arXiv:2303.04701v2 [hep-th] 7 Apr 2023

JT引力中的冯·诺伊曼代数

David K. Kolchmeyer

麻省理工学院理论物理中心，美国马萨诸塞州剑桥市，邮编 02139

摘要

我们对具有两个渐近 AdS边界的空间区间上的含物质场的JT引力进行量子化。我们研究由右哈密顿量和右边界上的引力修饰的物质算符生成的冯·诺依曼代数。我们证明，该代数的交换子就是以类似方式定义的左边界代数，并且这两个代数都是 II_∞ 型因子。这些代数为半经典极限之外的纠缠楔提供了精确定义。我们还讨论了纯 JT 引力与含物质场的JT引力中的因子化问题有何不同。

目录

1 引言 3

2 JT引力概述 **5**
2.1 对称性.7 2.2 边界粒子传播子.8 2.3 带圆锥缺陷的圆盘.9 2.4 喇叭.9 2.5 圆盘.11

3 圆盘上的物质 12

4 含物质的 JT 引力路径积分量子化 **15**
4.1 能量基底.20 4.2 共形块与算符乘积展开.24

5 边界可观测量代数 **25**

6 迹 **28**

7 因子化问题 327.1 边界代数的表示.32 7.2 关于因子化的评论.33

8 讨论 **34**

A 双喇叭关联函数 36 B $\mathcal{H}$ **42**
的完备基 C $H+B$ **43 的非负性**
D 另一种稠密定义的迹的正性 44 E 三点函数 45

1 引言

将算子代数理论应用于量子引力，带来了关于时空与量子力学之间关系的各种有趣结果。算子代数的研究由 von Neumann 开创 [1], ，他致力于发展量子力学的数学基础。冯·诺依曼（vN）代数是一个含幺 $*$-代数，由在弱拓扑下闭合的有界算符构成。从物理角度看，冯·诺依曼代数可视为描述量子系统中可能进行的测量的可观测量代数。一个基本结果是 vN 代数因子的分类，它们是更一般的冯·诺依曼代数的构建基石。因子可分为 I 型、II 型或 III 型。I 型因子等价于作用在希尔伯特空间上的所有有界算符构成的代数，也是有限维系统中唯一出现的因子。在统计力学和量子场论等无限维系统中，则会出现 II 型和 III 型因子。[1]

一个基本的运动学问题是，任意给定的可观测量代数如何纳入这一分类框架。了解出现的冯·诺依曼代数的类型，能够揭示系统的许多有趣性质。例如，Leutheusser 和 Liu [3–5] 证明了全息共形场论大$_1$ 极限中涌现的 III 型 N 因子的存在，并运用仅存在于 III 型$_1$ 因子中的半侧模平移理论，精确阐明了涌现的体时间这一概念。此外，在一系列论文 [6–8], 中，Witten 及其合作者精确刻画了半经典引力中双侧 AdS黑洞外部以及 dS静态区内的可观测量代数。他们发现，这些代数都是 II型因子，这立即意味着子系统纠缠熵除一个与态无关的加性常数外，完全确定。近期，Penington 和 Witten [9] 在与任意物质量子场论最小耦合的 Jackiw-Teitelboim（JT）引力背景下， [10, 11] 得出了类似结论。我们预计，算子代数技术将继续深化我们对引力物理如何从全息量子系统中涌现的理解。

本文继续了 [9]关于含物质场的JT引力代数结构的研究。JT引力的动力学由一维重参数化群自发破缺至 $SL(2,\ \mathbb{R})$ 所支配；其他具有物理意义的系统中也会出现这种现象，例如SYK模型或近极值黑洞的近视界区域 [12, 13]。含物质场的JT引力是可精确求解的，在弱耦合和强耦合下都会出现有趣的冯·诺依曼代数。特别是，在半经典（或弱耦合）极限下，可以在正则系综中定义涌现的III型$_1$因子（如 [3, 4]），也可以在微正则系综中定义涌现的II型$_\infty$ 因子（如 [7]）。与 [9], 一样，我们将聚焦于强耦合区域，研究与双侧黑洞左右AdS边界相关的冯·诺依曼代数。我们最终关注的是，在一般全息系统中，半经典代数如何从非微扰的体动力学中涌现；JT引力则提供了一个玩具模型，在其中，无论是在取半经典极限之前还是之后，都可以明确描述这些代数。我们将右边界代数 $\mathcal{A}_R$ 定义为由右哈密顿量以及右边界上的所有物质算符生成的代数。左代数 $\mathcal{A}_L$ 的定义类似。在高维AdS/CFT的语境下，物质算符应被视为与体物质场对偶的单迹算符及其（正规序）乘积。在半经典极限下，当 N 取为∞之后，这些算符通过HKLL重构 [14]生成体因果楔。与此相反，在强耦合区域，我们证明 $\mathcal{A}_L$ 和 $\mathcal{A}_R$ 互为交换子，这意味着它们的行为更像纠缠楔，而非因果楔。我们还证明 $\mathcal{A}_L$ 和

[1]关于类型分类的最新综述，请参见 [2] 。

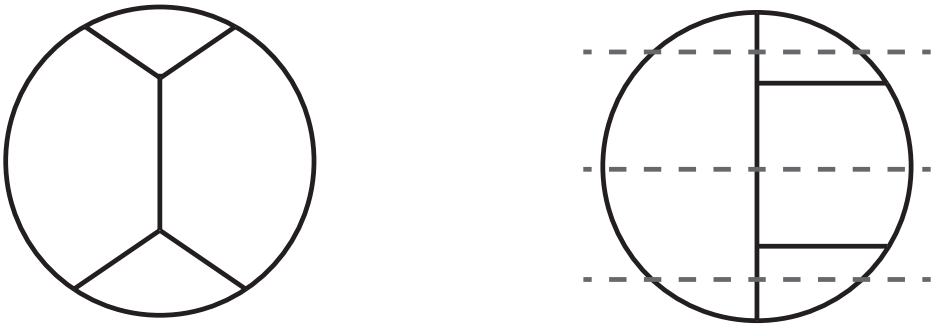

图1：左侧图示描绘了在双曲圆盘上量子化的物质理论的四点共形块。物质算符插入在圆盘边界上。对该图示应用一组简单规则（并对交换的态/算符求和），即可得到JT引力与物质耦合时的圆盘四点函数表达式。右侧，我们将图示分解为若干子图，以将其表示为作用于希尔伯特空间上的算符的期望值。底部子图表示一个右矢，对应于插入了物质算符的哈特尔-霍金态；中间的两个子图各表示一个插入右边界的算符。顶部子图则是左矢。

$\mathcal{A}_R$ 是因子。这些性质强烈表明 $\mathcal{A}_L$ 和 $\mathcal{A}_R$ 将纠缠楔推广到了半经典极限之外。因此，具有良好半经典极限的边界算符代数，远大于生成因果楔的算符代数。这进一步支持了的观点：模流单迹算符也具有良好的大 N 极限，并且是生成纠缠楔所必需的。此外，注意到 $\mathcal{A}_L$ 和 $\mathcal{A}_R$ 的并生成了希尔伯特空间 [9]上有界算子的整个I型代数。这其中包括有趣的双侧可观测量，例如虫洞长度算符的有界函数。边界代数 $\mathcal{A}_L$ 和 $\mathcal{A}_R$与有限 N 下的一对全息共形场论之间的主要区别在于，共形场论代数是I型因子，而JT引力边界代数是II型$_\infty$ 因子。尽管存在这一因子化问题 [15]，我们相信含物质场的强耦合JT引力有助于展示半经典物理的涌现。

为分析边界代数，我们用图示表示其生成元。这与使用图示来表示例如Temperley–Lieb代数的生成元，在理念上类似。具体而言，我们将展示，物质算符的欧几里得圆盘 n点关联函数可以通过对圆内绘制的、具有三价顶点的树图应用一组规则来计算（见图1）。我们可以将这类图示分解为若干子图，分别表示一个左矢、一个右矢，以及插入其间的算符。树图表示一个共形块，而图示规则取决于物质量子场论的三点结构常数。算符乘积展开的结合律保证，所有不同的可能树图都会得到相同的关联函数结果（对交换的主算符求和后）。我们的图示技巧扩展了 [16–18]。

相较于 [9] ，我们的主要新技术成果是证明边界代数是因子，并给出两种代数互为交换子的另一种证明。 [9]曾使用欧几里得方法证明后一结论，而我们的证明本质上是洛伦兹的，因为它只用到了生成元在能量基底中的矩阵元表达式。我们还给出了一个正稠密定义迹的新例子。

在第2节中，我们重新 介绍 JT引力和边界粒子形式主义。第3节中，我们 e

概述 AdS 上量子场论的相关内容[2]，以便确立约定。第4节中，我们通过将欧几里得圆盘关联函数改写为内积，量子化含物质场的JT引力。第5节中，我们定义 $\mathcal{A}_R$ 和 $\mathcal{A}_L$，并证明它们的有趣性质。第6节中，我们重申这些代数上存在唯一迹（除整体重标度外），并引入一种较弱的迹概念；它仍保留了一些重要的物理性质，但并不唯一。第7节中，我们讨论研究结果对于尝试利用边缘模分解希尔伯特空间的意义，重点强调纯 JT 引力与含物质场的JT引力之间的差异。进一步的研究方向总结于第8节。

2 JT引力回顾

本节回顾 JT引力中我们后续会用到的方面。想了解更多细节和参考文献的读者，建议阅读 [19]。与物质最小耦合的 JT引力的欧几里得作用量为

$$I[g,\Phi,\varphi] = -S_0\chi + I_{JT}[g,\Phi] + I_m[g,\varphi] \ , \tag{2.1}$$

$$I_{JT}[g,\Phi] = -\int_{\mathcal{M}} \sqrt{g}\Phi(R+2) - 2\int_{\partial\mathcal{M}} \sqrt{h}\Phi(K-1) \ , \tag{2.2}$$

其中我们设定了 $16\pi G_N = 1$，而 $I_m[g,\varphi]$ 是物质量子场论的作用量。欧拉示性数χ 和零温熵 S_0 在本文中并不重要，因为我们主要关注圆盘拓扑。在反德西特边界上，我们要求度规沿边界方向的分量满足

$$g_{\tau\tau}|_{\partial\mathcal{M}} = \frac{1}{\epsilon^2}, \tag{2.3}$$

而膨胀子的边界值固定为

$$\Phi|_{\partial\mathcal{M}} = \frac{\phi_b}{\epsilon}. \tag{2.4}$$

我们始终在极限 $\epsilon \to 0$ 下工作。参数 ϕ_b 的量纲为长度，并设定关联函数的整体尺度。G_N 的作用由 $\frac{1}{\phi_b}$ 承担，这意味着半经典（或弱耦合）极限 $\phi_b \to \infty$ 是一种高能极限，类似于统计系统中的热力学极限 [20], ，或全息共形场论中的大 N 极限。

本节余下部分将回顾用于计算欧几里得路径积分的边界粒子形式主义[16, 21, 22] 。另请参阅 [23]中的综述。我们主要关注圆盘关联函数。边界粒子由以下量子力学路径积分定义，[2]

$$K_\beta(\phi_2,\psi_2,\phi_1,\psi_1) := \int \mathcal{D}\phi\mathcal{D}\psi\mathcal{D}\pi_\phi\mathcal{D}\pi_\psi \exp\left(\int_0^\beta d\tau \left[i\pi_\psi\psi' + i\pi_\phi\phi' - \frac{1}{2\phi_b}\left[\frac{\pi_\psi^2}{2} + i\pi_\phi e^\psi - \frac{1}{2}e^{2\psi}\right]\right]\right), \tag{2.5}$$

它可以看作一种粒子的世界线理论，其目标空间是欧几里得双曲圆盘的渐近区域。ϕ 场指的是欧几里得圆盘上的角坐标

[2]本文中，$'$ 上标表示 τ 导数。关于该路径积分的更多说明，见 [24] 。

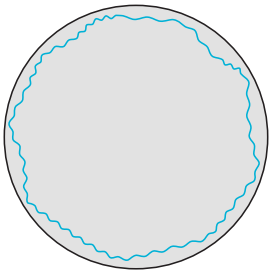

图2：灰色圆盘表示双曲圆盘，蓝色曲线是边界粒子的轨迹，也就是物理流形的边界。JT引力的圆盘欧几里得路径积分对所有可实现为蓝色曲线内部的几何结构进行积分。条件 $\phi(\tau+\beta) = \phi + 2\pi$ 确保边界曲线绕圆盘一周。

，而 ψ 是径向坐标。尽管 ϕ 被解释为角坐标，但我们选择在此路径积分中将 ϕ 视为非紧致玻色场。场 π_ψ 和 π_ϕ 与 ψ 和 ϕ正则共轭。正则哈密顿量 H 可直接从（2.5）读出，

$$2\phi_b H = \frac{\pi_\psi^2}{2} + i\pi_\phi e^{\psi} - \frac{1}{2}e^{2\psi}, \tag{2.6}$$

以及（2.5）可以按正则形式改写如下：

$$K_\beta(\phi_2,\psi_2,\phi_1,\psi_1) = \langle \phi_2\,\psi_2|e^{-\beta H}|\phi_1\,\psi_1\rangle\,, \tag{2.7}$$

其中

$$\langle \phi_2\,\psi_2|\phi_1\,\psi_1\rangle = \delta(\phi_2-\phi_1)\delta(\psi_2-\psi_1). \tag{2.8}$$

这个粒子的轨迹应理解为目标空间流形边界的位置。换句话说，由于JT引力中的非壳上路径积分仅限于具有双曲几何的流形，不同的非壳上构型可以视为给定二维双曲流形的切割区域。粒子的轨迹就是切口所在的位置。示意见图2。

此外，场 π_ϕ 充当拉格朗日乘子，用于施加约束

$$\phi' = \frac{e^{\psi}}{2\phi_b} > 0, \tag{2.9}$$

这意味着粒子的轨迹不会自相交，因为 ϕ 会随着粒子的时间 τ单调增加。

应将时间 τ 视为边界的物理时间（例如，它可以表示 SYK模型中的欧几里得时间）。为了更好地理解渐近径向坐标ψ，我们可以将圆盘上的度规写为如下形式，

$$ds^2 = d\rho^2 + d\phi^2\sinh^2\rho, \tag{2.10}$$

因此，粒子的轨迹由 $\phi(\tau)$ 和 $\rho(\tau)$ 给出。度规分量 $g_{\tau\tau} = \frac{1}{\epsilon^2}$ 上的 JT引力边界条件意味着

$$\epsilon^2(\rho'(\tau))^2 + (\phi'(\tau))^2\epsilon^2\sinh^2\rho(\tau) = 1, \tag{2.11}$$

并且，当 $\epsilon \to 0$ 增大时， $\rho(\tau)$ 也随之变大，而 $\rho'(\tau)$ 保持在 1 的量级。对于较小的 ϵ，我们于是有

$$\frac{e^{\psi(\tau)}}{2\phi_b} = \phi'(\tau) \approx \frac{2}{\epsilon} e^{-\rho(\tau)}, \tag{2.12}$$

这阐明了 ψ 作为径向坐标的作用，也表明在我们的约定中， ψ 值越大，对应的径向距离越小。

如果我们积分掉除 ϕ 之外的所有场（2.5），结果为

$$\int d\mu[\phi] \exp\left(-2\phi_b \int_0^\beta d\tau \left(\frac{1}{2}\left(\frac{\phi''}{\phi'}\right)^2 - \frac{1}{2}(\phi')^2\right)\right), \tag{2.13}$$

这与 [25]中研究的路径积分相同。在这种描述中，很明显 $\phi_b \to \infty$是一个弱耦合极限。测度 $d\mu[\phi]$ 由下式给出

$$d\mu[\phi] = \prod_\tau \frac{d\phi(\tau)}{\phi'(\tau)}, \tag{2.14}$$

它在 ϕ的重参数化下保持不变。因此，圆盘上的欧几里得路径积分可以如下计算：

$$Z_{\text{disk}}(\beta) = \frac{1}{\text{Vol } \widetilde{SL}(2,\mathbb{R})} \int_{-\infty}^{\infty} d\psi \int_{-\infty}^{\infty} d\phi \, K_\beta(\phi + 2\pi, \psi, \phi, \psi). \tag{2.15}$$

为了得到有限结果，我们形式上将路径积分除以 $\sim SL(2,\mathbb{R})$ 的无穷体积；它是 $PSL(2,R)$ 的万有覆盖，而后者是双曲圆盘的等距群。由于我们明确要求边界粒子轨迹满足 $\phi(\tau+\beta) = \phi(\tau) + 2\pi$，这个表达式能够正确计算圆盘。不同于 2π 的周期对应于圆盘内部的一个缺陷。现在我们来讨论路径积分的对称性，以便更仔细地对（2.15）进行规范固定。

2.1 对称性

$\mathfrak{sl}\mathbb{R}(2,\mathbb{R})$ 的生成元约定如下：

$$T_1 = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}, \quad T_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad T_3 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.16}$$

~我们可以在群流形的一个坐标片中，将群元素 $g \in SL(2,\mathbb{R})$ 参数化如下：

$$g = e^{T_1\phi} e^{-\psi T_2} e^{v(T_1 - T_3)}, \tag{2.17}$$

~其中 ϕ, ψ, v 是坐标。给定 $h \in SL(2,\mathbb{R})$，我们使用下式定义变换后的坐标 (ϕ^h, ψ^h, v^h)：

$$hg := e^{T_1\phi^h} e^{-\psi^h T_2} e^{v^h(T_1 - T_3)}. \tag{2.18}$$

将两个变换复合后，我们发现

$$((\phi^{g_1})^{g_2}, (\psi^{g_1})^{g_2}, (v^{g_1})^{g_2}) = (\phi^{g_2 g_1}, \psi^{g_2 g_1}, v^{g_2 g_1}), \qquad g_1, g_2 \in \widetilde{SL}(2,\mathbb{R}). \tag{2.19}$$

如果我们定义

$$\delta_a x = \frac{d}{ds} x^{e^{sT_a}}\Big|_{s=0}, \quad a \in \{1,2,3\}, \quad x \in \{\phi, \psi, v\}, \tag{2.20}$$

那么，无穷小变换为

$$\delta_1\phi = 1, \quad \delta_1\psi = 0, \quad \delta_1 v = 0, \tag{2.21}$$

$$\delta_2\phi = -\sin\phi, \quad \delta_2\psi = -\cos\phi, \quad \delta_2 v = e^{\psi}\sin\phi, \tag{2.22}$$

$$\delta_3\phi = \cos\phi, \quad \delta_3\psi = -\sin\phi, \quad \delta_3 v = -e^{\psi}\cos\phi. \tag{2.23}$$

尽管符号如此， v^h 不仅取决于 v 和 h ，还取决于 ψ 和 ϕ。同样， ψ^h 取决于 ϕ、 ψ和 h。为简洁起见，我们在符号中省略这些额外的依赖关系。

根据上文对 ϕ 和 ψ 的角向与径向坐标解释，作用于 ϕ 和 ψ 上的无穷小变换由欧几里得双曲圆盘的等距变换生成。这些变换不依赖于 v；这是一个有时便于记住的辅助坐标。接下来，我们定义

$$g_1 = e^{T_1\phi_1} e^{-\psi_1 T_2} e^{v_1(T_1 - T_3)}, \quad g_2 = e^{T_1\phi_2} e^{-\psi_2 T_2} e^{v_2(T_1 - T_3)}, \tag{2.24}$$

由此可知，矩阵元的任意函数$g_2^{-1}g_1$ （使用矩阵表示（2.16））都是不变量。考察$g_2^{-1}g_1$的矩阵元后，我们定义两个不变量：

$$e^{-\ell_{12}/2} := \frac{e^{\frac{\psi_1+\psi_2}{2}}}{2\sin\left(\frac{\phi_2-\phi_1}{2}\right)}, \tag{2.25}$$

$$m_{12} := (e^{\psi_2} + e^{\psi_1})\cot\frac{\phi_1 - \phi_2}{2} + v_2 - v_1. \tag{2.26}$$

在这些定义中，我们假设 $\phi_2 - \phi_1 \in (0,\ 2\pi)$。注意， ℓ_{12} 是双曲圆盘上（ϕ_1， ψ_1）与（ϕ_2， ψ_2）之间的不变重整化长度。重整化长度等于裸长度减去 $2\log\frac{2\phi_b}{\epsilon}$。本文中，通过减去 $2\log\frac{2\phi_b}{\epsilon}$ 进行重整化的长度记作一个 ℓ，也可以带下标和/或上标。这类长度对应于起点和终点都位于双曲圆盘渐近无穷远区域的测地线。此外，通过减去 $\log\frac{2\phi_b}{\epsilon}$ 进行重整化的长度记作一个 w，也可以带下标和/或上标。这类长度对应于起点位于圆盘渐近无穷远区域、终点位于体内的测地线。

注意，积分测度

$$d\phi\, d\psi\, e^{-\psi} \tag{2.27}$$

在 ϕ 和 ψ上的变换下保持不变。

2.2 边界粒子传播子

我们终于可以给出边界粒子传播子的显式表达式（2.5）。对于 $\phi_2 - \phi_1 \in (0, 2\pi)$，它为

$$\begin{aligned} K_\beta(\phi_2,\psi_2,\phi_1,\psi_1) &= \exp\left((e^{\psi_2}+e^{\psi_1})\cot\left(\frac{\phi_1-\phi_2}{2}\right)\right) \\ &\times \frac{1}{\pi^2}\frac{1}{\sin\frac{\phi_2-\phi_1}{2}}\int_0^\infty ds\, s\sinh(2\pi s) e^{-\frac{s^2}{4\phi_b}\beta} K_{2is}\left(\frac{2e^{\frac{\psi_2+\psi_1}{2}}}{\sin\frac{\phi_2-\phi_1}{2}}\right). \end{aligned} \tag{2.28}$$

正如 [24], 附录 B 中所解释的，这个公式直接取自 [21], ，仅对约定进行了调整。由于我们更倾向于使用对称不变表达式，因此定义

$$\mathcal{K}_{\beta,12} := e^{\frac{\psi_2}{2}+v_2} K_\beta(\phi_2,\psi_2,\phi_1,\psi_1) e^{\frac{\psi_1}{2}-v_1}, \tag{2.29}$$

$$= \frac{2}{\pi^2} e^{m_{12}-\ell_{12}/2} \int_0^\infty ds\, s \sinh(2\pi s) e^{-\frac{s^2}{4\phi_b}\beta} K_{2is}\left(4e^{-\ell_{12}/2}\right). \tag{2.30}$$

记号 $\mathcal{K}_{\beta,12}$ 很方便，因为它并不依赖于在圆盘上选择坐标的具体方式。如果需要明确指明坐标，我们将写作 $\mathcal{K}_\beta(\phi_2,\psi_2,v_2;\phi_1,\psi_1,v_1)$。额外的 v 变量总会从最终表达式中消失。这个传播子的粘合性质可由 [21] 和 [24] 的附录 B 得出：

$$\begin{aligned}&\int_{-\infty}^{\infty} d\psi_2\, e^{-\psi_2} \int_{\phi_1}^{\phi_3} d\phi_2\, \mathcal{K}_{\beta_2}(\phi_3,\psi_3,v_3;\phi_2,\psi_2,v_2)\mathcal{K}_{\beta_1}(\phi_2,\psi_2,v_2;\phi_1,\psi_1,v_1)\\ &= \int_{-\infty}^{\infty} d\psi_2\, e^{-\psi_2} \int_{\phi_1}^{\phi_3} d\phi_2\ \mathcal{K}_{\beta_2,23}\mathcal{K}_{\beta_1,12} = \mathcal{K}_{\beta_1+\beta_2}(\phi_3,\psi_3,v_3;\phi_1,\psi_1,v_1).\end{aligned} \tag{2.31}$$

