{k'+1}{2j'}\right)}.\end{aligned}$$

综上，根据条件 2.8 (b) 以及不等式 (26)，我们推得，对于所有 $t_0\in[0,1$，在概率 1 的事件 $\Omega^1_{t_0}\cap\Omega^2_{t_0}\cap\Omega^3_{t_0}$ 上，有

$$\limsup_{j\to+\infty}\frac{\mathrm{Osc}(X_d^{H(\cdot)},[t_0-22^{-j},t_0+22^{-j}])}{2^{-jH(t_0)}\log(j)^{\frac{d}{2}}}>0.$$

再次利用可数交和富比尼定理即可得到结论。 □

定理 2.11 随即由命题 5.1 和命题 5.3 直接推出。

定理 *2.11* 的证明。若 Ω_1 和 Ω_2 分别是命题 5.1 和命题 5.3 给出的概率 1 的事件，则在 $\Omega_1\cap\Omega_2$，上，对于（勒贝格）几乎处处的 $t_0\in\mathbb{R}_+$，有

$$0<\limsup_{r\to0^+}\frac{\mathrm{Osc}(X_d^{H(\cdot)},[t_0-r,t_0+r]\cap\mathbb{R}_+)}{r^{H(t_0)}(\log(\log r^{-1}))^{\frac{d}{2}}}<\infty.$$

□

6 局部渐近自相似性

我们先从证明多重分数阶 Hermite 过程 $\{X_d^{H(\cdot)}(t)\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ 是弱局部渐近自相似的开始本节内容。我们的主要工具是以下引理，它有时也称为斯卢茨基定理（例如参见 [34, 第 318]页）。

引理 6.1. 设 $(X_j)_j$ 和 $(Y_j)_j$ 是两个随机变量序列，且 $(X_j)_j$ 依分布收敛于随机变量 X，而 $(Y_j)_j$ 依概率收敛于确定性常数 c，则序列 $(X_j+Y_j)_j$ 依分布收敛于 $X+c$。

命题 6.2. 设 $d\in\mathbb{N}^*$, K 是一个 $\frac{1}{2},1\,(\frac{1}{2},1)$ 紧集，且 $H\colon\mathbb{R}_+\to K$ 是满足条件 *2.8 (b)* 的赫斯特函数。对于所有 $t_0\ge0$，多重分数阶 *Hermite* 过程 $\{X_d^{H(\cdot)}(t)\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ 在 t_0 处是阶数为 $H(t_0)$ 的弱局部渐近自相似过程，其切过程为 $\{X_d(t,H(t_0))\}_{t\ge0}$，即赫斯特参数为 $H(t_0)$ 的 *Hermite* 过程。

证明。 固定 $t_0 \geq 0$。对于所有 $t \geq 0$ 和 $\varepsilon > 0$，我们记

$$\begin{aligned}
&\varepsilon^{-H(t_0)} \left(X_d^{H(\cdot)}(t_0 + \varepsilon t) - X_d^{H(\cdot)}(t_0) \right) \\
&\qquad = \varepsilon^{-H(t_0)} \left(X_d(t_0 + \varepsilon t, H(t_0 + \varepsilon t)) - X_d(t_0 + \varepsilon t, H(t_0)) \right) \\
&\qquad\quad + \varepsilon^{-H(t_0)} \left(X_d(t_0 + \varepsilon t, H(t_0)) - X_d(t_0, H(t_0)) \right).
\end{aligned}$$

首先，根据标准 Hermite 过程众所周知的自相似性和增量平稳性，我们知道过程

$$\{\varepsilon^{-H(t_0)} \left(X_d(t_0 + \varepsilon t, H(t_0)) - X_d(t_0, H(t_0)) \right)\}_{t \geq 0}$$

在有限维分布意义下等于

$$\{X_d(t, H(t_0))\}_{t \geq 0}.$$

另一方面，根据命题（2.2），我们知道，对于所有 $t \geq 0$ 和 $\varepsilon > 0$,

$$\begin{aligned}
&\| \varepsilon^{-H(t_0)} \left(X_d(t_0 + \varepsilon t, H(t_0 + \varepsilon t)) - X_d(t_0 + \varepsilon t, H(t_0)) \right) \|_{L^2(\Omega)} \\
&\qquad \leq c_2 \varepsilon^{-H(t_0)} \left| H(t_0 + \varepsilon t) - H(t_0) \right|.
\end{aligned}$$

若 $t \geq 0$ 固定，则条件 2.8 (b) 保证可以找到 $\gamma > H$（t_0）和 $c > 0$，使得对于所有充分小的 $\varepsilon > 0$

$$|H(t_0 + \varepsilon t) - H(t_0)| \leq c \varepsilon^{-\gamma}.$$

特别地，对于所有固定的 $t \geq 0$，随机变量序列

$$\left(\varepsilon^{-H(t_0)} \left(X_d(t_0 + \varepsilon t, H(t_0 + \varepsilon t)) - X_d(t_0 + \varepsilon t, H(t_0)) \right) \right)_{\varepsilon > 0}$$

在 $L^2(\Omega)$ 中收敛到 0，因此当 $\varepsilon \to 0^+$ 时依概率收敛。
结论由引理 6.1 得出。 □

现在，我们要证明局部渐近自相似性也以强意义成立。如第 2 节中所述，只需证明式 (17) 在 $X = X_d^{H(\cdot)}$ 下成立。为此，我们回顾以下引理中的 Garsia-Rodemich-Rumsey 不等式，证明可见 [33]。

引理 6.3。设 Ψ 是 $\mathbb{R}$ 上的非负偶函数，且 ρ 是 $[-1, 1]$ 上的非负偶函数。另假设 Ψ 和 ρ 在 $\mathbb{R}_+$ 上均为非递减函数。若 f 是一个连续函数，满足

$$\iint_{[0,1]^2} \Psi \left(\frac{f(x) - f(y)}{\rho(x - y)} \right) dx dy \leq B < \infty,$$

那么，对所有 $s, t \in [0, 1]$,

$$|f(s) - f(t)| \leq 8 \int_0^{|s-t|} \Psi^{-1} \left(\frac{4B}{u^2} \right) d\rho(u).$$

