arXiv:2303.04686v1 [math.OA] 8 Mar 2023

共形变形非交换环面的局部不变量 II：多重算子积分

TEUN VAN NULAND、FEDOR SUKOCHEV 与 DMITRIY ZANIN

Abstract. 我们利用多重算子积分，显式计算共形变形非交换 d-环面的局部不变量（热核系- 数）。我们推导出一个递归公式，可轻松给出任意阶 k 以及任意维数 d下局部不变量的显式表达式。我们的递归公式能够方便地产生所有与模算子相关的公式；此前这些公式是针对 $d \in \{2,4\}$ 和$k \in \{0,2,4\}$逐步获得的。我们通过写出模算子中的一些已知（$k=2$、 $d=2$）和一些新的（$k=2$、 $d \geq 3$）公式来说明这一点。

1. Introduction

研究非交换流形上的热迹展开，并计算相应的局部不变量（即非交换热核系数），有两个重要原因。首先，热核系数在量子场论中发挥着重要作用（参见 [49]）；如果空间在小尺度上呈现非交换性，就需要推广这些系数。其次，局部不变量能够从拉普拉斯型算子的谱中提取几何信息，因此是将几何概念推广到非交换几何框架的良好起点。

我们将重点研究非交换 d-环面 $\mathbb{T}^d_\theta$，因为它们是非交换空间的典型例子。这些例子的一个优点是，它们具有明确的非交换对应物 $C^\infty(\mathbb{T}^d_\theta)$ 和 $L_\infty(\mathbb{T}^d_\theta)$，分别对应交换代数$C^\infty(\mathbb{T}^d)$ 和 $L_\infty(\mathbb{T}^d)$；此外，它们还有希尔伯特空间$L_2(\mathbb{T}^d_\theta)$ 上的忠实表示 λ_l，这是 $L_2(\mathbb{T}^d)$ 的对应物，以及迹 $\tau\colon L_\infty(\mathbb{T}^d_\theta) \to \mathbb{C}$，它对应于积分；定义见第 2.2 节。

作用于 $L_2(\mathbb{T}^d_\theta)$ 中的算子 P 的局部不变量 $I_k(P)$，是热迹展开中出现的唯一系数；热迹展开即为渐近展开

$$\mathrm{Tr}(\lambda_l(y)e^{-tP}) \sim \sum_{\substack{k\geq 0\\ k=0 \bmod 2}} t^{\frac{k-d}{2}}\tau(y\, I_k(P)), \quad t\downarrow 0 \qquad (y \in L_\infty(\mathbb{T}^d_\theta)). \tag{1.1}$$

在 [46] 中已经证明，如果（特别是当 e^{-tP} 属于迹类时） P 自伴且具有如下形式，则该展开存在

$$P = \lambda_l(x)\Delta + \sum_{i=1}^d \lambda_l(a_i)D_i + \lambda_l(a) \quad \text{for some} \quad x, a_i, a \in C^\infty(\mathbb{T}^d_\theta), \tag{1.2}$$

2010 *Mathematics Subject Classification.* 46L87,58B34.

其中 x 正且可逆。这里， $\Delta = \sum_{i=1}^{d} D_i^2$ 和 D_i 是 i^{th} 方向导数，其定义同样见第 2.2 节。在这一广义意义下， P 是一个强椭圆微分算子。除了证明渐近展开存在之外， [46] 还表明 $I_k(P) \in C^\infty(\mathbb{T}^d_\theta)$，因此可以非正式地将 $y \mapsto \tau(y\, I_k(P))$ 视为对光滑“函数” $I_k(P)$ 的“积分”。本文的目标是显式计算这一类 P 的 $I_k(P)$（即具有 (1.2) 中形式且 x 正且可逆的那些）。

我们考虑这类 P 的一个动机，是所谓共形变形非交换环面的局部不变量周围蓬勃发展的研究计划；该研究计划由论文 [2, 9, 11]开启。非交换环面的经典极限就是平坦环面 $\mathbb{T}^d$，它不具有有趣的几何性质，同样， $I_k(\Delta)$也是平凡的。在 [2]中，通过类似于对度量进行共形缩放的调整，为环面增添了非平凡的几何结构，其结果称为共形变形非交换环面。就我们的目的而言，可以通过将拉普拉斯算子替换为形式如 (1.2) 的算子 P，并保持希尔伯特空间、代数和表示不变，来体现这种共形缩放（例如参见 [9]）。

上述研究计划的一个主要目标，是将局部不变量 $I_k(P)$ 表达为闭式公式，其中涉及对定义共形缩放的模算子施加函数演算，正如 [9, 16] 针对 $k = 2$、 $d = 2$ 所做的那样。

在 [17] 中，针对 d =4， $k = 2$，以及在 [8] 中，针对 $d = 2$， $k = 4$，发现了通过这种“模函数演算”起作用的新函数；为了理解并有时简化这些论文中的大量计算， [15, 30, 31, 33] 已取得显著进展。在此背景下，各种几何概念被提升到非交换情形中 [11, 16, 18, 22, 23, 24, 34] 等等，这进一步推动了以模函数演算计算局部不变量，但尚未将这种计算扩展到更高维数或更高阶。在上述大多数论文中，局部不变量是借助与 P 相关的 ζ函数获得的。

值得注意的是，在 [25, 26, 27], Iochum 和 Masson 采取了一种截然不同的方法，计算了作用于流形上丛的矩阵值微分算子的局部不变量，将已知用于计算 Seeley-deWitt 系数的公式和算法（Gilkey 在 [20] 中也进行了相关工作；概述见 [49] ）推广到了矩阵值情形。这种方法更直接适用于物理学，而将他们的公式进一步推广到非交换流形，很可能是一项值得开展的工作。事实上，谱标准模型 [12] 与物理学的对照目前看来颇有希望（参见 [6]），其恰恰依赖于针对流形上丛的这一热迹展开（参见 [45]）；而在类似于 [21] 的非交换量子场论中，底层空间本身就是非交换的，并且与非交换环面颇为相似。类似地，非交换 d-环面源于矩阵理论紧化，正如 [7, 29]中所解释的那样。

在本文中，我们利用多重算子积分理论的全部力量，并使用在 [46] 中对 $I_k(P)$ 的描述——正是该描述促成了渐近展开（1.1）的存在——为每个 $d \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ 和每个 $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$显式计算 $I_k(P)$。不同于 Connes 等人所采用的抽象模函数演算，我们使用已确立的多重算子积分框架（第 2.1 节为非专业读者作了简要介绍）。

我们的方法更接近 [25, 26, 27],的（几乎）交换方法；正如上文段落所述，这使其非常适合物理应用。

我们的主要结果是关于 $I_k(P)$ 的一个紧凑表达式，其中包含一条简单的递归规则。选定一个特定的 k 后，可以递归展开该表达式，得到的 $I_k(P)$ 表达式是若干显式多重算子积分之和（在许多情况下可通过代数方法计算，如注记 2.2 所示）。项数会迅速膨胀（ $k = 0$ 有 1 项， $k = 2$ 有 13 项，$k = 4$ 有 1046 项， $k = 6$ 有 140845 项，等等）。

我们展示了如何直接从上述多重算子积分表达式中，得到所有通过模函数演算作用的函数。由此，我们补充了一个进展清单 [8, 9, 16, 17]： 其中找到了适用于缓慢增长的 k 和 d的这类函数。我们的方法深入揭示了这类函数在 [8, 9, 16, 17], 中的结构与形式；具体而言，它们是递归过程的结果，该过程从一个简单表达式出发，并在每一步中逐渐使结果变得复杂。特别是，我们的递归结构解释了这些函数中差商的出现，这源于多重算子积分的一条换位子规则；该规则对于 [38],也至关重要，因此（通过 [30, 35]中的论证）阐明了 [8, 9]的函数关系。

从多重算子积分过渡到模函数演算相当简单，我们通过给出一些已知的以及一些新颖的模公式来说明这一点。

本文结构如下。 第 2 节介绍多重算子积分这一优美的主题，并确定本文采用的记号；第 3 节则全面概述主要结果及其应用。第 4 节包含一些基础工作。随后，我们将在第 5、6、7 节中完成主定理——定理 3.3——的证明。在第 8 节中，我们将主要结果应用于 $k = 2$ 情形，并证明推论 3.6 和定理 3.8。第 9 节探讨与模函数演算的联系，第 10 节探讨与交换情形的联系。附录 A 对随文提供的 Python 程序作出说明。

致谢。 我们衷心感谢 Bruno Iochum、Matthias Lesch 和 Adam Rennie 与我们进行了极富启发性的讨论。我们感谢 Christiaan van de Ven 指引我们关注 [19] ，也感谢 Yerlan Nessipbayev 核查了部分计算。T. v. N. 获 NSF CAREER 基金 DMS-1554456 以及 ARC 基金 FL17010005 的部分资助。F. S. 获 ARC 基金 FL17010005 和 ARC 基金 DP230100434 资助。D. Z. 获 ARC 基金 DP230100434 资助。

2. Preliminaries

设 $\mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$, $\mathbb{Z}_+ = \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $\mathbb{T} := \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}_- = (-\infty, 0)$。在适当的集合 X 上，我们分别用 $C^\infty(X)$ $L_1(X)$ $L_2(X)$ 表示光滑、勒贝格可积和平方可积函数。对于 $n \in \mathbb{Z}^m$ ，记 $|n|_1 := \sum_{i=1}^m |n_i|$。希尔伯特空间 $\mathcal{H}$ 上的有界算子记作 $\mathcal{B}(\mathcal{H})$。

2.1. 多重算子积分。

2.1.1. 引言。 多重算子积分在局部不变量中所起的作用从未得到清晰阐述（在 [35] 中也只是提及）。然而，

在计算局部不变量时，人们经常会遇到（例如在 [16, 25, 26, 27, 30, 33]中）与下列积分大致相似的积分：

$$\int_0^1 \int_0^{s_1} e^{(s_1-1)x}\, V_1\, e^{(s_2-s_1)x}\, V_2\, e^{-s_2 x}\, ds_2\, ds_1; \tag{2.1}$$

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{x+i\lambda}\, V_1\, \frac{1}{x+i\lambda}\, V_2\, \frac{1}{x+i\lambda}\, \frac{e^{i\lambda}}{2\pi}\, d\lambda; \tag{2.2}$$

或任何其他关于有界算子交错乘积 V_1，V_2 与自伴算子 x的函数的积分。这些实际上都是多重算子积分的特殊情形，即以下定义中形式为 (2.4) 的积分。

定义 2.1。设 $n \in \mathbb{N}$，且令 x 为可分希尔伯特空间 $\mathcal{H}$中的一个（可能无界的）自伴算子。令 ϕ：$\mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{C}$ 由下式给出

$$\phi(\alpha_0, \ldots, \alpha_n) = \int_\Omega a_0(\alpha_0, \lambda) a_1(\alpha_1, \lambda) \cdots a_n(\alpha_n, \lambda)\, d\lambda, \tag{2.3}$$

对于有界可测函数 a_0、...、a_n：$\mathbb{R} \times \Omega \to \mathbb{C}$ 以及有限测度空间(Ω, λ)。多重算子积分是多重线性函数 T_ϕ^x：$\mathcal{B}(\mathcal{H})^{\times n} \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$，定义为

$$T_\phi^x(V_1, \ldots, V_n) := \int_\Omega a_0(x, \lambda) V_1 a_1(x, \lambda) \cdots V_n a_n(x, \lambda)\, d\lambda, \tag{2.4}$$

对于 V_1、...、$V_n \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$。

此定义见 [1, 定义 4。1] 且 [39]，，而 [1, 引理 4。3] 和 [39, 引理 3。1] 是一个简单但至关重要的结果，它表明 T_ϕ^x 仅通过函数 a_0、.....、a_n 依赖于 ϕ，正如记号所暗示的那样。事实上，在合理的假设下，(2.1) 等于 (2.2)。这解释了为什么文献中有时会包含不同的步骤来计算同一对象。提供优雅而统一的图景并非多重算子积分的唯一目的（我们向严谨的读者保证，我们并非只是将已知结果换成新的记号）。多重算子积分理论为 (2.1) 和 (2.2) 这类积分的解析性质提供了极其有力的结果；此外，这一形式体系往往会带来全新的结果，或对已知结果作出广泛推广。（参见 [44]，了解理论与应用概述。）

2.1.2. 多重算子积分的基本结果。若 $n = 0$，则定义 2.1 恢复了函数演算：

$$T_\phi^x() = \phi(x).$$

此外，若 $V_1, \ldots, V_n$ 与 x 可交换，则根据定义，$T_\phi^x(V_1, \ldots, V_n)$ 可化简为$\phi(x, \ldots, x)$ $V_1 \cdots V_n$. 本文只讨论有界的 $x \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$，因此从现在起我们作此假设。我们指出，$\phi \mapsto T_\phi^x$可通过 $\phi \mapsto \phi|_{\mathrm{spec}(x)^{n+1}}$分解。函数 ϕ称为 T_ϕ^x的符号。我们遇到的最常见的符号是某个 $f \in C^n(\mathbb{R})$ 的差商 $\phi = f^{[n]}$。根据定义，进而，

根据归纳法，我们有

$$f^{[0]}(\alpha_0) := f(\alpha_0); \tag{2.5}$$

$$f^{[n]}(\alpha_0,\dots,\alpha_n) := \frac{f^{[n-1]}(\alpha_0,\alpha_1,\dots,\alpha_{n-1}) - f^{[n-1]}(\alpha_1,\dots,\alpha_n)}{\alpha_0-\alpha_n} \tag{2.6}$$

$$= \int_{\mathbb{R}}\int_{S^n} \widehat{f^{(n)}}(t) e^{it\lambda_0\alpha_0}\cdots e^{it\lambda_n\alpha_n}\, d\lambda\, dt, \tag{2.7}$$

其中，λ 是单纯形 $S^n=\{\lambda\in\mathbb{R}^{n+1}_{\geq 0}$ 上的平坦测度：$\sum_{j=0}^n \lambda_j = 1\}$ 满足 $\int_{S^n}\lambda = 1/n!$，并且为简单起见，我们假设傅里叶变换 $f^{(n)}$ 在 $L_1(\mathbb{R})$ 中存在，且 $\alpha_0\neq\alpha_n$。众所周知，$f^{[n]}$ 实际上可延拓至 $f^{[n]}\in C(\mathbb{R}^{n+1})$，满足 $f^{[n]}(\alpha,\dots,\alpha) = \frac{1}{n!} f^{(n)}(\alpha)$，并且对其所有自变量的置换保持不变，对所有 $f\in C^n(\mathbb{R})$均成立。比较（2.7）与（2.3），我们注意到，只要 $f\in C^n(\mathbb{R})$且 $f^{(n)}\in L_1(\mathbb{R})$，$T^x_{f^{[n]}}$便有定义。由（2.5）和（2.6），$f\mapsto T^x_{f^{[n]}}$可经由 $f\mapsto f|_I$分解，其中 I是 $\operatorname{spec}(x)$ 的任意一个邻域，因此，只要 $f\in C^\infty(\mathbb{R})$，$T^x_{f^{[n]}}$ 便有定义，因为假设 x 有界。更一般地，只要 $\phi\in C^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$，$T^x_\phi$ 便有定义。此时一些重要的恒等式为（参见 [38, 引理 14]）

$$\begin{aligned}
&T^x_{f^{[n]}}(V_1,\dots,V_j,yV_{j+1},\dots,V_n) - T^x_{f^{[n]}}(V_1,\dots,V_jy,V_{j+1},\dots,V_n)\\
&= T^x_{f^{[n+1]}}(V_1,\dots,V_j,[x,y],V_{j+1},\dots,V_n);\\
&T^x_{f^{[n]}}(yV_1,\dots,V_n) - yT^x_{f^{[n]}}(V_1,\dots,V_n) = T^x_{f^{[n+1]}}([x,y],V_1,\dots,V_n);\\
&T^x_{f^{[n]}}(V_1,\dots,V_n)y - T^x_{f^{[n]}}(V_1,\dots,V_ny) = T^x_{f^{[n+1]}}(V_1,\dots,V_n,[x,y]);\\
&f(x)y - yf(x) = T^x_{f^{[0]}}()y - yT^x_{f^{[0]}}() = T^x_{f^{[1]}}([x,y]),
\end{aligned} \tag{2.8}$$

对于 x，y，$V_j\in\mathcal{B}(\mathcal{H})$。本文中经常会看到 $f=F_{k,\,d}$，其中 $F_{k,\,d}$是我们对 $\alpha\mapsto\alpha^{-\frac{d}{2}}$在 $(0,\ \infty)$ 上的 $\frac{k}{2}$阶原函数的记法，而 $\operatorname{spec}(x)\subseteq(0,\ \infty)$。在文献中，(非交换)空间的维数 d 通常为偶数，而阶数 k （出现在 $I_k(P)$ 中）通常较小。在这些大量的情形下，多重算子积分可以写得极为显式：

注 2.2. 假设 d 为偶数且 $k<d$。那么 $F_{k,\,d}$ 是一个整数幂函数，因此对每个 $n\in\mathbb{N}$，都存在有限个 $I\subseteq\mathbb{Z}^{n+1}$ 和一些常数 c_i，使得对所有 $\alpha_j>0$，

$$F^{[n]}_{k,d}(\alpha_0,\dots,\alpha_n) = \sum_{i\in I} c_i\alpha_0^{i_0}\cdots\alpha_n^{i_n}.$$

因此，多重算子积分是一个纯代数表达式，

$$T^x_{F^{[n]}_{k,d}}(V_1,\dots,V_n) = \sum_{i\in I} c_i x^{i_0}V_1x^{i_1}\cdots V_nx^{i_n},$$

对所有 $V_j\in\mathcal{B}(\mathcal{H})$ 以及正可逆 $x\in\mathcal{B}(\mathcal{H})$。

2.2. **非交换环面**。关于非交换环面，我们采用 [46], 的定义，并在本节中仅作简要回顾。以下约定俗成的论断有些可见于 [46, §2], 其证明从略。

对于任意 $d\in\mathbb{N}_{\geq 2}$，我们令 $\theta\in M_d(\mathbb{R}^d)$ 为一个反对称矩阵。令 A_θ 为由形式符号 U_1、.....、U_d生成的含幺 *-代数，它们满足 $U_k^*U_k = U_kU_k^* = 1$ 和 $U_kU_l = e^{2\pi i\theta_{kl}}U_lU_k$，并记 $U^n := U_1^{n_1}\cdots U_d^{n_d}$对所有 $n\in\mathbb{Z}^d$成立。我们定义一个