对这个传播子的来源感兴趣的读者，建议阅读 [21–23]。我们不再重复他们的推导，而是通过重现已知的圆盘 [25], 带圆锥缺陷的圆盘 [26], 和喇叭 [27]的结果，来验证式（2.28）。

2.3 带圆锥缺陷的圆盘

最简单的情形是带圆锥缺陷的圆盘，因为其等距群就是U（1）。我们只需将式（2.15）中的周期替换为另一个周期 $2\pi-\alpha$:

$$\frac{1}{\text{Vol}\ U(1)} \int_{-\infty}^{\infty} d\psi \int_0^{2\pi-\alpha} d\phi\, K_\beta(\phi+2\pi-\alpha,\psi,\phi,\psi), \tag{2.32}$$

并注意，Vol $U(1)=2\pi-\alpha$抵消了 ϕ积分的贡献。将上面的 ψ 积分与 s (2.28)中的积分互换，并在 [28], (2.32)中使用6.621.3，得到

$$\frac{1}{2\sin\frac{\alpha}{2}} \frac{1}{\pi} \int_0^\infty ds\ \cosh(2\pi s(1-\alpha)) e^{-\frac{s^2}{4\phi_b}\beta}. \tag{2.33}$$

这与 [26] 中的结果一致，相差一个因子$2\sin\frac{\alpha}{2}$。比较 [26]与中使用的测度与(2.5)中的测度即可解释这一差异；后者在对除 ϕ之外的所有场积分后变为(2.14)。 [26] 中使用的测度是可以在维拉索罗群的余伴随轨道上定义的典范测度。利用 [25], 第2.2节的方法，可以明确证明 [26] 中使用的测度与(2.14)相差因子$2\sin\frac{\alpha}{2}$。因此，边界粒子形式主义与先前对带圆锥缺陷的圆盘所做的计算相一致。

2.4 喇叭

现在我们使用边界粒子传播子来计算喇叭。为此，我们必须换用另一组更适合将喇叭表示为圆盘（带有识别）子区域的坐标。考虑半圆盘上的以下双曲度量：

$$ds^2 = dr^2 + du^2 \cosh^2 r, \quad r\in(0,\infty), \quad u\in(-\infty,\infty). \tag{2.34}$$

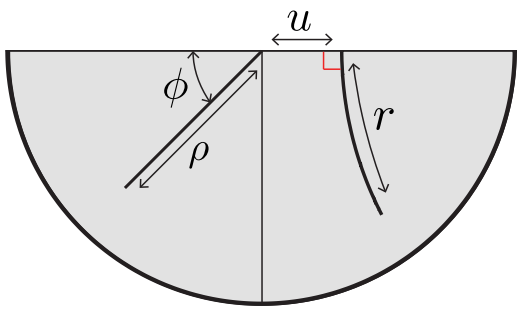

图3：本文全篇使用此处定义的（ρ， ϕ）坐标系。第2.4节使用此处定义的（r， u）坐标系。粗黑线表示长度为 ρ 和 r的测地线。

如果 r 的取值范围是（$-\infty$， ∞），那么这些坐标就会完整覆盖整个圆盘。半圆盘的坐标约定如图3所示。我们将坐标 w 定义为

$$w := r - \log \frac{2\phi_b}{\epsilon}, \tag{2.35}$$

因此， w 和 u 是圆盘渐近无穷远区域的坐标。这些坐标与（ϕ， ψ）坐标之间的坐标变换如下：

$$e^{-\psi} = \frac{e^w}{2}\cosh u, \tag{2.36}$$

$$-\cot\left(\frac{\pi + 2\phi}{4}\right) = \tanh\frac{u}{2}, \tag{2.37}$$

不变量 ℓ_{12} 和 m_{12} 变为

$$e^{-\ell_{12}/2} = \frac{e^{\frac{-w_1-w_2}{2}}}{\sinh\frac{u_2-u_1}{2}}, \tag{2.38}$$

$$m_{12} = -2(e^{-w_1} + e^{-w_2})\coth\left(\frac{u_2-u_1}{2}\right) + v_2 - v_1. \tag{2.39}$$

不变测度 $d\phi\, d\psi\, e^{-\psi}$ 变为

$$d\phi\, d\psi\, e^{-\psi} = \frac{du\, dw}{2}e^w. \tag{2.40}$$

通过作如下识别 $u \sim u + b$，可从（2.34）得到小号几何，其中 b 是喇叭终止处闭测地线的长度。我们定义小号传播子

$$\mathcal{K}^t_\beta(u_2, w_2; u_1, w_1) \tag{2.41}$$

为（2.30），其中 m_{12} 和 ℓ_{12} 由（2.38）和（2.39）给出，而 $v_1 = v_2 = 0$。于是喇叭由下式给出

$$\frac{1}{\mathrm{Vol}\, U(1)}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dw\, e^w}{2}\int_0^b du\, \mathcal{K}^t_\beta(u+b, w; u, w) = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{dw\, e^w}{2}\mathcal{K}^t_\beta(b, w; 0, w), \tag{2.42}$$

其中在这种情况下，Vol $U(1) = b$。按照前面小节中的方法继续推导，我们发现喇叭变为

$$\frac{1}{2\sinh\frac{b}{2}}\frac{1}{\pi}\int_0^\infty ds\,\cos(bs)e^{-\frac{s^2}{4\phi_b}\beta}. \tag{2.43}$$

与前一个小节完全类似，这个公式与 [27] 相差一个因子 $2\sinh\frac{b}{2}$。通过比较边界粒子量子力学的测度与 [27]中所用的喇叭涨落测度，便可解释这一差异。[3] 因此，边界粒子形式主义能够计算出正确的喇叭配分函数。

2.5 圆盘

现在我们回顾 [21]中进行的圆盘计算。我们要计算

$$\frac{\int_{-\infty}^{\infty}d\phi_1\int_{-\infty}^{\infty}d\psi_1 d\psi_2 e^{-\psi_1-\psi_2}\int_{\phi_1}^{\phi_1+2\pi}d\phi_2\,\mathcal{K}_{\beta_2}(\phi_1+2\pi,\psi_1,v_1;\phi_2,\psi_2,v_2)\mathcal{K}_{\beta_1}(\phi_2,\psi_2,v_2;\phi_1,\psi_1,v_1)}{\text{Vol }\widetilde{SL}(2,\mathbb{R})}. \tag{2.44}$$

注意，被积函数实际上并不依赖于 v_1 或 v_2。为了执行 Faddeev–Popov规范固定程序，我们定义

$$\Delta(\phi_1,\phi_2,\psi_1,\psi_2) := 8\int dg\,\delta(\phi_1^g)\delta(\phi_2^g-\pi)\delta(\psi_1^g-\psi_2^g), \tag{2.45}$$

其中，g 积分是在 $\widetilde{SL}(2,\mathbb{R})$ 流形上进行的，而 dg 是 Haar测度。我们希望将规范固定为 $\phi_1 = 0$、$\phi_2 = \pi$和 $\psi_1 = \psi_2$。由于 (2.21)、(2.22) 和 (2.23) 中 ϕ 和 ψ 的无穷小变换不依赖于 ψ，因此 $\Delta(\phi_1,\phi_2,\psi_1,\psi_2)$ 只给出一个常数。由于圆盘的整体归一化存在歧义，我们将直接把 (2.45) 代入 (2.44)。最终结果为

$$8\int_{-\infty}^{\infty}d\psi\,e^{-2\psi}\mathcal{K}_{\beta_2}(2\pi,\psi,0;\pi,\psi,0)\mathcal{K}_{\beta_1}(\pi,\psi,0;0,\psi,0). \tag{2.46}$$

在后续应用中，假设我们想在这项计算中固定点 1 和点 2 之间的重整化长度。只需在（2.44）中插入一个狄拉克 δ 函数：

$$\delta\left(\ell+2\log\left(\frac{e^{\frac{\psi_1+\psi_2}{2}}}{2\sin\left(\frac{\phi_2-\phi_1}{2}\right)}\right)\right), \tag{2.47}$$

重整化长度的定义见（2.25）。插入该函数后，得到 (2.46)

$$8\int_{-\infty}^{\infty}d\psi\,e^{-2\psi}\mathcal{K}_{\beta_2}(2\pi,\psi,0;\pi,\psi,0)\mathcal{K}_{\beta_1}(\pi,\psi,0;0,\psi,0)\delta(\ell+2\psi-2\log 2) = \Psi_{\beta_2}(\ell)\Psi_{\beta_1}(\ell), \tag{2.48}$$

其中

$$\Psi_\beta(\ell) := 2e^{-\psi}\mathcal{K}_\beta(\pi,\psi,0;0,\psi,0)\big|_{\psi=\log 2-\frac{\ell}{2}} \tag{2.49}$$

$$= \int_0^\infty ds\,\rho(s)e^{-\frac{s^2}{4\phi_b}\beta}\,2K_{2is}\left(4e^{-\ell/2}\right), \tag{2.50}$$

[3]参见 [18]中的脚注 79。

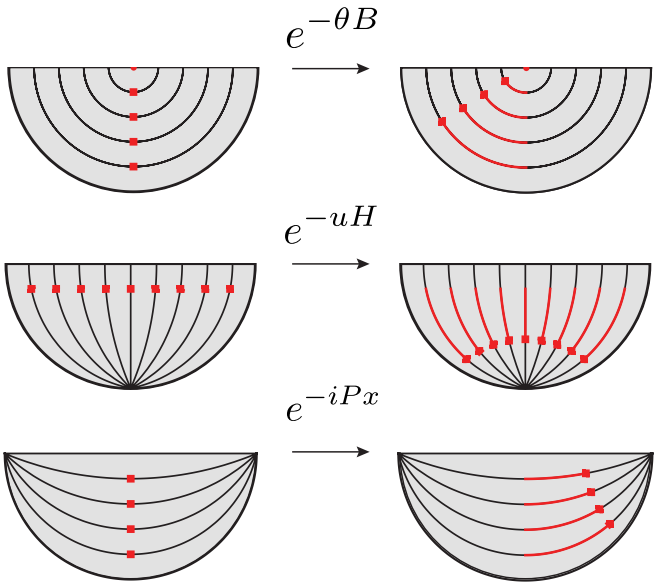

图4：欧几里得路径积分在希尔伯特空间 $\mathcal{H}_0$ 中制备态，该希尔伯特空间与水平区间边界相关联。左侧的红点表示在下半圆盘中插入 φ 的位置。在对称变换的作用下，物质算符沿红线移动到其最终位置，如图所示。在这里， θ、 u 和 x 为正。

圆盘态密度 $\rho(s)$ 定义为

$$\rho(s) := \frac{s}{\pi^2}\sinh(2\pi s). \tag{2.51}$$

注意到贝塞尔函数满足

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\ell\, 2K_{2is}(4e^{-\ell/2})\, 2K_{2is'}(4e^{-\ell/2}) = \frac{\delta(s-s')}{\rho(s)}, \tag{2.52}$$

我们可以如下直接计算圆盘：

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\ell\, \Psi_{\beta_2}(\ell)\Psi_{\beta_1}(\ell). \tag{2.53}$$

如 [21] 中所示， Ψ_β（ℓ）是长度基底中的哈特尔-霍金波函数。回顾一下，哈特尔-霍金波函数可以通过将圆盘切分为两个半圆盘来计算。该计算总结于图 5 中，但不包含红点（红点表示物质算符的插入）。在接下来的章节中，我们将把这一计算推广到包含物质的情形。

3 圆盘上的物质

本节将回顾在 AdS_2 中对物质进行量子化的若干方面。

在整体 AdS 上量子化的量子场论$_2$ 有三个厄米时空对称生成元： B， H和 P。希尔伯特空间 $\mathcal{H}_0$ 中的一个态可以通过在欧几里得半圆盘的某处插入一个局域算符 φ 来制备。为明确我们的约定，我们在图4 中展示了这些生成元如何作用于此类态。它们的代数如下：

$$[B, H] = iP, \quad [H, P] = iB, \quad [B, P] = iH. \tag{3.1}$$

体算符 φ 外推到边界后，会变成边界算符 O。为简单起见，令 φ 为一个标量场。在极坐标下，

$$ds^2 = d\rho^2 + d\phi^2 \sinh^2 \rho, \tag{3.2}$$

我们将边界算符定义为

$$O(\phi) := \lim_{\rho\to\infty} e^{\Delta\rho}\varphi(\phi, \rho). \tag{3.3}$$

参数 Δ 取决于所考虑的具体算符和理论。我们将假设物质理论是幺正的，因此 $\Delta > 0$。令 $|O(\phi)\rangle$ 表示 $\phi \in (0, \pi)$ 所对应的态，该态由在半圆盘上的欧几里得路径积分中插入（3.3）制备。

为证明（3.1）定义了一个 $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ 代数，我们定义

$$L_0 := H, \quad L_{\pm1} := B \pm iP, \tag{3.4}$$

使得

$$[L_n, L_m] = (n - m)L_{n+m}. \tag{3.5}$$

物质量子场论中的所有态都可以归入该代数的主算符及其后裔态。物质希尔伯特空间是幺正最低权离散级数表示与平凡表示（即真空态）的直和。这些幺正表示满足 H 有下界。存在态-算符对应关系，其中插入在半圆盘底部（即 $\phi = \frac{\pi}{2}$ 和 $\rho = \infty$，见图 3）的算符对应于半圆盘区间边界上的态。因此， $|O(\frac{\pi}{2})\rangle$ 是一个主算符，而 $|O(\phi)\rangle$ 对于$\phi \neq \frac{\pi}{2}$ 是一个后裔态。

我们由此推导出 $|O(\phi)\rangle$ 的变换如下：

$$e^{-uH}\,|O(\phi)\rangle = \left(\frac{d\phi^{g_u}}{d\phi}\right)^{\Delta} |O(\phi^{g_u})\rangle\,, \quad g_u := e^{uT_3}, \tag{3.6}$$

$$e^{-iPx}\,|O(\phi)\rangle = \left(\frac{d\phi^{g_x}}{d\phi}\right)^{\Delta} |O(\phi^{g_x})\rangle\,, \quad g_x := e^{-xT_2}, \tag{3.7}$$

$$e^{-\theta B}\,|O(\phi)\rangle = \left(\frac{d\phi^{g_\theta}}{d\phi}\right)^{\Delta} |O(\phi^{g_\theta})\rangle\,, \quad g_\theta := e^{-\theta T_1}. \tag{3.8}$$

被所有对称生成元湮灭的真空态记为$|0\rangle$。

上文展示了如何利用体场 φ 制备一个初级态及其后裔态，它们构成一个离散级数表示。一般的量子场论有无穷多个初级态。每个归一化的初级态（真空态除外）记为 $|O_i(\frac{\pi}{2})\rangle$，其中 i 用于标记所选的初级态。于是，对于 $\phi \in (0, \pi)$，我们定义 $|O_i(\phi)\rangle$

通过使用对称生成元作用于 $|O_i(\frac{\pi}{2})\rangle$，并利用（3.6）、（3.7）、（3.8）。态-算符对应指出，$|O_i(\phi)\rangle$ 可以通过在半圆盘欧几里得路径积分中插入一个初级算符 $O_i(\phi)$ 来制备，该算符位于渐近 AdS 区域的角坐标ϕ。[4]

$|O_i(\phi_1)\rangle$ 与 $|O_j(\phi_2)\rangle$ 的内积可通过圆盘上的欧几里得路径积分计算。我们记作

$$\langle O_j(\phi_2)|O_i(\phi_1)\rangle = \langle \overline{O_j}(\overline{\phi_2})O_i(\phi_1)\rangle\,, \tag{3.9}$$

O_j 上方的横线表示初级算符空间上的一个对合（或共轭），而 $\phi := 2\pi - \phi$ 是 ϕ 关于半圆盘水平边界的镜像。对合 $O_j \to \overline{O_j}$ 不会改变标度维数。不失一般性，我们假设 $O_j = \overline{O_j}$。于是，共形不变性意味着通过欧几里得路径积分计算的二点关联函数满足

$$\langle O_j(\phi_2)O_i(\phi_1)\rangle = \frac{\delta_{ij}}{\left(\sin\frac{\phi_2-\phi_1}{2}\right)^{2\Delta_i}}. \tag{3.10}$$

由于 $\phi = 0$ 和 $\phi = \pi$ 位于与 $\mathcal{H}_0$相关联的区间上，我们令 $O_i(0)$ 和 $O_i(\pi)$ 定义作用于 $\mathcal{H}_0$的局域算符[5] 。条件 $O_i = \overline{O_i}$ 意味着这些算符是厄米的。它们的矩阵元定义了结构常数：

$$C_{ijk} := \langle O_i\left(\frac{\pi}{2}\right)|2^{-\Delta_j}O_j(\pi)|O_k\left(\frac{\pi}{2}\right)\rangle = \langle O_i\left(\frac{\pi}{2}\right)|2^{-\Delta_k}O_k(0)|O_j\left(\frac{\pi}{2}\right)\rangle\,, \tag{3.11}$$

而共形不变性意味着

$$\langle O_i(\phi_3)O_j(\phi_2)O_k(\phi_1)\rangle = \frac{C_{ijk}}{\left(\sin\frac{\phi_2-\phi_1}{2}\right)^{\Delta_k+\Delta_j-\Delta_i}\left(\sin\frac{\phi_3-\phi_1}{2}\right)^{\Delta_k+\Delta_i-\Delta_j}\left(\sin\frac{\phi_3-\phi_2}{2}\right)^{\Delta_i+\Delta_j-\Delta_k}}. \tag{3.12}$$

我们取结构常数 C_{ijk} 为实数，因为它们是通过欧几里得路径积分计算得出的。因此，C_{ijk} 在指标的任意置换下保持不变。

为了理解在边界粒子形式主义中如何处理物质算符插入，我们使用（2.12）来计算边界粒子在时间 τ所在位置处的重整化 $\varphi(\phi,\ \rho)$ 场。我们有

$$\lim_{\epsilon\to 0}\left(\frac{4\phi_b}{\epsilon}\right)^{\Delta}\varphi(\phi(\tau),\rho(\tau)) = \lim_{\epsilon\to 0}\left(\frac{4\phi_b}{\epsilon}\right)^{\Delta}\varphi(\phi(\tau),\log\frac{4\phi_b}{\epsilon}-\psi(\tau)) = e^{\Delta\psi(\tau)}O(\phi(\tau)). \tag{3.13}$$

注意，$e^{\Delta\psi}O(\phi)$ 在同时作用于 O 和 ϕ、ψ 坐标的变换下保持不变，

$$e^{\Delta\psi}O(\phi) = e^{uH}e^{\Delta\psi^{g_u}}O(\phi^{g_u})e^{-uH} = e^{iPx}e^{\Delta\psi^{g_x}}O(\phi^{g_x})e^{-iPx} = e^{\theta B}e^{\Delta\psi^{g_\theta}}O(\phi^{g_\theta})e^{-\theta B}. \tag{3.14}$$

因此，在边界粒子路径积分中插入 $e^{\Delta\psi(\tau)}O(\phi(\tau))$（2.5）对应于在时间 τ于边界上插入一个算符。

[4]换句话说，存在一个体场，使得对于 $O_i(\phi)$，一个类似于（3.3）的方程成立。例如，该场可以是两个 φ 场的正规序乘积。[5]严格来说，量子场论中的局域算符实际上是算符值分布。稍后，我们将讨论如何从局域算符构造有界算符。

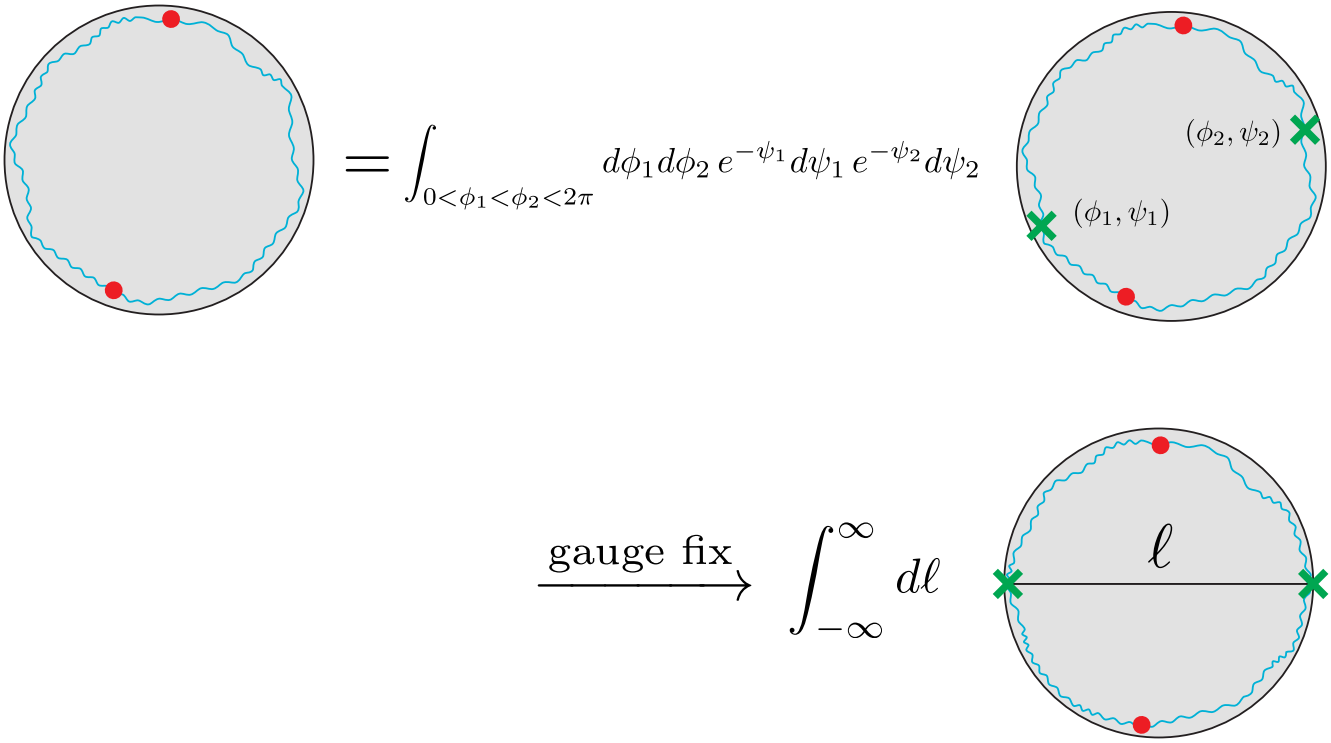

图5：左上方展示了圆盘二点函数的计算，其中算符（以红点表示）沿着边界粒子的轨迹，在指定的边界时间处插入。为了计算这个二点函数，我们选取两个任意的边界时间（以绿色叉号标记）。边界粒子在这些时刻的位置分别为（ϕ_1，ψ_1）和（ϕ_2，ψ_2）。我们对这些位置显式积分，并使用边界粒子传播子来计入所有可能的轨迹（该积分与（2.44）相同，但带有物质算符插入）。规范固定条件要求绿色叉号与圆盘中心等距，且其角坐标为 $\phi = 0$ 和 $\phi = \pi$，如图所示。规范固定后，四维积分化简为对重整化长度 ℓ的一维积分。我们还对物质理论的一组完备态求和。因此，希尔伯特空间的一个标准正交基态由 ℓ 以及物质希尔伯特空间的一个标准正交基态共同标记。