将这个最后的引理应用于函数 $\Psi\colon u \mapsto |u|^p$ 和 $\rho\colon \mapsto |u|^{\alpha+\frac{1}{p}}$，对于 $p \geq 1$ 和 $\alpha \geq \frac{1}{p}$，于是通过显然的变量代换，我们得出，对于所有 $a > 0$，存在一个确定性常数$c_{a,p,\alpha}$，使得对于任意$f \in C([0,a],\mathbb{R})$ 和 $t \in [0,a]$

$$|f(t) - f(0)|^p \leq c_{a,p,\alpha} t^{\alpha p - 1} \iint_{[0,a]^2} |f(r) - f(v)|^p |r - v|^{-\alpha p - 1} \, dr dv. \tag{45}$$

我们利用这一事实证明定理 2.13。

定理 *2.13* 的证明。接下来只需证明当赫斯特函数 H 满足条件 2.8 (c) 时的强局部渐近自相似性。固定 $a > 0$ 和 $t_0 \geq 0$。对于所有 $\varepsilon, \eta, \delta > 0$，令

$$\mathbb{P}(\varepsilon, \eta, \delta) := \mathbb{P}\left(\sup_{s,t \in [0,a], |t-s| \leq \eta} \left| \frac{X^{H(\cdot)}(t_0 + \varepsilon t) - X^{H(\cdot)}(t_0 + \varepsilon s)}{\varepsilon^{H(t_0)}} \right| \geq \delta \right).$$

我们需要证明，对于所有 $\delta > 0$，$\lim_{\eta \to 0^+} \limsup_{\varepsilon \to 0^+} \mathbb{P}(\varepsilon, \eta, \delta) = 0$。

显然，对于任意 $p \geq 1$，由马尔可夫不等式可得，

$$\mathbb{P}(\varepsilon, \eta, \delta) \leq \delta^{-p} \varepsilon^{-pH(t_0)} \mathbb{E}\left[\sup_{s,t \in [0,a], |t-s| \leq \eta} \left| X^{H(\cdot)}(t_0 + \varepsilon t) - X^{H(\cdot)}(t_0 + \varepsilon s) \right|^p \right].$$

然后，对于 $\alpha \geq \frac{1}{p}$，利用不等式 (45) 可得，

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\sup_{s,t \in [0,a], |t-s| \leq \eta} \left| X^{H(\cdot)}(t_0 + \varepsilon t) - X^{H(\cdot)}(t_0 + \varepsilon s) \right|^p \right] \\
&\quad \leq c_{a,p,\alpha} \eta^{\alpha p - 1} \iint_{[0,a]^2} \mathbb{E}\left[\left| X^{H(\cdot)}(t_0 + \varepsilon t) - X^{H(\cdot)}(t_0 + \varepsilon s) \right|^p \right] |t - s|^{-\alpha p - 1} \, ds dt.
\end{aligned}$$

此外，由推论 2.3 可知，对于所有 $s, t \in [0,a]$,

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\left| X^{H(\cdot)}(t_0 + \varepsilon t) - X^{H(\cdot)}(t_0 + \varepsilon s) \right|^p \right] \\
&\quad \leq \left((\varepsilon |t - s|)^{\min\{H(t_0 + \varepsilon t), H(t_0 + \varepsilon s)\}} + |H(t_0 + \varepsilon t) - H(t_0 + \varepsilon s)| \right)^p.
\end{aligned}$$

根据条件 2.8 (c)，存在一个确定性常数 $c > 0$，使得对于所有充分小的 $\varepsilon > 0$，以及 s、$t \in [0,a]$、$s \neq t$,

$$|H(t_0 + \varepsilon t) - H(t_0 + \varepsilon s)| \leq c(\varepsilon |t - s|)^{H(t_0)} \leq c \varepsilon^{H(t_0)} |t - s|^{\inf K}$$

and

$$(\varepsilon |t - s|)^{\min\{H(t_0 + \varepsilon t), H(t_0 + \varepsilon s)\}} \leq \varepsilon^{H(t_0)} |t - s|^{\inf K} \varepsilon^{-(a\varepsilon)^{H(t_0)}} \leq 2 \varepsilon^{H(t_0)} |t - s|^{\inf K}$$

总之，我们得到，对于所有充分小的 $\varepsilon > 0$，

$$\mathbb{P}(\varepsilon, \eta, \delta) \leq 2 c_{a,p,\alpha} \delta^{-p} \eta^{\alpha p - 1} \iint_{[0,a]^2} |t - s|^{p(\inf K - \alpha) - 1} \, ds dt.$$

于是，例如可以选择 $\alpha = \inf K / 2$ 和 $p = \frac{2}{\alpha}$，以使最后一个积分有限，因为 $p(\inf K - \alpha) - 1 = 1$，并且，由于 $\alpha > \frac{1}{p}$,

$$\lim_{\eta \to 0^+} \limsup_{\varepsilon \to 0^+} \mathbb{P}(\varepsilon, \eta, \delta) = 0.$$

□

7 图像的分形维数

给定一个紧区间 $I \subset \mathbb{R}_+$，我们首先为集合 $\mathcal{G}_d(I)$ 的盒维数提供一个上界。事实上，根据第 2 节和第 3 节中证明的结果，借助以下引理，这是一项容易完成的任务；证明见[32, 推论 11。2]

引理 7.1。设 $I \subset \mathbb{R}_+$ 为一个紧区间，且 $f\colon I \to \mathbb{R}$ 为连续函数，存在 $c \geq 0$ 和 $1 \leq \alpha \leq 2$，使得对所有 $s, t \in I$，

$$|f(s) - f(t)| \leq c|t - s|^{2-\alpha},$$

then

$$\overline{\dim}_{\mathcal{B}} \left(\{(t, X_d^{H(\cdot)}(t)) : t \in I\} \right) \leq \alpha.$$