线性函数 τ: $A_\theta \to \mathbb{C}$，定义为 $\tau(\sum_n c_n U^n) := c_0$。令 $L_2(\mathbb{T}^d_\theta)$ 为 A_θ 在范数 $\|a\| := \langle a, a\rangle^{\frac{1}{2}}$ 下的完备化，该范数由（非退化）内积 $\langle a, b\rangle := \tau(a^* b)$ 定义；由此，$\mathcal{H} := L_2(\mathbb{T}^d_\theta)$ 成为一个可分希尔伯特空间。我们在 A_θ 上定义 $D_k(\sum_n c_n U^n) := \sum_n c_n n_k U^n$，并令 $C^\infty(\mathbb{T}^d_\theta)$ 为 A_θ 关于（弗雷歇）半范数 $a \mapsto \|D^\alpha a\|$, $\alpha \in \mathbb{Z}^d_+$ 的完备化，其中 $D^\alpha := D_1^{\alpha_1} \cdots D_d^{\alpha_d}$。每个 D^α 都延拓为在 $L_2(\mathbb{T}^d_\theta)$ 中稠密定义的自伴算子，且 $C^\infty(\mathbb{T}^d_\theta) = \cap_\alpha \operatorname{dom} D^\alpha$。因此，$C^\infty(\mathbb{T}^d_\theta)$ 在全纯函数演算下保持不变。我们通过 $\lambda_l(a) b := ab$ 在 $L_2(\mathbb{T}^d_\theta)$ 上表示 A_θ，并将 $L_\infty(\mathbb{T}^d_\theta)$ 记为 A_θ 的相应弱闭包。它是一个冯·诺伊曼代数，其算子范数记为 $\|\cdot\|_\infty$。我们将 $C^\infty(\mathbb{T}^d_\theta) \subseteq L_\infty(\mathbb{T}^d_\theta)$ 和 $L_2(\mathbb{T}^d_\theta) \subseteq L_\infty(\mathbb{T}^d_\theta)$ 视为相同。τ 和 λ_l 都连续延拓到 $L_\infty(\mathbb{T}^d_\theta)$，从而给出一个忠实迹态 $\tau: L_\infty(\mathbb{T}^d_\theta) \to \mathbb{C}$，以及一个忠实表示（单射 *-同态）$\lambda_l : L_\infty(\mathbb{T}^d_\theta) \to \mathcal{B}(L_2(\mathbb{T}^d_\theta))$。

3. Summary of main results

在陈述主要结果之前，我们先介绍其核心所在的递归结构。

3.1. 递归结构。 我们令 $\mathbf{D}_1, \dots, \mathbf{D}_d$ 为多项式代数 $\mathbb{C}[\mathbf{D}_1, \dots, \mathbf{D}_d]$ 的形式符号，即我们仅施加关系 $\mathbf{D}_i \mathbf{D}_j = \mathbf{D}_j \mathbf{D}_i$，对所有 $i, j \in \{1, \dots, d\}$ 均成立。对于所有 $\alpha \in \mathbb{Z}^d_+$，我们记 $\mathbf{D}^\alpha := \mathbf{D}_1^{\alpha_1} \cdots \mathbf{D}_d^{\alpha_d}$。接着，我们定义自由左 $C^\infty(\mathbb{T}^d_\theta)$-模

$$\mathcal{X} := \operatorname{span}\{ b\mathbf{D}^\alpha : \ b \in C^\infty(\mathbb{T}^d_\theta), \alpha \in \mathbb{Z}^d_+ \},$$

由形式符号集合 $\{\mathbf{D}^\alpha : \ \alpha \in \mathbb{Z}^d_+\}$ 生成，并将 $\mathcal{X}$ 中的元素称为形式微分算子。我们通过识别 $b = b\mathbf{D}^0$，将 $C^\infty(\mathbb{T}^d_\theta) \subseteq \mathcal{X}$ 视为同一对象。

定义 3.1. 设 $x \in C^\infty(\mathbb{T}^d_\theta)$ 为自伴的，且 $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 在限制到 x 的谱时是光滑的。对于每个 $m \in \mathbb{Z}_+$，我们递归地定义多重线性映射 $\mathbf{T}_f^{x\ m}{}_{,}: \mathcal{X}^{\times m} \to C^\infty(\mathbb{T}^d_\theta)$，首先令

$$\mathbf{T}_f^{x,m}(b_1, \dots, b_m) := T^x_{f^{[m]}}(b_1, \dots, b_m),$$

对所有 $b_1, \dots, b_m \in C^\infty(\mathbb{T}^d_\theta) \subseteq \mathcal{X}$，其次令

$$\begin{aligned} &\mathbf{T}_f^{x,m}(\mathbf{B}_1, \dots, \mathbf{B}_{k-1}, \mathbf{B}_k \mathbf{D}_i, b_{k+1}, \dots, b_m) \\ &\qquad := \mathbf{T}_f^{x,m+1}(\mathbf{B}_1, \dots, \mathbf{B}_k, D_i x, b_{k+1}, \dots, b_m) \\ &\qquad\quad + \mathbf{T}_f^{x,m}(\mathbf{B}_1, \dots, \mathbf{B}_k, D_i b_{k+1}, b_{k+2}, \dots, b_m) \\ &\qquad\quad + \mathbf{T}_f^{x,m}(\mathbf{B}_1, \dots, \mathbf{B}_k, b_{k+1}\mathbf{D}_i, b_{k+2}, \dots, b_m), \end{aligned} \tag{3.1}$$

对所有 $\mathbf{B}_1, \dots, \mathbf{B}_m \in \mathcal{X}$ 和 $k < m$，最后令

$$\mathbf{T}_f^{x,m}(\mathbf{B}_1, \dots, \mathbf{B}_{m-1}, \mathbf{B}_m \mathbf{D}_i) := \mathbf{T}_f^{x,m+1}(\mathbf{B}_1, \dots, \mathbf{B}_m, D_i x). \tag{3.2}$$

$\mathbf{T}_f^{x\ m}{}_{,}$ 的良定义性由引理 4.1 得证。

例 3.2. 作为定义 *3.1* 的一个简单例子，我们有

$$\mathbf{T}_f^{x,3}(a, b\mathbf{D}_i) = T^x_{f^{[4]}}(a, b, D_i x). \tag{3.3}$$

稍微复杂一些，但仍然很容易的是

$$\begin{aligned}\mathbf{T}_f^{x,3}(a\mathbf{D}_i,b,c) =& T^x_{f^{[4]}}(a,D_ix,b,c)+T^x_{f^{[3]}}(a,D_ib,c)+\mathbf{T}_f^{x,3}(a,b\mathbf{D}_i,c)\\ =& T^x_{f^{[4]}}(a,D_ix,b,c)+T^x_{f^{[3]}}(a,D_ib,c)+T^x_{f^{[4]}}(a,b,D_ix,c)\\ &+T^x_{f^{[3]}}(a,b,D_ic)+T^x_{f^{[4]}}(a,b,c,D_ix).\end{aligned}$$

例如，稍微复杂一些的表达式

$$\mathbf{T}_f^{x,3}(a\mathbf{D}_i\mathbf{D}_j,b\mathbf{D}_k,c)$$

已经会产生 *145* 项，只要有足够的时间（或者手边有台电脑），就能轻松算出这些项。

上述例子说明，无论$\mathbf{B}_1,\dots,\mathbf{B}_m\in\mathcal{X}$有多复杂，$\mathbf{T}_f^{x\ m}{}_{,}(\mathbf{B}_1,\dots,\mathbf{B}_m)$总能写成一系列多重算子积分之和，其参数属于 $C^\infty(\mathbb{T}^d_\theta)$。这也说明，从某种意义上说，我们有

$$\mathbf{T}_f^{x,m}(b_1\mathbf{D}^{\alpha_1},\dots,b_m\mathbf{D}^{\alpha_m}) = \text{“}T^{\lambda_l(x)}_{f^{[m]}}(\lambda_l(b_1)D^{\alpha_1},\dots,\lambda_l(b_m)D^{\alpha_m})(1)\text{”}, \tag{3.4}$$

其含义是，如果我们照字面理解 (2.8)，那么（利用 $D_i1=0$）便有

$$\begin{aligned}\text{“}T^{\lambda_l(x)}_{f^{[3]}}(\lambda_l(a),\lambda_l(b)D_i)(1)\text{”} &= T^{\lambda_l(x)}_{f^{[4]}}(\lambda_l(a),\lambda_l(b),[D_i,\lambda_l(x)])(1)\\ &= T^{\lambda_l(x)}_{f^{[4]}}(\lambda_l(a),\lambda_l(b),\lambda_l(D_ix))(1)\\ &= T^x_{f^{[4]}}(a,b,D_ix),\end{aligned}$$

这与 (3.3) 如出一辙；$\mathbf{T}_f^{x\ m}{}_{,}$的其他定义性质也类似。然而，引号中的多重算子积分含有无界参数，因此需要谨慎处理。推论 7.1 使 (3.4) 这一形式上的恒等式得以严格化，这是迈向主定理的关键一步。

我们主要结果所需的最后一组要素，是用作映射 $\mathbf{T}_f^{x\ m}{}_{,}$ 输入的元素。令 P 如 (1.2) 所示。对于每个 $m\in\mathbb{N}$、每个子集 $\mathscr{A}\subseteq\{1,\dots,m\}$ 以及每个函数 $\iota\colon\mathscr{A}\to\{1,\dots,d\}$，我们定义 $\mathbf{W}^{\mathscr{A},\iota}_1,\dots,\mathbf{W}^{\mathscr{A},\iota}_m\in\mathcal{X}$ 如下：

$$\mathbf{W}_j^{\mathscr{A},\iota}=\begin{cases}\mathbf{A}_{\iota(j)} & (j\in\mathscr{A});\\ \mathbf{P}, & (j\notin\mathscr{A}),\end{cases} \tag{3.5}$$

其中（对所有 $i\in\{1,\dots,d\}$）

$$\mathbf{A}_i:=2x\mathbf{D}_i+a_i,\quad \mathbf{P}:=x\sum_{i=1}^d\mathbf{D}_i^2+\sum_{i=1}^d a_i\mathbf{D}_i+a\quad\in\quad\mathcal{X}. \tag{3.6}$$

3.2. 主要结果。 我们的主要结果表述如下。

定理 3.3。 设 $d\in\mathbb{N}_{\geq 2}$、$k\in 2\mathbb{Z}_+$，且 P 是作用于 $L_2(\mathbb{T}^d_\theta)$ 中的自伴算子，其形式为 (1.2)，其中 x 为正可逆算子。出现在渐近展开 (1.1) 中的 P 阶局部不变量 k^{th} 具有如下形式

$$I_k(P)=(-1)^{\frac{k}{2}}\pi^{\frac{d}{2}}\sum_{\frac{k}{2}\leq m\leq k}\ \sum_{\substack{\mathscr{A}\subseteq\{1,\dots,m\}\\ |\mathscr{A}|=2m-k}}\ \sum_{\iota:\mathscr{A}\to\{1,\dots,d\}} c_d^{(\iota)}\mathbf{T}^{x,m}_{F_{k,d}}(\mathbf{W}_1^{\mathscr{A},\iota},\dots,\mathbf{W}_m^{\mathscr{A},\iota}), \tag{3.7}$$

其中 $F_{k,\ d}$ 是 $\alpha \mapsto \alpha^{-\frac{d}{2}}$ 的任意 $\frac{k}{2}^{th}$ 阶原函数，并且

$$c_d^{(\iota)} := \frac{1}{\mathrm{vol}(\mathbb{S}^{d-1})} \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \prod_{j \in \mathscr{A}} u_{\iota(j)}\, du.$$

对于非自伴的 P，(3.7) 右侧仍然有定义，因此我们可以将其作为 $I_k(P)$ 的扩展定义（因为它与定义*4.6*一致）。

注 3.4。 $\alpha \mapsto \alpha^{-\frac{d}{2}}$的一个显式 $\frac{k}{2}^{th}$阶原函数为 -

$$F_{k,d}(\alpha) := \begin{cases} (-1)^{\frac{k}{2}} \frac{\Gamma(\frac{d}{2}-\frac{k}{2})}{\Gamma(\frac{d}{2})} \alpha^{\frac{k-d}{2}} & \text{if } d \text{ is odd or } k < d; \\ (-1)^{\frac{d}{2}-1} \frac{1}{(\frac{d}{2}-1)!(\frac{k}{2}-\frac{d}{2})!} \alpha^{\frac{k-d}{2}} \log(\alpha) & \text{if } d \text{ is even and } k \geq d. \end{cases}$$

特别地，我们有 $F_{2,\ 2}$ =对数。

注 3.5。 这些常数 $c_d^{(\iota)}$ 是有理数，在对定义域和值域进行置换时保持不变，并且计算起来很简单。记 $n_j :=|\iota^{-1}(\{j\})|$，则有（参见 [19]）

$$c_d^{(\iota)} = \begin{cases} \frac{(d-2)!! \prod_{j=1}^d (n_j-1)!!}{(|n|_1+d-2)!!} & \text{if } n_1, \dots n_d \text{ are even;} \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

这里我们采用通常约定$(-1)!! = 1$。

为了说明 (3.7) 在实际中的含义，我们指出，对于 $k = 0,2,4$，它表示（参见第 8 节）

$$\begin{aligned} \pi^{-\frac{d}{2}} I_0(P) =& \mathbf{T}_{F_{0,d}}^{x,0}(); \\ -\pi^{-\frac{d}{2}} I_2(P) =& \mathbf{T}_{F_{2,d}}^{x,1}(\mathbf{P}) + \sum_{i=1}^d \frac{1}{d} \mathbf{T}_{F_{2,d}}^{x,2}(\mathbf{A}_i, \mathbf{A}_i); \\ \pi^{-\frac{d}{2}} I_4(P) =& \mathbf{T}_{F_{4,d}}^{x,2}(\mathbf{P}, \mathbf{P}) + \sum_{i=1}^d \frac{1}{d} \Big(\mathbf{T}_{F_{4,d}}^{x,3}(\mathbf{P}, \mathbf{A}_i, \mathbf{A}_i) + \mathbf{T}_{F_{4,d}}^{x,3}(\mathbf{A}_i, \mathbf{P}, \mathbf{A}_i) \\ & + \mathbf{T}_{F_{4,d}}^{x,3}(\mathbf{A}_i, \mathbf{A}_i, \mathbf{P}) \Big) + \sum_{i,j,k,l=1}^d c_d^{(i,j,k,l)} \mathbf{T}_{F_{4,d}}^{x,4}(\mathbf{A}_i, \mathbf{A}_j, \mathbf{A}_k, \mathbf{A}_l), \end{aligned}$$

但 (3.7) 真正精妙之处在于，这个简洁的表达式对任意 k 都成立。

3.3. 主要结果的推论。 定理 3.3 的直接推论可通过固定 k，并将$\mathbf{T}_f^{x\ m}$,的递归定义（如注 2.2 中所述）展开为显式求和得到，其中各项是自变量属于非交换环面的多重算子积分。由此得到的 I_0 公式并无新意，即

$$\pi^{-\frac{d}{2}} I_0(P) = T_{F_{0,d}^{[0]}}^x() = F_{0,d}(x) = x^{-\frac{d}{2}}.$$

然而，所得的二阶局部不变量 I_2 公式值得注意，它有时也称为标量曲率。我们得到以下显式表达式；当 $d = 2,\ 4$ 时，可用它复现 [9, 15,16, 17] 的结果（稍后详述）。

推论 3.6. 对于任意维数 $d \in \mathbb{N}_{\geq 2}$，以及作用于 $L_2(\mathbb{T}^d_\theta)$ 上的 P，其形式为(1.2)，其中 x 为正可逆，P 的二阶局部不变量可计算为

$$\begin{aligned}-\pi^{-\frac{d}{2}} I_2(P) = &\sum_{i=1}^{d} \Big(2T^x_{F^{[3]}_{2,d}}(x, D_i x, D_i x) + T^x_{F^{[2]}_{2,d}}(a_i, D_i x) \Big) + T^x_{F^{[2]}_{2,d}}(x, \Delta x) \\ &+ T^x_{F^{[1]}_{2,d}}(a) + \sum_{i=1}^{d} \frac{1}{d} \Big(4T^x_{F^{[4]}_{2,d}}(x, D_i x, x, D_i x) + 4T^x_{F^{[3]}_{2,d}}(x, D_i x, D_i x) \\ &+ 8T^x_{F^{[4]}_{2,d}}(x, x, D_i x, D_i x) + 2T^x_{F^{[3]}_{2,d}}(x, D_i x, a_i) + 2T^x_{F^{[2]}_{2,d}}(x, D_i a_i) \\ &+ 2T^x_{F^{[3]}_{2,d}}(x, a_i, D_i x) + 2T^x_{F^{[3]}_{2,d}}(a_i, x, D_i x) + T^x_{F^{[2]}_{2,d}}(a_i, a_i) \Big) \\ &+ \frac{4}{d} T^x_{F^{[3]}_{2,d}}(x, x, \Delta x).\end{aligned}$$

从主定理推导上述公式相当直接；为方便读者，第 8 节给出了一个明确的证明。

事实上，对于任意阶 k，都可以用一种简单的方法做到这一点。

推论 3.7。对于作用在 $L_2(\mathbb{T}^d_\theta)$ 中的任意 $d \in \mathbb{N}_{\geq 2}$、$k \in 2\mathbb{Z}_+$ 和 P，若其具有 (1.2) 的形式且 x 为正可逆，则 k^{th} 阶局部不变量 $I_k(P)$的表达式可通过配套的 *Python* 程序计算（参见附录 *A*）。该表达式由有限个如下形式的项组成

$$c\pi^{\frac{d}{2}} T^x_{F^{[m]}_{k,d}}(D^{\alpha_1} b_1, \ldots, D^{\alpha_m} b_m),$$

其中 $m \in \mathbb{N}$、$c \in \mathbb{Q}$、$\alpha_j \in \mathbb{Z}^d_+$ 和 $b_j \in \{x, a_1, \ldots, a_d, a\}$。例如，$I_4$ 包含 *1046* 项，而 I_6 在爱因斯坦求和约定下包含 *140845* 项（即不计对指标$i_j = 1$、.....、d的求和）。

对于特定的 P和 k，上述表达式可以得出非常简洁优雅的结果。作为示例，我们将重点讨论 $k = 2$ 以及 $P = \lambda_l(x^{1/2})\Delta\lambda_l(x^{1/2})$的情形，这对应于共形变形的非交换二维环面上的“函数”拉普拉斯算子（相关术语见 [9, 16]）。在这种情况下（事实上，对于每个 $d \geq 2$的类似情形也是如此），我们得到了 $I_2(P)$的表达式，其简洁程度可以说胜过文献中的表达式（参见 [9]）。

定理 3.8。设 $d \geq 2$，并考虑作用于 $L_2(\mathbb{T}^d_\theta)$上的 $P = \lambda_l(x^{\frac{1}{2}})\Delta\lambda_l(x^{\frac{1}{2}})$，其中 $x \in C^\infty(\mathbb{T}^d_\theta)$ 为正可逆。P 的二阶局部不变量由下式给出：

$$-\pi^{-\frac{d}{2}} I_2(P) = T^x_\Phi(\Delta x) + \sum_{i=1}^{d} T^x_\Psi(D_i x, D_i x),$$