4 带有哑光的 JT 路径积分量子化 r

现在我们来描述含物质场的JT引力的路径积分量子化。在第2.5节中，我们解释了如何将一个圆盘切分为两个半圆盘，每个半圆盘都制备一个哈特尔-霍金态。同样，在第3节中，我们展示了如何使用半圆盘上的欧几里得路径积分来制备物质态。本节将这两种计算结合起来。结果等价于在洛伦兹度规下对含物质场的JT引力进行正则量子化，如 [9]所述。

见图5 ，其中描绘了圆盘二点函数的计算。它与第2.5节的空圆盘计算完全相同，只是如图所示插入了两个额外的算符。使用第2.5节中的相同规范固定技术，我们可以将二点函数写成两个态的重叠，其中每个态都是通过带有一次物质算符插入的欧几里得路径积分制备的。由此可得，含物质的 JT 理论的希尔伯特空间为

$$\mathcal{H} := \mathcal{H}_0 \otimes L^2(\mathbb{R}), \tag{4.1}$$

其中 $L^2(\mathbb{R})$ 表示长度模 ℓ的平方可积函数。 $\mathcal{H}_0$ 因子可以看作是重整化长度为 ℓ的柯西切片上物质理论的希尔伯特空间。 $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ 生成元在 $\mathcal{H}_0$ 上的作用，就是 [29]中讨论的物理生成元。

带有一个物质插入的哈特尔-霍金态为

$$|\Psi^O_{\beta_1,\beta_2}(\ell)\rangle := \int_{-\infty}^{\infty} d\psi_1 e^{-\psi_1} \int_0^{\pi} d\phi_1 \Big[2e^{-\psi_0} \mathcal{K}_{\beta_2}(\pi,\psi_0,0;\phi_1,\psi_1,v_1) \\ e^{\Delta\psi_1} |O(\phi_1)\rangle \ \mathcal{K}_{\beta_1}(\phi_1,\psi_1,v_1;0,\psi_0,0)\Big|_{\psi_0=\log 2-\frac{\ell}{2}}\Big], \tag{4.2}$$

这与式（2.49）相同，只是在路径积分中多了一个物质插入。请注意， ψ变量的积分范围始终为（$-\infty$, ∞）。

现在我们计算右哈密顿量和左哈密顿量 H_R 和 H_L。不存在物质时，我们有 $H_R = H_L$，但一般情况下二者并不相同。读者可以略过这一推导。最终方程以方框标出，并汇总于图 6。现在我们着重计算 H_R。根据定义，有

$$\begin{aligned} e^{-\beta H_R} |\Psi^O_{\beta_1,\beta_2}(\ell)\rangle &:= |\Psi^O_{\beta_1,\beta_2+\beta}(\ell)\rangle \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} d\psi_1 e^{-\psi_1} \, d\psi e^{-\psi} \int_{0<\phi_1<\phi<\pi} d\phi_1 d\phi \Big[2e^{-\psi_0} \\ &\mathcal{K}_{\beta}(\pi,\psi_0,0;\phi,\psi,v)\mathcal{K}_{\beta_2}(\phi,\psi,v;\phi_1,\psi_1,v_1) \\ &e^{\Delta\psi_1} |O(\phi_1)\rangle \ \mathcal{K}_{\beta_1}(\phi_1,\psi_1,v_1;0,\psi_0,0)\Big|_{\psi_0=\log 2-\frac{\ell}{2}}\Big]. \end{aligned} \tag{4.3}$$

接下来，我们要寻找一种变换，将连接（0， ψ_0）和（ϕ， ψ）的测地线变换为一条以极坐标系原点为中心的水平测地线。根据定义，该测地线从（0， ψ_2）延伸至（π， ψ_2）。具体而言，定义 $\tilde{g}$ 和 ψ_2 使得

$$(\pi^{\tilde{g}}, \psi_2^{\tilde{g}}) = (\phi,\psi), \quad \text{and} \quad (0^{\tilde{g}}, \psi_2^{\tilde{g}}) = (0,\psi_0). \tag{4.4}$$

请注意， $\tilde{g}$ 和 ψ_2 取决于积分变量 ϕ， ψ。明确地说，有

$$e^{\psi_2} := \frac{e^{\frac{\psi+\psi_0}{2}}}{\sin\frac{\phi}{2}}, \tag{4.5}$$

$$\tilde{g} := e^{-\cot\left(\frac{\phi}{2}\right)(T_1-T_3)} e^{(\psi_2-\psi_0)T_2}. \tag{4.6}$$

那么， （4.3）变为

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\psi_1 e^{-\psi_1} \, d\psi e^{-\psi} \int_{0<\phi_1<\phi<\pi} d\phi_1 d\phi \Big[2e^{-\psi_0} \\ \mathcal{K}_{\beta}(\pi,\psi_0,0;\phi,\psi,v^{\tilde{g}})\mathcal{K}_{\beta_2}(\pi^{\tilde{g}},\psi_2^{\tilde{g}},v^{\tilde{g}};\phi_1,\psi_1,v_1) \\ e^{\Delta\psi_1} |O(\phi_1)\rangle \ \mathcal{K}_{\beta_1}(\phi_1,\psi_1,v_1;0^{\tilde{g}},\psi_2^{\tilde{g}},0^{\tilde{g}}) e^{0^{\tilde{g}}}\Big|_{\psi_0=\log 2-\frac{\ell}{2}}\Big]. \tag{4.7}$$

我们可以将 v 替换为 v^g ，因为被积函数实际上并不依赖于 v。同样，我们将 $\mathcal{K}_{\beta_1}$ 的最后一个参数替换为一个 $0^{\tilde{g}}$ ，并加入一个相应的 e^{0^g} 项。具体来说，我们

有

$$e^{0^{\tilde{g}}} = e^{-e^{\psi_0}\cot\left(\frac{\phi}{2}\right)}, \tag{4.8}$$

$$v^{\tilde{g}} = v + e^{\psi}\cot\left(\frac{\phi}{2}\right). \tag{4.9}$$

˜接下来，我们定义一个对称变换 V，它作用于 $\mathcal{H}_0$，使得 t

$$e^{\Delta\psi_1^{\tilde{g}}}O(\phi_1^{\tilde{g}}) = \tilde{V}e^{\Delta\psi_1}O(\phi_1)\tilde{V}^{-1}. \tag{4.10}$$

具体而言，我们有

$$\tilde{V} := e^{-\cot\left(\frac{\phi}{2}\right)(B+H)}e^{-iP(\psi_0-\psi_2)}. \tag{4.11}$$

接下来，我们对 $\tilde{g}$ 积分变量进行变换 ϕ_1，ψ_1 在（4.7）中，并结合（4.10）以及 $\mathcal{K}_{\beta_2}$ 和 $\mathcal{K}_{\beta_1}$ 的不变性，得到

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} d\psi_1 e^{-\psi_1}\, d\psi e^{-\psi}\int_0^{\pi} d\phi \int_0^{\pi} d\phi_1 \Big[& 2e^{-\psi_0} \\ & \mathcal{K}_{\beta}(\pi,\psi_0,0;\phi,\psi,v^{\tilde{g}})\mathcal{K}_{\beta_2}(\pi,\psi_2,v;\phi_1,\psi_1,v_1) \\ & \tilde{V}e^{\Delta\psi_1}\left|O(\phi_1)\right\rangle \mathcal{K}_{\beta_1}(\phi_1,\psi_1,v_1;0,\psi_2,0)e^{0^{\tilde{g}}}\Big|_{\psi_0=\log 2-\frac{\ell}{2}}\Big].\end{aligned} \tag{4.12}$$

利用（4.2）、（4.8）和（4.9），我们可以将（4.12）改写如下：

$$\begin{aligned}e^{-\beta H_R}\left|\Psi^O_{\beta_1,\beta_2}(\ell)\right\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} d\psi\, e^{-\psi}\int_0^{\pi} d\phi \Big[& \mathcal{K}_{\beta}(\pi,\psi_0,0;\phi,\psi,0) \\ & \frac{e^{\frac{\psi-\psi_0}{2}}}{\sin\frac{\phi}{2}}e^{-(e^{\psi}+e^{\psi_0})\cot\left(\frac{\phi}{2}\right)}\tilde{V}\left|\Psi^O_{\beta_1,\beta_2}(2\log 2-2\psi_2)\right\rangle\Big|_{\psi_0=\log 2-\frac{\ell}{2}}\Big].\end{aligned} \tag{4.13}$$

现在，我们将变量从 ϕ,ψ 变换为 ℓ_1,ℓ_2，

$$e^{-\ell_1/2} := \frac{e^{\frac{\psi_0+\psi}{2}}}{2\sin\frac{\phi}{2}}, \quad e^{-\ell_2/2} := \frac{e^{\frac{\psi_0+\psi}{2}}}{2\cos\frac{\phi}{2}}. \tag{4.14}$$

由此得到

$$\begin{aligned}e^{-\beta H_R}\left|\Psi^O_{\beta_1,\beta_2}(\ell)\right\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} d\ell_1 d\ell_2 \int_0^{\infty} ds \Big[& \frac{s\sinh(2\pi s)}{\pi^2}e^{-\frac{s^2}{4\phi_b}\beta}K_{2is}(4e^{-\ell_2/2}) \\ & e^{-2e^{-\frac{1}{2}(\ell+\ell_1+\ell_2)}(e^{\ell}+e^{\ell_1}+e^{\ell_2})}e^{-e^{\frac{\ell_2-\ell_1}{2}}(H+B)}e^{-iP\frac{\ell_1-\ell}{2}}\left|\Psi^O_{\beta_1,\beta_2}(\ell_1)\right\rangle\Big].\end{aligned} \tag{4.15}$$

我们可以将其更简洁地写成如下形式：

$$\boxed{e^{-\beta H_R}\left|\Psi^O_{\beta_1,\beta_2}(\ell)\right\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} d\ell_1 d\ell_2 \Psi_{\beta}(\ell_2)I(\ell,\ell_1,\ell_2)e^{-e^{\frac{\ell_2-\ell_1}{2}}(H+B)}e^{-iP\frac{\ell_1-\ell}{2}}\left|\Psi^O_{\beta_1,\beta_2}(\ell_1)\right\rangle,} \tag{4.16}$$

其中

$$\begin{aligned}I(\ell,\ell_1,\ell_2) &:= \frac{1}{2}e^{-2e^{-\frac{1}{2}(\ell+\ell_1+\ell_2)}(e^{\ell}+e^{\ell_1}+e^{\ell_2})} \\ &= \int_0^{\infty} ds\,\rho(s)\,2K_{2is}(4e^{-\ell/2})2K_{2is}(4e^{-\ell_1/2})2K_{2is}(4e^{-\ell_2/2}).\end{aligned} \tag{4.17}$$

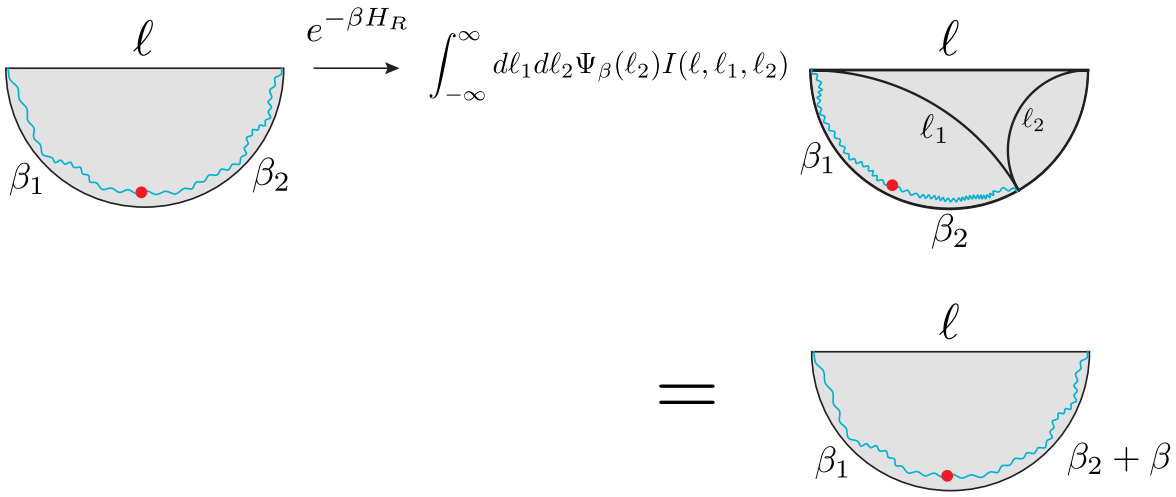

图6：我们用图示表示方程（4.16）。半圆盘表示物质扇区中的一个态。水平的 ℓ 测地线以原点为中心。左侧，我们使用 JT+物质的欧几里得路径积分来制备一个态。红点表示沿边界粒子轨迹插入了一个重整化物质场。 $e^{-\beta H_R}$ 的作用是，在原有轨迹上附加一条重整化长度为 β 的边界粒子轨迹（并对所有可能的附加方式积分）。长度 ℓ_1 和 ℓ_2 通过三边测量确定了波状蓝色轨迹（长度为 β_2 ）的终点位置。 $\Psi_\beta(\ell_2)I(\ell,\ \ell_1,\ \ell_2)$ 因子计算边界粒子沿长度为 β的轨迹从该位置传播到右上角某一位置的振幅。对 ℓ_1 和 ℓ_2积分，即可对 β_2 和 β 轨迹的连接位置进行积分。

H_L 的类似表达式为

$$\boxed{e^{-\beta H_L}\left|\Psi^O_{\beta_1,\beta_2}(\ell)\right\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} d\ell_1 d\ell_2 \Psi_\beta(\ell_2) I(\ell,\ell_1,\ell_2) e^{-e^{\frac{\ell_2-\ell_1}{2}}(H-B)} e^{iP\frac{\ell_1-\ell}{2}}\left|\Psi^O_{\beta_1,\beta_2}(\ell_1)\right\rangle .} \tag{4.18}$$

为了得到 H_R的显式表达式，注意到（2.5）意味着

$$-\frac{d}{d\beta}K_\beta(\phi_2,\psi_2,\phi_1,\psi_1)\Big|_{\beta=0} = \langle\phi_2,\psi_2|H|\phi_1,\psi_1\rangle \tag{4.19}$$

$$= \frac{1}{2\phi_b}\left[-\frac{1}{2}\partial^2_{\psi_2} + e^{\psi_2}\partial_{\phi_2} - \frac{1}{2}e^{2\psi_2}\right]\delta(\phi_2-\phi_1)\delta(\psi_2-\psi_1). \tag{4.20}$$

从（4.13）出发，对 β 在 $\beta=0$处求导，得到狄拉克δ函数，我们利用它们进行 $d\phi\ d\psi$ 积分。经过进一步化简，最终得到

$$H_R\left|\Psi^O_{\beta_1,\beta_2}(\ell)\right\rangle = \frac{1}{2\phi_b}\left[-\frac{1}{2}\partial^2_\ell + \frac{iP}{2}\partial_\ell + \frac{P^2}{8} + e^{-\ell/2}(B+H) + 2e^{-\ell}\right]\left|\Psi^O_{\beta_1,\beta_2}(\ell)\right\rangle , \tag{4.21}$$

由此可得[6]

$$\boxed{2\phi_b H_R = \frac{1}{2}\left[k-\frac{P}{2}\right]^2 + (H+B)e^{-\ell/2} + 2e^{-\ell},} \tag{4.22}$$

[6]为得出这一结论，我们需要证明，形如$\left|\Psi^{O_i}_{\beta_1,\beta_2}(\ell)\right\rangle$的态，其中 O_i 遍历所有物质主算符，构成希尔伯特空间。我们在附录 B 中证明这一点。

其中 k 是 ℓ 的共轭算符，满足 $[\ell, k] = i$。对 H_L 进行类似计算可得

$$\boxed{2\phi_b H_L = \frac{1}{2}\left[k + \frac{P}{2}\right]^2 + (H - B)e^{-\ell/2} + 2e^{-\ell}.} \tag{4.23}$$

利用（3.1），不难验证以下关于 H_R 和 H_L 的表达式彼此对易。此外，H_R 和 H_L 是正算子。[7]

如前所述，要纳入物质，我们在边界粒子所在位置插入一个重整化的 φ 场。在规范固定描述中，边界粒子位于 ℓ 测地线的末端，即距极坐标系中心 $\ell/2$重整化距离处。因此，我们通过在规范固定描述中的右边界上插入一个物质算符来定义 $\mathcal{O}_R$ 。

$$\mathcal{O}_R := \lim_{\epsilon\to 0}\left(\frac{4\phi_b}{\epsilon}\right)^{\Delta}\varphi(\pi, \ell/2 + \log\frac{2\phi_b}{\epsilon}) = \left(2e^{-\ell/2}\right)^{\Delta} O(\pi). \tag{4.24}$$

同样，$\mathcal{O}_L$ 定义为

$$\mathcal{O}_L := \lim_{\epsilon\to 0}\left(\frac{4\phi_b}{\epsilon}\right)^{\Delta}\varphi(0, \ell/2 + \log\frac{2\phi_b}{\epsilon}) = \left(2e^{-\ell/2}\right)^{\Delta} O(0). \tag{4.25}$$

不难验证 $[\mathcal{O}_L, H_R] = [\mathcal{O}_R, H_L] = 0$。为了能够在测地线的其他位置放置算符，我们定义

$$O_R(w) := (2e^{-w})^{\Delta} O(\pi), \qquad O_L(w) := (2e^{-w})^{\Delta} O(0). \tag{4.26}$$

这些算符 位于距测地线中心 w 重整化距离处 c.

定义式（4.24）和（4.25）定义了与体场 φ对偶的边界算符。对于一般的初级算符 O_i，可以利用$\mathcal{O}_{i,\ R}$ 和$\mathcal{O}_{i,\ L}$，根据 O_i（π）和O_i（$\mathbf{0}$），并使用（4.24）和（4.25）中最右侧的表达式，来定义这些算符。一般而言，除非需要在同一语境中指代多个初级算符，否则我们不会写出 i指标。

此时，我们可以计算更复杂的表达式，例如

$$\mathrm{Tr}\ e^{-\tilde{\Delta}\ell} e^{-\beta_6 H_L}\mathcal{O}_L e^{-\beta_5 H_L}\mathcal{O}_L e^{-\beta_4 H_L} e^{-\beta_3 H_R}\mathcal{O}_R e^{-\beta_2 H_R}\mathcal{O}_R e^{-\beta_1 H_R}, \tag{4.27}$$

˜其中 $\Delta > 0$ 与 Δ无关。详细计算见附录 A 。结果就是含物质的 JT 双喇叭路径积分，并对所有连接 ˜点与 $\tau = 0$ 另一边界上点的测地线求和，每条测地线的权重为 $e^{-\Delta\ell}$。我们在图 7 中展示了这个路径积分。不含物质时，这一结果早已为人所知 [18, 23, 30, 31]。这里我们证明，加入物质后，结果可以直接推广。请注意，这个路径积分是发散的，因为对双喇叭几何的积分包含这样的几何结构：绕双喇叭颈部的闭测地线可以变得任意短。这对应于物质场的温度任意高，并导致普适发散。要避免这一发散，必须在（4.27）中插入一个高度非局域的算符，例如投影到物质扇区中的真空态。我们将在第 7.2 节再次讨论这一发散。

[7]我们在附录 $H + B$ 中证明 $H - B$ 和C是非负算符。

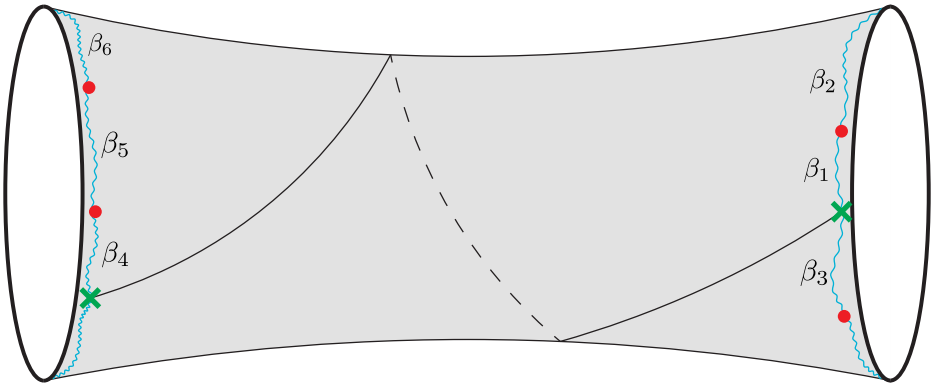

图 7：我们描绘了计算（4.27）的路径积分。红点表示算符插入。绿色十字标记了每条边界上的 $\tau = 0$ 点。我们对连接两个 $\tau = 0$ 点的所有测地线求和。这里展示了一条这样的测地线。

4.1 能量基底

引入 H_R、 H_L、 $\mathcal{O}_R$、 $\mathcal{O}_L$和 ℓ之后，我们现在求出这些算符在能量基底中的矩阵元的显式表达式。如附录 B所示，存在一组完备的正交归一态，它们由物质扇区中的初级算符以及 H_R 和 H_L的本征值标记。我们将这一基底称为能量基底。因此，我们可以将 $\mathcal{H}$ 重新表示如下：

$$\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^+) \oplus \bigoplus_{\mathcal{S}_p} \left[L^2(\mathbb{R}^+) \otimes L^2(\mathbb{R}^+) \right] . \tag{4.28}$$

指标集 $\mathcal{S}_p$ 定义为除恒等算符以外的物质初级算符集合。第一个 L^2（$\mathbb{R}^+$）指的是通过投影 $|0\rangle\langle 0| \otimes 1$,作用于 $\mathcal{H}$ 而得到的 $\mathcal{H}$ 子空间；这里我们指的是（4.1）中的分解。该子空间由能量的平方可积函数张成，且能量为正。该子空间中的一个基底态记作 $|0;\ s\rangle$，其中$s^2/$（$4\phi_b$）为（右或左）能量，且 $s > 0$。我们将此子空间称为$\mathcal{H}$的真空扇区。直和中的其余各项均指通过投影 $P_i \otimes 1$作用于 $\mathcal{H}$ 而得到的子空间，其中 P_i 是投影到 $\mathcal{H}_0$ 内与初级算符 $O_i \in \mathcal{S}_p$对应的单个离散级数表示上的投影。该子空间中的一个态由左、右能量的平方可积函数给出。该子空间中的一个基底态记作 $|i;\ s_L,\ s_R\rangle$，其中 s_L和 s_R取值于 $\mathbb{R}^+$，即正实数轴。我们将此子空间称为 $\mathcal{H}$的一个初级扇区。

我们采用如下约定：对真空扇区的投影为

$$\int_0^\infty \rho(s)\ |0;s\rangle\langle 0;s| , \tag{4.29}$$

对标记为 i 的某个初级扇区的投影为

$$\int_0^\infty ds_L\, \rho(s_L)\, ds_R\, \rho(s_R)\ |i;s_L\, s_R\rangle\langle i;s_L\, s_R| . \tag{4.30}$$

(4.29) 和 (4.30) 中出现圆盘态密度纯粹是约定使然，因为 s 变量是连续的。

W我们将位于真空扇区中的哈特尔-霍金态记作

$$|\beta\rangle := \int_{-\infty}^\infty d\ell\, \Psi_\beta(\ell)\ |0\rangle \otimes |\ell\rangle , \tag{4.31}$$