于是可以直接陈述以下命题。

命题 7.2。给定 $d \in \mathbb{N}^*$、$(\frac{1}{2}, 1)$ 的一个紧集 K、满足条件 *2.8*（*a*）的赫斯特函数$H : \mathbb{R}_+ \to K$，以及一个紧区间 $I \subset \mathbb{R}_+$，$\widetilde{\quad}$ $\widetilde{\quad}$，存在Ω_1，，它是一个概率为 1 的事件，使得在 Ω_1，上有

$$\overline{\dim}_{\mathcal{B}} \left(\mathcal{G}_d(I) \right) \leq 2 - \underline{H}(I).$$

证明。这是定理 2.9 和引理 7.1 的直接推论。 □

为了得到豪斯多夫维数的下界，我们使用势的概念。

定义 7.3。设 $d \in \mathbb{N}^*$ 和 $s \geq 0$。测度 μ 在 $\mathbb{R}^d$ 上的 s-势 在点 $x \in \mathbb{R}^d$ 处的值为

$$\phi_s(x) = \int \frac{d\mu(y)}{|x - y|^s}.$$

s-能量 则定义为 μ

$$I_s(\mu) = \int \phi_s(x)\, d\mu(x) = \iint \frac{d\mu(x) d\mu(y)}{|x - y|^s}.$$

通常，势和能量用于给出豪斯多夫维数的下界，如下述引理所述；证明见 [32, 定理 4.13] 。

引理 7.4。设 $d \in \mathbb{N}^*$ 和 A 是 $\mathbb{R}^d$的子集。若存在一个测度 μ 定义在A 上，且满足 $I_s(\mu) < \infty$，则 $\mathcal{H}^s(A) = \infty$ 且 维数$_{\mathcal{H}}(A) \geq s$。

为了在我们的情形中应用引理 7.4，我们必须求出多重分数阶 Hermite 过程负矩的上界。为此，我们使用以下结果，即 Carbery-Wright 不等式，见 [22, 定理8]。

引理 7.5。存在一个绝对确定性常数 $c > 0$，使得，对于任意 n， $d \geq 1$ $1 < p < \infty$ 任意次数至多为 n 的多项式 Q： $\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$、任意高斯随机向量 $(X_1, \ldots\ldots, X_d)$ 以及任意 $x > 0$,

$$\mathbb{E}[|Q(X_1, \ldots, X_d)|^{\frac{p}{n}}]^{\frac{1}{p}} \mathbb{P}(|Q(X_1, \ldots, X_d)| \leq x) \leq cpx^{\frac{1}{n}}.$$

在下文中，如果紧区间 $I \subset \mathbb{R}_+$、 $t_0 \in I$ 和 $\varepsilon > 0$ 已固定，我们记

$$\overline{H}(t_0, \varepsilon) := \overline{H}([t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon] \cap I).$$

下面引理的证明借鉴了 [2, 引理 14] 和 [53,引理 4.3], 中的思路，并再次进行了修改，主要是因为我们研究的是一个非常数赫斯特函数。由于该引理是定理 2.17 中分形维数下界与上界存在差异的主要原因，我们认为有必要详细写出证明，以便读者能够直接了解其由来。

命题 7.6。 给定 $d \in \mathbb{N}^*$、一个 $(\frac{1}{2}, 1)$ 的紧集 K、一个赫斯特函数H : $\mathbb{R}_+ \to K$ ，满足条件 *2.8*（*a*），以及一个紧区间 $I \subset \mathbb{R}_+$。若 $t_0 \in I$ 满足 $H(t_0) = \underline{H}(I)$，则存在两个确定性常数$c > 0$, $\xi > 0$，它们都仅依赖于 d、 H 和 I，使得对所有 $0 < \varepsilon < \xi$、$x \geq 0$ 和 t， $u \in I \cap [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]$,

$$\mathbb{P}(|X_d^{H(\cdot)}(t) - X_d^{H(\cdot)}(u)| \leq x) \leq c x^{\frac{1}{d}} |t - u|^{-\frac{\overline{H}(t_0, \varepsilon)}{d}}.$$

证明。 固定 t、 $u \in I$。对称函数

$$f_{t,u}^{H(\cdot)} : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R} : \mathbf{w} \mapsto \int_0^t f_{H(t)}(s, \mathbf{w})\, ds - \int_0^u f_{H(u)}(s, \mathbf{w})\, ds$$

属于 $L^2(\mathbb{R}^d)$。根据定义，

$$I_d\left(f_{t,u}^{H(\cdot)}\right) = \left(X_d^{H(\cdot)}(t) - X_d^{H(\cdot)}(u)\right).$$

给定 $L^2(\mathbb{R})$ 的一组正交归一基 $\{e_j\}_{j \in \mathbb{N}}$，函数序列

$$\left(f_{t,u}^{H(\cdot),J} := \sum_{j_1, \ldots, j_d = 1}^{J} \langle f_{t,u}^{H(\cdot)}, e_{j_1} \odot \cdots \odot e_{j_d} \rangle e_{j_1} \odot \cdots \odot e_{j_d}\right)_J,$$

其中 $\odot$ 表示对称张量积，在 $L^2(\mathbb{R}^d)$ 中收敛到 $f_{t\,u}^{H(\cdot)}$，参见 [52, 附录 B.3.]。

对于所有 $(j_1, \ldots, j_d) \in \mathbb{N}^d$，我们知道

$$I_d\left(e_{j_1} \odot \cdots \odot e_{j_d}\right) = \prod_{\ell=1}^{p} H_{n_\ell}\left(\int_{\mathbb{R}} e_{\widetilde{j_\ell}}(x)\, dB(x)\right),$$

~其中 n_ℓ 是 j_ℓ 在 $(j_1, \ldots, j_d)$ 中出现的次数， H_{n_ℓ} 是次数为 n_ℓ 的埃尔米特多项式，参见 [54, 第 14] 页。特别地，由于对于所有满足$\|f\|_{L^2(\mathbb{R})} = 1$ 的 $f \in L^2(\mathbb{R})$， $I_1(f) \sim \mathcal{N}(0, 1)$，由 $p = 2d$ 和 $n = d$ 得到的引理 7.5 推出，对于所有 J,

$$\mathbb{P}(|I_d\left(f_{t,u}^{H(\cdot),J}\right)| \leq x) \leq c 2 d x^{\frac{1}{d}} \|I_d\left(f_{t,u}^{J}\right)\|_{L^2(\Omega)}^{-\frac{1}{d}}.$$