其中，Φ 和 Ψ 用差商表示如下：

$$\Phi(\alpha_0, \alpha_1) = \frac{2(\alpha_0\alpha_1)^{\frac{1}{2}}}{d} \cdot \frac{\alpha_0 F^{[2]}_{2,d}(\alpha_0, \alpha_0, \alpha_1) - \alpha_1 F^{[2]}_{2,d}(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_1)}{\alpha_1 - \alpha_0},$$

$$\Psi(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2) = -\frac{4}{d} \frac{(\alpha_0\alpha_2)^{\frac{1}{2}}}{\alpha_1^{2+\frac{d}{2}}} g^{[3]}\Big(\frac{\alpha_0}{\alpha_1}, \frac{\alpha_0}{\alpha_1}, \frac{\alpha_2}{\alpha_1}, \frac{\alpha_2}{\alpha_1}\Big), \quad g(\alpha) = F_{2,d}(\alpha) + F^{[1]}_{2,d}(1, \alpha),$$

对所有 α_0、α_1、α_2、$\alpha > 0$。

多重算子积分也可以作为通往模函数演算的阶梯；自 [2, 9, 11] 以来，这种演算在文献中随处可见。事实上，从上述公式可以推导出 [9, 16] 的最基本主要结果作为推论，即来自 [9] 的函数 $K_0(s)$ 和 $H_0(s,\ t)$。这一推导在第 9 节中完成。

事实上，由于我们的主要结果适用于任意 d 和 k，现在可以轻松得到更多“模公式”。举一个简单的例子，若 $k = 2$ 和 $d \geq 3$ 是任意的，那么定理 9.4（可由定理 3.8 推出，也可直接由我们的主定理推出）说明了函数

$$K_0^d(s) = \frac{2}{d} \cdot \frac{-1 - e^{(1-\frac{d}{2})s} + \frac{e^{(1-d/2)s}-1}{1-d/2} \coth\left(\frac{s}{2}\right)}{s \sinh\left(\frac{s}{2}\right)}$$

在推广到任意维数时，会取代 [9, 的式（2）] 中的函数 $K_0(s)$。此外，在上述公式中取 $d \to 2$ ，便可立即得到 [9] 的函数 $K_0(s)$。

定理 3.3 的递归公式与[25, 26, 27]中的一些公式相似。事实上，我们在定理 10.3 中展示了如何从我们的主定理推出 [25] 中的一项关键结果，从而最终弥合交换方法与非交换方法之间的鸿沟。

4. Groundwork

引理 4.1. 定义 *3.1* 中的映射 **圆周**： $\mathcal{X}^{\times n} \to C^\infty(\mathbb{T}_\theta^d)$ 定义良好。

证明. 只需证明定义下式的表达式

$$\mathbf{T}_f^{x,n}(\mathbf{B}_1, \ldots, \mathbf{B}_{k-1}, \mathbf{B}_k\mathbf{D}_i\mathbf{D}_j, b_{k+1}, \ldots, b_n) \tag{4.1}$$

等于定义下式的表达式

$$\mathbf{T}_f^{x,n}(\mathbf{B}_1, \ldots, \mathbf{B}_{k-1}, \mathbf{B}_k\mathbf{D}_j\mathbf{D}_i, b_{k+1}, \ldots, b_n). \tag{4.2}$$

由归纳法可知，(4.1) 等于一个较长的表达式，其中包含 D_i 和 D_j，它们出现在以下某种形式的 $\mathrm{BB}_1, \ldots, \mathbf{B}_k$ 之后的参数中

$$\ldots, D_i x, \ldots, D_j x, \ldots, \qquad \ldots, D_j x, \ldots, D_i x, \ldots,$$

$$\ldots, D_i b_l, \ldots, D_j x, \ldots, \qquad \ldots, D_j b_l, \ldots, D_i x, \ldots,$$

$$\ldots, D_i x, \ldots, D_j b_m, \ldots, \qquad \ldots, D_j x, \ldots, D_i b_m, \ldots,$$

$$\ldots, D_i b_l, \ldots, D_j b_m, \ldots, \qquad \ldots, D_j b_l, \ldots, D_i b_m, \ldots,$$

$$\ldots, D_i D_j x, \ldots, \qquad \ldots, D_i D_j b_l, \ldots,$$

其中省略号表示其他参数的列表 b_{k+1}、.....、b_n，并在任意位置截开。可以看出，交换 i 和 j后，前 8 种情形彼此一一对应。最后 2 种情形在交换 i 和 j 时保持不变，因为$D_iD_j = D_jD_i$。因此，(4.1) 等于 (4.2)。□

4.1. 我们相关论文的结果。在我们相关论文中， [46] 已经证明，对于当前这类一般算子 P （事实上，对于标量符号的更一般假设），渐近展开的存在性成立，并给出了 $I_k(P)$ 的一个公式。然而，该公式并不显式。

与 [46], 类似，此公式被表述为定义 $I_k(P)$，适用于所有形如 (1.2) 的 P，其中 x 是自伴且可逆的。如果 P 也自伴，那么 $I_k(P)$ 的此定义与引言中的定义一致（见下文定理 4.7）。

定义 4.2。对于 $s \in \mathbb{R}^d$，我们定义

$$V(s) := \sum_{i=1}^{d} s_i A_i,$$
$$A_i := 2\lambda_l(x) D_i + \lambda_l(a_i), \quad 1 \le i \le d,$$

作为线性算子 $C^\infty(\mathbb{T}^d_\theta) \to L_2(\mathbb{T}^d_\theta)$，其（稠密地）作用于 $L_2(\mathbb{T}^d_\theta)$。

由于 x 是正且可逆的，对于每个 $z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_-$.， $x|s|^2 + z \in C^\infty(\mathbb{T}^d_\theta)$ 在 $L_\infty(\mathbb{T}^d_\theta)$ 中可逆。由于 $C^\infty(\mathbb{T}^d_\theta)$ 在全纯函数演算下稳定，我们有 $(x|s|^2 + z)^{-1} \in C^\infty(\mathbb{T}^d_\theta)$。

定义 4.3. 设 $\mathscr{A} \subseteq \mathbb{N}.$。对于每个 $z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_-$ 和每个 $s \in \mathbb{R}^d$，令 $f_0^{\mathscr{A}}(s,z) := 1$ 且

$$f_m^{\mathscr{A}}(s,z) := W_j^{\mathscr{A}}(s)\Big(\frac{1}{x|s|^2 + z} f_{m-1}^{\mathscr{A}}(s,z)\Big), \quad m \ge 1,$$

其中（参见 (3.5)）

$$W_j^{\mathscr{A}}(s) := \begin{cases} V(s) & (j \in \mathscr{A}); \\ P & (j \notin \mathscr{A}). \end{cases} \tag{4.3}$$

定义 4.4. 对于每个 $z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_-$、每个 $s \in \mathbb{R}^d$ 和每个 $k \in \mathbb{Z}_+$，我们定义

$$\operatorname{corr}_k(s,z) := (x|s|^2 + z)^{-1} \sum_{\frac{k}{2} \le m \le k} (-1)^m \sum_{\substack{\mathscr{A} \subseteq \{1,\cdots,m\} \\ |\mathscr{A}| = 2m-k}} f_m^{\mathscr{A}}(s,z).$$

定义 4.5. 对于每个 $s \in \mathbb{R}^d$ 和每个 $k \in \mathbb{Z}_+$，我们定义

$$\operatorname{Corr}_k(s) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{corr}_k(s, i\lambda) e^{i\lambda}\, d\lambda.$$

此处及本文其余部分，$\int_{-\infty}^{\infty} := \lim_{N\to\infty} \int_{-N}^{N}$。在上述情形中，极限是相对于弱算子拓扑而言的。 $\int_{-\infty}^{\infty}$ 与勒贝格积分 $\int_{\mathbb{R}}$ 之间的区别仅在 $k = 0$ 的情形下才相关。

定义4.6。对于每个 $k \in \mathbb{Z}_+$，我们定义

$$I_k(P) := \int_{\mathbb{R}^d} \operatorname{Corr}_k(s)\, ds,$$

为 L_∞（$\mathbb{T}^d_\theta$）中的弱积分。

[46]中的定理 1.2 断言如下。

定理 4.7。若 P 是作用于具有$(\mathbb{T}^d_\theta)$ 形式的 L_2中的自伴算子，其中 x 正且可逆，则 (1.1) 成立，其中 $\{I_k(P)\}_{k\ge 0}$如记号 *4.6* 所示，并且对所有 $k \ge 0$， $I_k(P) \in C^\infty(\mathbb{T}^d_\theta)$。

在接下来的三节中，我们将把上述定义改写为 $I_k(P)$ 的可计算公式，从而证明主定理。

5. Recursion at the level of symbols

回忆一下，$\mathcal{X} := \operatorname{span}\{b\mathbf{D}^\alpha \mid b \in C^\infty(\mathbb{T}^d_\theta)\ \alpha \in \mathbb{Z}^d_+\}$，这是一个自由的 $C^\infty(\mathbb{T}^d_\theta)$-模。类似地，设 $X := \{\lambda_l(b)D^\alpha :\ C^\infty(\mathbb{T}^d_\theta) \to C^\infty(\mathbb{T}^d_\theta) \mid b \in C^\infty(\mathbb{T}^d_\theta)\ \alpha \in \mathbb{Z}^d_+\}$ 为由算子 $D^\alpha = D_1^{\alpha_1}\cdots D_d^{\alpha_d}$, $\alpha \in \mathbb{Z}^d_+$生成的$C^\infty(\mathbb{T}^d_\theta)$-模，这里仅将它们视为从 $C^\infty(\mathbb{T}^d_\theta)$ 到 $C^\infty(\mathbb{T}^d_\theta)$ 的线性函数。我们通过线性延拓定义一个 $C^\infty(\mathbb{T}^d_\theta)$-模同态 $\pi : \mathcal{X} \to X$

$$\pi(b\mathbf{D}^\alpha) := \lambda_l(b)D^\alpha. \tag{5.1}$$

固定一个正可逆 $x \in C^\infty(\mathbb{T}^d_\theta)$。对于每个 $m \in \mathbb{N}$、$s \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ 和 $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$，我们定义多重线性映射 $S^m_{s,\,z} : \mathcal{X}^{\times m} \to C^\infty(\mathbb{T}^d_\theta)$，如下：

$$S^m_{s,z}(\mathbf{B}_1,\dots,\mathbf{B}_m) := \\ (-1)^m|s|^{2m}\frac{1}{x|s|^2+z}\pi(\mathbf{B}_1)\Big(\frac{1}{x|s|^2+z}\cdots\pi(\mathbf{B}_m)\Big(\frac{1}{x|s|^2+z}\Big)\cdots\Big), \tag{5.2}$$

对所有 $\mathbf{B}_1$，……，$\mathbf{B}_m \in \mathcal{X}$。上述表达式定义良好，因为 $(x|s|^2+z)^{-1} \in C^\infty(\mathbb{T}^d_\theta)$，且 X 中的元素保持 $C^\infty(\mathbb{T}^d_\theta)$。在下一小节中，我们将证明 $S^m_{s,\,z}$ 满足与 $\mathbf{T}^{x\ m}_{f}$ 相同的递归性质，这由定义 3.1（即 (3.1) 和 (3.2)）给出。对于 $b_i \in C^\infty(\mathbb{T}^d_\theta)$，将 $S^n_{s,\,z}(b_1,\dots,b_n)$ 与 $\mathbf{T}^{x\ n}_{f}(b_1,\dots,b_n)$ 联系起来（即联系相应递归的两个基础情形）需要进行一些复杂分析，这将在第 6 节中完成。

5.1. 的递归公式$S_{s,\,z}$。

以下两个引理说明，如何将形如 $S^m_{s,\,z}(\mathbf{B}_1,\dots,\mathbf{B}_m)$（其中 $\mathbf{B}_i \in \mathcal{X}$）的表达式改写为形如 $S^n_{s,\,z}(b_1,\dots,b_n)$ 的表达式，其中 $b_i \in C^\infty(\mathbb{T}^d_\theta)$ 且 $n \geq m$。

引理 5.1。设 k、$m \in \mathbb{N}$、$k < m$、$\mathbf{B}_1$、……、$\mathbf{B}_k \in \mathcal{X}$、$b_{k+1}$、……、$b_m \in C^\infty(\mathbb{T}^d_\theta) \subseteq \mathcal{X}$ 以及 $i \in \{1,\dots,d\}$。对于所有 $s \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ 和 $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$，有

$$\begin{aligned} S^m_{s,z}(\mathbf{B}_1,\dots,\mathbf{B}_{k-1},\mathbf{B}_k\mathbf{D}_i,b_{k+1},\dots,b_m) &= S^{m+1}_{s,z}(\mathbf{B}_1,\dots,\mathbf{B}_k,D_ix,b_{k+1},\dots,b_m) \\ &\quad + S^m_{s,z}(\mathbf{B}_1,\dots,\mathbf{B}_k,D_ib_{k+1},b_{k+2},\dots,b_m) \\ &\quad + S^m_{s,z}(\mathbf{B}_1,\dots,\mathbf{B}_k,b_{k+1}\mathbf{D}_i,b_{k+2},\dots,b_m). \end{aligned}$$

证明。首先注意到，由 $D_i(u\cdot u^{-1}) = 0$ 可得

$$D_i(u^{-1}) = -u^{-1}\cdot D_iu\cdot u^{-1}.$$

由此，我们得到

$$D_i\Big(\frac{1}{x|s|^2+z}\Big) = -|s|^2\frac{1}{x|s|^2+z}(D_ix)\frac{1}{x|s|^2+z}.$$

由后一个等式和莱布尼茨法则可得，对于任意 $k\in\mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned}
&\pi(\mathbf{D}_i)\Big(\frac{1}{x|s|^2+z}b_{k+1}\frac{1}{x|s|^2+z}\cdots b_m\frac{1}{x|s|^2+z}\Big)\\
&\quad=D_i\Big(\frac{1}{x|s|^2+z}b_{k+1}\frac{1}{x|s|^2+z}\cdots b_m\frac{1}{x|s|^2+z}\Big)\\
&\quad=-|s|^2\frac{1}{x|s|^2+z}D_ix\frac{1}{x|s|^2+z}b_{k+1}\frac{1}{x|s|^2+z}\cdots b_n\frac{1}{x|s|^2+z}\\
&\qquad+\frac{1}{x|s|^2+z}D_ib_{k+1}\frac{1}{x|s|^2+z}b_{k+2}\frac{1}{x|s|^2+z}\cdots b_n\frac{1}{x|s|^2+z}\\
&\qquad+\frac{1}{x|s|^2+z}b_{k+1}D_i\Big(\frac{1}{x|s|^2+z}b_{k+2}\frac{1}{x|s|^2+z}\cdots b_n\frac{1}{x|s|^2+z}\Big)\\
&\quad=-|s|^2\frac{1}{x|s|^2+z}D_ix\frac{1}{x|s|^2+z}b_{k+1}\frac{1}{x|s|^2+z}\cdots b_n\frac{1}{x|s|^2+z}\\
&\qquad+\frac{1}{x|s|^2+z}D_ib_{k+1}\frac{1}{x|s|^2+z}b_{k+2}\frac{1}{x|s|^2+z}\cdots b_n\frac{1}{x|s|^2+z}\\
&\qquad+\frac{1}{x|s|^2+z}\pi(b_{k+1}\mathbf{D}_i)\Big(\frac{1}{x|s|^2+z}b_{k+2}\frac{1}{x|s|^2+z}\cdots b_n\frac{1}{x|s|^2+z}\Big).
\end{aligned}$$

将等式两边同时乘以 $(-1)^{m-k}|s|^{2(m-k)}$ 后，上述等式变为

$$\begin{aligned}
\pi(\mathbf{D}_i)\Big(S^{m-k}_{s,z}(b_{k+1},\dots,b_m)\Big)=&S^{m-k+1}_{s,z}(D_ix,b_{k+1},\dots,b_m)\\
&+S^{m-k}_{s,z}(D_ib_{k+1},b_{k+2},\dots,b_m)\\
&+S^{m-k}_{s,z}(b_{k+1}\mathbf{D}_i,b_{k+2},\dots,b_m).
\end{aligned}\tag{5.3}$$

As

$$\begin{aligned}
&S^m_{s,z}(\mathbf{B}_1,\dots,\mathbf{B}_k,\mathbf{B}_{k+1},\dots,\mathbf{B}_m)\\
&=(-1)^k|s|^{2k}\frac{1}{x|s|^2+z}\pi(\mathbf{B}_1)\Big(\cdots\frac{1}{x|s|^2+z}\pi(\mathbf{B}_k)\Big(S^{m-k}_{s,z}(\mathbf{B}_{k+1},\dots,\mathbf{B}_m)\Big)\cdots\Big),
\end{aligned}$$

由 (5.3) 可得该引理。

□

引理 5.2. 设 $m\in\mathbb{N}$, $\mathbf{B}_1,\dots,\mathbf{B}_m\in\mathcal{X}$ 和 $i\in\{1,\dots,d\}$。对所有 $s\in\mathbb{R}^d\setminus\{0\}$ 和 $z\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_-$，有

$$S^m_{s,z}(\mathbf{B}_1,\dots,\mathbf{B}_{m-1},\mathbf{B}_m\mathbf{D}_i):=S^{m+1}_{s,z}(\mathbf{B}_1,\dots,\mathbf{B}_m,D_ix).$$

证明。这比引理 5.1 的证明更容易。 □

6. Analytical results on multiple operator integrals

本节的目的是证明以下定理。

定理 6.1。设 $x\in C^\infty(\mathbb{T}^d_\theta)$ 为正且可逆。对于任意的 $n\in\mathbb{N}$,$b_1,\dots,b_n\in C^\infty(\mathbb{T}^d_\theta)$, 以及任意满足 $2n-k\geq 0$ 的 $k\in 2\mathbb{Z}_+$，我们有

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^d}\Big(\int_{-\infty}^{\infty}|s|^{-k}S^n_{s,i\lambda}(b_1,\dots,b_n)e^{i\lambda}d\lambda\Big)ds=(-1)^{\frac{k}{2}}\pi^{\frac{d}{2}}\cdot T^x_{F^{[n]}_{k,d}}(b_1,\dots,b_n),$$

其中 $F_{k,d}$ 是 $\alpha\mapsto\alpha_-^{-\frac{d}{2}}$ 的任意一个 $\frac{k}{2}^{th}$ 原函数。

对于任意开区间 $I \subseteq \mathbb{R}$ 以及任意 $n \in \mathbb{N}$，我们将使用空间

$$\dot{W}^{n,2}(I) := \{f \in \mathcal{S}'(I) : \ f^{(n)} \in L_2(I)\}$$

（其中 $\mathcal{S}'(I)$ 表示 I 上的缓增分布），并配备相应的半范数

$$\|f\|_{\dot{W}^{n,2}(I)} := \|f^{(n)}\|_{L_2(I)}.$$

稍微滥用一下记号，我们用 $(\dot{W}^{n,\,2} \cap \dot{W}^{n+1,\,2})(I)$ 表示 $\dot{W}^{n,\,2}(I)$ 中函数的等价类空间，其中等价关系是模去次数至多为 $n-1$ 的多项式。我们省略“等价类”的记号。我们在 $(\dot{W}^{n,\,2} \cap \dot{W}^{n+1,\,2})(I)$ 上赋予范数

$$\|f\|_{(\dot{W}^{n,2}\cap\dot{W}^{n+1,2})(I)} := \|f^{(n)}\|_{L_2(I)} + \|f^{(n+1)}\|_{L_2(I)}.$$