其中 $\Psi_\beta(\ell)$ 在（2.49）中定义，而 $|\ell\rangle$ 是 ℓ的本征态，归一化为

$$\langle \ell_1|\ell_2\rangle = \delta(\ell_1-\ell_2). \tag{4.32}$$

我们将由带有算符插入的半圆盘欧几里得路径积分制备的态称为
as

$$|i;\beta_L,\beta_R\rangle := \int_{-\infty}^{\infty} d\ell\ |\Psi^{O_i}_{\beta_L,\beta_R}(\ell)\rangle \otimes |\ell\rangle\,, \tag{4.33}$$

其中$|\Psi^{O_i}_{\beta_L,\ \beta_R}(\ell)\rangle$ 定义于（4.2）。

利用

$$\langle\beta_1|\beta_2\rangle = \int_0^\infty ds\,\rho(s)\,e^{-\frac{s^2}{4\phi_b}(\beta_1+\beta_2)} = \int_0^\infty ds\ \langle\beta_1|0;s\rangle\,\rho(s)\,\langle 0;s|\beta_2\rangle\,, \tag{4.34}$$

我们得到

$$\langle 0;s|\beta\rangle = e^{-\frac{s^2}{4\phi_b}\beta}. \tag{4.35}$$

接下来，我们考虑

$$\langle j;\beta'_L,\beta'_R|i;\beta_L,\beta_R\rangle = \sum_{k\in\mathcal{S}_p}\int_0^\infty ds_L\,ds_R\ \langle j;\beta'_L,\beta'_R|k;s_L,s_R\rangle\,\rho(s_L)\rho(s_R)\,\langle k;s_L,s_R|i;\beta_L,\beta_R\rangle \tag{4.36}$$

$$= \langle\beta_L+\beta'_L|\mathcal{O}_{i,L}\mathcal{O}_{j,R}|\beta_R+\beta'_R\rangle \tag{4.37}$$

$$= \delta_{ij}\int_0^\infty ds_L\,ds_R\,\rho(s_L)\,\rho(s_R)\,\Gamma^{\Delta_i}_{s_L,s_R}e^{-\frac{s_L^2}{4\phi_b}(\beta_L+\beta'_L)}e^{-\frac{s_L^2}{4\phi_b}(\beta_R+\beta'_R)}, \tag{4.38}$$

其中我们定义

$$\Gamma^{\Delta}_{s_1,s_2} := \int_{-\infty}^{\infty} d\ell\,2K_{2is_1}(4e^{-\ell/2})\,4^\Delta e^{-\Delta\ell}\,2K_{2is_2}(4e^{-\ell/2}) = \prod_{\pm\pm}\frac{\Gamma(\Delta\pm is_1\pm is_2)}{\Gamma(2\Delta)}, \tag{4.39}$$

乘积遍历了所有四种符号选择。方程（4.37）是O_i 和 O_j 在圆盘上的二点函数，利用边界粒子传播子对所有度规积分。我们可以用（3.10）、（2.25）和（2.49）将（4.37）明确写成对 ℓ 的积分，其中 ℓ 是算符插入的两个点之间的重整化长度。具体而言，计算二点函数时，要对所有边界粒子轨迹积分，并额外乘上权重 $4^\Delta e^{-\Delta\ell}$。因此

$$\langle j;s_L,s_R|i;\beta_L,\beta_R\rangle = \delta_{ij}\sqrt{\Gamma^{\Delta_i}_{s_L,s_R}}e^{-\frac{s_L^2}{4\phi_b}\beta_L}e^{-\frac{s_L^2}{4\phi_b}\beta_R}. \tag{4.40}$$

现在我们考虑 $\mathcal{O}_{i、\ R}$ 在能量基底中的矩阵元。由于除恒等算符外的初级算符的一点函数均为零，因此我们有

$$\langle 0;s_2|\mathcal{O}_{i,R}|0;s_1\rangle = 0. \tag{4.41}$$

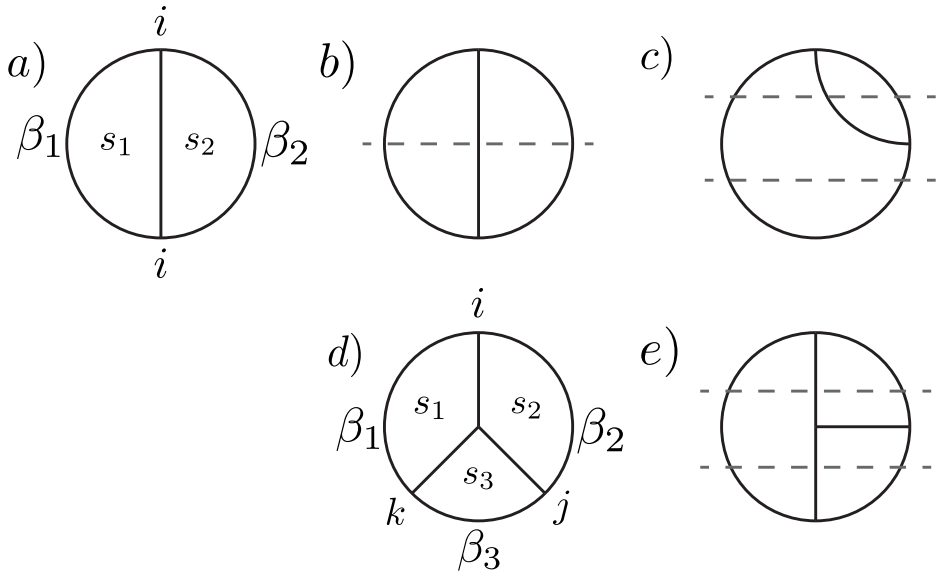

图 8：我们说明如何将圆盘关联函数改写为 $\mathcal{O}_R$ 在能量基底中的矩阵元。a）圆盘二点函数的图示表示，对应于（4.44）。b）我们可以将圆盘二点函数视为左矢与右矢之间的重叠，其中左矢和右矢的波函数可通过分别对虚线上方和下方的区域应用正文中所述的图示规则来计算。c）虚线将图分为三个区域。顶部和底部区域分别制备左矢和右矢的波函数。中间区域则解释为 $\mathcal{O}_R$ 的矩阵元，即（4.43）。d）圆盘三点函数可以写成（4.45），相应的图中包含一个体内三价顶点，如图所示。e）我们将三点函数图分成三个区域。同样，顶部和底部区域制备态，而中间区域是一个矩阵元，见（4.46）。总之，我们可以利用圆盘二点函数和三点函数计算 $\mathcal{O}_R$ 和 $\mathcal{O}_L$ 在能量基底中的矩阵元。利用这些矩阵元，我们可以计算含有任意物质插入的圆盘关联函数。所得关联函数由正文中所述的图示规则给出。

接下来，我们使用

$$\langle\beta_L|\mathcal{O}_{i,R}e^{-\beta_R H_R}\mathcal{O}_{i,R}|\beta\rangle = \int_0^\infty ds_L\, ds_R\, ds\ \langle i;\beta_L,\beta_R|i;s_L,s_R\rangle\,\rho(s_L)\rho(s_R)\,\langle i;s_L,s_R|\mathcal{O}_{i,R}|0;s\rangle\,\rho(s)\,\langle 0;s|\beta\rangle \tag{4.42}$$

由此推断

$$\langle j;s_L,s_R|\mathcal{O}_{i,R}|0;s\rangle = \delta_{ij}\frac{\delta(s_L-s)}{\rho(s)}\sqrt{\Gamma^{\Delta_i}_{s_L,s_R}}. \tag{4.43}$$

本小节中的计算可以借助一组图示规则来方便地理解。这些图示规则与 [17, 18]中介绍的规则类似。参见图 8中的图示。每个封闭区域都对应一个 s 参数或一个能量。每幅图都表示对这些 s 参数的积分，其测度为 $\rho(s)\,ds$。对于黑线的每个三岔交点，被积函数都包含一个关于相邻 s 参数的函数。圆周上的黑线对应一个逆温度，而被积函数中则包含相应的玻尔兹曼因子。一条从圆周延伸出来的体内黑线，标记为一个 i指标，表示插入了一个主算符 O_i，并与函数 $\sqrt{\Gamma^{\Delta_i}_{s_1,\ s_2}}$相关，其中

s_1， s_2 是相邻的 s 参数。当三条体黑线在内部相交时，我们加入函数 $V_{ijk}(s_1,\ s_2,\ s_3)$，其形式将在下文确定。例如，图8中的图示 a) 表示两个主算符的圆盘二点函数，其表达式为

$$\int_0^\infty ds_1\,\rho(s_1)\,ds_2\,\rho(s_2)\,\Gamma^{\Delta_i}_{s_1,s_2}\,e^{-\frac{s_1^2}{4\phi_b}\beta_1}\,e^{-\frac{s_2^2}{4\phi_b}\beta_2}, \tag{4.44}$$

而图 d）表示主算符 O_i、 O_j 和 O_k 的圆盘三点函数，其表达式为

$$\int_0^\infty ds_1\,\rho(s_1)\,ds_2\,\rho(s_2)\,ds_3\,\rho(s_3)\,\sqrt{\Gamma^{\Delta_i}_{s_1,s_2}\Gamma^{\Delta_j}_{s_2,s_3}\Gamma^{\Delta_k}_{s_3,s_1}}\,e^{-\frac{s_1^2}{4\phi_b}\beta_1}\,e^{-\frac{s_2^2}{4\phi_b}\beta_2}\,e^{-\frac{s_3^2}{4\phi_b}\beta_3}\,V_{ijk}(s_1,s_2,s_3). \tag{4.45}$$

最后，使用图 8e）所述的策略，我们计算

$$\langle k;s'_L,s'_R|\mathcal{O}_{j,R}|i;s_L,s_R\rangle=\frac{\delta(s_L-s'_L)}{\rho(s_L)}V_{ijk}(s_L,s_R,s'_R)\sqrt{\Gamma^{\Delta_i}_{s'_L,s'_R}}. \tag{4.46}$$

为了计算 $V_{ijk}(s_1,s_2,s_3)$，我们需要计算三点函数，并证明其具有形式（4.45）。我们将量子场论三点函数（3.12）代入圆盘路径积分。我们插入的额外权重因子为

$$C_{ijk}\left(2e^{-\ell_{ij}/2}\right)^{\Delta_i+\Delta_j-\Delta_k}\left(2e^{-\ell_{ki}/2}\right)^{\Delta_i+\Delta_k-\Delta_j}\left(2e^{-\ell_{jk}/2}\right)^{\Delta_j+\Delta_k-\Delta_i}, \tag{4.47}$$

其中， ℓ_{ij}、 ℓ_{jk} 和 ℓ_{ki} 是 O_i、 O_j 和 O_k 插入点之间的重整化测地距离。三点函数变为

$$\begin{aligned}&\int_{-\infty}^\infty d\ell_{ij}\,d\ell_{jk}\,d\ell_{ki}\,\Psi_{\beta_2}(\ell_{ij})\Psi_{\beta_3}(\ell_{jk})\Psi_{\beta_1}(\ell_{ki})I(\ell_{ij},\ell_{jk},\ell_{ki})\\&\quad\times C_{ijk}\left(2e^{-\ell_{ij}/2}\right)^{\Delta_i+\Delta_j-\Delta_k}\left(2e^{-\ell_{ki}/2}\right)^{\Delta_i+\Delta_k-\Delta_j}\left(2e^{-\ell_{jk}/2}\right)^{\Delta_j+\Delta_k-\Delta_i},\end{aligned} \tag{4.48}$$

其中 $I(\ell_{ij},\ell_{jk},\ell_{ki})$ 定义见（4.17）。由于我们要证明（4.48）等价于（4.45），因此使用（2.49）对（4.48）关于 β_1、 β_2 和β_3进行逆拉普拉斯变换。得到

$$\begin{aligned}&\sqrt{\Gamma^{\Delta_i}_{s_1,s_2}\Gamma^{\Delta_j}_{s_2,s_3}\Gamma^{\Delta_k}_{s_3,s_1}}\,V_{ijk}(s_1,s_2,s_3)\\&=\int_{-\infty}^\infty d\ell_{ij}\,d\ell_{jk}\,d\ell_{ki}\;2K_{2is_2}(4e^{-\ell_{ij}/2})2K_{2is_3}(4e^{-\ell_{jk}/2})2K_{2is_1}(4e^{-\ell_{ki}/2})I(\ell_{ij},\ell_{jk},\ell_{ki})\\&\quad\times C_{ijk}\left(2e^{-\ell_{ij}/2}\right)^{\Delta_i+\Delta_j-\Delta_k}\left(2e^{-\ell_{ki}/2}\right)^{\Delta_i+\Delta_k-\Delta_j}\left(2e^{-\ell_{jk}/2}\right)^{\Delta_j+\Delta_k-\Delta_i}.\end{aligned} \tag{4.49}$$

我们只关注所有标度维数均为正值时该积分的计算。在附录 E中，我们化简该积分，并证明 $V_{ijk}(s_1,s_2,s_3)$ 定义良好。虽然 $V_{ijk}(s_i,s_j,s_k)$ 的显式表达式对我们并不重要，但我们指出，它在 i, j 和 k 的置换下保持不变。

最后，我们考虑 ℓ 在能量基底中的矩阵元。由于这些内容并非证明第 5节主要结果所必需，我们将简要说明。最简单的做法是考虑 $e^{-\tilde{\Delta}\ell}$ 在 $\tilde{\Delta}>0$下的矩阵元，它们为：

$$\langle 0;s'|e^{-\tilde{\Delta}\ell}|0;s\rangle=4^{-\tilde{\Delta}}\Gamma^{\tilde{\Delta}}_{s,s'}, \tag{4.50}$$

$$\langle j;s'_L\,s'_R|e^{-\tilde{\Delta}\ell}|i;s_L\,s_R\rangle=\delta_{ij}\,4^{-\tilde{\Delta}}\left\{\begin{array}{ccc}\tilde{\Delta}&s_L&s'_L\\\Delta&s'_R&s_R\end{array}\right\}\sqrt{\Gamma^{\tilde{\Delta}}_{s_L,s'_L}\Gamma^{\tilde{\Delta}}_{s_R,s'_R}}. \tag{4.51}$$

(4.51) 中的特殊函数是一个 $\mathfrak{sl}(2,\ \mathbb{R})$ 的 6j 符号，其定义见 [18]。

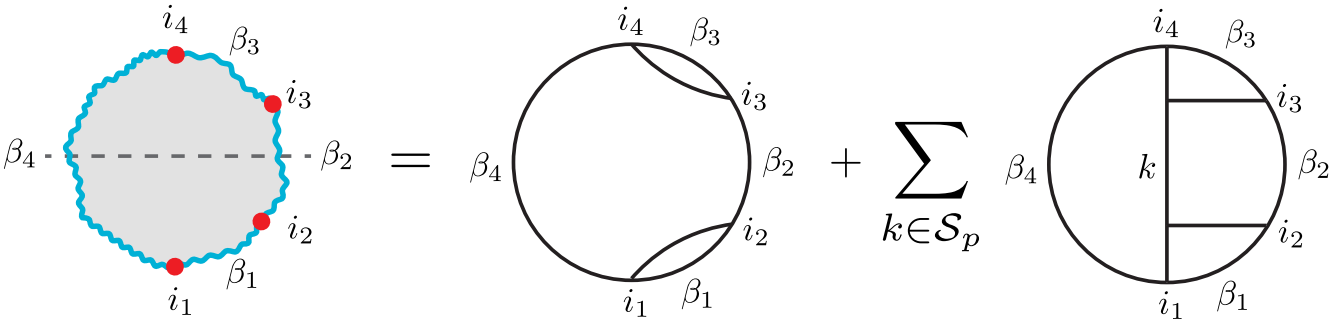

图 9：我们描绘了四个初级算符的圆盘关联函数。虚线表示我们插入能量基底中的完备态集的位置。右侧第一项中，交换态属于真空扇区。第二项中，交换态属于初级扇区。右侧的图示可使用第 4.1节所述的规则进行计算。或者，我们也可以让虚线穿过 β_3 和 β_1，而不是穿过 β_2 和 β_4。这两种选择分别对应于将四点函数分解为共形块的 s-道和 t-道分解。特别地，右侧求和中的单项等于一个与 JT引力耦合的四点共形块。

4.2 共形块与算符乘积展开

在本小节中，我们将展示如何利用能量基底下的矩阵元，为共形块导出紧凑表达式。我们还将讨论引力存在时的算符乘积展开。

首先，考虑任意主算符的四点函数。它由下式给出

$$\langle i_4;\epsilon,\beta_3|\mathcal{O}_{i_3,R}e^{-\beta_2 H_R}\mathcal{O}_{i_2,R}|i_1;\beta_4-\epsilon,\beta_1\rangle\,, \tag{4.52}$$

它与参数 ϵ 无关，且该参数满足 $0<\epsilon<\beta_4$。通过在能量基底中插入恒等算子分解，并使用上一小节计算出的矩阵元，我们发现（4.52）等于

$$\delta_{i_1 i_2}\delta_{i_3 i_4}\int_0^\infty ds_1\rho(s_1)\,ds_2\rho(s_2)\,ds_3\rho(s_3)\,\Gamma^{\Delta_{i_1}}_{s_1,s_2}\Gamma^{\Delta_{i_3}}_{s_2,s_3}e^{-\frac{s_1^2}{4\phi_b}\beta_1}e^{-\frac{s_2^2}{4\phi_b}(\beta_2+\beta_4)}e^{-\frac{s_3^2}{4\phi_b}\beta_3} \tag{4.53}$$

$$+\sum_{k\in\mathcal{S}_p}\int_0^\infty\prod_{j=1}^4\left[ds_j\rho(s_j)e^{-\frac{s_j^2}{4\phi_b}\beta_j}\sqrt{\Gamma^{\Delta_{i_j}}_{s_j,s_{j+1}}}\right]V_{i_1 i_2 k}(s_4,s_1,s_2)V_{k i_3 i_4}(s_4,s_2,s_3), \tag{4.54}$$

其中 $s_5:=s_1$。计算结果总结于图 9中。在半经典极限下，四点函数可以分解为 $SL(2,\ \mathbb{R})$ 共形块。离开半经典极限后，仍然可以计算单个交换初级场的贡献。图 9 右侧的每个图示都表示这样一个贡献。推广到任意 n 点图示显而易见：一个 n 点共形块对应于画在圆内、具有三价顶点的树图，n 体线连接在圆周上。通过应用第 4.1 节所述的图示规则，可以得到能量基底下的显式表达式。[8]

[8]对这些主张的明确检验见 [18], 附录 C，其中物质理论取为自由标量场。

可以将两个初级算符的算符乘积展开推广到半经典极限之外。通过在能量基底下进行计算，可以验证以下算符乘积展开恒等式成立：

$$\begin{aligned} e^{-\epsilon H_R}\mathcal{O}_{i,R}e^{-\beta H_R}\mathcal{O}_{j,R}e^{-\epsilon H_R} &= \sum_{n\geq 0} a_n H_R^n e^{-2\epsilon H_R} \\ &+ \sum_{k\in\mathcal{S}_p}\sum_{n,m\geq 0} b^{(k)}_{n,m} H_R^n e^{-\epsilon H_R}\mathcal{O}_{k,R}H_R^m e^{-\epsilon H_R}, \end{aligned} \tag{4.55}$$

其中 a_n 和 $b_{n,\,m}$ 是由以下展开定义的泰勒系数，

$$\delta_{ij}\int_0^\infty ds\,\rho(s)\Gamma^{\Delta_i}_{\sqrt{4\phi_b E},s}\,e^{-\frac{s^2}{4\phi_b}\beta} := \sum_{n\geq 0} a_n E^n, \tag{4.56}$$

$$\int_0^\infty ds\,\rho(s)\,V_{ijk}(\sqrt{4\phi_b E_L},s,\sqrt{4\phi_b E_R})\sqrt{\frac{\Gamma^{\Delta_i}_{\sqrt{4\phi_b E_L},s}\Gamma^{\Delta_j}_{s,\sqrt{4\phi_b E_R}}}{\Gamma^{\Delta_k}_{\sqrt{4\phi_b E_L},\sqrt{4\phi_b E_R}}}}e^{-\frac{s^2}{4\phi_b}\beta} := \sum_{n,m\geq 0} b^{(k)}_{n,m}E_L^n E_R^m. \tag{4.57}$$

函数 $V_{ijk}(s_1,\ s_2,\ s_3)$ 和 $\Gamma^{\Delta}_{s_1,\ s_2}$ 是 s 参数的偶函数，因此右侧的泰勒展开中只出现非负整数次幂。将式（4.55）的任一侧代入关联函数，并运用图示规则，都会得到相同的结果。

5 边界观测量的代数

回顾了含物质场的JT引力的各个方面后，本节旨在定义冯·诺依曼（vN）代数，用以描述生活在AdS边界上的观察者能够接触到的物理。vN代数是一个 $*$-有界算子代数[9]，并且等于其双重交换子。在量子场论中，一个具有物理意义的代数是属于某个因果完备时空子区域的所有局域算子构成的代数。由于基本场是算符值分布而非算符，因此需要采用涂抹方案，将基本场转化为有界算子。这是因为基本场彼此靠近时会出现普适的紫外发散。在我们的情形中，感兴趣的基本量子场论算符是 $O(\pi)$ 和 $O(0)$，因为它们定义在与 $\mathcal{H}_0$ 相关联的柯西切片上。在JT引力中，这些算符变为 $\mathcal{O}_R$ 和 $\mathcal{O}_L$，如前文所述。由于半经典极限 $\phi_b\to\infty$ 与紫外极限重合，任何能在量子场论中产生有界算子的方案，都足以在含物质场的JT引力中产生有界算子。我们将集合 $\mathcal{S}_R$ 定义如下，

$$\mathcal{S}_R := \left\{H_R^n e^{-\beta H_R}\,|\,\beta>0,\,n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}\right\}\cup\left\{H_R^n e^{-\epsilon H_R}\mathcal{O}_{i,R}e^{-\epsilon H_R}H_R^m\,|\,\epsilon>0,\,i\in\mathcal{S}_p,\,n,m\in\mathbb{Z}_{\geq 0}\right\}, \tag{5.1}$$

其中 $\mathcal{S}_p$ 是物质量子场论中除恒等算子以外的初级算符集合。$\mathcal{S}_R$ 中的所有算符都是有界的。我们将代数 $\mathcal{A}_{R,\,0}$ 定义为由 $\mathcal{S}_R$ 中算符的有限乘积构成的有限线性组合所形成的代数。这是由字母 H_R 和 $\mathcal{O}_{i,\ R}$ 构成的字所生成的代数，其中在必要处插入玻尔兹曼因子，以确保算符有界。我们有意在 $\mathcal{A}_{R,\,0}$ 中省略了恒等算子，原因将在第6节中明了。代数 $\mathcal{A}_{R,\,0}$ 是一个由有界算符构成的 $*$-代数，但它并不等于自身的双交换子。我们将冯·诺依曼代数 $\mathcal{A}_R$ 定义为由 $\mathcal{A}_{R,\,0}$生成的代数，

$$\mathcal{A}_R := \mathcal{A}''_{R,0}, \tag{5.2}$$

[9] $\mathcal{H}$ 上的有界算符代数记作 $\mathcal{B}(\mathcal{H})$。

其中 $'$ 表示交换子。根据双交换子定理 [33]， $\mathcal{A}_R$ 在弱算子拓扑下是闭的。特别地，从 $\mathcal{A}_{R,0}$ 生成 $\mathcal{A}_R$ 的一种等价方式，是纳入满足[10] $\{a_\alpha\}$ 的所有网的极限点

$$\langle x|a_\alpha|y\rangle \to \langle x|a|y\rangle\,, \quad \forall\,|x\rangle\,,|y\rangle \in \mathcal{H}, \tag{5.3}$$