现在，根据维纳–伊藤积分的等距性质，我们知道

$$I_d\left(f_{t,u}^{H(\cdot),J}\right) \underset{J \to \infty}{\longrightarrow} \left(X_d^{H(\cdot)}(t) - X_d^{H(\cdot)}(u)\right)$$

在 $L^2(\Omega)$ 中。特别地，存在一个子序列 $(f_{u,\ t}^{H(\cdot),\ J_k})_k$ ，使得收敛几乎处处成立。然后，根据法图引理，

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(|X_d^{H(\cdot)}(t)-X_d^{H(\cdot)}(u)|\le x\right) &\le \liminf_{k\to+\infty}\mathbb{P}\left(|I_d\left(f_{t,u}^{H(\cdot),J_k}\right)|\le x\right)\\ &\le c2dx^{\frac{1}{d}}\liminf_{k\to+\infty}\left\|I_d\left(f_{t,u}^{J_k}\right)\right\|_{L^2(\Omega)}^{-\frac{1}{d}}\\ &= c2dx^{\frac{1}{d}}\left\|X_d^{H(\cdot)}(t)-X_d^{H(\cdot)}(u)\right\|_{L^2(\Omega)}^{-\frac{1}{d}}.\end{aligned}$$

根据命题 2.2，我们可确认存在两个确定性常数c_1、$c_2>0$，它们仅取决于 d、K 和 I，使得

$$\left\|X_d^{H(\cdot)}(t)-X_d^{H(\cdot)}(u)\right\|_{L^2(\Omega)}\ge c_1|t-u|^{\min\{H(t),H(u)\}}-c_2|H(t)-H(u)|.$$

由于 H 满足条件 2.8（a），存在 $\gamma>\underline{H}(I)=H(t_0)$，使得$H\in C^\gamma(I)$。于是，若 $\xi>0$ 足够小，则对所有 $0<\varepsilon<\xi$，我们也有$\overline{H}(t_0,\varepsilon)<\gamma$。必要时再次减小 $\xi>0$，则对所有 $0<\varepsilon<\xi$和 t，有$u\in I\cap[t_0-\varepsilon,t_0+\varepsilon]$

$$c_2|H(t)-H(u)|\le\frac{c_1}{2}|t-u|^{\overline{H}(t_0,\varepsilon)}.$$

综上，对于所有这样的 ε 和 t，我们得到u，

$$\mathbb{P}\left(|X_d^{H(\cdot)}(t)-X_d^{H(\cdot)}(u)|\le x\right)\le c2d(2^{-1}c_1)^{-\frac{1}{d}}x^{\frac{1}{d}}|t-u|^{-\frac{\overline{H}(t_0,\varepsilon)}{d}}.$$

□

现在我们可以证明定理 2.17。

定理 *2.17* 的证明。 设 $t_0\in I$ 满足 $H(t_0)=\underline{H}(I)$。令 $\xi>0$ 为命题 7.6 给出的量，并令 $j\in\mathbb{N}^*$ 满足$\frac{1}{j}<\xi$。对于所有满足t的 t、$r\ge0$，以及 $t+r\in[t_0-j^{-1},t_0+j^{-1}]\cap I$和 $s>0$，根据命题 7.6，我们有

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\left[\left(|X_d^{H(\cdot)}(t+r)-X_d^{H(\cdot)}(t)|^2+r^2\right)^{-\frac{s}{2}}\right]\\ &=\int_0^{r^{-s}}\mathbb{P}\left(\left(|X_d^{H(\cdot)}(t+r)-X_d^{H(\cdot)}(t)|^2+r^2\right)^{-\frac{s}{2}}\ge x\right)dx\\ &=s\int_0^{+\infty}y(y^2+r^2)^{-\frac{s}{2}-1}\mathbb{P}\left(|X_d^{H(\cdot)}(t+r)-X_d^{H(\cdot)}(t)|\le y\right)dy\\ &\le cs\int_0^{+\infty}y(y^2+r^2)^{-\frac{s}{2}-1}y^{\frac{1}{d}}r^{-\frac{\overline{H}(t_0,j^{-1})}{d}}dy\\ &\le c'r^{-\frac{\overline{H}(t_0,j^{-1})}{d}}\left(r^{-s-2}\int_0^r y^{1+\frac{1}{d}}dy+\int_r^{+\infty}y^{-s-1+\frac{1}{d}}dy\right)\\ &\le c''r^{\frac{1}{d}-s-\frac{\overline{H}(t_0,j^{-1})}{d}},\end{aligned}\tag{46}$$

其中，$c>0$ 由命题 7.6 给出，而 c'、$c''>0$ 是仅依赖于 s和 d 及 c的确定性常数。

因此，若我们考虑随机测度$\mu_{X,\ j}$，它对所有博雷尔集$A \subseteq \mathbb{R}^2$的定义为

$$\mu_{X,j}(A) := \mathcal{L}\{t \in [t_0 - j^{-1}, t_0 + j^{-1}] \cap I : (t, X_d^{H(\cdot)}(t)) \in A\},$$

其中 $\mathcal{L}$ $\mathbb{R}$ 中的勒贝格测度，我们得到

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left(\iint \frac{d\mu_{X,j}(x)d\mu_{X,j}(y)}{|x-y|^s}\right) \\
&= \iint_{([t_0-j^{-1},t_0+j^{-1}]\cap I)^2} \mathbb{E}\left[\left(|X_d^{H(\cdot)}(t) - X_d^{H(\cdot)}(u)|^2 + |t-u|^2\right)^{-\frac{s}{2}}\right] dt\, du \\
&\leq c'' \iint_{([t_0-j^{-1},t_0+j^{-1}]\cap I)^2} |t-u|^{\frac{1}{d}-s-\frac{\overline{H}(t_0,\varepsilon)}{d}}\, dt\, du.
\end{aligned}$$