通过标准方法可以证明，空间 $(\dot{W}^{n,\,2} \cap \dot{W}^{n+1,\,2})(I)$ 是一个巴拿赫空间。还要注意，任意 $f \in \dot{W}^{n,\,2}(I)$ 都是连续函数，因为 $f^{(n)}$在局部可积。因此，$(\dot{W}^{n,\,2} \cap \dot{W}^{n+1,\,2})(I)$ 中任一等价类的代表元都是连续函数。

引理 6.2. 设 $x \in L_\infty(\mathbb{T}^d_\theta)$ 为自伴算子，且 I 为包含 $\operatorname{spec}(x)$ 的开区间。设 f 为定义在 $\mathbb{R}$ 上的施瓦茨函数。对于所有 $b_1, \dots, b_n \in L_\infty(\mathbb{T}^d_\theta)$，有

$$\|T^x_{f^{[n]}}(b_1, \cdots, b_n)\|_\infty \le c_{n,x,I}\|f\|_{(\dot{W}^{n,2}\cap\dot{W}^{n+1,2})(I)} \prod_{l=1}^n \|b_l\|_\infty.$$

证明。设 $J = [\inf \operatorname{spec}(x), \sup \operatorname{spec}(x)] \subseteq I$. 设 ϕ 为支撑于 I 的光滑函数，满足 ϕ 在 J. 上等于 1。我们有

$$f^{[n]}(\alpha_0, \cdots, \alpha_n) = \int_{S^n} f^{(n)}\Big(\sum_{j=0}^n \lambda_j \alpha_j\Big) d\lambda,$$

其中，积分是相对于单纯形$S^n = \{\lambda \in \mathbb{R}^{n+1}_{\ge 0} : \sum_{j=0}^n \lambda_j = 1\}$. 上的标准测度进行的。若 $\alpha_0, \cdots, \alpha_n \in \operatorname{spec}(x)$, 则 $\sum_{j=0}^n \lambda_j \alpha_j \in J$. 因此，记施瓦茨函数 $f^{(n)}\phi$ 的傅里叶变换为$\widehat{\ }(f^{(n)}\phi)$，我们有

$$\begin{aligned} f^{[n]}(\alpha_0, \cdots, \alpha_n) &= \int_{S^n} (f^{(n)}\phi)\Big(\sum_{j=0}^n \lambda_j \alpha_j\Big) d\lambda \\ &= \int_{S^n}\int_{\mathbb{R}} \widehat{(f^{(n)}\phi)}(t) e^{it\lambda_0\alpha_0}\cdots e^{it\lambda_n\alpha_n} dt\, d\lambda, \end{aligned}$$

每当 $\alpha_0, \ \cdots, \ \alpha_n \in \operatorname{spec}(x)$。因此,

$$\|T^x_{f^{[n]}}(b_1, \cdots, b_n)\|_\infty \le \frac{1}{n!}\|\widehat{(f^{(n)}\phi)}\|_{L_1(\mathbb{R})} \prod_{l=1}^n \|b_l\|_\infty.$$

注意,

$$\|\widehat{(f^{(n)}\phi)}\|_{L_1(\mathbb{R})} \le \sqrt{2}\big(\|f^{(n)}\phi\|_{L_2(I)} + \|(f^{(n)}\phi)'\|_{L_2(I)}\big).$$

根据莱布尼茨法则，我们可得

$$\|\widehat{(f^{(n)}\phi)}\|_{L_1(\mathbb{R})} \le \|f^{(n)}\|_{L_2(I)}(\|\phi\|_\infty + \|\phi'\|_\infty) + \|f^{(n+1)}\|_{L_2(I)}\|\phi\|_\infty.$$

由于 ϕ 仅取决于 x 和 I，结论得证。 □

6.1. **多重算子积分符号上的积分**。在本小节中，我们证明以下一般结果。我们用$(\sigma_t f)(\alpha) := f(\alpha/t)$表示伸缩算子。

定理 6.3。 设 $x \in L_\infty(\mathbb{T}^d_\theta)$ 为正且可逆。设 f 是定义在 $\mathbb{R}.$ 上的施瓦茨函数。设 $k \in 2\mathbb{Z}_+$ 和 $n \in \mathbb{N}$ 满足 $2n \geq k.$。对于所有 $b_1, \ldots, b_n \in L_\infty(\mathbb{T}^d_\theta)$，有

$$\int_{\mathbb{R}^d} |s|^{-k} T^x_{(\sigma_{|s|^{-2}} f)^{[n]}}(b_1, \ldots, b_n)\, ds = \int_{\mathbb{R}^d} f^{(\frac{k}{2})}(|s|^2) ds \cdot T^x_{F^{[n]}_{k,d}}(b_1, \ldots, b_n),$$

其中，左端是取值于 $L_\infty(\mathbb{T}^d_\theta)$的 *Bochner* 积分，而 $F_{k,d}$ 是 $\alpha \mapsto \alpha^{-\frac{d}{2}}$在$(0,\infty)$上的任意一个 $\frac{k}{2}^{th}$原函数（参见注*3.4*）。

引理 6.4。 设 $k \in 2\mathbb{Z}_+.$。设 f 是定义在 $\mathbb{R}$ 上的施瓦茨函数，并设 ϕ 是定义在 $\mathbb{R}^d$ 上的施瓦茨函数，它在0的某个邻域上等于 *1*。存在一个 $\frac{k}{2}^{th}$阶原函数 $F_{k,d}$，其导数为 $\alpha \mapsto \alpha^{-\frac{d}{2}}$，使得对所有 $\alpha > 0$,

$$\int_{\mathbb{R}^d} |s|^{-k} \Big(f(\alpha|s|^2) - \sum_{j=0}^{\frac{k}{2}-1} \frac{f^{(j)}(0)}{j!} (\alpha|s|^2)^j \cdot \phi(s) \Big) ds = \int_{\mathbb{R}^d} f^{(\frac{k}{2})}(|s|^2) ds \cdot F_{k,d}(\alpha).$$

证明。 左侧积分收敛，因为如 $s \to 0$ 所示，括号中的表达式是 $\mathcal{O}(|s|^k)$。同样，对被积函数关于 α 求导后，该积分也收敛。记左侧为 $G(\alpha)$，则有

$$G^{(\frac{k}{2})}(\alpha) = \int_{\mathbb{R}^d} f^{(\frac{k}{2})}(\alpha|s|^2) ds = \alpha^{-\frac{d}{2}} \int_{\mathbb{R}^d} f^{(\frac{k}{2})}(|s|^2) ds.$$

积分 $\frac{k}{2}$ 次后，即完成证明。 □

我们有如下简单而强大的命题。

命题 6.5. 设 $n \in \mathbb{N}$，且 $x \in L_\infty(\mathbb{T}^d_\theta)$ 为自伴。设 I 是包含 x 的谱的一个开区间。设 $s \mapsto h_s$ $(s \in \mathbb{R}^d)$ 是一个取值于 $(\dot{W}^{n,2} \cap \dot{W}^{n+1,2})(I)$ 的 *Bochner* 可积映射。记其 *Bochner* 积分为

$$h = \int_{\mathbb{R}^d} h_s\, ds.$$

则 $h \in (\dot{W}^{n,2} \cap \dot{W}^{n+1,2})(I)$ 且

$$\int_{\mathbb{R}^d} T^x_{h_s^{[n]}}(b_1, \ldots, b_n)\, ds = T^x_{h^{[n]}}(b_1, \ldots, b_n),$$

其中左侧是一个取值于 $L_\infty(\mathbb{T}^d_\theta)$ 的 *Bochner* 积分。

证明。 根据引理 6.2，映射

$$T : (\dot{W}^{n,2} \cap \dot{W}^{n+1,2})(I) \to L_\infty(\mathbb{T}^d_\theta), \qquad f \mapsto T^x_{f^{[n]}}(b_1, \ldots, b_n)$$

是巴拿赫空间之间的连续线性映射。因此， $s \mapsto T(h_s)$ 在 $\mathbb{R}^d$ 上博赫纳可积，且 $\int_{\mathbb{R}^d} T(h_s) ds = T(\int_{\mathbb{R}^d} h_s ds) = T(h)$。□

在上述命题中起到 h_s 作用的函数为 $h_s = |s|^{-k}(\sigma_{|s|^{-2}} f)|_I$，其中 $(\sigma_t f)(\alpha) := f(\alpha/t)$ 表示伸缩算子。

引理 6.6。 设 f 是定义在 $\mathbb{R}.$ 上的施瓦茨函数。设 I 是一个与 0 分离的有界开区间。如果 $n \in \mathbb{N}$ 和 $k \in \mathbb{Z}_+$ 满足 $2n \geq k$，则映射

$$s \mapsto |s|^{-k}(\sigma_{|s|^{-2}} f)|_I, \quad 0 \neq s \in \mathbb{R}^d.$$

是博赫纳可积的 $(\dot{W}^{n,2} \cap \dot{W}^{n+1,2})(I)$。

证明。 显然，

$$(|s|^{-k}\sigma_{|s|^{-2}} f)^{(n)} = |s|^{2n-k}\sigma_{|s|^{-2}} f^{(n)},$$
$$(|s|^{-k}\sigma_{|s|^{-2}} f)^{(n+1)} = |s|^{2n+2-k}\sigma_{|s|^{-2}} f^{(n+1)}.$$

这些关于 s 的函数是从 $\mathbb{R}^d\backslash\{0\}$ 到 $L_2(\mathbb{R})$的连续函数。因此，该映射$s \mapsto |s|^{-k}\sigma_{|s|^{-2}} f$ 是从 $\mathbb{R}^d\backslash\{0\}$ 到 $(\dot{W}^{n,2} \cap \dot{W}^{n+1,2})(\mathbb{R})$的连续映射。因此，映射 $s \mapsto |s|^{-k}(\sigma_{|s|^{-2}} f)|_I$是从 $\mathbb{R}^d\backslash\{0\}$到 $(\dot{W}^{n,2} \cap \dot{W}^{n+1,2})(I)$的连续映射，因此是博赫纳可测的。

关于绝对可积性，我们有

$$\|(|s|^{-k}\sigma_{|s|^{-2}} f)^{(n)}\|_{L_2(I)} = |s|^{2n-k-1}\|f^{(n)}\|_{L_2(|s|^2 I)},$$
$$\|(|s|^{-k}\sigma_{|s|^{-2}} f)^{(n+1)}\|_{L_2(I)} = |s|^{2n-k+1}\|f^{(n+1)}\|_{L_2(|s|^2 I)}.$$

因此，

$$\||s|^{-k}\sigma_{|s|^{-2}} f\|_{(\dot{W}^{n,2}\cap\dot{W}^{n+1,2})(I)} \leq (|s|^{2n-k-1} + |s|^{2n-k+1})\|f\|_{(\dot{W}^{n,2}\cap\dot{W}^{n+1,2})(|s|^2 I)}.$$

由于 I 远离 0，且 f 是 Schwartz 函数，因此后一个表达式随着 $|s| \to \infty$趋于无穷而快速衰减。此外，由于 $2n - k \geq 0$，因子 $(|s|^{2n-k-1} + |s|^{2n-k+1})$ 在 $|s| \to 0$时为$\mathcal{O}(|s|^{-1})$阶。由于 I有界，且 $f_{(n)}\, f^{(n+1)}$在 0 处连续，因此因子$\|f\|_{(\dot{W}^{n,2}\cap\dot{W}^{n+1,2})(|s|^2 I)}$在 $|s| \to 0$时为 $\mathcal{O}(|s|)$阶。因此，映射$s \to |s|^{-k}(\sigma_{|s|^{-2}} f)|_I$关于 $(\dot{W}^{n,2} \cap \dot{W}^{n+1,2})(I)$绝对可积，断言得证。□

以下引理给出了 $h = \int_{\mathbb{R}^d} h_s\, ds$ 的一个简化表达式。

引理 6.7。 设 f 是定义在 $\mathbb{R}.$ 上的施瓦茨函数。设 $n \in \mathbb{N}$ 和 $k \in 2\mathbb{Z}_+$，使得 $2n \geq k.$。设 $I \subseteq (0, \infty)$ 为一个与 0 分离的有界开区间。存在 $\frac{k}{2}^{th}$ 阶原函数 $F_{k,d}$，它是 $\alpha \mapsto \alpha^{-\frac{d}{2}}$ 的原函数，使得

$$\int_{\mathbb{R}^d} |s|^{-k}(\sigma_{|s|^{-2}} f)|_I\, ds = \int_{\mathbb{R}^d} f^{(\frac{k}{2})}(|s|^2) ds \cdot F_{k,d}|_I,$$

其中左侧是一个取值于 $(\dot{W}^{n,2} \cap \dot{W}^{n+1,2})(I)$ 的 *Bochner* 积分，而右侧同样被解释为 $(\dot{W}^{n,2} \cap \dot{W}^{n+1,2})(I)$ 的一个元素。

证明。 注意，$(\dot{W}^{n,2} \cap \dot{W}^{n+1,2})(I)$ 的元素并不严格是函数，而是模去次数为 $< n.$ 的多项式意义下的函数。对于每个 $s \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$，$|s|^{-k}(\sigma_{|s|^{-2}} f)|_I \in (\dot{W}^{n,2} \cap \dot{W}^{n+1,2})(I)$ 的一个特定代表元由如下函数给出

$$\tilde{h}_s : I \to \mathbb{R}, \quad \tilde{h}_s(\alpha) := |s|^{-k}\Big(f(\alpha|s|^2) - \sum_{j=0}^{\frac{k}{2}-1} \frac{f^{(j)}(0)}{j!}(\alpha|s|^2)^j \cdot \phi(s)\Big).$$

这里，ϕ 是定义在 $\mathbb{R}^d$ 上的施瓦茨函数，并且在 0 的某个邻域内等于 1。对于给定的 $\alpha \in I$，我们有

$$\big|\tilde{h}_s(\alpha)\big| = |s|^{-k} \cdot \mathcal{O}((|s|^2)^{\frac{k}{2}}) = \mathcal{O}(|s|^0).$$

˜因此，对于每个 $\alpha \in I$，(α) $s \mapsto h_s$都是可积的，$s \mapsto \tilde{h}_s^{(j)}$(α) $j \le n$也同样如此。回顾一下，根据引理 6.6，$s \mapsto |s|^{-k}(\sigma_{|s|^{-2}} f)|_I$ 是博赫纳可积的。根据 ($\dot{W}^{n,}$ $^2 \cap \dot{W}^{n+1,2}$)(*I*) 的定义，并随后对 $\alpha \mapsto \int \tilde{h}_s^{(j)}(\alpha) ds$使用控制收敛，我们得到对几乎所有的 $\alpha \in I$,

$$\Big(\int_{\mathbb{R}^d} |s|^{-k}(\sigma_{|s|^{-2}} f)|_I \, ds\Big)^{(n)}(\alpha) = \int_{\mathbb{R}^d} \tilde{h}_s^{(n)}(\alpha)\, ds = \frac{d^n}{d\alpha^n}\Big(\int_{\mathbb{R}^d} \tilde{h}_s(\alpha)\, ds\Big).$$

因此，$\alpha \mapsto \int \tilde{h}_s(\alpha) ds$是 $\int |s|^{-k}(\sigma_{|s|^{-2}} f)|_I ds$的一个代表。由引理 6.4 可得

$$\int_{\mathbb{R}^d} \tilde{h}_s(\alpha)\, ds = \int_{\mathbb{R}^d} f^{(\frac{k}{2})}(|s|^2) ds \cdot F_{k,d}(\alpha) \qquad (\alpha \in I),$$

由此证明完成。 □

定理 *6.3* 的证明。令 $I = (\,_1{}_2\inf \operatorname{spec}(x),\ 2 \sup \operatorname{spec}(x))$ 且 $h_s = |s|^{-k}(\sigma_{|s|^{-2}} f)|_I$, $s \in \mathbb{R}^d$. 。由引理 6.6，命题 6.5 中的条件对映射$s \mapsto h_s$. 均成立。利用命题 6.5（以及 $g \mapsto T^x_{g^{[n]}}$可经由 $g \mapsto g|_I$分解这一事实），可得

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^d} |s|^{-k} T^x_{(\sigma_{|s|^{-2}} f)^{[n]}}(b_1, \dots, b_n)\, ds &= \int_{\mathbb{R}^d} T^x_{h_s^{[n]}}(b_1, \dots, b_n)\, ds \\ &= T^x_{h^{[n]}}(b_1, \dots, b_n),\end{aligned}$$

其中

$$h = \int_{\mathbb{R}^d} h_s\, ds = \int_{\mathbb{R}^d} |s|^{-k}(\sigma_{|s|^{-2}} f)|_I \, ds.$$

由引理 6.7，得

$$h = \int_{\mathbb{R}^d} f^{(\frac{k}{2})}(|s|^2) ds \cdot F_{k,d}|_I,$$

从而完成证明。 □

6.2. **联系递归基例的积分公式**。现在可以证明第 6 节的主定理。

定理 *6.1* 的证明。 根据 $S^n_{s,z}$ 的定义（等式 (5.2)），对于 $s \neq 0$,

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |s|^{-k} S^n_{s,i\lambda}(b_1, \dots, b_n) e^{i\lambda}\, d\lambda \\ &= (-1)^n |s|^{2n-k} \cdot \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x|s|^2 + i\lambda} b_1 \frac{1}{x|s|^2 + i\lambda} \cdots b_n \frac{1}{x|s|^2 + i\lambda} e^{i\lambda}\, d\lambda.\end{aligned}$$

接下来,

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x|s|^2 + i\lambda} b_1 \frac{1}{x|s|^2 + i\lambda} \cdots b_n \frac{1}{x|s|^2 + i\lambda} e^{i\lambda} d\lambda = T^x_{\Psi_s}(b_1, \dots, b_n),$$

其中

$$\Psi_s(\alpha_0, \dots, \alpha_n) := \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\alpha_0|s|^2 + i\lambda} \frac{1}{\alpha_1|s|^2 + i\lambda} \cdots \frac{1}{\alpha_n|s|^2 + i\lambda} e^{i\lambda} d\lambda,$$

对于所有 $\alpha_0, \dots, \alpha_n > 0$。令 f为任意施瓦茨函数，它在 $(0, \infty) \subseteq \mathbb{R}$ 上的定义为

$$f(\alpha) := \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\alpha + i\lambda} e^{i\lambda} d\lambda = e^{-\alpha}, \quad \alpha > 0.$$

利用膨胀变换 $(\sigma_{|s|^{-2}}f)(\alpha) = f(|s|^2\alpha)$ 并计算$\alpha \mapsto \frac{1}{\alpha|s|^2+i\lambda}$, 的差商，我们得到

$$\Psi_s|_{(0,\infty)^{n+1}} = (-1)^n|s|^{-2n}(\sigma_{|s|^{-2}}f)^{[n]}|_{(0,\infty)^{n+1}}.$$