其中 $\to$ 表示网收敛，$a_\alpha \in \mathcal{A}_{R,0}$，以及 $a \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$。注意，恒等算子是 $e^{-\beta H_R}$ 在 $\beta \to 0$时的弱极限。代数 $\mathcal{A}_R$ 包含右哈密顿量以及所有的 $\mathcal{O}_{i,R}$ 算符；在 AdS/CFT 的语境下，它们应被解释为右侧共形场论中轻算符（单迹和多迹算符）的代数。左代数 $\mathcal{A}_{L,0}$ 以及 $\mathcal{A}_L$ 的定义方式与$\mathcal{A}_{R,0}$ 以及 $\mathcal{A}_R$ 类似。算符乘积展开恒等式（4.55）提供了一个弱收敛序列的例子，因为它夹在任意左矢和右矢之间时都成立。

接下来，我们证明 $\mathcal{A}_R$ 和 $\mathcal{A}_L$ 互为交换子。然后，我们将证明这些代数是因子（即，$\mathcal{A}_L \cap \mathcal{A}_R = \mathbb{C}\cdot 1$）。如果这些代数是 I 型，这些性质将意味着希尔伯特空间 $\mathcal{H}$ 存在张量积分解 $\mathcal{H} = \mathcal{H}_L \otimes \mathcal{H}_R$，其中每个代数分别作用于一个因子上。由于希尔伯特空间不存在这样的分解，因此 $\mathcal{A}_R$ 和 $\mathcal{A}_L$ 不是 I 型。在下一节中，我们将证明这些代数存在一个满足 $\mathrm{tr}\ 1 = \infty$的（忠实、半有限且正规）迹。这排除了这些代数属于 III 型或 II $_1$型。根据冯·诺依曼代数的类型分类[2]，可知 $\mathcal{A}_R$ 和 $\mathcal{A}_L$ 是 II $_\infty$ 型因子。

为了证明 $\mathcal{A}_R$ 是 $\mathcal{A}_L$的交换子，我们令 $R \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ 为一个与 H_L 和 $\mathcal{O}_{i,L}$ 对易的有界算子，其中 $i \in \mathcal{S}_p$。然后我们将证明 $R \in \mathcal{A}_R$。不失一般性，我们假设 R 是厄米的。我们对 R 在能量基底中的矩阵元作如下拟设：

$$\langle j; s'_L, s'_R|R|i; s_L, s_R\rangle = \frac{\delta(s'_L - s_L)}{\rho(s_L)} R^{(1)}_{ji}(s_L, s_R, s'_R), \tag{5.4}$$

$$\langle j; s'_L, s'_R|R|0; s\rangle = \frac{\delta(s'_L - s)}{\rho(s)} R^{(2)}_{j}(s, s'_R), \tag{5.5}$$

$$\langle 0; s'|R|0; s\rangle = \frac{\delta(s' - s)}{\rho(s)} R^{(3)}(s). \tag{5.6}$$

方程 (5.4)、(5.5) 和 (5.6) 表示这些矩阵元在 R 与 H_L对易的条件下所能取的最一般形式。现在我们考虑

$$\langle j; s_L, s_R|R\mathcal{O}_{i,L}|0; s\rangle = \langle j; s_L, s_R|\mathcal{O}_{i,L}R|0; s\rangle\,, \tag{5.7}$$

在能量基底中插入恒等算子分解后，得到

$$R^{(1)}_{ji}(s_L, s, s_R)\sqrt{\Gamma^{\Delta_i}_{s,s_L}} = \delta_{ij}\sqrt{\Gamma^{\Delta_i}_{s_L,s_R}}\frac{\delta(s_R - s)}{\rho(s)} R^{(3)}(s) + \sum_{k\in\mathcal{S}_p} V_{ijk}(s, s_L, s_R)\sqrt{\Gamma^{\Delta_i}_{s_L,s}} R^{(2)}_k(s, s_R). \tag{5.8}$$

将 $\sqrt{\Gamma^{\Delta_i}_{s,s_L}}$ 除去后，我们得到

$$R^{(1)}_{ji}(s_L, s, s_R) = \delta_{ij}\frac{\delta(s_R - s)}{\rho(s)} R^{(3)}(s) + \sum_{k\in\mathcal{S}_p} V_{ijk}(s, s_L, s_R) R^{(2)}_k(s, s_R). \tag{5.9}$$

[10]关于网与算符拓扑的综述，请参见 [2]。注意，序列是网的一个例子。

方程（5.9）确定了 $R^{(1)}_{ji}$ 在给定 $R^{(2)}_k$ 和 $R^{(3)}$的情况下。由于 s 参数的取值属于 $(0,\infty)$，我们可以假设 $R^{(2)}_k$ 和 $R^{(3)}$ 在将任意一个自变量乘以 -1后保持不变（换言之，在零点附近的级数展开中只出现自变量的偶次幂）。方程（5.9）推出了 R的如下级数表示，

$$R = R^{(3)}(\sqrt{4\phi_b H_R}) + \sum_{k\in\mathcal{S}_p}\sum_{n,m\geq 0} r^{(2),k}_{n,m} H_R^n \mathcal{O}_{k,R} H_R^m, \tag{5.10}$$

其中 $r^{(2)}$、$_{n\,m}$、^{k} 是由下式定义的泰勒系数

$$\sum_{n,m\geq 0} r^{(2),k}_{n,m} E_1^n E_2^m = \frac{1}{\sqrt{\Gamma^{\Delta_k}_{\sqrt{4\phi_b E_1},\sqrt{4\phi_b E_2}}}} R^{(2)}_k(\sqrt{4\phi_b E_2},\sqrt{4\phi_b E_1}). \tag{5.11}$$

在能量基底中可以验证（5.10）。由此可知，R 属于$\mathcal{A}_{R\text{的弱闭包}.\,0}$，这意味着 $R\in\mathcal{A}_R$，或者说 $\mathcal{A}'_L\subset\mathcal{A}_R$。显然，$\mathcal{A}_R\subset\mathcal{A}'_L$，因为 $\mathcal{A}_R$ 的生成元与 $\mathcal{A}_L$的生成元彼此对易，这一点已在第4节得到验证。因此，$\mathcal{A}_R=\mathcal{A}'_L$。取交换子后，得到 $\mathcal{A}'_R=\mathcal{A}_L$。

为了证明 $\mathcal{A}_R$ 和 $\mathcal{A}_L$ 是因子，令 $C\in\mathcal{B}(\mathcal{H})$ 为一个属于$\mathcal{A}'_L\cap\mathcal{A}'_R$的有界算子。同样，不失一般性地假设 C 是厄米的。我们需要证明C 正比于恒等算子。首先，考察 C 在真空扇区上的作用。令$|\Psi\rangle$ 为真空扇区中的任意归一化态。特别地，$|\Psi\rangle$ 满足

$$(H_L - H_R)\,|\Psi\rangle = 0. \tag{5.12}$$

波函数

$$(C\Psi)_i(s_L,s_R) := \langle i; s_L, s_R|C|\Psi\rangle \tag{5.13}$$

必须是 s_L 和 s_R 的平方可积函数，因为 C 有界。然而，由于 C与 H_L-H_R对易，必定有 $(C\Psi)_i(s_L,\ s_R)$ 对 $s_L\neq s_R$为零。由于其支撑集的测度为零，这个波函数的范数为零。因此，C 将真空扇区映射到真空扇区。由于 C 是厄米的，C 作用于初级扇区所得的像与真空扇区正交。因此，我们可以对 C的非零矩阵元作如下拟设，

$$\langle j; s'_L, s'_R|C|i; s_L, s_R\rangle := \frac{\delta(s_L-s'_L)}{\rho(s_L)}\frac{\delta(s_R-s'_R)}{\rho(s_R)} C^{(1)}_{ij}(s_L,s_R), \tag{5.14}$$

$$\langle 0; s'|C|0; s\rangle := \frac{\delta(s-s')}{\rho(s)} C^{(2)}(s). \tag{5.15}$$

接下来，我们考虑

$$\langle j; s_L, s_R|C\mathcal{O}_{i,L}|0; s\rangle = \langle j; s_L, s_R|\mathcal{O}_{i,L}C|0; s\rangle\,, \tag{5.16}$$

插入完备态集后，它变为

$$\frac{\delta(s_R-s)}{\rho(s)} C^{(1)}_{ij}(s_L,s)\sqrt{\Gamma^{\Delta_i}_{s,s_L}} = \delta_{ij}\sqrt{\Gamma^{\Delta_i}_{s,s_L}}\frac{\delta(s_R-s)}{\rho(s)} C^{(2)}(s), \tag{5.17}$$

化简后得到

$$C^{(1)}_{ij}(s_L,s) = \delta_{ij} C^{(2)}(s), \tag{5.18}$$

从 (5.16) 出发进行类似推导，但将 $\mathcal{O}_{i,L}$ 替换为 $\mathcal{O}_{i,R}$ ，可得

$$C_{ij}^{(1)}(s, s_R) = \delta_{ij} C^{(2)}(s). \tag{5.19}$$

方程（5.18）和（5.19）共同表明 $C_{ij}^{(1)}$ 是一个与其参数无关的常数，这进一步意味着 C 正比于恒等算子，这正是我们想要证明的。

我们的结果推论之一是， $\mathcal{A}_R$ 和 $\mathcal{A}_L$ 的并生成了全部 $\mathcal{B}$（$\mathcal{H}$）。更一般地，如果 $\mathcal{A}$ 是一个冯·诺依曼代数，则有

$$(\mathcal{A} \cap \mathcal{A}')' = (\mathcal{A} \cup \mathcal{A}')''. \tag{5.20}$$

参见 [2] 以及 [34]中 I.1 的命题 1。[11] 令 $\mathcal{A} = \mathcal{A}_R$，得到

$$(\mathcal{A}_R \cup \mathcal{A}_L)'' = (\mathbb{C} \cdot 1)' = \mathcal{B}(\mathcal{H}). \tag{5.21}$$

特别地，长度算符的有界函数由边界代数生成。在 [35], 中，长度算符与一对双重缩放 SYK 模型中的大小算符建立了联系。长度算符和物质算符都是用基本的马约拉纳费米子定义的。在理论成为含物质场的JT引力的极限下，我们发现长度算符与物质算符之间必定存在非平凡的直接关系。

6 迹

在上一节中，我们证明了 $\mathcal{A}_L$ 和 $\mathcal{A}_R$ 是 II 型$_\infty$ 因子，这意味着除整体缩放外，它们存在唯一的（忠实、半有限且正规的）迹。用 tr 表示这个迹（我们的归一化约定见 (6.2)）。正如 [9], 所指出的，这为在体洛伦兹理论中计算全息纠缠熵提供了一种方案。在半经典极限下，可以使用量子极值曲面（QES）公式，它将熵分解为面积项和体熵项。在含物质场的JT引力中，对所有微扰 G_N 修正[12] 求和后的全息熵公式是

$$S(\rho) = S_0 - \operatorname{tr}\, \rho \log \rho, \tag{6.1}$$

其中 $\rho \in \mathcal{A}_R$ 是定义一个态的密度矩阵算符（也就是说， ρ 是正定的，且经过归一化，使得 tr $\rho = 1$）。[13] 参数 S_0 反映了熵中存在的一种模糊性，这种模糊性源自迹归一化方式的不确定性。可通过与边界对偶理论中计算出的熵相匹配来确定该参数。[14] 尽管表面上看起来如此，式（6.1）并未赋予熵以态计数的诠释，因为 S_0 并不对应实际的基态简并度，而且$\mathcal{A}_R$ 不是 I 型。方程（6.1）应被视为量子极值曲面公式在半经典极限之外的推广，其形式受到 $\mathcal{A}_R$ 是一个因子这一事实的严格约束。

[11]感谢 Jon Sorce 指出了这个公式。[12]当 S_0 有限时，还应存在额外的修正。[13]在 ω 上的正规态 $\mathcal{A}_R$ （即在代数上抽象定义的正超弱连续线性泛函）可写为 $\omega(\cdot) = \lim_n \operatorname{tr}(\rho_n \cdot)$，其中 ρ_n 是 $\mathcal{A}_R$中的一列迹类算符。参见 [2] 第6.1节末尾及其中的参考文献。[14]边界对偶理论的一个例子是 SYK 模型在极限 $N \gg 1$下， $N/(\beta J)$ 固定。

迹公式见 [9]。其表达式为

$$\operatorname{tr} a = \lim_{\beta \to 0} \langle \beta | a | \beta \rangle , \quad a \in \mathcal{A}_R. \tag{6.2}$$

注意，$\operatorname{tr} 1 = \infty$。方程（6.2）具有迹的所有性质（我们将在下文列出）。对于 $a \in \mathcal{A}_{R,\,0}$，（6.2）可通过圆盘欧几里得路径积分，利用第 4.1 节所述的图示规则计算得出，而且在这种表述中，迹的循环性显而易见。配分函数公式 $Z(\beta) = \operatorname{tr} e^{-\beta H_R}$ 意味着 H_R具有双曲正弦态密度，形式为 $\rho(s)$。这种双曲正弦态密度最初是通过欧几里得路径积分计算发现的（例如 [25]）。洛伦兹理论同样包含双曲正弦态密度，这并不一定令人意外。特别是，在纯 JT 引力中，对半经典极限之外的量子极值曲面公式进行分析后，也发现了双曲正弦态密度 [24]。纯 JT 引力与含物质场的JT引力之间的一个关键区别是：边界代数的结构只允许双曲正弦态密度；而要论证纯 JT 引力包含双曲正弦态密度，则需要关于体理论的更多信息。

在本节余下部分，我们将着重强调迹必须具备的性质，并说明舍弃某些性质后如何定义其他迹。特别是，双曲正弦态密度之所以不可避免，取决于对迹的一些假设；我们现在将明确陈述这些假设。

根据算子代数理论 [36]，，冯·诺依曼代数 $\mathcal{A}_R$ 上的（忠实、半有限、正规）迹是一个定义在 τ 正锥[15] $\mathcal{A}_{R\text{上的函数}+}$，其值取自 $[0, \infty]$，并具有以下性质：

1. $\tau(a+b) = \tau(a) + \tau(b) \quad a, b \in \mathcal{A}_{R,+}$, 2. $\tau(\lambda a) = \lambda \tau(a) \quad \lambda \geq 0, \quad a \in \mathcal{A}_{R,+}$, 3. $\tau(a^\dagger a) = \tau(a a^\dagger) \quad a \in \mathcal{A}_R$, 4. $a \neq 0 \implies \tau(a) > 0, \quad a \in \mathcal{A}_{R,+}$,（忠实）5. $\forall a \in \mathcal{A}_{R,+}$, $\exists b \in \mathcal{A}_{R,+} \quad a - b \geq 0, \quad \tau(b) < \infty, \quad b \neq 0$,（半有限）6. 对每个有界递增网 $\{a_\alpha\}$（属于 $\mathcal{A}_R$），$_+$, $\tau(\sup\, a_\alpha) = \sup\, \tau(a_\alpha)$,（正规），

7. τ 满足算符乘积展开恒等式（4.55），对于正$a \in \mathcal{A}_{R,\,0}$，已知 $\tau(a)$即可验证。具体来说，若将恒等式写作 $a = \sum_{n \geq 0} b_n$（适用于 a，$b_n \in \mathcal{A}_{R,\,0}$），则 $\tau(a) = \sum_{n \geq 0} \tau(b_n)$。

性质7是多余的，列出它只是为了方便。要论证 $\mathcal{A}_R$上存在唯一迹，可以借助以下结果，[16]

Theo注。 在 II_∞ 型因子上，任意两个半有限正规迹都成比例 l.

[15]正算子 $a \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ 满足 $\langle x|a|x\rangle \geq 0 \quad \forall |x\rangle \in \mathcal{H}$。正算子空间在线性组合的系数非负时对线性组合封闭，因而构成一个锥。我们用 $a \geq 0$ 表示一个正算子。迹可以通过线性性从正锥扩展到整个代数。[16]我们根据 [36]中的推论2.32改写了这个定理，并假定II型$_\infty$ 因子是半有限的（见推论1.20和定义1.21）。

文献 [9] 证明了(6.2)具有所有这些性质。在本节余下部分，我们将介绍一种替代迹，它定义在稠密子代数 $\mathcal{A}_{R,\,0}$ 上，并具有性质1、2、3、4、5和7。[17] 这个迹是有限的。[18] 根据该定理，这个稠密定义的迹无法扩展为定义在整个 $\mathcal{A}_R$ 上的半有限正规迹。然而，由于性质7，存在这样的迹并非显而易见。研究其他稠密定义的迹很有意义，因为理论修正[19] 预计会改变代数和迹，而修改后的迹也有望定义在$\mathcal{A}_{R,\,0}$ 上，同时仍满足性质7。[20] 因此，通过研究满足算符乘积展开恒等式的稠密定义迹所构成的空间，可以对体动力学的某些修正加以约束。

鉴于（6.2）可被视为源自具有光滑内部几何的圆盘欧几里得路径积分，生成替代迹的一种方法是在圆盘内部引入一个缺陷。例如，可以考虑锥形缺陷或测地线孔洞。它们曾在 [26]中得到研究。我们所关注的替代迹对应于一个尖点，它是这两类缺陷的极限情形。更确切地说，令 $T_b(a)a \in \mathcal{A}_{R,\,0}$，$b>0$ 为环带（或喇叭）欧几里得路径积分，其中一个边界具有通常的反德西特边界条件以及由 a所规定的物质插入，而另一个边界是一条长度为 b的测地线。这条测地线上的物质态是仅通过物质理论的第二个喇叭路径积分制备的。换言之，整个构型是在固定 b 下的双喇叭，其中边界粒子仅沿着一个边界传播。于是，我们的替代迹定义为

$$\mathrm{tr}_\lambda(a) := \mathrm{tr}(a) + \lambda \lim_{b\to 0} \frac{T_b(a)}{\mathrm{Tr}_{\mathcal{H}_0} e^{-bH}}, \quad a \in \mathcal{A}_{R,0}, \quad \lambda \geq 0, \tag{6.3}$$

其中 λ 任意（因此这定义了一个一参数迹族，并且在$\lambda = 0$时可恢复 tr）。我们将尖点路径积分视为对圆盘的修正。我们没有严格论证能够证明，对于所有$\mathcal{A}_{R,\,0}$，当 $\lambda > 0$ 时，tr_λ 都是有限的，但物质理论为自由场时肯定成立。在这种情况下，分母中的 $\mathrm{Tr}_{\mathcal{H}_0} e^{-bH}$ 因子会抵消双喇叭上物质路径积分的行列式，因此可以用维克收缩来计算路径积分。由于我们的目标是证明，在 $\mathcal{A}_{R,\,0}$上，较弱意义下的迹不再唯一，读者在本节中可以只考虑自由物质场。

鉴于 tr_λ 在$\mathcal{A}_{R,\,0}$上有限，我们现在论证 tr_λ 满足算符乘积展开恒等式（4.55）。参见图10。可以用一条测地线将缺陷与算符插入分隔开来；通过考察由该测地线围成、用于制备一个态的区域内的欧几里得路径积分，即可验证算符乘积展开恒等式。因此，可以在反德西特边界上局部验证算符乘积展开恒等式。

从其作为带有缺陷的欧几里得路径积分的表示来看，替代迹 tr_λ 显然具有循环性。我们还需要证明的最后一个性质是，该迹为正且忠实。这并非显而易见，因为对于 $b>0$，线性泛函 T_b 并非正泛函。例如，由（2.43）可知

$$T_b(e^{-\beta H_R}) = \frac{\mathrm{Tr}_{\mathcal{H}_0} e^{-bH}}{\pi} \int_0^\infty ds\, \cos(bs) e^{-\frac{s^2}{4\phi_b}\beta}. \tag{6.4}$$

[17]为了将这些性质应用于 $\mathcal{A}_{R,0}$ 上的迹，我们将正锥定义为由以下形式的算符构成的空间：$a^\dagger a$ 其中 $a \in \mathcal{A}_{R,0}$。[18]如果我们将恒等算符纳入 $\mathcal{A}_{R,0}$，情况就不会如此。[19]含物质场的JT引力可以从更一般理论的缩放极限或红外极限中产生。偏离该极限可能会引入对体动力学的修正。[20]正如我们很快将要说明的，算符乘积展开恒等式可以在渐近 AdS 区域中得到验证，因此，如果修正理论在长距离尺度下表现得像含物质场的 JT 引力，这些恒等式就会得到满足。

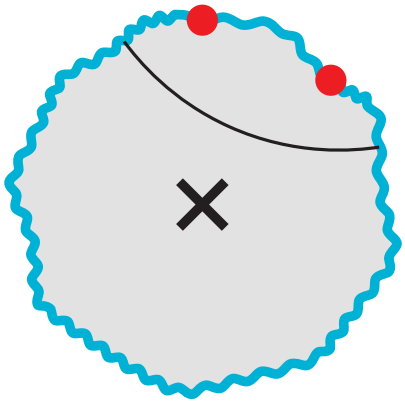

图10：我们描绘了存在一般局域体缺陷时的欧几里得圆盘二点函数，缺陷以叉号表示。黑线是测地线。测地线上方区域内的欧几里得路径积分在测地线上制备一个态。该区域与半圆盘同构，因此该态属于 $\mathcal{H}$。制备此态的另一种等价方式是利用算符乘积展开恒等式（4.55），将两个算符替换为对算符的求和。因此，带有缺陷的圆盘路径积分满足算符乘积展开恒等式。

bs 的余弦在 $s \in (0, \infty)$ 上既取正值也取负值，这表明存在关于 H_R 的正函数（它们定义正算符），经 T_b 映射后却得到负数。不过，若我们除以 $\mathrm{Tr}_{\mathcal{H}_0} e^{-bH}$，再取 $b \to 0$，就能避免这个问题，下面将对此加以说明。

我们将线性泛函 $\mathcal{I}$ 定义如下：

$$\mathcal{I}(\cdot) := \int_0^\infty \frac{db}{2\sinh\frac{b}{2}} T_b(\cdot). \tag{6.5}$$

此前我们声称，$T_b(\cdot)/\mathrm{Tr}_{\mathcal{H}_0} e^{-bH}$ 作为 $b \to 0$是定义良好的。因此，（6.5）由于被积函数的 $b \to 0$ 行为而发散。我们在附录 D 中证明，当将正算子插入 $\mathcal{A}_{R,0}$ 时，这种发散总是 $+\infty(\cdot)$。因此，（6.3）中的第二项是定义良好的；对于正的 a，它必定非负。此外，即使第二项为零，只要 $a = 0$，第一项也总不为零，因为 tr 是忠实的。因此，对于所有 $\lambda \geq 0$，tr_λ 都是忠实且正的。

总而言之，我们定义了一个作用于$\mathcal{A}_{R,\,0}$ 上的单参数迹族，它满足算符乘积展开恒等式，并且具有循环性、正性和忠实性。因此，若要得出（6.2）中的迹是唯一的这一结论，就必须在弱算子拓扑下完备化 $\mathcal{A}_{R,\,0}$，从而得到一个冯·诺依曼代数。以往研究含物质场的JT引力中的纠缠熵的工作 [37, 38] 仅关注 $\mathcal{A}_{R,\,0}$ 中的密度矩阵。$\mathcal{A}_{R,\,0}$ 之外但属于 $\mathcal{A}_R$ 之内的密度矩阵，与 $\mathcal{A}_{R,\,0}$之内的密度矩阵同样具有物理意义，因此，洛伦兹理论中只有一种物理上合理的熵概念，至多存在 S_0 歧义。