若 $s < 1 + \frac{1-\overline{H}}{(t_0,j^{-1})\ d}$，则最后这个积分有限。因此，对于所有满足 $0 < q_j \leq 1 + {}^{1-\overline{H}}{}_{(t_0,j^{-1})\ d}$ 的 $q_j \in \mathbb{Q}$，存在一个概率为 1 的事件 Ω_{j,q_j}，使得在 Ω_{j,q_j} 上，

$$\iint \frac{d\mu_{X,j}(x)d\mu_{X,j}(y)}{|x-y|^{q_j}} < +\infty.$$

~由引理 7.4 和 (19) 可知，在 Ω_{j,q_j} 上

$$q_j \leq \dim_{\mathcal{H}}\left(\mathcal{G}_d([t_0 - j^{-1}, t_0 + j^{-1}] \cap I)\right) \leq \dim_{\mathcal{H}}\left(\mathcal{G}_d(I)\right).$$

~由于 H 是连续函数，因此在概率为 1 的事件 $\bigcap_j \bigcap_{q_j} \Omega_{j,q_j}$ 上，我们有

$$1 + \frac{1 - \underline{H}(I)}{d} \leq \dim_{\mathcal{H}}\left(\mathcal{G}_d(I)\right).$$

只需将此事件与命题 7.2 中的 Ω_1 取交集，即可得到结论。

□

注 7.7. 请注意，命题 7.6 的证明只要求：若 $t_0 \in I$ 满足 $H(t_0) = \underline{H}(I)$，则存在 $\xi > 0$ 和 $\gamma > 0$，使得$\gamma > \overline{H}(t_0, \xi)$ 且 $H \in C^\gamma([t_0 - \xi, t_0 + \xi) \cap I)$。特别地，在这种情况下，$\mathcal{G}_d(I)$ 的豪斯多夫维数下界仍然成立。

8 多重分形Rosenblatt过程的补充

在最后这一节中，我们利用表达式 (21) 改进 $d = 2$ 情形下的定理 2.17，此时多重分数阶 Hermite 过程就是多重分形Rosenblatt过程。首先介绍我们将要使用的马利亚万演算概念。详情可参阅基础著作 [52, 54]。

一般而言，设 $\mathcal{H}$ 为一个实可分希尔伯特空间，内积为 $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H}}$，相应的范数为 $\| \cdot \|_{\mathcal{H}}$。我们称定义在概率

空间 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 上的任意中心高斯族 $f(X) : g$ 为 $\mathbb{E}[X$上的等距正态高斯过程，且对每个 f, $g \in \mathcal{H}$, $\mathbb{E}[X(f)X(g)] = \langle f, g\rangle_{\mathcal{H}}$。可以假设 $\mathcal{F}$ 是由 X生成的 σ-域。对于所有 $m \geq 1$, $\mathcal{H}^{\odot m}$ 是 $\mathcal{H}$ 的第 m 阶对称张量积，而 $L^2(\Omega\mathcal{H}^{\odot m})$ 是由 $\mathcal{H}^{\odot m}$值随机元素 F构成的类，这些元素是 $\mathcal{F}$-可测的，且满足 $\mathbb{E}[\|F\|^2_{\mathcal{H}^{\odot m}}] < \infty$。令 $\mathcal{S}$ 为所有形如以下形式的柱状随机变量的集合

$$F = g(X(f_1), \ldots, X(f_n)) \tag{47}$$

其中 $n \geq 1$、$f_j \in \mathcal{H}$ 和 g 均为无穷可微函数，且其所有偏导数都具有多项式增长。若 $F \in \mathcal{S}$ 具有形式（47），则 F 的 m 阶马利亚万导数是 $L^2(\Omega\ \mathcal{H}^{\odot m})$ 中由下式定义的元素：

$$D^m F = \sum_{j_1,\ldots,j_m=1}^{n} \frac{\partial^m g}{\partial x_{j_1} \ldots \partial x_{j_m}}(X(f_1), \ldots, X(f_n)) f_{j_1} \otimes \cdots \otimes f_{j_m}.$$

对于所有 $m \geq 1$ 和 $p \geq 1$, $\mathbb{D}^{m,\,p}$ 表示 $\mathcal{S}$ 关于范数的闭包

$$\|\cdot\|_{m,p} : F \mapsto \left(\mathbb{E}[|F|^p] + \sum_{j=1}^{m} \mathbb{E}[\|D^j F\|^p_{\mathcal{H}^{\otimes j}}] \right)^{\frac{1}{p}}. \tag{48}$$

对于所有 $p \geq 1$, $\mathbb{D}^{\infty,\,p} = \bigcap_{m\geq 1} \mathbb{D}^{m,\,p}$

下文将大量使用以下事实，该事实包含在 [35,定理 3.1] 中。

引理 8.1。若 $F \in \mathbb{D}^{2,\,s}$ 满足：对于 p, r, $\mathbb{E}[|F|^{2p}] < \infty$ 和 $\mathbb{E}[\|DF\|^{-2r}_{\mathcal{H}}] < \infty$，且满足 $\frac{1}{p} + \frac{1}{r} + \frac{1}{s} = 1$，则 F 具有连续有界密度 f_F，其中

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |f_F(x)| \leq c_p \left\| \|DF\|^{-2}_{\mathcal{H}} \right\|_{L^r(\Omega)} \|F\|_{2,s},$$

其中 $c_p > 0$ 是仅取决于 p的确定性常数。

在我们的情形中，我们考虑 $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R})$，并且对所有 $f \in L^2(\mathbb{R})$, $X(f) = I_1(f)$ 是相对于布朗运动的 f 的维纳–伊藤积分。对所有 p, $d \geq 1$, $I_d(f) \in D^{\infty,p}$并且对所有 $q \geq 1$,

$$D^q I_d(f) = \begin{cases} \frac{d!}{(d-q)!} I_{d-q}(f) & \text{if } q \leq d \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases}$$