因此,

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|s|^{-k}S^n_{s,i\lambda}(b_1,\dots,b_n)e^{i\lambda}d\lambda = |s|^{-k}T^x_{(\sigma_{|s|^{-2}}f)^{[n]}}(b_1,\dots,b_n). \tag{6.1}$$

根据定理 6.3 以及这一事实,

$$\int_{\mathbb{R}^d} f^{(\frac{k}{2})}(|s|^2)ds = (-1)^{\frac{k}{2}}\int_{\mathbb{R}^d} e^{-|s|^2}\,ds = (-1)^{\frac{k}{2}}\pi^{\frac{d}{2}},$$

结论得证。 □

7. Proof of the main theorem

我们可以将上一节概括如下。

推论 7.1. 设 $x \in C^\infty(\mathbb{T}^d_\theta)$ 正且可逆。对于所有 $m \in \mathbb{N}$、$\mathbf{B}_1, \dots, \mathbf{B}_m \in \mathcal{X}$以及满足 $2m \geq k$ 的 $k \in 2\mathbb{Z}_+$，我们有

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^d}\Big(\int_{-\infty}^{\infty}|s|^{-k}S^m_{s,i\lambda}(\mathbf{B}_1,\dots,\mathbf{B}_m)e^{i\lambda}d\lambda\Big)ds = (-1)^{\frac{k}{2}}\pi^{\frac{d}{2}}\cdot\mathbf{T}^{x,m}_{F_{k,d}}(\mathbf{B}_1,\dots,\mathbf{B}_m),$$

其中 $F_{k,d}$是 $\alpha \mapsto \alpha^{-\frac{d}{2}}$ 的任意一个 $\frac{k}{2}^{th}$原函数。

证明. 这由$\mathbf{T}^{x}_{f}{}^{m}$，（定义 3.1）与 $S^m_{s},_z$ （引理 5.1 和 5.2）的递归性质相匹配，以及基础情形定理 6.1 得出。□

上述推论是证明主定理所需的最后一个要素。

定理 *3.3* 的证明. 根据第 4.1 节中给出的 $I_k(P)$ 的定义，我们有

$$\begin{aligned}I_k(P) =& \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^d}\Big(\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{\frac{k}{2}\leq m\leq k}(-1)^m\sum_{\substack{\mathscr{A}\subseteq\{1,\dots,m\}\\|\mathscr{A}|=2m-k}}\frac{1}{x|s|^2+z}\\ &\cdot W_1^{\mathscr{A}}(s)\Big(\frac{1}{x|s|^2+z}\cdots W_m^{\mathscr{A}}(s)\Big(\frac{1}{x|s|^2+z}\Big)\cdots\Big)e^{i\lambda}\,d\lambda\Big)ds.\end{aligned}$$

利用 $S^m_{s},_z$ 的定义（见 (5.2)），并引入元素 $\mathbf{W}^{\mathscr{A}}_j(s) \in \mathcal{X}$，使得 $\pi(\mathbf{W}^{\mathscr{A}}_j(s)) = W^{\mathscr{A}}_j(s)$，我们将后一个表达式改写为

$$I_k(P) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^d}\Big(\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{\frac{k}{2}\leq m\leq k}\sum_{\substack{\mathscr{A}\subseteq\{1,\dots,m\}\\|\mathscr{A}|=2m-k}}\frac{1}{|s|^{2m}}S^m_{s,i\lambda}(\mathbf{W}^{\mathscr{A}}_1(s),\dots,\mathbf{W}^{\mathscr{A}}_m(s))e^{i\lambda}\,d\lambda\Big)ds.$$

将 (3.5) 中的$\mathbf{W}^{\mathscr{A}}_j(s)$表示为$\mathbf{W}^{\mathscr{A},\iota}_j$ 的形式（另见 (4.3)），我们得到

$$S^m_{s,z}(\mathbf{W}^{\mathscr{A}}_1(s),\dots,\mathbf{W}^{\mathscr{A}}_m(s)) = \sum_{\iota:\mathscr{A}\to\{1,\dots,d\}}\Big(\prod_{j\in\mathscr{A}}s_{\iota(j)}\Big)S^m_{s,z}(\mathbf{W}^{\mathscr{A},\iota}_1,\dots,\mathbf{W}^{\mathscr{A},\iota}_m).$$

因此，

$$I_k(P) = \frac{1}{2\pi} \sum_{\frac{k}{2}\le m\le k} \sum_{\substack{\mathscr{A}\subseteq\{1,\dots,m\}\\ |\mathscr{A}|=2m-k}} \sum_{\iota:\mathscr{A}\to\{1,\dots,d\}} \int_{\mathbb{R}^d} \Big(\frac{\prod_{j\in\mathscr{A}} s_{\iota(j)}}{|s|^{2m}} \int_{-\infty}^{\infty} S^m_{s,i\lambda}(\mathbf{W}_1^{\mathscr{A},\iota},\dots,\mathbf{W}_m^{\mathscr{A},\iota}) e^{i\lambda}\, d\lambda \Big) ds.$$

由于该映射

$$s \mapsto \int_{-\infty}^{\infty} S^m_{s,i\lambda}(\mathbf{W}_1^{\mathscr{A},\iota},\dots,\mathbf{W}_m^{\mathscr{A},\iota}) e^{i\lambda} d\lambda, \quad s\in\mathbb{R}^d,$$

是 $|s|$, 的函数，我们可以应用一般公式

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{s^n}{|s|^{|n|_1}} g(|s|) ds &= \frac{1}{\mathrm{Vol}(\mathbb{S}^{d-1})} \int_{\mathbb{S}^{d-1}} u^n du \cdot \int_{\mathbb{R}^d} g(|s|) ds \\ &\equiv c_d^{(\iota)} \int_{\mathbb{R}^d} g(|s|) ds, \end{aligned} \tag{7.1}$$

对于满足 $n_j = |\iota^{-1}(\{j\})|$ 的 $n\in\mathbb{Z}_+^d$ ，可得

$$\begin{aligned} I_k(P) = \sum_{\frac{k}{2}\le m\le k} \sum_{\substack{\mathscr{A}\subseteq\{1,\dots,m\}\\ |\mathscr{A}|=2m-k}} \sum_{\iota:\mathscr{A}\to\{1,\dots,d\}} c_d^{(\iota)} \frac{1}{2\pi} \\ \cdot \int_{\mathbb{R}^d} \Big(\int_{-\infty}^{\infty} |s|^{-k} S^m_{s,i\lambda}(\mathbf{W}_1^{\mathscr{A},\iota},\dots,\mathbf{W}_m^{\mathscr{A},\iota}) e^{i\lambda}\, d\lambda \Big) ds. \end{aligned}$$

应用推论 7.1，我们得到主定理。 □

8. The case $k = 2$: 'scalar curvature'

虽然推论 3.6 中的公式可以直接由计算机得出（如附录 A 中所做），但我们将先手工给出一个明确的证明，以展示该算法的简洁性。我们固定 $d\in\mathbb{N}_{\ge 2}$ 和 $F_{2,\,d}$ ，如注 3.4 所示

引理 8.1. 对于任意具有 (1.2) 形式且 x 正可逆的 P ，(3.7) 给出

$$-\pi^{-\frac{d}{2}} I_2(P) = \mathbf{T}^{x,1}_{F_{2,d}}(\mathbf{P}) + \frac{1}{d}\sum_{i=1}^{d} \mathbf{T}^{x,2}_{F_{2,d}}(\mathbf{A}_i,\mathbf{A}_i). \tag{8.1}$$

证明。 在 $k=2$ 的情形下，我们的主定理（定理 3.3）变为

$$I_2(P) = -\sum_{1\le m\le 2} \sum_{\substack{\mathscr{A}\subseteq\{1,\dots,m\}\\ |\mathscr{A}|=2m-2}} \sum_{\iota:\mathscr{A}\to\{1,\dots,d\}} c_d^{(\iota)} \pi^{\frac{d}{2}} \mathbf{T}^{x,m}_{F_{2,d}}(\mathbf{W}_1^{\mathscr{A},\iota},\dots,\mathbf{W}_m^{\mathscr{A},\iota}). \tag{8.2}$$

如果 $m=1$ ，那么 $|\mathscr{A}|=2m-2$ 蕴含 $\mathscr{A}=\emptyset$; 我们将唯一函数ι： $\mathscr{A}\to\{1,\dots,d\}$ 记为 $\iota=\emptyset$。如果 $m=2$ ，那么 $|\mathscr{A}|=2m-2$ 蕴含 $\mathscr{A}=\{1,2\}$; 我们将 ι : $\{1,2\}\to\{1,\dots,d\}$ 与（i, j） =（ι(1) ι(2)）对应起来，其中 i, $j\in\{1,\dots,d\}$。

我们得到

$$\begin{aligned} I_2(P) &= -\, c_d^{(\emptyset)} \pi^{\frac{d}{2}} \mathbf{T}^{x,1}_{F_{2,d}}(\mathbf{W}_1^{\emptyset,\emptyset}) - \sum_{i,j=1}^{d} c_d^{(i,j)} \pi^{\frac{d}{2}} \mathbf{T}^{x,2}_{F_{2,d}}(\mathbf{W}_1^{\mathscr{A},(i,j)}, \mathbf{W}_2^{\mathscr{A},(i,j)}) \\ &= -\, c_d^{(\emptyset)} \pi^{\frac{d}{2}} \mathbf{T}^{x,1}_{F_{2,d}}(\mathbf{P}) - \sum_{i,j=1}^{d} c_d^{(i,j)} \pi^{\frac{d}{2}} \mathbf{T}^{x,2}_{F_{2,d}}(\mathbf{A}_i, \mathbf{A}_j). \end{aligned}$$

注 3.5 给出 $c_d^{(\emptyset)} = \frac{(d-2)!!\ (0+d-2)!!}{d} = 1$ 以及 $c_d^{(i,j)} = \delta_{i,j} \frac{(d-2)!!\ (2+d-2)!!}{d} = \delta_{i,j} \frac{1}{d}$。因此我们得到 (8.1)。□

推论 *3.6* 的证明。 我们利用 (3.6) 和定义 3.1，推导 (8.1) 右侧的第一项。仿照例 3.2，我们得到

$$\begin{aligned} \mathbf{T}^{x,1}_{F_{2,d}}(\mathbf{P}) =& \mathbf{T}^{x,1}_{F_{2,d}}(x \sum_{i=1}^{d} \mathbf{D}_i^2 + \sum_{i=1}^{d} a_i \mathbf{D}_i + a) \\ =& \sum_{i=1}^{d} \Big(\mathbf{T}^{x,2}_{F_{2,d}}(x\mathbf{D}_i, D_i x) + \mathbf{T}^{x,2}_{F_{2,d}}(a_i, D_i x) \Big) + \mathbf{T}^{x,1}_{F_{2,d}}(a) \\ =& \sum_{i=1}^{d} \Big(\mathbf{T}^{x,3}_{F_{2,d}}(x, D_i x, D_i x) + \mathbf{T}^{x,2}_{F_{2,d}}(x, D_i D_i x) + \mathbf{T}^{x,2}_{F_{2,d}}(x, (D_i x)\mathbf{D}_i) \\ & + T^{x}_{F^{[2]}_{2,d}}(a_i, D_i x) \Big) + T^{x}_{F^{[1]}_{2,d}}(a) \\ =& \sum_{i=1}^{d} \Big(2T^{x}_{F^{[3]}_{2,d}}(x, D_i x, D_i x) + T^{x}_{F^{[2]}_{2,d}}(a_i, D_i x) \Big) + T^{x}_{F^{[2]}_{2,d}}(x, \Delta x) + T^{x}_{F^{[1]}_{2,d}}(a). \end{aligned}$$

掌握方法后，推导第二项就轻而易举了。对于所有$i \in \{1, \dots, d\}$，我们得到

$$\begin{aligned} & \mathbf{T}^{x,2}_{F_{2,d}}(\mathbf{A}_i, \mathbf{A}_i) \\ &= \mathbf{T}^{x,2}_{F_{2,d}}(2x\mathbf{D}_i + a_i, 2x\mathbf{D}_i + a_i) \\ &= 4\mathbf{T}^{x,3}_{F_{2,d}}(x\mathbf{D}_i, x, D_i x) + 2\mathbf{T}^{x,2}_{F_{2,d}}(x\mathbf{D}_i, a_i) \\ &\quad + 2T^{x}_{F^{[3]}_{2,d}}(a_i, x, D_i x) + T^{x}_{F^{[2]}_{2,d}}(a_i, a_i) \\ &= 4\Big(\mathbf{T}^{x,4}_{F_{2,d}}(x, D_i x, x, D_i x) + \mathbf{T}^{x,3}_{F_{2,d}}(x, D_i x, D_i x) + \mathbf{T}^{x,4}_{F_{2,d}}(x, x, D_i x, D_i x) \\ &\quad + \mathbf{T}^{x,3}_{F_{2,d}}(x, x, D_i D_i x) + \mathbf{T}^{x,4}_{F_{2,d}}(x, x, D_i x, D_i x) \Big) + 2\Big(\mathbf{T}^{x,3}_{F_{2,d}}(x, D_i x, a_i) \\ &\quad + \mathbf{T}^{x,2}_{F_{2,d}}(x, D_i a_i) + \mathbf{T}^{x,3}_{F_{2,d}}(x, a_i, D_i x) \Big) + 2T^{x}_{F^{[3]}_{2,d}}(a_i, x, D_i x) + T^{x}_{F^{[2]}_{2,d}}(a_i, a_i) \\ &= 4T^{x}_{F^{[4]}_{2,d}}(x, D_i x, x, D_i x) + 4T^{x}_{F^{[3]}_{2,d}}(x, D_i x, D_i x) + 8T^{x}_{F^{[4]}_{2,d}}(x, x, D_i x, D_i x) \\ &\quad + 4T^{x}_{F^{[3]}_{2,d}}(x, x, D_i^2 x) + 2T^{x}_{F^{[3]}_{2,d}}(x, D_i x, a_i) + 2T^{x}_{F^{[2]}_{2,d}}(x, D_i a_i) \\ &\quad + 2T^{x}_{F^{[3]}_{2,d}}(x, a_i, D_i x) + 2T^{x}_{F^{[3]}_{2,d}}(a_i, x, D_i x) + T^{x}_{F^{[2]}_{2,d}}(a_i, a_i). \end{aligned}$$

将这两个结果代入 (8.1)，得到推论 3.6。 □

8.1. **共轭性质**。本小节旨在证明 I_2 sat- 满足命题 8.5 的共轭性质，而这在定理 3.8 的证明中是必需的。

首先，通过延拓定义 $C^\infty(\mathbb{T}^d_\theta)$ 在 $\mathcal{X}$ 上的右作用

$$\mathbf{D}_i b := D_i b + b\mathbf{D}_i \qquad (b \in C^\infty(\mathbb{T}^d_\theta)), \tag{8.3}$$

以自然方式在 $\mathcal{X}$ 上构造 $C^\infty(\mathbb{T}^d_\theta)$-双模结构。（严格地说， $b\mathbf{D}^\alpha c = \sum_{\beta+\gamma=\alpha} bD^\beta c\mathbf{D}^\gamma$ if $\alpha \in \{0,1\}^d$，不失一般性可作此假设。）容易验证该结构定义良好。此外，使用（5.1）中引入的记号，容易验证

$$\pi(b\mathbf{D}^\alpha c) = \lambda_l(b) D^\alpha \lambda_l(c), \tag{8.4}$$

对所有 $b,\ c \in C^\infty(\mathbb{T}^d_\theta)$ 和 $\alpha \in \mathbb{Z}^d_+$均成立。

引理 8.2。设 $x, y \in C^\infty(\mathbb{T}^d_\theta)$，其中 x 为自伴， y 为可逆，且 $[x,y]=0$。我们有

$$\begin{aligned}\mathbf{T}^{x,2}_{F_{2,d}}(y^{-1}x\mathbf{D}_i y, y^{-1}x\mathbf{D}_i y) =& y^{-1}\mathbf{T}^{x,2}_{F_{2,d}}(x\mathbf{D}_i, x\mathbf{D}_i)y + \frac{1}{2}y^{-1}\cdot x^2 F''_{2,d}(x)\cdot D_i^2 y \\ &+ y^{-1}\Big(\mathbf{T}^{x,2}_{F_{2,d}}(x\mathbf{D}_i, x) + \mathbf{T}^{x,2}_{F_{2,d}}(x, x\mathbf{D}_i)\Big)\cdot D_i y.\end{aligned}$$

证明。将（8.4）代入 $S^2_{s\text{的定义中，}z}$（即（5.2））， 可得

$$S^2_{s,z}(y^{-1}x\mathbf{D}_i y, y^{-1}x\mathbf{D}_i y) = y^{-1}S^2_{s,z}(x\mathbf{D}_i, x\mathbf{D}_i y).$$

再次利用 $S^2_{s,z}$, 的定义，我们得到

$$S^2_{s,z}(x\mathbf{D}_i, x\mathbf{D}_i y) = \frac{|s|^4 x}{x|s|^2+z} D_i\Big(\frac{x}{x|s|^2+z} D_i \frac{y}{x|s|^2+z}\Big).$$

根据莱布尼茨法则，我们有

$$\begin{aligned}&D_i\Big(\frac{x}{x|s|^2+z} D_i \frac{y}{x|s|^2+z}\Big) \\ &\quad= D_i\Big(\frac{x}{(x|s|^2+z)^2}\cdot D_i y\Big) + D_i\Big(\frac{x}{x|s|^2+z} D_i\Big(\frac{1}{x|s|^2+z}\Big) y\Big) \\ &\quad= \frac{x}{(x|s|^2+z)^2}\cdot D_i^2 y + D_i\Big(\frac{x}{(x|s|^2+z)^2}\Big)\cdot D_i y + \\ &\qquad+ \frac{x}{x|s|^2+z} D_i\Big(\frac{1}{x|s|^2+z}\Big)\cdot D_i y + D_i\Big(\frac{x}{x|s|^2+z} D_i\Big(\frac{1}{x|s|^2+z}\Big)\Big)\cdot y.\end{aligned}$$

再次根据 $S^2_{s,z}$, 的定义 (5.2)，我们写出

$$\begin{aligned}&S^2_{s,z}(x\mathbf{D}_i, x\mathbf{D}_i y) \\ &\quad= S^2_{s,z}(x,x)D_i^2 y + S^2_{s,z}(x\mathbf{D}_i, x)D_i y + S^2_{s,z}(x, x\mathbf{D}_i)D_i y + S^2_{s,z}(x\mathbf{D}_i, x\mathbf{D}_i)y.\end{aligned}$$