请注意，也可以将另一种迹 tr_λ 作为 GNS 构造的输入，从而得到一个新的希尔伯特空间和新的边界代数，它们与 $\mathcal{A}_R$ 和 $\mathcal{A}_L$不同。特别是，tr_λ在$\mathcal{A}_{R,0}$上定义了一个正定内积，对其完备化即可得到一个希尔伯特空间。若能对这一参数族的理论给出明确的洛伦兹描述，将会很有意思，但这超出了本文的范围。下一节我们将讨论边界代数的表示论，这有助于解决因子化问题。

7 因子化问题

本节中，我们将评述纯 JT 引力和含物质场的JT引力中的因子化问题。特别是，在 [24], 中，我们对纯 JT 引力的希尔伯特空间进行了因子化，并找到了一种分别定义量子极值曲面公式中的面积项和体熵项的方法。一个悬而未决的问题是，能否以类似方式对含物质场的JT引力的希尔伯特空间进行因子化，或许可以借助边缘模，从而以类似的方式理解半经典区域之外的量子极值曲面公式。我们将论证，边界代数的代数结构阻碍了这种因子化。在此之前，我们先回顾一些关于 II 型$_1$ 因子的表示的事实。

7.1 边界代数的表示

本节的目标是确定边界代数可能具有的表示。我们将把注意力限制在 $\mathcal{A}_L$ 上，但对 $\mathcal{A}_R$ 也有类似的讨论。实际上，考虑作用于 $\mathcal{H}$ 子空间上的子代数，其中左、右能量低于某个紫外截断 Λ。也就是说，定义投影 $p_\Lambda \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ 为

$$p_\Lambda = \theta(\Lambda - H_L)\theta(\Lambda - H_R), \tag{7.1}$$

其中 θ 表示海维赛德阶跃函数。接着我们定义 $\mathcal{A}_L^\Lambda := p_\Lambda \mathcal{A}_L p_\Lambda$，它是作用在 $\mathcal{H}^\Lambda := p_\Lambda \mathcal{H}$ 上的 II 型 $_1$ vN 因子。它在 $\mathcal{H}^\Lambda$ 上的交换子为 $\mathcal{A}_R^\Lambda := p_\Lambda \mathcal{A}_R p_\Lambda$。$\mathcal{H}^\Lambda$ 上的恒等算子为 p_Λ。使用 II 型 $_1$ 代数会让我们的讨论更简单，因为它们具有有限迹，我们仍将其记作 tr。我们预计，即使移除紫外截断，最终结论也不会改变。

在文献中，冯·诺依曼代数的表示也称为模。以下定义参见 [39],

定义。 冯·诺依曼代数 M 的一个（左）模，是指一个希尔伯特空间 $\mathcal{H}$ 以及一个正规幺同态 $\pi : M \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$。

定义。 设 M 是作用于希尔伯特空间 $\mathcal{H}$上的冯·诺依曼代数，且 N 是作用于 $\mathcal{K}$上的冯·诺依曼代数。令 M_+ 和 N_+ 分别表示它们的正锥。若线性映射 Φ 将 M 映入 N，且$\Phi(M_+) \subset N_+$，则称其为正映射。若对每个有界递增网 $a_\alpha \in M_+$，都有 $\Phi(\sup_\alpha a_\alpha) = \sup_\alpha \Phi(a_\alpha)$，则称正线性映射为正规映射。

在$\mathcal{A}_L^\Lambda$ 上的一个表示例子是标准表示。我们将$\mathcal{A}_L^\Lambda$ 中的每个元素视为一个右矢，内积定义为

$$\langle a|b\rangle := \text{tr } a^\dagger b, \quad a, b, \in \mathcal{A}_L^\Lambda. \tag{7.2}$$

由于 tr 是忠实的，这个内积是正定的。这个希尔伯特空间记作 $L^2(\mathcal{A}_L^\Lambda)$，它是关于上述内积对右矢空间取完备化所得。我们将 $\mathcal{A}_L^\Lambda$ 表示如下:

$$\pi(a)\,|b\rangle := |ab\rangle\,. \tag{7.3}$$

我们称 $\mathcal{A}_L^\Lambda$ 通过左乘作用于希尔伯特空间。现在我们论证 $L^2(\mathcal{A}_L^\Lambda) = \mathcal{H}^\Lambda$。[21] 此前，我们指出，tr a 可以通过圆盘欧几里得路径积分计算，

[21]这一点在 [9]中有更详细的解释。

其中边界条件由算符 a设定。我们还证明，将圆盘的边界划分为上半部和下半部后，可以把圆盘路径积分改写为一个左矢与右矢的内积。左矢和右矢可以分别通过半圆盘上的欧几里得路径积分计算，该路径积分在含物质场的JT引力的希尔伯特空间中制备一个态。施加紫外截断 Λ 不会影响这一结果。左矢和右矢对应于式（7.2）的左侧。因此， $\mathcal{A}_L^\Lambda$ 的标准表示是：在满足反德西特边界条件的空间区间上量子化的含物质场的JT引力的希尔伯特空间，并投影到满足 $H_L < \Lambda$ 和 $H_R < \Lambda$的扇区。

为了看出标准表示中 $\mathcal{A}_L^\Lambda$ 与 $\mathcal{A}_R^\Lambda$ 之间的关系，令 J 为由下式定义的反幺正算符

$$J\,|a\rangle := |a^\dagger\rangle\,. \tag{7.4}$$

接下来，注意到

$$Ja^\dagger J\,|b\rangle = |ba\rangle\,. \tag{7.5}$$

由于 $|a\rangle$ 对应于半圆盘上的欧几里得路径积分，且反德西特边界上的边界条件由 a设定， $\mathcal{A}_R^\Lambda$ 中的任意算符都可以在标准表示中表示为右乘。因此， $\mathcal{A}_R^\Lambda = J\mathcal{A}_L^\Lambda J$。

II 型的可分表示$_1$ 因子已被完全分类。从 [33, 39, 40],我们得知， $\mathcal{A}_L^\Lambda$ 的每个可分表示都等价于

$$p(L^2(\mathcal{A}_L^\Lambda)\otimes \ell^2(\mathbb{N})), \tag{7.6}$$

其中， $\mathcal{A}_L^\Lambda$ 通过左乘作用于 $L^2(\mathcal{A}_L^\Lambda)$，而 p 是 $\mathcal{A}_L^\Lambda$的交换子中的一个投影，即 $\mathcal{A}_R^\Lambda \otimes \mathcal{B}(\ell^2(\mathbb{N}))$，一个 II_∞ 型因子。这意味着， $\mathcal{A}_L^\Lambda$ 的每个表示都可以在物理上解释为与热浴纠缠的双侧黑洞，该黑洞由 $L^2(\mathcal{A}_L^\Lambda)$描述。

7.2 关于因子化的评论

我们现在回到这样一个问题：希尔伯特空间 $\mathcal{H}^\Lambda$ 是否可以进行有用的因子化，从而获得对量子极值曲面公式（6.1）的另一种描述，甚至实现 ER=EPR。因子化映射应当是从 $\mathcal{H}^\Lambda$ 到

$$\bigoplus_\alpha \mathcal{H}_{\alpha,L}\otimes\mathcal{H}_{\alpha,R}, \tag{7.7}$$

其中 α 标记一个超选择（或边缘模）扇区，而$\mathcal{H}_{\alpha,L}$ 和 $\mathcal{H}_{\alpha,R}$ 是 $\mathcal{A}_L^\Lambda$ 和 $\mathcal{A}_R^\Lambda$的表示。[22] 方程（7.7）受到一些成功尝试的启发 [41] ：这些尝试将紧致规范群下二维杨-米尔斯理论的希尔伯特空间因子化 G，其中希尔伯特空间为 $L^2(G)$，且每个 α 都表示 G。与纠缠面左侧空间区域相关联的冯·诺依曼代数是群代数，它通过左乘作用于 $L^2(G)$ [42]。该代数是 I 型因子的直和 [43]。事实上，作用于希尔伯特空间的任何 I 型代数都可以用（7.7）表示，其中该代数仅作用于左侧的张量因子 [44]。因此，I 型代数会自然地导出一个因子化映射。标准表示 $L^2(\mathcal{A}_L^\Lambda)$ 在某种意义上与 $L^2(G)$相似，因为 $\mathcal{A}_L^\Lambda$ 同样通过左乘作用于 $L^2(\mathcal{A}_L^\Lambda)$。然而，因子化 $L^2(\mathcal{A}_L^\Lambda)$的问题有所不同，因为 $\mathcal{A}_L^\Lambda$ 是一个 II 型$_1$ 因子。如上所述， $\mathcal{A}_L^\Lambda$ 的任何表示都对应一个双侧黑洞，

[22]除了直和之外，我们也可以考虑直积分，但这种差异对我们而言并不重要。

因此 L^2（$\mathcal{A}_L^{\Lambda}$）无法等距映射到（7.7），如果$\mathcal{H}_{\alpha,\,L}$ 和$\mathcal{H}_{\alpha,\,R}$ 要被解释为同一双侧时空中的互补纠缠楔。如果我们要求$\mathcal{H}_{\alpha,\,L}$和$\mathcal{H}_{\alpha,\,R}$ 构成$\mathcal{A}_L^{\Lambda}$ 和$\mathcal{A}_R^{\Lambda}$的表示，那么（7.7）就只能解释为纠缠的双侧宇宙对的直和。换言之，在 [24]中，我们强调了在砖墙（或拉伸视界）上采用局域边界条件对于因子化希尔伯特空间的重要性。如果每个张量因子都是边界代数的一个表示，那么唯一可能的局域边界条件就是第二个反德西特边界。[23] 如第4节所述，对单个张量因子取迹等价于双喇叭欧几里得路径积分，而后者普遍发散。我们之所以能够成功地因子化[24] 中的希尔伯特空间，是因为纯 JT 引力中的可交换边界代数仅由哈密顿量生成，因此允许存在合理的因子化映射。[24]

8 讨论

在本文中，我们研究了与任意物质量子场论以最小方式耦合的 JT引力的边界代数。该理论对任意耦合取值都可以精确求解，而半经典极限就是弱耦合极限。我们的动机是更好地理解半经典量子引力如何从更一般的理论中涌现。我们将右边界代数定义为 $\mathcal{A}_R$由右哈密顿量和右边界上的物质算符生成的冯·诺依曼代数。左边界代数 $\mathcal{A}_L$ 的定义与此类似。我们发现这两个代数互为交换子，并且二者都是因子。这些事实共同意味着， $\mathcal{A}_R$ 与 $\mathcal{A}_L$ 的并集生成整个希尔伯特空间。因此，可以将这两个代数类比为有限 N时两个全息共形场论的副本。不同之处在于，在全息共形场论中，边界代数是 I 型的，而含物质场的 JT引力中的边界代数是 II 型的$_\infty$。正如可以取全息共形场论的大 N 极限，得到描述半经典时空子区域的涌现冯·诺依曼代数 [3——5]，也可以取我们边界代数的半经典极限。特别是， $\mathcal{A}_R$ 和 $\mathcal{A}_L$ 的半经典极限应分别对应右、左纠缠楔。半经典纠缠楔中的任何算符都应能表示为相应边界代数中算符的半经典极限。原则上，这为理解如何从边界共形场论重构纠缠楔中的体算符提供了一种明确方法。例如，我们预计可以利用这一框架定义渐近等距编码[45]。研究与重构复杂度以及非极小量子纠缠面在此背景下的作用相关的问题，将会很有意义 [46]。特别是， [5] 指出，可以通过将模流单迹算符纳入涌现的冯·诺依曼代数，以代数方式定义纠缠楔。纠缠楔的另一种定义——将其视为由极小量子纠缠面和边界子区域围成的空间区域的依赖域—— [47],应当由此得出。一个重要问题是，找到非极小量子纠缠面的类似代数定义。这应有助于阐明为何隆起型量子纠缠面对 Rényi 2 熵作出了负贡献 [8]。

[23]在这个边界上，可以插入交换子代数中的算符。它们将起到缺陷算符的作用。[24]我们对纯 JT 引力的分析中，单侧迹 [24] 也产生了一个普适的无限乘性常数，这是由于哈密顿量具有连续谱。我们将这个常数解释为 $SL(2,\ \mathbb{R})$ 的无限$\widetilde{\ }$体积，并在形式上将其吸收到 S_0 中，从而得到有限结果。我们不知道如何将正文中描述的普适发散在形式上吸收到 S_0中。

我们这项工作有若干值得探讨的技术性推广。例如，可以采用 [23, 48]中发展的形式体系纳入超对称。还可以考虑单侧黑洞的边界代数，其时空终止于一张世界末端（EoW）膜上。不含物质的 EoW 膜理论已在[49, 50]中得到研究。含物质场理论的哈密顿量见（D.6），其中将 μ 替换为 $\mu + H$，其中 μ 是 EoW 膜张力，而 H 是将物质理论量子化于全局 AdS 的一半空间上所得的哈密顿量[2]。由于我们将边界代数解释为纠缠楔，因此猜想此例中的边界代数为 I 型（换言之，在不存在热浴时，极小量子纠缠面为空 [50]）。

另一个值得考虑的推广是 q变形，该变形在 [35, 51–54]中进行了研究。具体而言，我们的图示规则应当允许 q变形。当物质理论是自由标量场时，这些 q变形规则已为人所知，并在 [18, 54]中进行了讨论。 [35]中的单粒子扇区类似于我们工作中的一个初级扇区。借助引力着装共形块 q变形的显式公式，可以考虑如何通过自举求出所有已知的交叉方程解。第5 节中的证明应当可以推广到 q变形理论，因为计算圆盘关联函数的图示与其 q变形对应图示相同。

证明边界代数是超有限的也会很有意思。任意一个 II 型$_\infty$ 因子都可以表示为一个 II 型$_1$ 因子与 $\mathcal{B}(\mathcal{H})$的乘积。我们还曾指出，施加紫外截断后，边界代数会成为 II 型$_1$ 因子。超有限 II 型$_1$ 因子是唯一的。Murray 和 von Neumann 将其实现为纠缠量子比特的无限张量积 [55]。我们预期边界代数是超有限的，因为含物质场的JT引力可以实现为一对纠缠 SYK 模型的大 N 极限。

正如我们之前指出的，边界代数的代数结构使我们无法以类似于二维杨-米尔斯理论或纯 JT 引力中既有工作的方式对希尔伯特空间进行因子化 [41, 56, 57]。这一结果本质上是物质量子场论局域性的后果。要对希尔伯特空间进行因子化，就需要修改代数，使其成为 I 型。研究为使因子化映射得以存在而必须进行的最小修改，将会很有意义。这些修正应当是非局域的。修正后代数的最低要求是满足算符乘积展开恒等式（4.55）。假设我们上述关于 EoW 膜分析的猜想成立，那么这类修正代数的一个候选者，就是在以 EoW 膜为终点的时空中的单侧边界代数。必须确定单侧边界代数如何由对双侧动力学的非局域修正产生。

边界代数 $\mathcal{A}_R$ 和 $\mathcal{A}_L$ 并非强耦合下唯一有趣的冯·诺依曼代数。还有描述物质扇区中 Rindler 楔形区域的 III型$_1$ 因子 $\mathcal{H}_0$ (4.1)。在半经典极限下，这些应当产生 $_1$ 的涌现 III型因子 [3, 4]。更一般地，任何可在 $\mathcal{H}$ 上定义的冯·诺依曼代数，都应被视为对偶边界理论中的涌现冯·诺依曼代数 [5] （例如处于相应标度区间的 SYK模型），因为 $\mathcal{H}$ 是 GNS希尔伯特空间。

在这项工作中，我们考察了关联到左侧或右侧边界的算符代数。引入体中的观察者世界线（如 [7, 58] 所示），并将算符关联到该世界线以定义一个新的代数，将会很有意思。这对于理解德西特全息至关重要；在德西特全息中，不存在空间边界，但会涌现出冯·诺依曼代数。

致谢 感谢 Scott Collier、Daniel Harlow、Daniel Jafferis、Adam Levine、Hong Liu、Ronak Soni、Jon Sorce 和 Gabriel Wong 与我进行了富有启发性的讨论。我也感谢 Daniel Harlow 和 Jon Sorce 对稿件提出意见。本工作得到美国能源部科学办公室高能物理办公室的资助，资助合同编号为 DE- SC0012567（高能理论研究）；同时也得到国防部资助，项目编号为 KK2014。

双喇叭关联函数

我们的目标是计算

$$\mathrm{Tr}\ e^{-\tilde{\Delta}\ell}e^{-\beta_6 H_L}\mathcal{O}_L e^{-\beta_5 H_L}\mathcal{O}_L e^{-\beta_4 H_L}e^{-\beta_3 H_R}\mathcal{O}_R e^{-\beta_2 H_R}\mathcal{O}_R e^{-\beta_1 H_R}. \tag{A.1}$$

利用（4.16）、（4.18）和（4.26，我们得到

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{\infty} d\ell\, d\ell_{15}\, d\ell_{25}\, d\ell_{58}\, d\ell_{16}\, d\ell_{12}\, d\ell_{28}\, d\ell_{35}\, d\ell_{38}\, d\ell_{34}\, d\ell_{48}\, d\ell_{47}\, e^{-\tilde{\Delta}\ell}\\
&I(\ell,\ell_{15},\ell_{16})I(\ell_{15},\ell_{25},\ell_{12})I(\ell_{58},\ell_{25},\ell_{28})I(\ell_{58},\ell_{35},\ell_{38})I(\ell_{38},\ell_{34},\ell_{48})I(\ell_{48},\ell,\ell_{47})\\
&\Psi_{\beta_1}(\ell_{16})\Psi_{\beta_2}(\ell_{12})\Psi_{\beta_3}(\ell_{28})\Psi_{\beta_4}(\ell_{35})\Psi_{\beta_5}(\ell_{34})\Psi_{\beta_6}(\ell_{47})\\
&\mathrm{Tr}_{\mathcal{H}_0}\Big[e^{-e^{\frac{\ell_{47}-\ell_{48}}{2}}(H-B)}e^{iP\frac{\ell_{48}-\ell}{2}}O_L(\ell_{48}/2)e^{-e^{\frac{\ell_{34}-\ell_{38}}{2}}(H-B)}e^{iP\frac{\ell_{38}-\ell_{48}}{2}}O_L(\ell_{38}/2)\\
&e^{-e^{\frac{\ell_{35}-\ell_{58}}{2}}(H-B)}e^{iP\frac{\ell_{58}-\ell_{38}}{2}}e^{-e^{\frac{\ell_{28}-\ell_{25}}{2}}(H+B)}e^{-iP\frac{\ell_{25}-\ell_{85}}{2}}O_R(\ell_{25}/2)e^{-e^{\frac{\ell_{12}-\ell_{15}}{2}}(H+B)}e^{-iP\frac{\ell_{15}-\ell_{25}}{2}}\\
&O_R(\ell_{15}/2)e^{-e^{\frac{\ell_{16}-\ell}{2}}(H+B)}e^{-iP\frac{\ell-\ell_{15}}{2}}\Big].
\end{aligned} \tag{A.2}$$

我们首先讨论物质扇区中迹内的算符，$\mathrm{Tr}_{\mathcal{H}_0}$。图11展示了该算符的作用；这个图是通过多次迭代图6 所示的过程得到的。图11 中所有标记点的位置由在（A.2）中进行积分的 12 个重整化测地线长度确定。图12中，我们为 12 维积分域引入了一个更方便的坐标系。新坐标为 θ，b，w_i^θ对于 $i\in\{1,2,3,4,7,8\}$，而 u_i^θ对于 $i\in\{1,2,3,4\}$。坐标范围为（$-\infty$，∞），但以下情况除外：

$$b\in(0,\infty),\quad \theta\in(0,\pi),\quad 0<u_1^\theta<u_2^\theta<b,\quad 0<u_3^\theta<u_4^\theta<b. \tag{A.3}$$

注意，图 d 11中的距离等于

$$d=\frac{w_7^\theta-w_8^\theta}{2}. \tag{A.4}$$

利用这个新的坐标系，我们可以得到在 $\mathrm{Tr}_{\mathcal{H}_0}$ （A.2）中出现的算符的新表达式。首先，我们定义算符

$$U_{d,\theta}(x):=\exp\left(x\left[B\sin\theta\,\sinh d-iP\cos\theta-H\cosh d\,\sin\theta\right]\right), \tag{A.5}$$

这对应于一种等距变换，它将图11中最上方的绿色测地线（其 u^θ 坐标为 b）移动到一条 u^θ 坐标为 $b-x$的测地线上。接下来，我们定义

$$O_R^{(d,\theta)}(u,w):=U_{d,\theta}^{-1}(u)O_R(w)U_{d,\theta}(u),\qquad O_L^{(d,\theta)}(u,w):=U_{d,\theta}^{-1}(u)O_L(w)U_{d,\theta}(u). \tag{A.6}$$

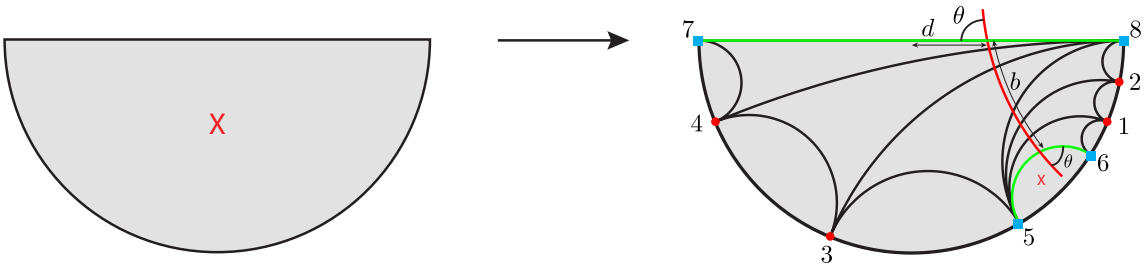

图11：左图描绘了物质理论中的一个态，该态由半圆盘上的欧几里得路径积分制备，并在某处插入了一个算符。右图展示了方程（$\mathcal{H}_0$ 中的 TrA.2）内算符作用后，这个态变成了什么。具体而言，左侧整个半圆盘都映射到由连接点 5 和 6 的绿色测地线与反德西特边界围成的区域。接下来，我们将忽略这个区域并将两条绿色测地线识别起来，从而形成双喇叭几何。图中所有线条都是测地线。点 i 与 j 之间的重整化长度为 ℓ_{ij}。我们将定义$\ell := \ell_{78} = \ell_{56}$。两条绿色测地线之间的红色测地线长度为 b。每个双喇叭都有一条唯一的最短闭测地线，在此例中就是红色测地线。我们将红色测地线延伸到基本域之外，以便轻松标记这条测地线与绿色测地线所成的角θ 。红色测地线与绿色测地线的上方交点到半圆盘的极坐标原点的距离为 d。由于 7-8 测地线以原点为中心，因此一旦黑色和绿色测地线的长度确定，所有点的位置也就确定了。需要说明的是，每个数字都对应于圆盘渐近无穷远区域中的一个特定点，该点可以用（ϕ，ψ）坐标来指定。由于这些点距原点无限远，因此在图中我们只能恰当地表示它们的 ϕ 坐标。