其中，在 $I_{d-q}(f)$ 中，随机积分是对 $d-q$ 变量取的，因此所得随机变量属于 $L^2(\Omega\ L^2(\mathbb{R}^q))$。特别地，$D^d I_d(f) = d! f$。在 $d = 2$的情形下，我们可以使用展开式 (21)，并写成

$$DI_2(f) = 2 \sum_{j\in\mathbb{N}} \lambda_{f,j} I_1(e_{f,j}) e_{f,j}$$

鉴于该系统的正交性 $\{e_{f,j}\}$，这意味着

$$\|DI_2(f)\|_{L^2(\mathbb{R})} = 2 \left(\sum_{j\in\mathbb{N}} \lambda^2_{f,j} I_1(e_{f,j})^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \tag{49}$$

特别地，由于 $\{I_1(e_{f,\ j}\}_j$ 是独立同分布的 $\mathcal{N}(0,1)$ 随机变量，我们根据（22）可得

$$\mathbb{E}\left[\|DI_2(f)\|^2_{L^2(\mathbb{R})}\right] = 4\left(\sum_{j\in\mathbb{N}}\lambda_{f,j}^2\right) = 4\|f\|^2. \tag{50}$$

现在，我们陈述 [35, 引理 7.1]，该引理给出了形如（49）的随机变量的负矩估计，这对于应用引理 8.1 尤其有用。

引理 8.2. 设 $G:=\left(\sum_{j\in\mathbb{N}}\lambda_j X_j^2\right)^{\frac{1}{2}}$ 其中 $\{\lambda_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ 满足 $|\lambda_j|\geq|\lambda_{j+1}|$，对所有 $j\geq 1$ 均成立，且 $\{X_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ 是独立同分布的标准正态随机变量。对于所有 $r>1$，$\mathbb{E}[G^{-2r}]<\infty$当且仅当存在 $N>2r$ 使得 $|\lambda_N|>0$，在此情形下，

$$\mathbb{E}[G^{-2r}]\leq c_p N^{-r}|\lambda|^{-2r}, \tag{51}$$

其中 $c_r>0$ 是仅取决于 r的确定性常数。

让我们利用引理 8.1 改进二阶维纳混沌中的命题 7.6。

命题 8.3. 给定 $d\in\mathbb{N}^*$、集合 K（它是（$\frac{1}{2},1$）的紧集），以及赫斯特函数$H:\mathbb{R}_+\to K$，满足条件 *2.8*（*a*），并给定紧区间 $I\subset\mathbb{R}_+$。若 $t_0\in I$ 满足（t_0）$=\underline{H}(I)$，则存在两个确定性常数$c>0$，$\xi>0$，它们都仅取决于 d、H 和 I，使得对所有 $0<\varepsilon<\xi$、$x\geq 0$ 以及 $t,\ u\in I\cap[t_0-\varepsilon,t_0+\varepsilon]$，

$$\mathbb{P}(|X_d^{H(\cdot)}(t)-X_d^{H(\cdot)}(u)|\leq x)\leq cx|t-u|^{-\overline{H}(t_0,\varepsilon)}.$$

证明。固定 t、$u\in I$，不妨设 $u<t$。沿用记号

$$f_{t,u}^{H(\cdot)}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}:\mathbf{w}\mapsto\int_0^t f_{H(t)}(s,\mathbf{w})\,ds-\int_0^u f_{H(u)}(s,\mathbf{w})\,ds$$

在命题 7.6 的证明中引入的记号，并考虑函数

$$f_{t,u}^{H(t)}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}:\mathbf{w}\mapsto\int_u^t f_{H(t)}(s,\mathbf{w})\,ds.$$

注意，$I_2\left(f_{t,u}^{H(t)}\right)=X_d(t,H(t))-X_d(u,H(t))$。若 $\{\lambda_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ 是 Hilbert-Schmidt算子 $\mathcal{A}_{f_{1\ 0}^{H(t)}}$ 的特征值，按 $|\lambda_j|\geq|\lambda_{j+1}|$排序，一方面，通过一些显而易见的变量替换，可以验证 $\{|t-u|^{H(t)}\lambda_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ 是 $\mathcal{A}_{f_{t\ u}^{H(t)}}$ 的特征值。另一方面，由[56, 定理 3.1] 的证明可知 $\lambda_3\neq 0$。最后，不等式 (22)表明，若 $\{\xi_j^{t,u}\}_{j\in\mathbb{N}}$ 是 Hilbert-Schmidt算子 $\mathcal{A}_{f_{t\ u}^{H(u)}}$ 的特征值，按 $|\xi^t$排序，则 $_j{}^u|\geq|\xi^{t}{}_{j+1}^{u}|$

$$|\xi_3^{t,u}|>|t-u|^{H(t)}|\lambda_3|-\|f_{t,u}^{H(\cdot)}-f_{t,u}^{H(t)}\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}.$$

根据命题 2.2，我们知道存在一个 c_2，它仅取决于 K 和H，使得

$$\|f_{t,u}^{H(\cdot)} - f_{t,u}^{H(t)}\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \leq c_2|H(t) - H(u)|.$$

现在，由于 H满足条件 2.8（a），仿照命题 7.6 的证明可得，存在一个确定性常数 $\xi > 0$，它仅依赖于 H和 I，使得对于所有 $0 < \varepsilon < \xi$和 t， $u \in I \cap [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]$,

$$|\xi_3^{t,u}| > \frac{|\lambda_3|}{2}|t-u|^{\overline{H}(t_0,\varepsilon)}.$$

由引理 8.2 可得，对于所有这样的 ε和 t， u，并且对于所有 $r \in (1, 3\,2)$，有

$$\left\| \|D\left(X_d^{H(\cdot)}(t) - X_d^{H(\cdot)}(u)\right)\|_{L^2(\mathbb{R})}^{-2} \right\|_{L^r(\Omega)} \leq c_r \frac{4}{3}|\lambda_3|^{-2}|t-u|^{-2\overline{H}(t_0,\varepsilon)},$$

其中 $c_r > 0$ 是仅依赖于 r的确定性常数。对于所有 $p > 1$， $\mathbb{E}\left[\left(X_d^{H(\cdot)}(t) - X_d^{H(\cdot)}(u)\right)^p\right] < \infty$。最后，由式 (48)、等式 (50)、命题 2.2 和条件 2.8（a），我们推得存在一个确定性常数 $c_1 > 0$，它仅依赖于 H 和 I，使得对于所有 $0 < \varepsilon < \xi$ 和 t， $u \in I \cap [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]$

$$\left\|\left(X_d^{H(\cdot)}(t) - X_d^{H(\cdot)}(u)\right)\right\|_{2,2} \leq c_1|t-u|^{\overline{H}(t_0,\varepsilon)}.$$