对上述等式两边进行二重积分，将推论 7.1 应用于所得各项，并利用

$$T^x_{F^{[2]}_{2,d}}(x,x) = x^2\frac{1}{2}F''_{2,d}(x),$$

该引理得证。 □

引理 8.3. 设 $x, y \in C^\infty(\mathbb{T}^d_\theta)$ 可逆，且满足 $x \geq 0$ 和 $[x, y] = 0$。我们有

$$\mathbf{T}^{x,1}_{F_{2,d}}(y^{-1}x\boldsymbol{\Delta}y) = y^{-1}xF'_{2,d}(x)\Delta y + 2\sum_{i=1}^{d} y^{-1}\mathbf{T}^{x,1}_{F_{2,d}}(x\mathbf{D}_i)D_i y + y^{-1}\mathbf{T}^{x,1}_{F_{2,d}}(x\boldsymbol{\Delta})y.$$

证明。在S^1_s的定义中使用 *(8.4)*，z，我们得到

$$S^1_{s,z}(y^{-1}x\boldsymbol{\Delta}y) = -\frac{|s|^2 y^{-1}x}{x|s|^2+z}\Delta\Big(\frac{y}{x|s|^2+z}\Big).$$

根据莱布尼茨法则，我们有

$$\Delta\Big(\frac{y}{x|s|^2+z}\Big) = \frac{1}{x|s|^2+z}\Delta y + 2\sum_{i=1}^{d} D_i\Big(\frac{1}{x|s|^2+z}\Big)\cdot D_i y + \Delta\Big(\frac{1}{x|s|^2+z}\Big)\cdot y.$$

因此，

$$S^1_{s,z}(y^{-1}x\boldsymbol{\Delta}y) = y^{-1}S^1_{s,z}(x)\Delta y + 2\sum_{i=1}^{d} y^{-1}S^1_{s,z}(x\mathbf{D}_i)D_i y + y^{-1}S^1_{s,z}(x\boldsymbol{\Delta})y.$$

与前面的证明一样，该结论可由推论 7.1 得出。 □

引理 8.4. 设 $x \in C^\infty(\mathbb{T}^d_\theta)$ 正且可逆。我们有

$$d\mathbf{T}^{x,1}_{F_{2,d}}(x\mathbf{D}_i) + 2\mathbf{T}^{x,2}_{F_{2,d}}(x\mathbf{D}_i, x) + 2\mathbf{T}^{x,2}_{F_{2,d}}(x, x\mathbf{D}_i) = 0. \tag{8.5}$$

证明. 根据**圆周**$\phi^{x\ m}$的递归定义（定义 3.1），我们有

$$d\mathbf{T}^{x,1}_{F_{2,d}}(x\mathbf{D}_i) = dT^x_{F^{[2]}_{2,d}}(x, D_i x), \quad 2\mathbf{T}^{x,2}_{F_{2,d}}(x, x\mathbf{D}_i) = 2T^x_{F^{[3]}_{2,d}}(x, x, D_i x), \tag{8.6}$$

$$\begin{aligned} 2\mathbf{T}^{x,2}_{F_{2,d}}(x\mathbf{D}_i, x) &= 2\mathbf{T}^{x,3}_{F_{2,d}}(x, D_i x, x) + 2\mathbf{T}^{x,2}_{F_{2,d}}(x, D_i x) + 2\mathbf{T}^{x,2}_{F_{2,d}}(x, x\mathbf{D}_i) \\ &= 2T^x_{F^{[3]}_{2,d}}(x, D_i x, x) + 2T^x_{F^{[2]}_{2,d}}(x, D_i x) + 2T^x_{F^{[3]}_{2,d}}(x, x, D_i x). \end{aligned} \tag{8.7}$$

根据多重算子积分的定义，我们可以将上述各项改写为 $T_\phi(D_i x)$；例如，对于任意函数 f，我们可以改写为

$$T^x_f(x, D_i x, x) = T^x_{\phi_1}(D_i x), \qquad \text{where} \qquad \phi_1(\alpha_0, \alpha_1) = \alpha_0 f(\alpha_0, \alpha_0, \alpha_1, \alpha_1)\alpha_1.$$

同样，利用 (8.6) 和 (8.7)，(8.5) 的左边等于 $T^x_\phi(D_i x)$，其中

$$\begin{aligned} \phi(\alpha_0, \alpha_1) =& d\alpha_0 F^{[2]}_{2,d}(\alpha_0, \alpha_0, \alpha_1) + 2\alpha_0\alpha_1 F^{[3]}_{2,d}(\alpha_0, \alpha_0, \alpha_1, \alpha_1) \\ &+ 2\alpha_0 F^{[2]}_{2,d}(\alpha_0, \alpha_0, \alpha_1) + 4\alpha_0^2 F^{[3]}_{2,d}(\alpha_0, \alpha_0, \alpha_0, \alpha_1). \end{aligned}$$

注意，ϕ 是齐次的。因此，只需证明 $\phi(1, \alpha) = 0$. 换言之，我们需要证明

$$(d+2)F^{[2]}_{2,d}(1, 1, \alpha) + 2\alpha F^{[3]}_{2,d}(1, 1, \alpha, \alpha) + 4F^{[3]}_{2,d}(1, 1, 1, \alpha) = 0.$$

这个等式是一个初等练习，尽管过程相当繁琐，故省略其证明。

□

命题 8.5. 设 $x, y \in C^\infty(\mathbb{T}^d_\theta)$ 可逆，且满足 $x \geq 0$ 和 $[x, y] = 0$。我们有

$$I_2(\lambda_l(y^{-1}x)\Delta\lambda_l(y)) = y^{-1}\cdot I_2(\lambda_l(x)\Delta)\cdot y.$$

证明. 由 (8.3) 可得

$$y^{-1}x\mathbf{\Delta}y = x\mathbf{\Delta} + \sum_{i=1}^{d} a_i\mathbf{D}_i + a,$$

$$a_i = 2y^{-1}xD_i(y), \quad 1 \le i \le d, \quad a = y^{-1}x\Delta y.$$

由此可以得出 $\mathrm{d\ i\ h}$

$$\mathbf{A}_i = 2y^{-1}x\mathbf{D}_i y.$$

根据引理 8.1，我们有

$$-\pi^{-\frac{d}{2}} I_2(\lambda_l(y^{-1}x)\Delta\lambda_l(y)) = \mathbf{T}^{x,1}_{F_{2,d}}(y^{-1}x\mathbf{\Delta}y) + \frac{4}{d}\sum_{i=1}^{d}\mathbf{T}^{x,2}_{F_{2,d}}(y^{-1}x\mathbf{D}_i y, y^{-1}x\mathbf{D}_i y).$$

利用引理 8.2 和引理 8.3，我们写作

$$\begin{aligned}
&-\pi^{-\frac{d}{2}} I_2(\lambda_l(y^{-1}x)\Delta\lambda_l(y)) \\
=&y^{-1}\Big(\mathbf{T}^{x,1}_{F_{2,d}}(x\mathbf{\Delta}) + \frac{4}{d}\sum_{i=1}^{d}\mathbf{T}^{x,2}_{F_{2,d}}(x\mathbf{D}_i, x\mathbf{D}_i)\Big) + y^{-1}\Big(xF'_{2,d}(x) + \frac{2}{d}x^2F''_{2,d}(x)\Big)\Delta y + \\
&+\sum_{i=1}^{d} y^{-1}\Big(2\mathbf{T}^{x,1}_{F_{2,d}}(x\mathbf{D}_i) + \frac{4}{d}\mathbf{T}^{x,2}_{F_{2,d}}(x\mathbf{D}_i, x) + \frac{4}{d}\mathbf{T}^{x,2}_{F_{2,d}}(x, x\mathbf{D}_i)\Big)D_i y.
\end{aligned}$$

由于 $F_{2,d}$ 是 $\alpha \to \alpha^{-\frac{d}{2}}$, 的原函数，因此

$$xF'_{2,d}(x) + \frac{2}{d}x^2F''_{2,d}(x) = x\cdot x^{-\frac{d}{2}} + \frac{2x^2}{d}\cdot(-\frac{d}{2}x^{-1-\frac{d}{2}}) = 0.$$

因此，右侧的第二项为零。根据引理 8.4，右侧的第三项也为零。证明完毕。 □

8.2. **定理 3.8 的证明**。

引理 8.6。 设 $x \in C^\infty(\mathbb{T}^d_\theta)$ 正且可逆。设 $d \ge 2$. 我们有

$$-\pi^{-\frac{d}{2}} I_2(\lambda_l(x^{\frac{1}{2}})\Delta\lambda_l(x^{\frac{1}{2}})) = T^x_\Phi(\Delta x) + \sum_{i=1}^{d} T^x_\Psi(D_i x, D_i x),$$

对于由 $F_{2,d}$定义的符号 Φ, Ψ， $\alpha \mapsto \alpha^{-\frac{d}{2}}$ 的一阶原函数为

$$\begin{aligned}
\Phi(\alpha_0,\alpha_1) :=& \Big(\frac{\alpha_1}{\alpha_0}\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\alpha_0 F^{[2]}_{2,d}(\alpha_0,\alpha_0,\alpha_1) + \frac{4}{d}\alpha_0^2 F^{[3]}_{2,d}(\alpha_0,\alpha_0,\alpha_0,\alpha_1)\Big), \\
\Psi(\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2) :=& (\frac{\alpha_2}{\alpha_0})^{\frac{1}{2}}\Big(\frac{4}{d}\alpha_0\alpha_1 F^{[4]}_{2,d}(\alpha_0,\alpha_0,\alpha_1,\alpha_1,\alpha_2) \\
&+ (2+\frac{4}{d})\alpha_0 F^{[3]}_{2,d}(\alpha_0,\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2) + \frac{8}{d}\alpha_0^2 F^{[4]}_{2,d}(\alpha_0,\alpha_0,\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2)\Big),
\end{aligned}$$

对于 $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha > 0$。

证明。 利用推论 3.6，我们得到

$$\begin{aligned}
-\pi^{-\frac{d}{2}} I_2(\lambda_l(x)\Delta) =& T^x_{F^{[2]}_{2,d}}(x,\Delta x) + \frac{4}{d}T^x_{F^{[3]}_{2,d}}(x,x,\Delta x) + \sum_{i=1}^{2}\Big(\frac{4}{d}T^x_{F^{[4]}_{2,d}}(x, D_i x, x, D_i x) \\
&+ (2+\frac{4}{d})T^x_{F^{[3]}_{2,d}}(x, D_i x, D_i x) + \frac{8}{d}T^x_{F^{[4]}_{2,d}}(x, x, D_i x, D_i x)\Big).
\end{aligned}$$

将上述公式与命题 8.5 结合，并计算所得的符号，即得引理。□

本节剩余部分纯粹是将上述关于 Φ 和 Ψ 的公式代数改写为更简洁的形式，从而得出定理 3.8。我们再次固定 $d \geq 2$ 和 $F_{2,\,d}$，如注 3.4 所述。

引理 8.7。对于引理 *8.6* 中的 Φ，有

$$\Phi(\alpha_0,\alpha_1) = \frac{2(\alpha_0\alpha_1)^{\frac{1}{2}}}{d} \cdot \frac{\alpha_0 F_{2,d}^{[2]}(\alpha_0,\alpha_0,\alpha_1) - \alpha_1 F_{2,d}^{[2]}(\alpha_0,\alpha_1,\alpha_1)}{\alpha_1-\alpha_0}, \quad \alpha_0,\alpha_1 > 0.$$

证明。根据引理 8.6 中 Φ 的定义，有（$\alpha_0,\ \alpha_1 > 0$ 一如既往）

$$(\alpha_0\alpha_1)^{-\frac{1}{2}}\Phi(\alpha_0,\alpha_1) = F_{2,d}^{[2]}(\alpha_0,\alpha_0,\alpha_1) + \frac{4}{d}\alpha_0 F_{2,d}^{[3]}(\alpha_0,\alpha_0,\alpha_0,\alpha_1).$$

因此，

$$\begin{aligned}&(\alpha_1-\alpha_0)\cdot(\alpha_0\alpha_1)^{-\frac{1}{2}}\Phi(\alpha_0,\alpha_1)\\ &= F_{2,d}^{[1]}(\alpha_0,\alpha_1) - F_{2,d}^{[1]}(\alpha_0,\alpha_0) + \frac{4\alpha_0}{d}F_{2,d}^{[2]}(\alpha_0,\alpha_0,\alpha_1) - \frac{4\alpha_0}{d}F_{2,d}^{[2]}(\alpha_0,\alpha_0,\alpha_0).\end{aligned}$$

根据定义，

$$F_{2,d}^{[1]}(\alpha_0,\alpha_0) + \frac{4\alpha_0}{d}F_{2,d}^{[2]}(\alpha_0,\alpha_0,\alpha_0) = F_{2,d}'(\alpha_0) + \frac{2\alpha_0}{d}F_{2,d}''(\alpha_0) = 0.$$

因此，

$$(\alpha_1-\alpha_0)\cdot(\alpha_0\alpha_1)^{-\frac{1}{2}}\Phi(\alpha_0,\alpha_1) = F_{2,d}^{[1]}(\alpha_0,\alpha_1) + \frac{4\alpha_0}{d}F_{2,d}^{[2]}(\alpha_0,\alpha_0,\alpha_1)$$

and

$$\begin{aligned}&(\alpha_1-\alpha_0)^2\cdot(\alpha_0\alpha_1)^{-\frac{1}{2}}\Phi(\alpha_0,\alpha_1)\\ &= F_{2,d}(\alpha_1) - F_{2,d}(\alpha_0) + \frac{4\alpha_0}{d}F_{2,d}^{[1]}(\alpha_0,\alpha_1) - \frac{4\alpha_0}{d}F_{2,d}^{[1]}(\alpha_0,\alpha_0)\\ &= (1-\frac{2}{d})\big(F_{2,d}(\alpha_1) - F_{2,d}(\alpha_0)\big) + \frac{2(\alpha_0+\alpha_1)}{d}F_{2,d}^{[1]}(\alpha_0,\alpha_1) - \frac{4\alpha_0}{d}F_{2,d}'(\alpha_0).\end{aligned}$$

显然，右边等于

$$\begin{aligned}&\frac{2}{d}\Big((\alpha_0+\alpha_1)F_{2,d}^{[1]}(\alpha_0,\alpha_1) - (\alpha_0^{1-\frac{d}{2}} + \alpha_1^{1-\frac{d}{2}})\Big)\\ &= \frac{2}{d}\Big(\alpha_0(F_{2,d}^{[1]}(\alpha_0,\alpha_1) - F_{2,d}'(\alpha_0)) + \alpha_1(F_{2,d}^{[1]}(\alpha_0,\alpha_1) - F_{2,d}'(\alpha_1))\Big)\\ &= \frac{2}{d}\Big(\alpha_0(\alpha_1-\alpha_0)F_{2,d}^{[2]}(\alpha_0,\alpha_0,\alpha_1) - \alpha_1(\alpha_1-\alpha_0)F_{2,d}^{[2]}(\alpha_0,\alpha_1,\alpha_1)\Big).\end{aligned}$$

因此，

$$(\alpha_1-\alpha_0)\cdot(\alpha_0\alpha_1)^{-\frac{1}{2}}\Phi(\alpha_0,\alpha_1) = \frac{2}{d}\Big(\alpha_0 F_{2,d}^{[2]}(\alpha_0,\alpha_0,\alpha_1) - \alpha_1 F_{2,d}^{[2]}(\alpha_0,\alpha_1,\alpha_1)\Big).$$

□

引理 8.8。设 $f, g \in C^\infty((0,\infty))$ 满足 $f + g' = 0$. 若

$$\psi(\alpha,\beta) = f^{[2]}(\alpha,\alpha,\beta) + 2g^{[3]}(\alpha,\alpha,\alpha,\beta),$$

then

$$\psi(\alpha,\beta) = -g^{[3]}(\alpha,\alpha,\beta,\beta).$$

证明。 由于 $f=-g'$，我们有

$$\begin{aligned}\psi(\alpha,\beta)&=-(g')^{[2]}(\alpha,\alpha,\beta)+2g^{[3]}(\alpha,\alpha,\alpha,\beta)\\&=-\frac{(g')^{[1]}(\alpha,\beta)-(g')^{[1]}(\alpha,\alpha)}{\beta-\alpha}+2\frac{g^{[2]}(\alpha,\alpha,\beta)-\frac{1}{2}g^{(2)}(\alpha)}{\beta-\alpha}\\&=\frac{1}{\beta-\alpha}\Big(2g^{[2]}(\alpha,\alpha,\beta)-(g')^{[1]}(\alpha,\beta)\Big)\\&=\frac{1}{\beta-\alpha}\Big(2\frac{g^{[1]}(\alpha,\alpha)-g^{[1]}(\alpha,\beta)}{\alpha-\beta}-\frac{g^{[1]}(\alpha,\alpha)-g^{[1]}(\beta,\beta)}{\alpha-\beta}\Big)\\&=\frac{1}{\beta-\alpha}\Big(\frac{g^{[1]}(\alpha,\alpha)-g^{[1]}(\alpha,\beta)}{\alpha-\beta}-\frac{g^{[1]}(\alpha,\beta)-g^{[1]}(\beta,\beta)}{\alpha-\beta}\Big)\\&=\frac{1}{\beta-\alpha}(g^{[2]}(\alpha,\alpha,\beta)-g^{[2]}(\alpha,\beta,\beta)),\end{aligned}$$

完成证明。 □

引理 8.9。 对于引理 *8.6* 中的 Ψ，我们有

$$\Psi(\alpha,1,\beta)=-\frac{4}{d}(\alpha\beta)^{\frac{1}{2}}g^{[3]}(\alpha,\alpha,\beta,\beta),\quad \alpha,\beta>0.$$

这里，

$$g(\alpha)=F_{2,d}(\alpha)+F_{2,d}^{[1]}(1,\alpha),\quad \alpha>0.$$

证明。 根据引理 8.6 中 Ψ 的定义，我们有

$$\begin{aligned}&\frac{d}{4}\frac{1}{(\alpha\beta)^{\frac{1}{2}}}\Psi(\alpha,1,\beta)\\&=F_{2,d}^{[4]}(\alpha,\alpha,1,1,\beta)+\Big(\frac{d}{2}+1\Big)F_{2,d}^{[3]}(\alpha,\alpha,1,\beta)+2\alpha F_{2,d}^{[4]}(\alpha,\alpha,\alpha,1,\beta).\end{aligned}$$

注意到

$$\begin{aligned}\alpha F_{2,d}^{[4]}(\alpha,\alpha,\alpha,1,\beta)&=(\alpha-1)F_{2,d}^{[4]}(\alpha,\alpha,\alpha,1,\beta)+F_{2,d}^{[4]}(\alpha,\alpha,\alpha,1,\beta)\\&=F_{2,d}^{[3]}(\alpha,\alpha,\alpha,\beta)-F_{2,d}^{[3]}(\alpha,\alpha,1,\beta)+F_{2,d}^{[4]}(\alpha,\alpha,\alpha,1,\beta).\end{aligned}$$