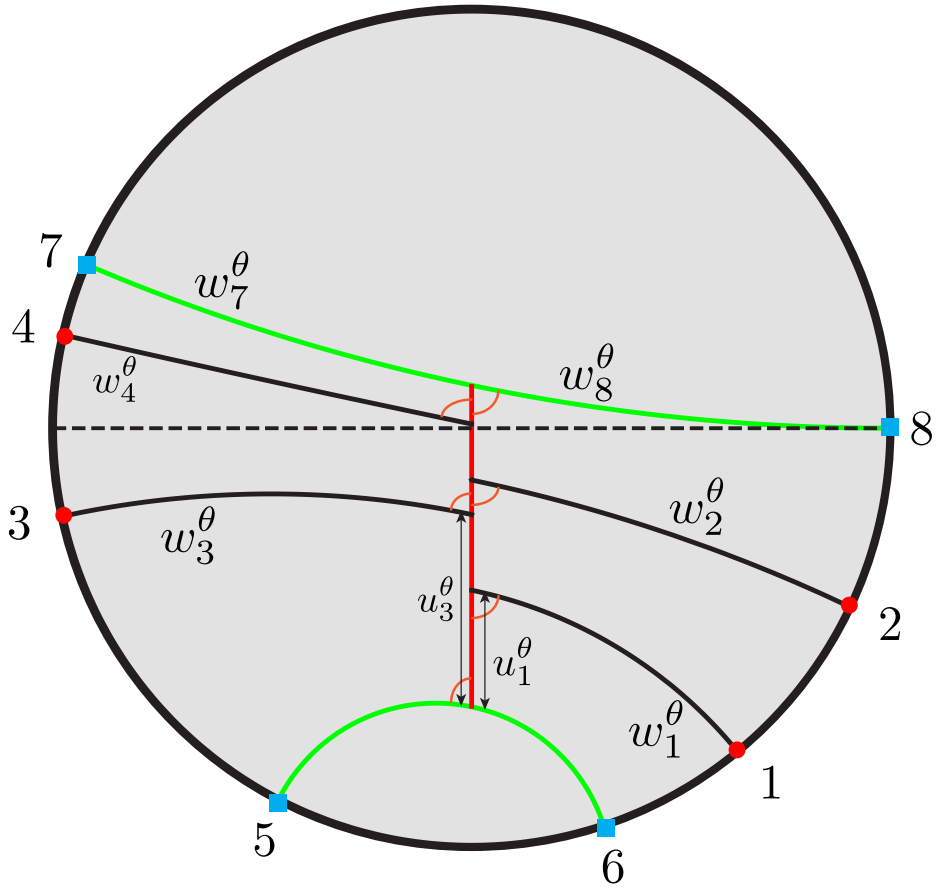

图12：绿色测地线之间的区域，与图11中绿色测地线之间的区域相同，但这里我们选择了一个参考系，使红色测地线竖直定向并水平居中，且点8的角极坐标为 $\phi = \pi$ （回顾图3中的约定）。重整化长度 w_1^θ 表示沿黑色测地线从点1到红线的距离，该黑色测地线与红线的夹角为 θ。 w_i^θ坐标在 $i \in \{2, 3, 4, 7, 8\}$时的定义类似。所有橙色弧线均表示角度 θ。红色测地线的长度为 b。坐标 u_1^θ 表示红色测地线底端与上述黑色测地线和红色测地线交点之间的距离。同样， u_3^θ 对点3的定义也类似。我们还要定义u_2^θ 和u_4^θ，它们同样从红色测地线底端开始测量，但图中未画出。此图旨在定义相对于红色测地线的坐标系，其中一个坐标沿红色测地线测量，另一个坐标沿一条与红色测地线夹角为 θ的测地线测量。我们保留 θ 上标，因为后文将考虑依赖于 θ的坐标变换。

最后，出现在 $\mathrm{Tr}_{\mathcal{H}_0}$ （A.2）中的算符等于

$$U_{d,\theta}(b)\mathcal{T}_b\left\{O_L^{(d,\theta)}(u_4^\theta, w_4^\theta - d)O_L^{(d,\theta)}(u_3^\theta, w_3^\theta - d)O_R^{(d,\theta)}(u_2^\theta, w_2^\theta + d)O_R^{(d,\theta)}(u_1^\theta, w_1^\theta + d)\right\}, \tag{A.7}$$

这里我们引入了一种特殊的时间序信号 $\mathcal{T}_b$，它根据算符的 u^θ 坐标（模去 b的平移）对算符进行排序。也就是说， u^θ 坐标应先平移 b 的整数倍，使其落在区间（0， b）内，然后根据它们的顺序确定算符的排列。鉴于区间（A.3），这一过程似乎毫无意义，但稍后我们会考虑其他坐标系，在其中 u 坐标会超出（0， b）区间。为了解 $\mathcal{T}_b$ 的用途，不妨设 u_4^θ 为 b。这样，该算符就会排在最前面。等价地，我们也可以利用迹的循环性，将该算符移到最前面。因此， $\mathcal{T}_b$ 使我们能够根据需要定义范围（0， b）之外的 u 坐标， b但要注意，实际的排序是在基本域（0， b）内定义的。

方程（A.7）相较于（A.2）中的算符有了显著简化。由于它出现在迹中，我们可以对（A.7）进行共轭变换，进一步简化它。若以 e^{-iPd}进行共轭变换，就可以消除 d 依赖。结果为

$$U_{0,\theta}(b)\mathcal{T}_b\left\{O_L^{(0,\theta)}(u_4^\theta, w_4^\theta)O_L^{(0,\theta)}(u_3^\theta, w_3^\theta)O_R^{(0,\theta)}(u_2^\theta, w_2^\theta)O_R^{(0,\theta)}(u_1^\theta, w_1^\theta)\right\}. \tag{A.8}$$

现在我们考虑对 w^θ 和 u^θ 变量进行一个无穷小的、依赖于 θ的坐标变换，定义如下：

$$dw_i^\theta = -\cot\theta\, d\theta, \quad i \in \{1,2,3,4,7,8\}. \qquad du_i^\theta = 0, \quad i \in \{1,2\}. \qquad du_i^\theta = \frac{2\, d\theta}{\sin\theta}, \quad i \in \{3,4\}. \tag{A.9}$$

接下来，注意到$U_{0,\ \theta}(b)$满足

$$\frac{dU_{0,\theta}(b)}{d\theta} = [iP\cot\theta + H - B, U_{0,\theta}(b)], \tag{A.10}$$

并且利用（A.9），我们还有

$$\frac{d}{d\theta}O_R^{(0,\theta)}(u_i^\theta, w_i^\theta) = [iP\cot\theta + H - B, O_R^{(0,\theta)}(u_i^\theta, w_i^\theta)], \quad i \in \{1,2\} \tag{A.11}$$

$$\frac{d}{d\theta}O_L^{(0,\theta)}(u_i^\theta, w_i^\theta) = [iP\cot\theta + H - B, O_L^{(0,\theta)}(u_i^\theta, w_i^\theta)], \quad i \in \{3,4\} \tag{A.12}$$

因此，在（A.8）中将 θ 改变一个无穷小量 $d\theta$，并同时实施（A.9）中的无穷小变换，等价于一次共轭变换，而这不会影响迹。因此，我们可以将（A.8）替换为

$$e^{-bH}\mathcal{T}_b\left\{O_L^{(0,\frac{\pi}{2})}(u_4^{\frac{\pi}{2}}, w_4^{\frac{\pi}{2}})O_L^{(0,\frac{\pi}{2})}(u_3^{\frac{\pi}{2}}, w_3^{\frac{\pi}{2}})O_R^{(0,\frac{\pi}{2})}(u_2^{\frac{\pi}{2}}, w_2^{\frac{\pi}{2}})O_R^{(0,\frac{\pi}{2})}(u_1^{\frac{\pi}{2}}, w_1^{\frac{\pi}{2}})\right\}, \tag{A.13}$$

并且我们可以明确地写出

$$w_i^{\frac{\pi}{2}} = w_i^\theta + \log\sin\theta, \quad i \in \{1,2,3,4,7,8\}. \qquad u_i^{\frac{\pi}{2}} = u_i^\theta, \quad i \in \{1,2\}. \qquad u_i^{\frac{\pi}{2}} = u_i^\theta + 2\log\cot\frac{\theta}{2}, \quad i \in \{3,4\}. \tag{A.14}$$

回顾一下我们的步骤：我们从积分测度（A.2）中的 12 个重整化测地线长度出发，然后将这些坐标变换为 θ， b， w_i^θ对应 $i \in \{1,2,3,4,7,8\}$，以及 u_i^θ对应

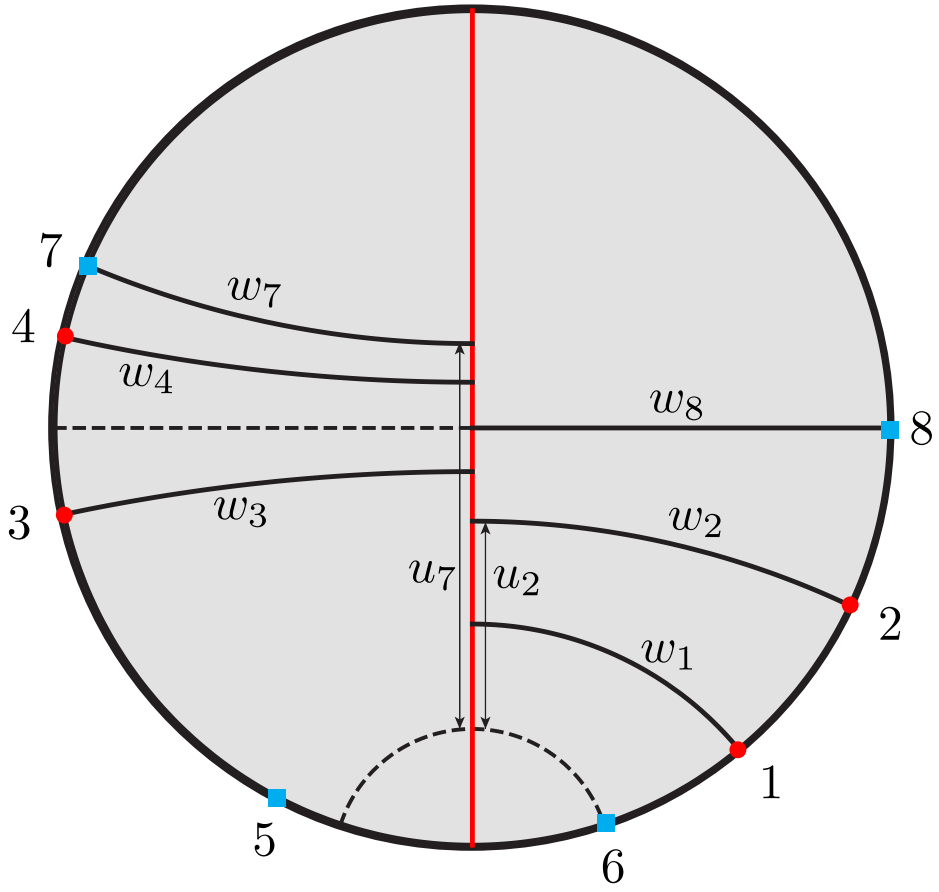

图13：我们展示了感兴趣的最终坐标系。编号点的位置与图12中的相同。红色测地线已无限延伸。粗黑线和虚线都是与红色测地线成直角相交的测地线。双喇叭的一个基本域位于虚线测地线之间（此基本域不同于图12中绿色测地线之间的基本域），两条虚线测地线之间的红色测地线长度为 b。下方虚线测地线通过垂直等距变换与上方虚线测地线相关（也就是说，物质理论中对应的算符将是 e^{-bH}）。坐标 w_i，$i \in \{1,2,3,4,7,8\}$ 度量编号点与红色测地线之间的重整化距离。坐标 u_i，$i \in \{1,2,3,4,7\}$ 度量沿红色测地线的距离，起点为红色测地线与下方虚线相交处。我们只展示了 u_7 和 u_2，省略了其余 u_i 坐标。这六个 w_i坐标与五个 u_i 坐标以及 b 共同构成了式（A.2）积分域的最终坐标系。请注意，点6和点8既与此处的虚线测地线相交，也与图12 中的绿色测地线相交（上方虚线测地线应一直延伸到最右侧，但被一条黑色测地线遮挡）。

$i \in \{1,2,3,4\}$。然后，我们将所有 w_i^θ和 u_i^θ坐标改为 $w_i^{\pi/2}$和 $u_i^{\pi/2}$坐标$_\pi$，使用（A.14）。现在我们再做最后一次坐标变换：将 θ 替换为 u_7^2，定义如下：

$$u_7^{\frac{\pi}{2}} := b + 2\log\cot\frac{\theta}{2}. \tag{A.15}$$

最后，为了简化记号，从现在起我们省略 $^{\frac{\pi}{2}}$ 上标。最终坐标系的几何诠释可参见图13。坐标为 w_i当 $i \in \{1,2,3,4,7,8\}$时， u_i当 $i \in \{1,2,3,4,7\}$时，以及 b。坐标范围为

$$w_i \in (-\infty,\infty), \quad b \in (0,\infty), \quad u_7 \in (-\infty,\infty), \quad u_7 - b < u_3 < u_4 < u_7, \quad 0 < u_1 < u_2 < b. \tag{A.16}$$

对 u 坐标的最后两个限制，源于（A.9）中的变换保持任意两个此类坐标之差不变这一事实。在这些坐标下，（A.2）中的物质迹很简单：

$$\mathrm{Tr}_{\mathcal{H}_0}\left[e^{-bH}\mathcal{T}_b\left\{O_L(u_4,w_4)O_L(u_3,w_3)O_R(u_2,w_2)O_R(u_1,w_1)\right\}\right], \tag{A.17}$$

其中

$$O_R(u,w) := e^{uH}O_R(w)e^{-uH}, \qquad O_L(u,w) := e^{uH}O_L(w)e^{-uH}. \tag{A.18}$$

从原来的 12 个重整化长度进行坐标变换很简单：

$$e^{-\ell_{ij}} = \frac{e^{-(w_i+w_j)}}{\left[\cosh\left(\frac{u_i-u_j}{2}\right)\right]^2}, \quad i \in \{3,4,5,7\}, \quad j \in \{1,2,6,8\} \tag{A.19}$$

$$e^{-\ell_{ij}} = \frac{e^{-(w_i+w_j)}}{\left[\sinh\left(\frac{u_i-u_j}{2}\right)\right]^2}, \quad i,j \in \{3,4,5,7\} \tag{A.20}$$

$$\tag{A.21}$$

$$e^{-\ell_{ij}} = \frac{e^{-(w_i+w_j)}}{\left[\sinh\left(\frac{u_i-u_j}{2}\right)\right]^2}, \quad i,j \in \{1,2,6,8\} \tag{A.22}$$

上文中， w_5 应替换为 w_7， w_6 应替换为 w_8， u_8 应替换为 b， u_6 应替换为 0， u_5 应替换为 $u_7 - b$。此外，$\ell_{78} = \ell_{56} = \ell$。

A执行积分变量变换后，(A.2) 最终变为

$$\int db\, du_7 \left(\frac{e^{\frac{-w_7-w_8}{2}}}{\cosh\left(\frac{u_7-b}{2}\right)}\right)^{2\tilde{\Delta}} \mathrm{Tr}_{\mathcal{H}_0}\left[e^{-bH}\mathcal{T}_b\Big\{\right. \tag{A.23}$$

$$2\sinh\frac{b}{2}\frac{du_1dw_1e^{w_1}}{2}\frac{du_2dw_2e^{w_2}}{2}\frac{dw_8e^{w_8}}{2} \tag{A.24}$$
$$\mathcal{K}^t_{\beta_3}(b,w_8;u_2,w_2)O_R(u_2,w_2)\mathcal{K}^t_{\beta_2}(u_2,w_2;u_1,w_1)O_R(u_1,w_1)\mathcal{K}^t_{\beta_1}(u_1,w_1;0,w_8)$$

$$2\sinh\frac{b}{2}\frac{du_3dw_3e^{w_3}}{2}\frac{du_4dw_4e^{w_4}}{2}\frac{dw_7e^{w_7}}{2} \tag{A.25}$$
$$\left.\left.\mathcal{K}^t_{\beta_6}(u_7,\ w_7;u_4,\ w_4)O_L(u_4,\ w_4)\mathcal{K}^t_{\beta_5}(u_4,\ w_4;\ u_3,\ w_3)O_L(u_3,\ w_3)\mathcal{K}^t_{\beta_4}(u_3,\ w_3;\ u_7-b,\right.\right.$$
$$\left.\left.w_7)\right\}\right]$$

我们写出被积函数的方式并不意味着采用某种特定的积分次序。积分域见式（A.16）。式（A.24）给出了边界粒子绕喇叭传播的振幅：粒子从点6出发并返回点8，而点8与点6重合。此外还插入了物质算符。可以与式（2.42）比较；该式与此类似，但没有物质算符。如第2.4节所述，$2\sinh\frac{b}{2}$ 因子确保双喇叭形几何起伏的测度正确。式（A.25）与此类似，但对应另一个喇叭。请注意，边界粒子的起点和终点取决于 u_7，它的积分范围从 $-\infty$ 到 ∞。因此，我们对两个边界之间的相对体欧几里得全局时间平移进行积分。当 u_7 平移 b时，喇叭上的边界粒子的起点/终点保持不变，但连接该点与另一边界上某个固定点的测地线会绕双喇叭一周。因此，这个积分计算的是双喇叭振幅，其中边界上有物质插入，同时还对连接两个边界上特定标记点的所有测地线求和。由于测地线绕双喇叭的方式有无穷多种，这个求和是无穷的，而式（˜）中涉及A.23 的 Δ 项对该求和进行了正则化。请注意，该积分仍然发散，因为当 b 趋近于零时，具有局域自由度的幺正物质理论中的物质路径积分会发散。

B $\mathcal{H}$的完备基

在本附录中，我们证明形如 (4.2) 的态张成整个希尔伯特空间 $\mathcal{H}$。我们还找到 $\mathcal{H}$ 的一个标准正交基（即能量基底）。为此，我们从 (4.2) 出发，对 β_1 和 β_2 进行逆拉普拉斯变换。结果为

$$|\Psi^{O}_{s_1,s_2}(\ell)\rangle := \int_{-\infty}^{\infty} d\psi_1 \int_0^{\pi} d\phi_1 e^{\Delta\psi_1}\,|O(\phi_1)\rangle$$
$$e^{-2(e^{\psi_0}+e^{\psi_1})\csc\phi_1}\rho(s_1)2K_{2is_1}\left(2e^{\frac{\psi_0+\psi_1}{2}}\sec\frac{\phi_1}{2}\right)\rho(s_2)2K_{2is_2}\left(2e^{\frac{\psi_0+\psi_1}{2}}\csc\frac{\phi_1}{2}\right)\csc\phi_1\Big|_{\psi_0=\log 2-\frac{\ell}{2}}. \tag{B.1}$$

这些态将 H_L 和 H_R 对角化。接下来，我们利用 (2.52) 转到定长度基，

$$|\Psi^{O}_{\ell_1,\ell_2}(\ell)\rangle := \int_{-\infty}^{\infty} d\psi_1 \int_0^{\pi} d\phi_1 e^{\Delta\psi_1}\,|O(\phi_1)\rangle$$
$$e^{-2(e^{\psi_0}+e^{\psi_1})\csc\phi_1}\delta\left(\ell_2+2\log\frac{1}{2}e^{\frac{\psi_0+\psi_1}{2}}\sec\frac{\phi_1}{2}\right)\delta\left(\ell_1+2\log\frac{1}{2}e^{\frac{\psi_0+\psi_1}{2}}\csc\frac{\phi_1}{2}\right)\csc\phi_1\Big|_{\psi_0=\log 2+\frac{\ell}{2}}. \tag{B.2}$$

狄拉克δ函数变为

$$\delta\left(\ell_2+2\log\frac{1}{2}e^{\frac{\psi_0+\psi_1}{2}}\sec\frac{\phi_1}{2}\right)\delta\left(\ell_1+2\log\frac{1}{2}e^{\frac{\psi_0+\psi_1}{2}}\csc\frac{\phi_1}{2}\right)=\frac{\sin\phi_1}{2}\delta(\phi_1-\phi_1^{\ell_1,\ell_2})\delta(\psi_1-\psi_1^{\ell_1,\ell_2}) \tag{B.3}$$

其中

$$\tan\frac{\phi_1^{\ell_1,\ell_2}}{2}:=e^{\frac{\ell_1-\ell_2}{2}},\quad \psi_1^{\ell_1,\ell_2}:=-\psi_0-\log\left(\left[e^{\ell_1}+e^{\ell_2}\right]/4\right). \tag{B.4}$$

我们有

$$|\Psi^{O}_{\ell_1,\ell_2}(\ell)\rangle = \frac{1}{2}\left(\frac{2e^{-\ell/2}}{e^{\ell_1}+e^{\ell_2}}\right)^{\Delta} e^{-4(e^{\ell/2}+\frac{e^{-\ell/2}}{e^{\ell_1}+e^{\ell_2}})\csc\phi_1^{\ell_1,\ell_2}} |O(\phi_1^{\ell_1,\ell_2})\rangle\,. \tag{B.5}$$

通过对上述内容取任意线性组合，并固定 $\ell_1-\ell_2$，我们可以构造出某个固定角度 ϕ^{ℓ_1}、$_1{}^{\ell_2}$ 下任意关于 ℓ times $|O(\phi^{\ell_1}$,$_1{}^{\ell_2})\rangle$ 的函数。因此，通过取适当的线性组合，我们可以构造出任意关于 ℓ times 任意 $O(\frac{\pi}{2})$ 的后裔态的函数。因此，形如 $|\Psi^{O}_{\beta_1}$、$_{\beta_2}(\ell)\rangle$ 的态（其中 O 遍历所有主算符）张成了 $\mathcal{H}$。此外，请注意，当 $s_1\neq\tilde{s_1}$、$s_2\neq\tilde{s_2}$、或 $O\neq\bar{O}$ 时，态 $|\Psi^{O}_{s_1}$、$_{s_2}(\ell)\rangle$ 与 $|\Psi^{O}_{\tilde{s}_1}$、$_{\tilde{s}_2}(\ell)\rangle$ 彼此正交（我们假设不同主算符的二点函数为零）。因此，态 $|\Psi^{O}_{s_1}$、$_{s_2}(\ell)\rangle$ 构成了 $\mathcal{H}$ 的一组正交基。注意 O 为恒等算子的特殊情形。在这一特殊情形下，左、右能量被约束为相等，而 $\mathcal{H}$ 中对应的子空间与纯 JT 引力的希尔伯特空间相同。

C $H+B$的非负性

本节中，我们证明 $H+B$ 是作用于 $\mathcal{H}_0$（即物质希尔伯特空间）上的非负算符。由于物质希尔伯特空间是离散级数表示的直和，我们只需验证 $H+B$ 在每个表示中都是非负算符。每个表示都有一个最低权态 $|\Delta;\ 0\rangle$ 满足

$$L_1\,|\Delta;0\rangle = 0,\quad L_0\,|\Delta;0\rangle = \Delta\,|\Delta;0\rangle\,. \tag{C.1}$$