由于 Ornstein-Uhlenbeck 半群的超收缩性（ $[52,$ 定理 2.7.2$],$ ）的推论是，任意有限个 Wiener 混沌之和中的所有 $\|\cdot\|_{m,p}$ 范数彼此等价，因此由引理 8.1 可得，存在两个确定性常数 $c, \xi > 0$，它们仅依赖于 H和 I，使得对所有 $0 < \varepsilon < \xi$和 $t, u \in I \cap [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]$, $\left(X_d^{H(\cdot)}(t) - X_d^{H(\cdot)}(u)\right)$都具有连续密度，且该密度以 $c|t-u|^{-\overline{H}(t_0,\varepsilon)}$ 为上界。结论立即得出

□

定理 2.18 的证明直接沿用定理 2.17 的证明，只需使用命题 8.3 给出的改进估计。

定理 *2.18* 的证明。 只需重复定理 2.17 的证明，并用命题 8.3 替代命题 7.6。因此，我们在计算式 (46) 中去掉因子 $\frac{1}{d}$，得到

$$\mathbb{E}\left[\left(|X_d^{H(\cdot)}(t+r) - X_d^{H(\cdot)}(t)|^2 + r^2\right)^{-\frac{s}{2}}\right] \leq c'' r^{1-s-\overline{H}(t_0,j^{-1})}.$$

□

注 8.4. 与前文一样，我们可以注意到，豪斯多夫维数下界的证明对赫斯特函数 H所需的假设更弱，参见此处的注 7.7。

参考文献

[1] P. Andersson. 逐点 Hölder 正则性的刻画。应用计算与调和分析，4(4):429–443，1997年。[2] B. Arras. 关于一类具有平稳增量且属于高阶 Wiener 混沌的自相似过程。《随机过程及其应用》，124(7):2415–2441，2014年。[3] A. Ayache. 广义多重分形场：研究广义多重分形布朗运动的得力工具。《傅里叶分析与应用杂志》，8(6):581–601，2002年。[4] A. Ayache. 具有随机逐点 Hölder 正则性的连续高斯多重分形过程。《理论概率论杂志，26(1):72–93，2013年。[5] A. Ayache. 多重分形随机场。世界科技出版公司有限公司，哈肯萨克，新泽西州，2019年。多重分形框架中的小波策略。[6] A. Ayache. Hermite 过程局部振荡的下界。《随机过程及其应用》，130(8):4593–4607，2020年。[7] A. Ayache 和 F. Bouly. 关于 Surgailis 多重分形过程的局部路径行为。《概率论与数理统计》，(106):3–26，2022年。[8] A. Ayache 和 Y. Esmili. 任意 Wiener 混沌中多重分形过程的小波分析。理论 ˘与概率 ¯统计数学，(98):29–50，2018年。[9] A. Ayache、C. Esser 和 T. Kleyntssens. 布朗运动小波领头项的不同可能行为。统计与概率快报，150:54–60，2019年。[10] A. Ayache 和 J. Hamonier. 线性多重分形稳定运动：精细路径性质。《伊比利亚数学杂志》，30(4):1301–1354，2014年。[11] A. Ayache 和 J. Hamonier. 线性多重分形稳定运动的行为：属于临界 Hölder 空间。《随机过程》，89(5):709–725，2017年。[12] A. Ayache、S. Jaffard 和 M. S. Taqqu. 广义多重分形过程的小波构造。《伊比利亚数学杂志》，23(1):327–370，2007年。[13] A. Ayache 和 J. Lévy Véhel. 广义多重分形布朗运动：定义与初步结果。载于分形：工程学中的理论与应用，第17–32页。施普林格，伦敦，1999年。[14] A. Ayache 和 J. Levy Vehel. 广义多重分形布朗运动。第3卷，第7–18页。2000年。第19届“法比统计学家研讨会”（马赛，1998年）。[15] A. Ayache 和 M. S. Taqqu. 具有随机指数的多重分形过程。《数学出版物》，49(2):459–486，2005年。

[16] M. F. Barnsley、R. L. Devaney、B. B. Mandelbrot、H.-O. Peitgen、D. Saupe 和 R. F. Voss。《分形图像科学》，第 xiv+312 页，1988年。Yuval Fisher 和 Michael McGuire 亦有贡献。[17] A. Benassi、S. Jaffard 和 D. Roux。椭圆高斯随机过程。《伊比利亚美洲数学杂志》，13(1):19–90，1997年。[18] P. Billingsley。《style id='7'>概率测度的收敛。Wiley 概率与统计丛书：概率与统计。John Wiley & Sons, Inc.，纽约，第二版，1999年。Wiley-Interscience 出版物。[19] B. Boufoussi、M. Dozzi 和 R. Guerbaz。关于多重分形布朗运动的局部时。《随机过程》，78(1):33–49，2006年。[20] B. Boufoussi、M. Dozzi 和 R. Guerbaz。多重分形布朗运动局部时的样本路径性质。《伯努利》，13(3):849–867，2007年。[21] R. Brown。《1827年六月、七月和八月对植物花粉中所含颗粒所作显微观察简述；并论有机体和无机体中活性分子普遍存在》。《爱丁堡新哲学杂志》，5:358—371，1828年。[22] A. Carbery 和 J. Wright。凸体上多项式的分布不等式与 L^q 范数不等式， $\mathbb{R}^n$。《数学研究快报》，8(3):233–248，2001年。[23] Z. L. Chen。多参数多重分数布朗运动的击中概率与分形维数。《数学学报（英文版）》，29(9):1723– 1742，2013年。[24]J.-F. Coeurjolly。多重分形布朗运动的识别。《伯努利》，11(6):987–1008，2005年。[25] S. Cohen 和 R. Marty。不变性原理、多重分数高斯过程与长程依赖。《亨利·庞加莱研究所概率与统计年刊》，44(3):475–489，2008年。[26] K. Daoudi、J. Lévy Véhel 和 Y. Meyer。构造具有指定局部正则性的连续函数。《构造性逼近》，14(3):349–385，1998年。[27] L. Daw 和 L. Loosveldt。研究广义罗森布拉特过程逐点正则性的小波方法。《电子概率学杂志》，27:1–45，2022年。[28] R. L. Dobrushin 和 P. Major。高斯场非线性泛函的非中心极限定理。*Z. Wahrsch. Verw. Gebiete*，50(1):27–52，1979年。[29] P. Doukhan、G. Oppenheim 和 M. S. Taqqu（编）。长程依赖理论及其应用。Birkhäuser Boston, Inc.，马萨诸塞州波士顿，2003年。