因此，

$$\begin{aligned}\frac{d}{4}\frac{1}{(\alpha\beta)^{\frac{1}{2}}}\Psi(\alpha,1,\beta)&=F_{2,d}^{[4]}(\alpha,\alpha,1,1,\beta)+\Big(\frac{d}{2}-1\Big)F_{2,d}^{[3]}(\alpha,\alpha,1,\beta)\\&\quad+2F_{2,d}^{[3]}(\alpha,\alpha,\alpha,\beta)+2F_{2,d}^{[4]}(\alpha,\alpha,\alpha,1,\beta)\\&=f^{[2]}(\alpha,\alpha,\beta)+2g^{[3]}(\alpha,\alpha,\alpha,\beta),\end{aligned}$$

其中

$$f(\alpha)=F_{2,d}^{[2]}(1,1,\alpha)+\Big(\frac{d}{2}-1\Big)F_{2,d}^{[1]}(1,\alpha);\qquad g(\alpha)=F_{2,d}(\alpha)+F_{2,d}^{[1]}(1,\alpha).$$

将差商显式写出后，可以很容易地证明$f+g'=0$. 现在由引理 8.8 得出结论。 □

定理 *3.8* 的证明。由引理 8.6，我们得到定理 3.8 的结论，其中 Φ 和 Ψ 有另一种表达形式。引理 8.7 证明了引理 8.6 和定理 3.8 中 Φ 的表达式一致。

注意， Ψ （与引理 8.6 中一样）是 $-1-\frac{d}{2}$ 次齐次的，因此 –

$$\Psi(\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2)=\alpha_1^{-1-\frac{d}{2}}\Psi(\frac{\alpha_0}{\alpha_1},1,\frac{\alpha_2}{\alpha_1}),\quad \alpha_0,\alpha_1,\alpha_2>0.$$

由引理 8.9， Ψ所需的便捷表达式现可得出。 □

9. Recovering the Connes–Moscovici modular curvature

在 [9], 以及独立地在 [16], 中，给出了所谓的标量曲率 $I_2(P)$ 的一个公式，该公式用相应共形因子的模算子表示共形变形的非交换二维环面。下面我们将说明，如何通过取 $P=\lambda_l(x^{1/2})\Delta\lambda_l(x^{1/2})$，将他们的公式作为我们结果的特例导出；按照 [9] 和 [16] 的记号，这对应于当 $\tau=i$时作用在函数上的拉普拉斯算子。

为方便起见，我们将模函数演算定义如下。

定义 9.1。 设 $d\in\mathbb{N}_{\geq 2}$, $n\in\mathbb{N}$, 和 $x,V_1,\ldots,V_n\in L_\infty(\mathbb{T}^d_\theta)$ 满足 x 正且可逆。对于任意的 $K\in C^\infty(\mathbb{R})$、 $H\in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ 和 $L\in C^\infty(\mathbb{R}^n)$，我们定义

$$K(\nabla)(V_1):=T^x_{K(\log(\frac{\alpha_1}{\alpha_0}))}(V_1),\quad H(\nabla_1,\nabla_2)(V_1,V_2):=T^x_{H(\log(\frac{\alpha_1}{\alpha_0}),\log(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}))}(V_1,V_2),$$

$$L(\nabla_1,\ldots,\nabla_n)(V_1,\ldots,V_n):=T^x_{L(\log(\alpha_1/\alpha_0),\ldots,\log(\alpha_n/\alpha_{n-1}))}(V_1,\ldots,V_n).$$

这里以及下文中，多重算子积分 $T^x_{f(\alpha_0,\ldots,\alpha_n)}$ 应理解为 $T^x_{(\alpha_0,\ldots,\alpha_n)\mapsto f(\alpha_0,\ldots,\alpha_n)}$。

考虑一个重要的例子，即 $K(\log(\alpha))=\alpha^p$。那么

$$T^x_{K(\log(\frac{\alpha_1}{\alpha_0}))}(V_1)=T^x_{\alpha_0^{-p}\alpha_1^p}(V_1)=x^{-p}V_1x^p=\tilde{\Delta}^p(V_1)=K(\log\tilde{\Delta})(V_1),$$

其中 $\tilde{\Delta}:V_1\mapsto e^{-h}V_1e^h$ 是对应于共形因子 $h=\log x$ 的模算子。进一步推广这一论证，可以发现上述定义与 [9, 16] 的定义一致；关于这一点的更多说明，参见 [30] 。

引理 9.2. 设 $d\in\mathbb{N}_{\geq 2}$。若对自伴 $h\in C^\infty(\mathbb{T}^d_\theta)$ 有 $x=e^h$ ，则对所有$K\in C^\infty(\mathbb{R})$ 和 $H\in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ ，我们有

$$T^x_{\Phi_K}(\Delta x)+\sum_{i=1}^d T^x_{\Psi_{K,H}}(D_ix,D_ix)=\frac{1}{2}K(\nabla)(\Delta h)+\frac{1}{4}\sum_{i=1}^d H(\nabla_1,\nabla_2)(D_ih,D_ih),$$

for

$$\begin{aligned}\Phi_K(\alpha_0,\alpha_1)=&\frac{1}{2}K(\log(\frac{\alpha_1}{\alpha_0}))\cdot\log^{[1]}(\alpha_0,\alpha_1);\\ \Psi_{K,H}(\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2)=&K(\log(\frac{\alpha_2}{\alpha_0}))\cdot\log^{[2]}(\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2)\\ &+\frac{1}{4}H(\log(\frac{\alpha_1}{\alpha_0}),\log(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}))\cdot\log^{[1]}(\alpha_0,\alpha_1)\cdot\log^{[1]}(\alpha_1,\alpha_2).\end{aligned}$$

证明。 由于 $C^\infty(\mathbb{T}^d_\theta)$ 在全纯函数演算下封闭，我们有 $x=e^h\in C^\infty(\mathbb{T}^d_\theta)$。通过多重算子积分理论中的标准论证，我们得到

$$D_ih=T^x_{\log^{[1]}}(D_ix);\quad \Delta h=T^x_{\log^{[1]}}(\Delta x)+2\sum_{i=1}^d T^x_{\log^{[2]}}(D_ix,D_ix).$$

应用定义 9.1，我们得到该引理。 □

事实证明， $\Phi_{K_0}=\Phi$ 和 $\Psi_{K_0,\ H_0}=\Psi$ 与 Φ， Ψ 如定理 3.8 所述，而 K_0和 H_0 则与下述定理完全一致；该定理在[9]中以截然不同的方式证明。

定理 9.3 (Connes–Moscovici)。设 $x=e^h$ 为自伴的 $h\in C^\infty(\mathbb{T}^2_\theta)$，并考虑作用于 $L_2(\mathbb{T}^2_\theta)$ 上的 $P=\lambda_l(x^{1/2})\Delta\lambda_l(x^{1/2})$。我们有

$$I_2(P)=-\frac{\pi}{2}\left(K_0(\nabla)(\Delta h)+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}H_0(\nabla_1,\nabla_2)(D_ih,D_ih)\right),$$

其中

$$K_0(s):=\frac{-2+s\coth\left(\frac{s}{2}\right)}{s\sinh\left(\frac{s}{2}\right)};\qquad H_0(s,t):=$$

$$\frac{t(s+t)\cosh(s)-s(s+t)\cosh(t)+(s-t)(s+t+\sinh(s)+\sinh(t)-\sinh(s+t))}{st(s+t)\sinh(s/2)\sinh(t/2)\sinh^2((s+t)/2)}.$$

证明。设 Φ， Ψ 如定理 3.8 中所述。直接计算可得

$$\Phi(1,\alpha)=\frac{1}{2}K_0(\log(\alpha))\cdot\frac{\log(\alpha)}{\alpha-1},$$

对 $\alpha>0$。由齐次性，这就得到

$$\Phi(\alpha_0,\alpha_1)=\frac{1}{2}K_0(\log(\frac{\alpha_1}{\alpha_0}))\log^{[1]}(\alpha_0,\alpha_1)=\Phi_{K_0}(\alpha_0,\alpha_1),\quad \alpha_0,\alpha_1>0,$$

其中 Φ_{K_0} 如引理 9.2 中所述。

现在只需证明 $\Psi=\Psi_{K_0,H_0}$；根据齐次性，这归结为证明

$$\begin{aligned}-2(\alpha\beta)^{\frac{1}{2}}g^{[3]}(\alpha,\alpha,\beta,\beta)=&K_0(\log(\beta/\alpha))\cdot\log^{[2]}(\alpha,1,\beta)\\&+\frac{1}{4}H_0(-\log(\alpha),\log(\beta))\cdot\log^{[1]}(\alpha,1)\cdot\log^{[1]}(1,\beta).\end{aligned}$$

令 $-\log(\alpha)=s$ 和 $\log(\beta)=t$，可得

$$\begin{aligned}&\frac{4}{\log^{[1]}(\alpha,1)\log^{[1]}(1,\beta)}(-2(\alpha\beta)^{\frac{1}{2}}g^{[3]}(\alpha,\alpha,\beta,\beta)-K_0(\log(\beta/\alpha))\cdot\log^{[2]}(\alpha,1,\beta))\\&=\frac{4}{\frac{(-st)}{(e^{-s}-1)(e^t-1)}}\left(-2e^{-\frac{s}{2}}e^{\frac{t}{2}}\frac{1}{(e^{-s}-e^t)^2}\left(\frac{s}{(e^{-s}-1)^2}+\frac{1}{e^{-s}-1}\right.\right.\\&\quad-\frac{2}{e^{-s}-e^t}\left(\frac{e^{-s}}{e^{-s}-1}(-s)-\frac{e^t}{e^t-1}t\right)+\frac{-t}{(e^t-1)^2}+\frac{1}{e^t-1}\Bigg)\\&\quad-\left(-\frac{4e^{\frac{(t+s)}{2}}}{(t+s)\left(e^{(t+s)}-1\right)}+2e^{\left(\frac{t+s}{2}\right)}\left(\frac{\left(e^{(t+s)}+1\right)}{\left(e^{(t+s)}-1\right)^2}\right)\right)\\&\quad\left.\cdot\left(\frac{1}{e^{-s}-e^t}\left(-\frac{s}{e^{-s}-1}-\frac{t}{e^t-1}\right)\right)\right).\end{aligned}$$

将后一个表达式乘以 $H_0(s,\ t)$ 的分母，即

$$st(s+t)\sinh(s/2)\sinh(t/2)\sinh^2((s+t)/2),$$

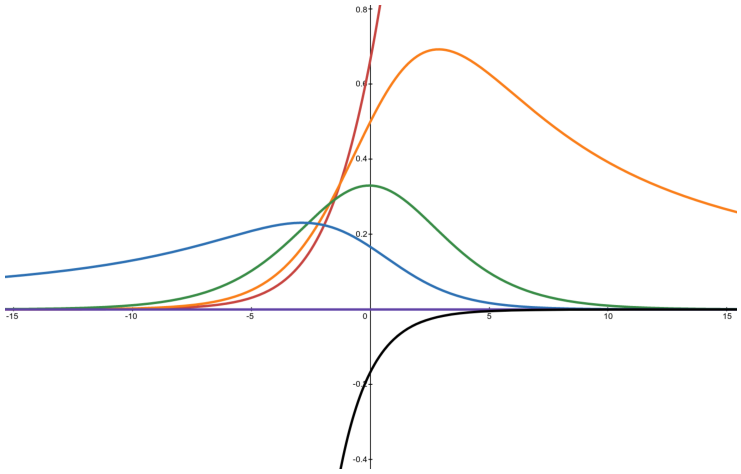


FIGURE 1. 利用 Desmos 绘制的函数 K_0^d，其中 $d = 0.01$ （红色）、$d = 1$ （橙色）、$d = 2.01$ （绿色）、$d = 3$ （蓝色）、$d = 4$ （紫色，横轴）以及$d = 5$ （黑色）。

并将结果明确写出，便可直接得到 $H_0(s,\ t)$ 的分子，即

$$t(s+t)\cosh(s) - s(s+t)\cosh(t) + (s-t)(s+t+\sinh(s)+\sinh(t)-\sinh(s+t)).$$

证明至此结束。 □

9.1. K_0 **对一般的 d**。现在我们给出一个全新的模公式示例，它可以由我们的主要结果推出，并将主要结果中的函数K_0 推广到任意维数；该函数K_0 出现在 [9] 的主要结果中。

定理 9.4。对于所有 $d \in \mathbb{N}_{\geq 3}$, $x = e^h$, $h = h^* \in C^\infty(\mathbb{T}_\theta^d)$、$P = \lambda_l(x^{1/2})\Delta\lambda_l(x^{1/2})$，它们作用于 $L_2(\mathbb{T}_\theta^d)$中，我们有

$$I_2(P) = -\frac{\pi^{d/2}}{2} e^{(1-d/2)h}\left(K_0^d(\nabla)(\Delta h) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{d} H_0^d(\nabla_1,\nabla_2)(D_i h, D_i h)\right), \tag{9.1}$$

对于某个函数 H_0^d 以及

$$K_0^d(s) = \frac{2}{d}\cdot\frac{-1 - e^{(1-\frac{d}{2})s} + \frac{e^{(1-d/2)s}-1}{1-d/2}\coth\left(\frac{s}{2}\right)}{s\sinh\left(\frac{s}{2}\right)}. \tag{9.2}$$

上述公式实际上定义了一个函数 K_0^d，对每个 $d \in (2,\ \infty)$ 均成立，并满足

$$\lim_{d\to 2} K_0^d(s) = K_0(s),$$

其中 K_0 如定理 *9.3* 所述。此外，$K_0^4 = 0$。

证明。由定理 3.8 和引理 9.2 可知，当且仅当 $\Phi(\alpha_0,\ \alpha_1) = \alpha_0^{1-\frac{d}{2}}\Phi_{K_0^d}(\alpha_0,\ \alpha_1)$ 且 $\Psi(\bar{\alpha_0},\ \alpha_1,\ \alpha_2) = \alpha_0^{1-\frac{d}{2}}\Psi_{K_0^d,\ H_0^d}(\alpha_0,\ \alpha_1,\ \bar{\alpha_2})$ 时，式 (9.1) 成立。由齐次性，

我们只需推导由下式定义的函数 K_0^d 满足式 (9.2):

$$K_0^d(\log(\alpha)) := \frac{2}{\log^{[1]}(1,\alpha)} \cdot \Phi(1,\alpha), \tag{9.3}$$

由定理 3.8 得到 Φ，即

$$\Phi(1,\alpha) = \frac{2\alpha^{1/2}}{d} \frac{F_{2,d}^{[2]}(1,1,\alpha) - \alpha F_{2,d}^{[2]}(1,\alpha,\alpha)}{\alpha - 1}. \tag{9.4}$$

将（9.3）与（9.4）结合，并代入 $\alpha = e^s$，得到

$$\begin{aligned} K_0^d(s) =& \frac{2(e^s-1)}{s} \cdot \frac{2e^{s/2}}{d} \left(\frac{1}{(e^s-1)^2} \left(\frac{1}{1-\frac{d}{2}} \frac{e^{(1-\frac{d}{2})s}-1}{e^s-1} - 1 \right) \right. \\ & \left. - \frac{e^s}{(e^s-1)^2} \left(e^{-\frac{d}{2}s} - \frac{1}{1-\frac{d}{2}} \frac{e^{(1-\frac{d}{2})s}-1}{e^s-1} \right) \right). \end{aligned}$$

化简上述公式，即得K_0^d的所需形式。利用 $\lim_{d\to 2} \frac{e^{(1-d/2)s}-1}{1-d/2} = s$和 $\coth(\frac{s}{2}) = \frac{1+e^{-s}}{1-e^{-s}}$，即可分别得到定理的最后两个结论。□

主要结果 [9, 定理 3.2] 中出现的函数 H_0, K, H, S 等等的推广也可以类似地得到。事实上，现在很容易得到$k > 2$ 的类似公式。虽然我们将上述定理证明为定理 3.8 的推论（我们认为它本身也很有趣），但我们强调，也可以直接从定理 3.3 得到该定理，唯一的区别是中间公式会更长。这样，对于任意选取的 P 和 k，都可以得到模算子中的任意函数。

10. The relation with the Iochum–Masson-approach for rational θ

现在，我们将我们的方法与 [25, 26, 27], 的方法联系起来；在后者的方法中，Iochum 和 Masson 计算了流形上有限维丛上的微分算子的局部不变量。假设 $\theta \in M_d(\mathbb{R})$ 满足以下条件，使得我们可以将其识别为

$$C^\infty(\mathbb{T}_\theta^d) \subseteq M_N(C^\infty(\mathbb{T}^d)),$$

其中 $M_N(C^\infty(\mathbb{T}^d))$ 是以 $C^\infty(\mathbb{T}^d)$ 中的元素为条目的 $N \times N$ 矩阵代数。对于 $d = 2$ 和有理 θ，也存在这样的包含关系；在更高维情形下，只需对 $\theta \in M_d(\mathbb{R})$ 的元素满足一个稍微复杂一些的条件（参见 [42]）。在这些情形下，可以应用 [25, 26, 27] 的结果。在 [26, 附录 B],中，将 [26] 的最终结果与 [16], 关于 $k = 2$ 和 $d = 2$ 的最终结果进行了比较。这里，我们将自己的结果与 [25] 进行比较，适用于任意 d 和任意 k。

对于所有 $m \in \mathbb{N}$、$\xi \in \mathbb{R}^d$ 以及所有矩阵值微分算子 B_1、.....、B_m、[25,，等式 (2.1)] 通过如下设定定义了一个记作 $f_m(\xi)[B_1 \otimes \cdots \otimes B_m] \in M_N(\mathbb{C})$ 的矩阵：对所有 $v \in \mathbb{C}^N$,

$$\begin{aligned} & f_m(\xi)[B_1 \otimes \cdots \otimes B_m]v \\ & := \int_{\Delta_m} e^{(s_1-1)|\xi|^2\lambda_l(x)} B_1 e^{(s_2-s_1)|\xi|^2\lambda_l(x)} \cdots B_m e^{(s_{m+1}-s_m)|\xi|^2\lambda_l(x)} (1_M \otimes v)\, ds, \end{aligned} \tag{10.1}$$

其中，$(1_M \otimes v)$ 只是 $C^\infty(\mathbb{T}^d;\, \mathbb{C}^N)$ 中恒等于 v 的节，而 $\Delta_m = \{s \in \mathbb{R}^m_+ :\ 0 \le s_m \le \cdots \le s_1 \le 1\}$ 是赋予总变差为 $1/m!$ 的平坦测度 ds 的单纯形，且 $s_{m+1} := 0$。式 (10.1) 中的被积函数可识别为定义在 $\mathbb{T}^d$ 上的 $\mathbb{C}^N$ 值函数；对于每个 ξ 和 s，该函数对每个 ξ 都是在 s 中的博赫纳可积函数。