我们用 L_{-1} 作用于 $|\Delta;\ 0\rangle$，以得到其他态。特别地，我们有

$$L_-\,|\Delta;n\rangle = \sqrt{(n+2\Delta)(n+1)}\,|\Delta;n+1\rangle\,, \tag{C.2}$$

$$L_+\,|\Delta;n\rangle = \sqrt{(2\Delta+n-1)n}\,|\Delta;n-1\rangle\,, \tag{C.3}$$

其中 $n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$ 如上所述。此外，幺正性意味着 $\Delta>0$。注意，$H+B=L_0+\frac{L_++L_-}{2}$。我们将 $H+B$ 的本征值为 λ 的本征态定义如下：

$$|\Delta;\lambda\rangle := \sum_{n=0}^{\infty}|\Delta;n\rangle\,\frac{2^{\Delta}e^{-\lambda}\lambda^{\Delta-\frac{1}{2}}U(-n,2\Delta,2\lambda)}{\sqrt{n!\Gamma(2\Delta)(2\Delta)_n}}, \tag{C.4}$$

这里我们使用了Mathematica 中的 HypergeometricU函数。可以明确验证$|\Delta;\ \lambda\rangle$ 是 $H+B$的本征态。此外，注意

$$\int_0^{\infty} d\lambda\,\langle\Delta;n|\Delta;\lambda\rangle\,\langle\Delta;\lambda|\Delta;m\rangle = \delta_{nm}, \tag{C.5}$$

因此，$H+B$ 的这些本征态构成一个完备基。由于上文中 λ 只取非负值，因此 $H+B$ 是一个非负算符。同理，$H-B$ 也是一个非负算符。

D 另一种稠密定义的迹的正性

我们的目标是证明，对于 $\mathcal{I}$（定义见（6.5），对正算符而言始终是 $+\infty$ 、0。具体来说，例如有

$$\mathcal{I}(e^{-\beta_3 H_R}\mathcal{O}_R e^{-\beta_2 H_R}\mathcal{O}_R e^{-\beta_1 H_R}) = \int_0^\infty \frac{db}{\mathrm{Vol}\ U(1)} \int \frac{du_1 dw_1 e^{w_1}}{2}\frac{du_2 dw_2 e^{w_2}}{2}\frac{du_3 dw_3 e^{w_3}}{2}$$
$$\mathrm{Tr}_{\mathcal{H}_0}\left[e^{-bH}\mathcal{K}^t_{\beta_3}(u_3+b,w_3;u_2,w_2)O_R(u_2,w_2)\mathcal{K}^t_{\beta_2}(u_2,w_2;u_1,w_1)O_R(u_1,w_1)\mathcal{K}^t_{\beta_1}(u_1,w_1;u_3,w_3)\right]. \tag{D.1}$$

接下来，我们通过将变量 D.1) 中的 u_1、 u_2、 u_3 和 b 替换为变量 $u_{13} := u_1 - u_3$、$u_{21} := u_2 - u_1$、$u_{32} := u_3 + b - u_2$,

$$\begin{aligned}\mathcal{I}(e^{-\beta_3 H_R}\mathcal{O}_R e^{-\beta_2 H_R}\mathcal{O}_R e^{-\beta_1 H_R}) = \int_{-\infty}^\infty dw_1 dw_2 dw_3 \\ \mathrm{Tr}_{\mathcal{H}_0}\Bigg[\left(\int_0^\infty \frac{du_{32}}{2}\, e^{-u_{32}H} e^{\frac{w_3}{2}}\mathcal{K}^t_{\beta_3}(u_{32},w_3;0,w_2)e^{\frac{w_2}{2}}\right)O_R(w_2) \\ \left(\int_0^\infty \frac{du_{21}}{2}\, e^{-u_{21}H} e^{\frac{w_2}{2}}\mathcal{K}^t_{\beta_2}(u_{21},w_2;0,w_1)e^{\frac{w_1}{2}}\right)O_R(w_1) \\ \left(\int_0^\infty \frac{du_{13}}{2}\, e^{-u_{13}H} e^{\frac{w_1}{2}}\mathcal{K}^t_{\beta_1}(u_{13},w_1;0,w_3)e^{\frac{w_3}{2}}\right)\Bigg].\end{aligned} \tag{D.2}$$

接下来，我们利用 [28] 中的 6.647.1 计算得

$$\int_0^\infty \frac{du}{2}\, e^{-uH} e^{\frac{w_2}{2}}\mathcal{K}^t_\beta(u,w_2;0,w_1)e^{\frac{w_1}{2}} = \int_0^\infty ds\,\rho(s)\, e^{-\frac{s^2}{4\phi_b}\beta}\,\mathcal{W}_{-H,is}(w_2)\mathcal{W}_{-H,is}(w_1) \tag{D.3}$$

其中

$$\mathcal{W}_{-\mu,is}(w) := \frac{e^{\frac{w_2}{2}}}{2}\left|\Gamma\left(\frac{1}{2}+is+\mu\right)\right| W_{-\mu,is}(4e^{-w}), \quad \mu > -\frac{1}{2}, \quad s\in\mathbb{R}, \tag{D.4}$$

并且 $W_{-\mu,\ is}(4e^{-w})$ 是 Whittaker W 函数，在上述指定的参数范围内为实数。注意

$$\int_{-\infty}^\infty dw\,\mathcal{W}_{-\mu,is_1}(w)\mathcal{W}_{-\mu,is_2}(w) = \frac{\delta(s_1-s_2)}{\rho(s_1)}, \quad \int_0^\infty ds\,\rho(s)\,\mathcal{W}_{-\mu,is}(w_1)\mathcal{W}_{-\mu,is}(w_2) = \delta(w_1-w_2). \tag{D.5}$$

特别地，n 注意，$\mathcal{W}_{-\mu,is}(w)$ 是 $L^2(\mathbb{R})$ 上下列算符的一个特征函数 ,

$$\mathbf{H}_\mu := \frac{1}{2\phi_b}\left[-\frac{1}{2}\partial_w^2 + 2\mu e^{-w} + 2e^{-2w}\right], \tag{D.6}$$

本征值为 $\frac{s^2}{4\phi_b}$。事实上，(D.6) 是纯 JT 引力在一个空间区间上量子化后的哈密顿量，该空间区间一端是反德西特边界，另一端是张力为 μ [49] 的世界末端膜边界。该理论由在势中散射的粒子的量子力学描述

$$V_\mu(w) = 2\mu e^{-w} + 2e^{-2w}, \tag{D.7}$$

而对于 $\mu > -\frac{1}{2}$，只有散射态，没有束缚态。因此，对于 $\mu > -\frac{1}{2}$，散射态的波函数 $\mathcal{W}_{-\mu,\, is}(w)$ 满足 (D.5)。由此可得

$$\mathcal{I}(e^{-\beta_3 H_R}\mathcal{O}_R e^{-\beta_2 H_R}\mathcal{O}_R e^{-\beta_1 H_R}) = \mathrm{Tr}_{\mathcal{H}}\left[e^{-\beta_3 \mathbf{H}_H}\mathcal{O}_R e^{-\beta_2 \mathbf{H}_H}\mathcal{O}_R e^{-\beta_1 \mathbf{H}_H}\right]. \tag{D.8}$$

由于我们可以将 $\mathcal{I}$ 写成 $\mathcal{H}$上的迹，$\mathcal{I}$ 是一个正线性泛函。事实上，它总是 $+\infty$，这正是我们想要证明的。

E 三点函数

在本附录中，我们化简（4.49），并在此重述如下：

$$\begin{aligned}
&\sqrt{\Gamma^{\Delta_i}_{s_1,s_2}\Gamma^{\Delta_j}_{s_2,s_3}\Gamma^{\Delta_k}_{s_3,s_1}}\, V_{ijk}(s_1,s_2,s_3)\\
&= \int_{-\infty}^{\infty} d\ell_{ij}\, d\ell_{jk}\, d\ell_{ki}\; 2K_{2is_2}(4e^{-\ell_{ij}/2})2K_{2is_3}(4e^{-\ell_{jk}/2})2K_{2is_1}(4e^{-\ell_{ki}/2})I(\ell_{ij},\ell_{jk},\ell_{ki})\\
&\quad\times C_{ijk}\left(2e^{-\ell_{ij}/2}\right)^{\Delta_i+\Delta_j-\Delta_k}\left(2e^{-\ell_{ki}/2}\right)^{\Delta_i+\Delta_k-\Delta_j}\left(2e^{-\ell_{jk}/2}\right)^{\Delta_j+\Delta_k-\Delta_i}.
\end{aligned} \tag{E.1}$$

为简便起见，我们定义

$$\Delta_a := \Delta_i + \Delta_j - \Delta_k, \quad \Delta_b := \Delta_j + \Delta_k - \Delta_i, \quad \Delta_c := \Delta_i + \Delta_k - \Delta_j, \quad . \tag{E.2}$$

鉴于 Δ_i、Δ_j 和 Δ_k 均为正数，因此 Δ_a、Δ_b 和 Δ_c 中至少有两个为正数。不失一般性，假设 Δ_a 和 Δ_c 为正数。我们暂且假设 Δ_b也为正数（这样我们就可以在下文使用（4.39）），然后得到一个可以解析延拓至 Δ_b负值的表达式。

我们使用（4.17）的第二行以及（4.39），得到

$$\sqrt{\Gamma^{\Delta_i}_{s_1,s_2}\Gamma^{\Delta_j}_{s_2,s_3}\Gamma^{\Delta_k}_{s_3,s_1}}\, V_{ijk}(s_1,s_2,s_3) = C_{ijk}\int_0^{\infty} ds\, \rho(s)\, \Gamma^{\frac{\Delta_a}{2}}_{s_2,s}\Gamma^{\frac{\Delta_b}{2}}_{s_3,s}\Gamma^{\frac{\Delta_c}{2}}_{s_1,s}. \tag{E.3}$$

使用 [32]，(2.3) 可得

$$\begin{aligned}
&\sqrt{\Gamma^{\Delta_i}_{s_1,s_2}\Gamma^{\Delta_j}_{s_2,s_3}\Gamma^{\Delta_k}_{s_3,s_1}}\, V_{ijk}(s_1,s_2,s_3)\\
&= C_{ijk}\frac{\Gamma(\frac{\Delta_a+\Delta_b}{2}+is_2\pm is_3)\Gamma(\frac{\Delta_a+\Delta_c}{2}-is_2\pm is_1)}{\Gamma(\Delta_a)}\\
&\times\int_{-i\infty+r}^{i\infty+r}\frac{dt}{2\pi i}\frac{\Gamma(\Delta_a+t)\Gamma(\frac{\Delta_a+\Delta_c}{2}+is_2\pm is_1+t)\Gamma(\frac{\Delta_b-\Delta_a}{2}\pm is_3-is_2-t)\Gamma(-t)}{\Gamma(\Delta_a+\Delta_c+t)\Gamma(\Delta_b-t)}.
\end{aligned} \tag{E.4}$$

我们可以选取一个积分路径，使 t的实部固定为 r大于 $-\min(\Delta_a,\Delta_i)$，且小于 $\min(0,\Delta_k-\Delta_i)$。即使 Δ_b 为负，这个表达式仍然有意义。例如，令$\Delta_i = \Delta_j+\Delta_k+n$，使得 $\Delta_b = -n$。令 $n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$。那么，(E.4) 变为

$$\begin{aligned}
&\sqrt{\Gamma^{\Delta_j+\Delta_k+n}_{s_1,s_2}\Gamma^{\Delta_j}_{s_2,s_3}\Gamma^{\Delta_k}_{s_3,s_1}}\, V_{ijk}(s_1,s_2,s_3)\\
&= C_{ijk}\frac{\Gamma(\Delta_j+is_2\pm is_3)\Gamma(\Delta_j+\Delta_k+n-is_2\pm is_1)}{\Gamma(2\Delta_j+n)}\\
&\times\int_{-i\infty+r}^{i\infty+r}\frac{dt}{2\pi i}\frac{\Gamma(2\Delta_j+n+t)\Gamma(\Delta_j+\Delta_k+n+is_2\pm is_1+t)\Gamma(-\Delta_j-n\pm is_3-is_2-t)\Gamma(-t)}{\Gamma(2\Delta_j+2\Delta_k+2n+t)\Gamma(-n-t)},
\end{aligned} \tag{E.5}$$

其计算结果为

$$\begin{aligned}&\sqrt{\Gamma^{\Delta_j+\Delta_k+n}_{s_1,s_2}\Gamma^{\Delta_j}_{s_2,s_3}\Gamma^{\Delta_k}_{s_3,s_1}}\,V_{ijk}(s_1,s_2,s_3)\\&=C_{ijk}\sqrt{\frac{n!(n+2\Delta_j+2\Delta_k-1)(2\Delta_j+2\Delta_k+n)_n}{(2n+2\Delta_j+2\Delta_k-1)(2\Delta_j)_n(2\Delta_k)_n}}\sqrt{\Gamma^{\Delta_j+\Delta_k+n}_{s_1,s_2}\Gamma^{\Delta_j}_{s_2,s_3}\Gamma^{\Delta_k}_{s_3,s_1}}P_n^{\Delta_k,\Delta_j}(s_3;s_1,s_2),\end{aligned}\tag{E.6}$$

其中 $P^{\Delta_k}{}_{,\,n}{}^{\Delta_j}(s_3;\ s_1,\ s_2)$ 在 [18]的 (A.7) 中定义。最终可得，对于 $\Delta_i=\Delta_j+\Delta_k+n$，$n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$，

$$V_{ijk}(s_1,s_2,s_3)=C_{ijk}\sqrt{\frac{n!(n+2\Delta_j+2\Delta_k-1)(2\Delta_j+2\Delta_k+n)_n}{(2n+2\Delta_j+2\Delta_k-1)(2\Delta_j)_n(2\Delta_k)_n}}P_n^{\Delta_k,\Delta_j}(s_3;s_1,s_2).\tag{E.7}$$

我们可以用这个表达式计算外部初级算符维数均为 Δ、交换算符维数为 $2\Delta+n$的四点共形块。我们画出图 9 最右侧的示意图，并应用正文中介绍的图示规则。由于我们只想计算共形块，因此省略 C_{ijk} 因子。从 [18], 的 (C.1) 可知，该表达式的半经典极限确实就是这个共形块。

参考文献

[1] *J. von Neumann*，函数运算代数与正规算子理论，数学年刊 *102*（*1930*）*370–427*。[2] *J. Sorce*，冯·诺依曼代数的类型分类笔记，*2302.01958*。[3] *S. Leutheusser* 和 *H. Liu*，全息对偶中的涌现时间，*2112.12156*。[4] *S. Leutheusser* 和 *H. Liu*，全息对偶中量子系统与黑洞内部之间的因果可连接性，*2110.05497*。[5] *S. Leutheusser* 和 *H. Liu*，子代数-子区域对偶：全息中空间与时间的涌现，*2212.13266*。[6] *E. Witten*，引力与交叉积，*JHEP 10*（*2022*年）*008*，[2112.12828]。[7] *V. Chandrasekaran*、*R. Longo*、*G. Penington* 和 *E. Witten*，德西特空间的可观测量代数，*JHEP 02*（*2023*）*082*，[2206.10780]。[8] *V. Chandrasekaran*、*G. Penington* 和 *E. Witten*，大 *N* 代数与广义熵

，

2209.10454。[9] G. Penington 和 E. Witten，*JT*引力中的代数与态，2301.07257。[10] R. Jackiw，低维引力，核物理 *B* **252** (1985) 343–356。[11] C. Teitelboim，二维时空中的引力与哈密顿结构，物理快报 *B* **126** (1983)41–45。

[12] J. Maldacena、D. Stanford 和 Z. Yang，二维近反德西特空间中的共形对称性及其破缺，*PTEP* **2016** (2016)12C104，[1606.01857]。[13] J. Maldacena 和 D. Stanford，关于 *Sachdev-Ye-Kitaev* 模型的若干评述，*Phys. Rev. D* **94**(2016)106002，[1604.07818]。[14] A. Hamilton、D. N. Kabat、G. Lifschytz 和 D.A. Lowe，*AdS/CFT*中的局域体算符

:

A. Kitaev，《视界与局域性的边界视角》，*Phys. Rev. D 73 (2006) 086003,* [hep-th/0506118]。[15] *D. Harlow* 和 *D. Jafferis*，《*Jackiw-Teitelboim* 引力中的因子化问题》，*JHEP 02 (2020) 177,* [1804.01081]。[16] *S. J. Suh*，《*Jackiw-Teitelboim* 引力中的黑洞动力学》，*JHEP 03 (2020) 093,*[1912.00861]。[17] *T. G. Mertens*、*G. J. Turiaci* 和 *H. L. Verlinde*，《通过共形自举求解施瓦西导数》，*JHEP 08 (2017) 136,* [1705.08408]。[18] *D. L. Jafferis*、*D. K. Kolchmeyer*、*B. Mukhametzhanov* 和 *J. Sonner*，《含物质场的*JT*引力、广义 *ETH* 与随机矩阵》，*2209.02131*。[19] *T. G. Mertens* 和 *G. J. Turiaci*，《量子黑洞可解模型：*Jackiw-Teitelboim* 引力综述》，*2210.10846*。[20] *D. L. Jafferis*、*D. K. Kolch meyer*、*B. Mukhametzhanov* 和 *J. Sonner*，《用于本征态热化的矩阵模型》，*2209.02130*。[21] *Z. Yang*，《近极值黑洞的量子引力动力学》，*JHEP 05 (2019) 205,* [1809.08647]。[22] *A. Kitaev* 和 *S. J. Suh*，《二维黑洞的统计力学》，*JHEP 05 (2019) 198,* [1808.07032]。[23] *H. W. Lin*、*J. Maldacena*、*L. Rozenberg* 和 *J. Shan*，《观察超对称黑洞》

es

很长一段时间，*2207.00408.*[24] *D. L. Jafferis* 和 *D. K. Kolchmeyer*，《*Jackiw-Teitelboim* 引力中的纠缠熵》，*1911.10663.*[25] *D. Stanford* 和 *E. Witten*，《施瓦西理论的费米子定位》，*JHEP 10 (2017) 008,* [1703.04612].[26] *T. G. Mertens* 和 *G. J. Turiaci*，《*Jackiw-Teitelboim* 量子引力中的缺陷》，*JHEP 08 (2019) 127,* [1904.05228].[27] *P. Saad*、*S. H. Shenker* 和 *D. Stanford*，《*JT*引力作为矩阵积分》，*1903.11115.*[28] *6–7 -* 特殊函数的定积分，载于《积分、级数与乘积表》（第七版）（*A. Jeffrey*、*D. Zwillinger*、*I. Gradshteyn* 和 *I. Ryzhik* 编），第 *631–857* 页。*Academic Press*，波士顿，第七版，*2007*。*DOI*。

[29] H. W. Lin、J. Maldacena 和 Y. Zhao，视界附近的对称性，*JHEP* **08** (2019) 049 ，
[1904.12820]。[30] P. Saad，*JT*引力中的晚时关联函数、婴儿宇宙与本征态热化假说，
1910.10311。[31] A. Blommaert，剖析 *JT*引力中的系综，*JHEP* **09** （2022年）075，
[2006.13971]。[32] Y.A. Neretin，*Wilson* 多项式的 *Beta* 积分与有限正交系，*Sb. Math*

193 （2002年） 1071, [0206199]。[33] V. Jones，冯·诺伊曼代数，
https://my.vanderbilt.edu/jonesvf/files/2020/10/vonNeumann2015.pdf，。[34]
第*1*章 冯·诺伊曼代数的定义与基本性质。，载于冯·诺伊曼代数（J. Dixmier 编），第27卷，
北荷兰数学丛书，第1–16页。爱思唯尔，1981年。DOI。[35] H. W. Lin，双重缩放 *SYK* 的体
区希尔伯特空间，*JHEP* **11** （2022年）060， [2208.07032]

[36] *M. Takesaki*，《算子代数理论 *I*》。施普林格纽约，纽约州纽约，*1979*年。[37] *J. Lin*，
含物质的 *Jackiw-Teitelboim* 引力中的纠缠熵，*2107.11872*。[38] *A. Goel*、*H. T. Lam*、*G. J.*
Turiaci 和 *H. Verlinde*，拓展黑洞内部：*SYK* 中的部分纠缠热态，*JHEP 02 (2019) 156*，
[1807.03916]。[39] *C. Anantharaman* 和 *S. Popa*，《II_1 因子导论》，
https://www.math.ucla.edu/~popa/Books/IIun.pdf， 。[40] *P. Clare*，冯·诺依曼代数、
子因子与纽结，*https://prclare.people.wm.edu/GAG/GAG_210312_Clare.pdf*， 。[41]
W. Donnelly，纠缠熵与非阿贝尔规范对称性，经典与量子引力 *31 (2014) 214003*，
[1406.7304]。[42] *W. Donnelly* 和 *L. Freidel*，规范理论与引力中的局域子系统，*JHEP 09*
(2016) 102， [1601.04744]。[43] *J. Lurie*，数学 *261y*：冯·诺依曼代数（讲座 *1*），
https://www.math.ias.edu/~lurie/261ynotes/lecture1.pdf， 。[44] *D. Harlow*，基
于量子纠错的 *Ryu–Takayanagi* 公式，数学物理通讯 *354 (2017) 865–912*， [1607.03901]。
[45] *T. Faulkner* 和 *M. Li*，全息的渐近等距编码，*2211.12439*。[46] *A. R. Brown*、*H.*
Gharibyan、*G. Penington* 和 *L. Susskind*，*Python* 的午餐：解码霍金辐射的几何障碍，
JHEP 08 (2020) 121， [1912.00228]。[47] *N. Engelhardt* 和 *A. C. Wall*，量子极值曲面：超越
经典区域的全息纠缠熵，*JHEP 01 (2015) 073*， [1408.3203]。

[48] *H. W. Lin*、*J. Maldacena*、*L. Rozenberg* 和 *J. Shan*，献给没有时间的人的全息，*2207.00407*。[49] *P. Gao*、*D. L. Jafferis* 和 *D. K. Kolchmeyer*，*Jackiw-Teitelboim* 引力中动态世界末端膜的有效矩阵模型，*JHEP 01 (2022) 038*，[2104.01184]。[50] *G. Penington*、*S. H. Shenker*、*D. Stanford* 和 *Z. Yang*，复制虫洞与黑洞内部，*JHEP 03 (2022) 205*，[1911.11977]。[51] *M. Berkooz*、*P. Narayan* 和 *J. Simon*，弦图、自旋玻璃中的精确关联函数与黑洞体重构，*JHEP 08 (2018) 192*，[1806.04380]。[52] *A. Goel*、*V. Narovlansky* 和 *H. Verlinde*，双重缩放 *SYK* 中的半经典几何，*2301.05732*。[53] *M. Berkooz*、*M. Isachenkov*、*P. Narayan* 和 *V. Narovlansky*，双重缩放 *SYK* 模型中的量子群、非交换 AdS_2 与弦，*2212.13668*。[54] *M. Berkooz*、*M. Isachenkov*、*V. Narovlansky* 和 *G. Torrents*，迈向大 *N* 双重缩放 *SYK* 模型的完整解，*JHEP 03 (2019) 079*，[1811.02584]。[55] *F. J. Murray* 和 *J. v. Neumann*，论算子环，《数学年刊》*37 (1936) 116–229*。[56] *A. Blommaert*、*T. G. Mertens* 和 *H. Verschelde*，*Jackiw-Teitelboim* 量子引力的精细结构，*JHEP 09 (2019) 066*，[1812.00918]。[57] *J. Lin*，*Jackiw-Teitelboim* 引力中的纠缠熵，*1807.06575*。[58] *E. Witten*，代数、区域与观察者，*2303.02837*。