[30] C. Esser 和 L. Loosveldt。多重分形布朗运动及其若干扩展的逐点正则性。已提交发表。[31] C. Esser 和 L. Loosveldt。高斯小波级数的慢点、普通点和快点及其在分数布朗运动中的应用。*ALEA* 拉丁美洲概率数学统计杂志，19(2):1471–1495，2022年。[32] K. Falconer。分形几何。John Wiley & Sons, Ltd.，奇切斯特，第三版，2014年。数学基础与应用。[33] A. M. Garsia、E. Rodemich 和 H. Rumsey, Jr.。实变量引理及某些高斯过程路径的连续性。《印第安纳大学数学杂志》，20:565–578，1970/71。[34] G. R. Grimmett 和 D. R. Stirzaker。《style id='14'>概率与随机过程。牛津大学出版社，纽约，第三版，2001年。[35] Y. Hu、F. Lu 和 D. Nualart。某些高斯过程泛函的密度收敛。*J. Funct. Anal.*，266(2):814–875，2014年。[36] S. Janson。高斯希尔伯特空间，剑桥数学专题丛书第129卷。剑桥大学出版社，剑桥，1997年。[37] D. Khoshnevisan。《style id='25'>多参数过程。施普林格数学专著。施普林格出版社，纽约，2002年。随机场导论。[38] A. N. Kolmogorov。希尔伯特空间中的维纳螺线及其他若干有趣曲线。*C. R. (Doklady) Acad. Sci. URSS (N.S.)*，26:115–118，1940年。[39] D. Kreit 和 S. Nicolay。广义 Hölder 空间的若干刻画。《数学新闻》，285(17-18):2157–2172，2012年。[40] D. Kreit 和 S. Nicolay。通过可容许序列定义的广义逐点赫尔德空间。*J. Funct. Spaces*，第 Art. ID 8276258 篇，11页，2018年。[41] J. Lebovits。从相对于分数布朗运动的随机积分$w.r.t.$到相对于多重分形布朗运动的随机积分$w.r.t.$。*Ann. Univ.Buchar. Math. Ser.*，4(LXII)(1):397–413，2013年。[42] J. Lebovits、J. Lévy Véhel 和 E. Herbin。通过切分数布朗运动对多重分形布朗运动进行随机积分。《随机过程及其应用》，124(1):678–708，2014年。[43] J. Lebovits 和 M. Podolskij。多重分形布朗运动整体正则性的估计。《电子统计学杂志》，11(1):78–98，2017年。[44] J. Lebovits 和 J. Lévy Véhel。关于多重分形布朗运动的基于白噪声的随机微积分。《随机过程》，86(1):87–124，2014年。[45] Z. Lin。多重分形布朗运动的增量有多大？《中国科学》*A*辑，45(10):1291–1300，2002年。

[46] L. Loosveldt and S. Nicolay. 广义光滑度Besov空间的若干等价定义。《数学新闻》，292(10):2262–2282，2019年。[47] L. Loosveldt and S. Nicolay. 逐点正则性的广义空间：迈向WLM的一般框架。《非线性》，34(9):6561–6586，2021年。[48] L. Loosveldt and S. Nicolay. 多重分形分析中的若干普遍集：几乎每个函数有多光滑？ $T_p^\alpha(x)$。《傅里叶分析与应用杂志》，28(4):第58号论文，22页，2022年。[49] B. B. Mandelbrot and J. W. Van Ness. 分数布朗运动、分数噪声及其应用。《*SIAM*评论》，10:422–437，1968年。[50] R. Marty. 从Hermite多项式到多重分形过程。《应用概率杂志》，50(2):323–343，2013年。[51] R. Marty. 高斯随机场的多重分形过程与非线性泛函。*HAL*开放档案库，〈hal-03277874〉，2021年。[52] I. Nourdin and G. Peccati. 基于马利亚万演算的正态近似，第192卷，剑桥数学专题丛书。剑桥大学出版社，剑桥，2012年。从Stein方法到普适性。[53] I. Nourdin and G. Poly. 维纳混沌上的全变差收敛。《随机过程及其应用》，123(2):651–674，2013年。[54] D. Nualart. 马利亚万演算及相关主题。《概率及其应用》（纽约）。施普林格出版社，柏林，第二版，2006年。[55] R. F. Peltier and J. Lévy Véhel. 多重分形布朗运动：定义与初步结果。法国国家信息与自动化研究所研究报告，2645，1995年。[56] G. Shevchenko. 多重分形Rosenblatt过程轨道的性质。*Teor. ˘Imov¯ır. Mat. Stat.*，(83):138–147，2010年。[57] D. Surgailis. 非齐次分数积分与多重分形过程。《随机过程及其应用》，118(2):171–198，2008年。[58] M. S. Taqqu. 弱收敛到分数布朗运动和Rosenblatt过程。《概率论及其相关领域》，31:287–302，1974/75年。[59] M. S. Taqqu. 任意Hermite秩的积分过程的收敛。*Z. Wahrsch. Verw. Gebiete*，50(1):53–83，1979年。[60] D. Wu. 多重分数布朗片的维数结果。《数学物理杂志》，48(7):073511，11页，2007年。[61] W. B. Wu. 线性过程泛函的单位根检验。《计量经济理论》，22(1):1–14，2006年。