关于 [25], 的记号，我们将自身限制于 $g^{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}$，并将 $u^{\mu\nu} = x\delta_{\mu\nu}$、$v^\mu(\cdot) = ia_\mu$、$w = -a$ 以及 $\mathrm{tr} = (2\pi)^d\tau$ 代入公式[25, （式 (1.6–1.7)）], ，并注意到我们可以作如下恒等认定：$-i\partial_j = D_j$。在此情况下，公式 [25, （2.4–2.5）等] 表明，阶数为 $k \in \{0, 2, 4\}$ 的局部不变量由下式给出：

$$I_k(P) = \int_{\mathbb{R}^d} \sum_{\frac{k}{2} \le m \le k} (-1)^m \sum_{\substack{\mathscr{A} \subseteq \{1,\dots,m\} \\ |\mathscr{A}| = 2m-k}} f_m(\xi)[W_1^{\mathscr{A}}(\xi) \otimes \cdots \otimes W_m^{\mathscr{A}}(\xi)]\, d\xi, \tag{10.2}$$

其中我们使用了（4.3）中的记号 $W_i^{\mathscr{A}}$。显然，公式 (10.2) 对任意 k 都成立，这一点 Iochum 和 Masson 也在 [28] 中指出过。

我们可以将他们的“函数演算”（10.1）表示为一个多重算子积分。

引理 10.1. 对于所有元素 $b_1 \dots, b_m \in C^\infty(\mathbb{T}^d_\theta)$，我们有

$$(-1)^m f_m(\xi)[b_1 \otimes \cdots \otimes b_m] = T^{|\xi|^2 x}_{g^{[m]}}(b_1, \dots, b_m), \tag{10.3}$$

其中 $g(\alpha) := e^{-\alpha}$。

证明。 我们得到：

$$\begin{aligned} &(-1)^m f_m(\xi)[b_1 \otimes \cdots \otimes b_m]v \\ &= (-1)^m \int_{\Delta_m} e^{(s_1-1)|\xi|^2 x} b_1 e^{(s_2-s_1)|\xi|^2 x} \cdots b_m e^{-s_m|\xi|^2 x} v\, ds. \end{aligned} \tag{10.4}$$

由于 $b_1, \dots, b_m$ 是有界算子，上述表达式是一个多重算子积分，我们可以归纳地计算其符号。事实上，利用

$$\frac{e^{-s_m\alpha_m} - e^{-s_m\alpha_{m+1}}}{\alpha_m - \alpha_{m+1}} = -\int_0^{s_m} e^{(s_{m+1}-s_m)\alpha_m} e^{-s_{m+1}\alpha_{m+1}}\, ds_{m+1}.$$

我们得到

$$(-1)^m \int_{\Delta_m} e^{(s_1-1)\alpha_0} e^{(s_2-s_1)\alpha_1} \cdots e^{-s_m\alpha_m}\, ds = g^{[m]}(\alpha_0, \dots, \alpha_m),$$

这就是式 (10.4) 中多重算子积分的符号。 □

命题 10.2。对于所有 $b_1, \dots, b_m \in C^\infty(\mathbb{T}^d_\theta)$ 我们有

$$\frac{1}{2\pi}|\xi|^{-2m} \int_{-\infty}^{\infty} S^m_{\xi, i\lambda}(b_1, \dots, b_m) e^{i\lambda}\, d\lambda = (-1)^m f_m(\xi)[b_1 \otimes \cdots \otimes b_m]. \tag{10.5}$$

更一般地，对所有$\mathbf{B}_1$，…，$\mathbf{B}_m \in \mathcal{X}$，我们有

$$\frac{1}{2\pi}|\xi|^{-2m} \int_{-\infty}^{\infty} S^m_{\xi, i\lambda}(\mathbf{B}_1, \dots, \mathbf{B}_m) e^{i\lambda}\, d\lambda = (-1)^m f_m(\xi)[\pi(\mathbf{B}_1) \otimes \cdots \otimes \pi(\mathbf{B}_m)].$$

证明。 通过在多重算子积分的定义中作变量代换，随后使用引理 10.1，我们得到

$$\begin{aligned}|\xi|^{-2m}T^{x}_{(\sigma_{|\xi|^{-2}}g)^{[m]}}(b_1,\dots,b_m) &= T^{|\xi|^2 x}_{g^{[m]}}(b_1,\dots,b_m)\\ &= (-1)^m f_m(\xi)[b_1\otimes\cdots\otimes b_m].\end{aligned}$$

应用 (6.1)，即可得到命题的第一部分。

将 (10.5) 中的 b_j 替换为微分算子后，左端满足与右端相同的递归性质：参见引理 2.1]，并与我们的引理 5.1 和引理 5.2 比较。通过归纳法（其中 (10.5) 是归纳基础），即可得到命题的第二部分。□

定理 10.3。 设 θ 满足 $C(\mathbb{T}^d_\theta)\subseteq M_N(C(\mathbb{T}^d))$。沿用上述记号，对于所有的 $\frac{k}{2}\le m\le k$ 和 $\mathscr{A}\subseteq\{1,\dots,d\}$，且满足 $|\mathscr{A}|=2m-k$，有：

$$\begin{aligned}&(-1)^{\frac{k}{2}}\pi^{\frac{d}{2}}\sum_{\iota:\mathscr{A}\to\{1,\dots,d\}}c_d^{(\iota)}\,\mathbf{T}^{x,m}_{F_{k,d}}(\mathbf{W}_1^{\mathscr{A},\iota},\dots,\mathbf{W}_m^{\mathscr{A},\iota})\\ &=\int_{\mathbb{R}^d}(-1)^m f_m(\xi)[W_1^{\mathscr{A}}(\xi)\otimes\cdots\otimes W_m^{\mathscr{A}}(\xi)]\,d\xi,\end{aligned}\tag{10.6}$$

因此，我们的主要结果（定理 *3.3*）重现了由 [25] 给出的(10.2) 。

证明。 应用推论 7.1，随后应用命题 10.2，可得

$$\begin{aligned}&(-1)^{\frac{k}{2}}\pi^{\frac{d}{2}}\sum_{\iota:\mathscr{A}\to\{1,\dots,d\}}c_d^{(\iota)}\,\mathbf{T}^{x,m}_{F_{k,d}}(\mathbf{W}_1^{\mathscr{A},\iota},\dots,\mathbf{W}_m^{\mathscr{A},\iota})\\ &=\sum_{\iota:\mathscr{A}\to\{1,\dots,d\}}c_d^{(\iota)}\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^d}|\xi|^{-k}\int_{-\infty}^{\infty}S^m_{\xi,i\lambda}(\mathbf{W}_1^{\mathscr{A},\iota},\dots,\mathbf{W}_m^{\mathscr{A},\iota})e^{i\lambda}\,d\lambda\,d\xi\\ &=(-1)^m\sum_{\iota:\mathscr{A}\to\{1,\dots,d\}}c_d^{(\iota)}\int_{\mathbb{R}^d}|\xi|^{2m-k}f_m(\xi)[\pi(\mathbf{W}_1^{\mathscr{A},\iota})\otimes\cdots\otimes\pi(\mathbf{W}_m^{\mathscr{A},\iota})]\,d\xi.\end{aligned}\tag{10.7}$$

将注意力转向 (10.6) 的右端，我们用 $W^{\mathscr{A}}{}_{,j}{}^{\iota}$ 表示 $W_j^{\mathscr{A}}(\xi):=\pi(\mathbf{W}^{\mathscr{A}}{}_{,j}{}^{\iota})$（见 (4.3) 和 (3.5)），得到

$$f_m[W_1^{\mathscr{A}}(\xi)\otimes\cdots\otimes W_m^{\mathscr{A}}(\xi)]=\sum_{\iota:\mathscr{A}\to\{1,\dots,d\}}\prod_{j\in\mathscr{A}}\xi_{\iota(j)}f_m[W_1^{\mathscr{A},\iota}\otimes\cdots\otimes W_m^{\mathscr{A},\iota}].$$

因此，利用 (7.1)，

$$\begin{aligned}&(-1)^m\int_{\mathbb{R}^d}f_m(\xi)[W_1^{\mathscr{A}}(\xi)\otimes\cdots\otimes W_m^{\mathscr{A}}(\xi)]\,d\xi\\ &=(-1)^m\sum_{\iota:\mathscr{A}\to\{1,\dots,d\}}c_d^{(\iota)}\int_{\mathbb{R}^d}|\xi|^{2m-k}f_m(\xi)[W_1^{\mathscr{A},\iota}\otimes\cdots\otimes W_m^{\mathscr{A},\iota}]\,d\xi\end{aligned}\tag{10.8}$$

将 (10.7) 与 (10.8) 合并即可得出该定理。 □

Appendix A. Comments on the accompanying python program

本文附带一个 Python 脚本，可针对任意 $k\in\mathbb{Z}_+$ 计算 $I_k=I_k(\lambda_l(x)\Delta+\sum_i\lambda_l(a_i)D_i+\lambda_l(a))$，其形式为以 $C^\infty(\mathbb{T}^d_\theta)$ 中的元素为自变量的多重算子积分。该程序也可在 GitHub 页面 https: //github.com/TDHvanNuland/I_k 上找到。

该程序会输出一个恒等式（以 LaTeX 格式呈现），左边是 I_k，右边则是一个明确依赖于 d 的表达式。可以轻松调整该程序，以匹配所需的输出类型。

程序的最后一行确定了 k 的值。例如，要计算 I_2，可以将最后一行替换为

print_I(4)
替换为这一行

print_I(2)
并运行该文件，例如打开终端，导航到正确的目录，然后输入

Python 3 I_k.py
（任意已安装的 Python 版本都应可以运行）。输出应如下所示。

$$-\pi^{-d/2}I_2 = \sum_i \left(2T^x_{F^{[3]}_{2,d}}(x, D_i x, D_i x) + T^x_{F^{[2]}_{2,d}}(x, D_i D_i x) + T^x_{F^{[2]}_{2,d}}(a_i, D_i x) + T^x_{F^{[1]}_{2,d}}(a/d) \right)$$

$$+ \sum_i \frac{1}{d} \Big(4T^x_{F^{[4]}_{2,d}}(x, D_i x, x, D_i x) + 4T^x_{F^{[3]}_{2,d}}(x, D_i x, D_i x) + 8T^x_{F^{[4]}_{2,d}}(x, x, D_i x, D_i x)$$
$$+4T^x_{F^{[3]}_{2,d}}(x, x, D_i D_i x) + 2T^x_{F^{[3]}_{2,d}}(x, D_i x, a_i) + 2T^x_{F^{[2]}_{2,d}}(x, D_i a_i)$$
$$+2T^x_{F^{[3]}_{2,d}}(x, a_i, D_i x) + 2T^x_{F^{[3]}_{2,d}}(a_i, x, D_i x) + T^x_{F^{[2]}_{2,d}}(a_i, a_i) \Big)$$

以这种方式计算 I_4 会瞬间得到 1046 项，而计算 I_6 在英特尔(R) Core(T) i9-10900 CPU @ 2.80GHz 上大约需要 10 分钟，并会生成 140845 项（当然不包括对指标 i、j、k、..... 的求和，否则项数将取决于 d）。

References

[1] Azamov N., Carey A., Dodds P., Sukochev F. *Operator integrals spectral shift and spectral ,,加 flow.* **61** 2009 2, 241 263 拿大数学杂志 ( ), no. – . [2] Cohen P., Connes A. *Conformal geometry of the irrational rotation algebra.* 预印本 MPI/92- 93.[3] Connes A. *Noncommutative geometry.* 学术出版社, Inc., 圣迭戈, CA, 1994. [4] Connes A. *The action functional in noncommutative geometry.* 数学物理通讯 **117** (1988), no. 4, 673–683. [5] Connes A. *C* algebres et geometrie differentielle.*巴黎科学院院报 Ser. A-B **290** (1980), no. 13, A599–A604.[6] Chamseddine A., Connes A. *Resilience of the spectral standard model* 高能物理杂志 **2012** (2012), no. 104, 11 pp. [7] Connes A., Douglas M., Schwarz A. *Noncommutative geometry and matrix theory* 高能物理杂志 **02** (1998), no. 003, 35 pp. [8] Connes A., Fathizadeh F. *The term a_4 in the heat kernel expansion of noncommutative tori.* M¨ unster J. of Math. **12** (2019), 239–410. [9] Connes A., Moscovici H. *Modular curvature for noncommutative two-tori.* 美国数学会杂志 **27** (2014), no. 3, 639–684. [10] Connes A., Sukochev F., Zanin D. *Trace theorem for quasi-Fuchsian groups.* (俄文) 数学文集 **208** (2017), no. 10, 59–90；译文见数学文集 **208** (2017), no. 10, 1473–1502. [11] Connes A., Tretkoff P. *The Gauss-Bonnet theorem for the noncommutative two torus.* 非交换几何、算术及相关主题，141–158，约翰斯·霍普金斯大学出版社，巴尔的摩, MD, 2011.[12] Chamseddine A., van Suijlekom W. *A survey of spectral models of gravity coupled to matter.* 载于：Chamseddine A., Consani C., Higson N., Khalkhali M., Moscovici H., Yu G.（编）《非交换几何进展：纪念 Alain Connes 七十寿辰》（2019），第 1–51 页。

[13] Dabrowski L., Sitarz A. *Curved noncommutative torus and Gauss-Bonnet.* J. Math. Phys. 54 (2013), no. 1, 013518, 11 pp. [14] Dykema K., Skripka A. *Higher order spectral shift.* J. Funct. Anal. 257 (2009), no. 4, 1092– 1132.[15] Fathizadeh F. *On the scalar curvature for the noncommutative four torus.* J. Math. Phys. 56 (2015), no. 6, 062303, 14 pp. [16] Fathizadeh F., Khalkhali M. *Scalar curvature for the noncommutative two torus.* J. Noncommut. Geom. 7 (2013), no. 4, 1145–1183. [17] Fathizadeh F., Khalkhali M. *Scalar curvature for noncommutative four-tori.* J. Noncommut. Geom. 9 (2015), no. 2, 473–503. [18] Floricel R., Ghorbanpour A., Khalkhali M. *The Ricci curvature in noncommutative geometry.* J. Noncommut. Geom. 13 (2019), no. 1, 269–296. [19] Folland G., *How to integrate a polynomial over a sphere.* Am. Math. Mon. 108 (2001), no. 5, 446–448. [20] Gilkey P. *The spectral geometry of a Riemannian manifold.* J. Diff. Geom. 10 (1975), 601– 618.[21] H. Grosse and R. Wulkenhaar, 非交换 ϕ^4 理论的重整化 $\mathbb{R}^4$ ， 采用矩阵基。 *Commun. Math. Phys.* **256** (2005), 305–374. [22] Ha H., Lee G., Ponge R. *Pseudodifferential calculus on noncommutative tori I. Oscillating* , Internat. J. *integrals.* **30** 2019 8, 1950033, 74 Math. ( ), no. pp. [23] Ha H., Lee G., Ponge R. *Pseudodifferential calculus on noncommutative tori II. Main prop-* , Internat. J. *erties.* **30** 2019 8, 1950034, 73 Math. ( ), no. pp. [24] Ha H., Ponge R. *Laplace-Beltrami operators on noncommutative tori.* J. Geom. Phys. 150 (2020), 103594, 25 pp. [25] Iochum B., Masson T. *Heat trace for Laplace type operators with non-scalar symbols.* J. Geom. Phys. 116 (2017), 90–118. [26] Iochum B., Masson T. *Heat asymptotics for nonminimal Laplace type operators and application to noncommutative tori.* **129** 2018 1 24 J. Geom. Phys. ( ), – . [27] Iochum B., Masson T. *Heat coefficient a_4 for non minimal Laplace type operators.* J. Geom. Phys. 141 (2019), 120–146. [28] Iochum B., Masson T. *On the computation of the heat kernel coefficients for strongly elliptic differential operators.* 准备中的手稿, 个人通信。[29] Konechny A., Schwarz A. *Introduction to M(atrix) theory and noncommutative geometry.* Phys. Rep. 360 (2002) issues 5–6, 353–456. [30] Lesch M. *Divided differences in noncommutative geometry: rearrangement lemma functional* , J. *calculus and expansional formula.* **11** 2017 1, 193 223 Noncommut. Geom. ( ), no. – . [31] Lesch M., Moscovici H. *Modular curvature and Morita equivalence.* Geom. Funct. Anal. 26 (2016), no. 3, 818–873. [32] Lesch M., Moscovici H. *Modular Gaussian curvature.* 载于：Chamseddine A., Consani C., Higson N., Khalkhali M., Moscovici H., Yu G.（编）《非交换几何进展：纪念 Alain Connes 七十寿辰》（2019）：463-490。[33] Liu Y. *Modular curvature for toric noncommutative manifolds.* J. Noncommut. Geom. 12 (2018), no. 2, 511–575. [34] Liu Y. *Scalar curvature in conformal geometry of Connes-Landi noncommutative manifolds.* J. Geom. Phys. 121 (2017), 138–165. [35] Liu Y. *Cyclic structure behind modular Gaussian curvature.* arXiv 预印本 [math.QA], https://arxiv.org/pdf/2201.08730.pdf. [36] Lord S., Sukochev F., Zanin D. *Singular traces. Theory and applications.* De Gruyter 数学研究丛书，第 46 卷。De Gruyter，柏林，2013 年。 [37] *Connes integration formula for curved non-commutative torus.* McDonald E., [38] *Cyclic cocycles in the spectral action.* Ponge R. van Nuland T., van Suijlekom W. J. Noncommut. Geom., 16 (2022), no. 3, 1103–1135. [39] Peller V. *Multiple operator integrals and higher operator derivatives.* J. Funct. Anal. 233 (2006), no. 2, 515–544. [40] de Pagter B., Witvliet H., Sukochev F. *Double operator integrals.* J. Funct. Anal. 192 (2002), no. 1, 52– 111.[41] Potapov D., Sukochev F. *Unbounded Fredholm modules and double operator integrals.* J. Reine Angew. Math. 626 (2009), 159–185.

[42] Rieffel M. *Non-commutative tori – a case study of non-commutative differentiable manifolds* 《当代数学》**105** (1990), 191–211. [43] Rieffel M. *Deformation quantization for actions of* $\mathbb{R}^d$. Mem. Amer. Math. Soc. **106** (1993), no. 506, x+93 页[44] Skripka A., Tomskova A. *Multilinear Operator Integrals: Theory and Applications.* 《数学讲义》2250, Springer I nternational Publishing, 2019, XI+192页[45] van Suijlekom W. *Noncommutative Geometry and Particle Physics.* 《数学物理研究》. Springer, 2015, xvi+237页. [46] Sukochev F., Zanin D. *Local invariants of non-commutative tori.* St. Petersb. Math. J. **35** (2023), no. 2, 174–225. [47] Sukochev F., Zanin D. *Fubini theorem in noncommutative geometry.* J. Funct. Anal. **272** (2017), no. 3, 1230–1264. [48] Sukochev F., Zanin D. *The Connes character formula for locally compact spectral triples.* arXiv:1803.01551[49] Vassilevich D. *Heat kernel expansion: User's manual.* Phys. Rept. **388** (2003), 279–360. [50] Weyl H. *Das asymptotische Verteilungsgesetz der Eigenschwingungen beliebig gestalteter elastischer Körper.* *Über die Randwertaufgabe der Strahlungstheorie und asymptotische Spektralgesetze der Eigenschwingungen beliebig gestalteter elastischer Körper.* *Das asymptotische Verteilungsgesetz