非牛顿 Sakiadis 边界层的渐近一致解析解

Nastaran Naghshineh,[1, 2, a)] Nathaniel S. Barlow,[1] Mohamed A. Samaha,[1, 3] 和 Steven J. Weinstein[1, 4]1)数学科学学院，罗切斯特理工学院，罗切斯特，纽约州 *14623*，美国2)科学与文理学院，罗切斯特理工学院迪拜校区，迪拜，*341055*，阿联酋3)机械与工业工程系，罗切斯特理工学院迪拜校区，迪拜，*341055*，阿联酋4)化学工程系，罗切斯特理工学院，罗切斯特，纽约州 *14623*，美国

（日期：2023年5月5日）

arXiv:2303.04703v2 [physics.flu-dyn] 4 May 2023

半无限流体域中由运动壁面诱发的 Sakiadis 边界层，是与高速涂布工艺相关的一种基础层流场。本文通过幂级数展开，为奥斯特瓦尔德–德瓦勒幂律流体的边界层问题求得解析解，并将此前针对牛顿流体所采用的方法 [“利用渐近启发的规范函数求解非线性常微分方程的收敛级数解”，IMA应用数学杂志，（2023）] 加以扩展。在该方法中，变量替换（其自然地确定幂级数中的规范函数）经过选择，使其与远离壁面的远场行为相一致。与既有文献不同，渐近行为表明，只有当幂律指数 α 位于范围 $0.5 < \alpha \leq 1$ 内时，解才存在。在约为 $0.74 \leq \alpha < 1$ 的范围内，利用带有渐近启发规范函数的收敛幂级数可求得解析解。对于对应于 $0.5 < \alpha < 0.74$ 的幂律，规范函数在整个定义域内变得无定义，因此采用渐近近似解方法 [“通过渐近近似解对发散、截断及欠规定幂级数求和”，《季刊：力学与应用数学》，（2017）]求得近似解析解。该近似解需要两个物理常数的值，我们通过在有限区间上采用数值打靶法预先计算这些常数。幂级数解的优点在于，它可在整个半无限域上求解；与数值解不同，它无需进行有限域长近似，也不需要随后对域长进行细化。

a）通讯作者：nxncad@rit.edu

I. 引言

萨基亚迪斯边界层[1] 是将层流液膜涂布到移动基材[2]上的工艺中一种基础流场。它的一项重要物理意义体现在高速帘式涂布领域：边界层长度对于流体动力学辅助机制至关重要，该机制能够抑制卷气[3]。具体而言，边界层长度决定了润湿线相对于帘幕流主体的位置。根据基材与帘幕流在底部的相对速度，润湿线可能正好位于帘幕下方，也可能向前拖移（帘幕流速度较低、基材速度较高）或向后推迟（帘幕流速度较高、基材速度较低）。润湿线的位置决定了高液体帘幕产生的滞止压力是否足以抑制不稳定气垫的形成；这种气垫会导致涂层不均匀且夹带气泡。涂布速度最高时，润湿线正好位于帘幕中心线的正下方。液体帘幕越高，最终涂布速度就越快，前提是润湿线的位置——同样由萨基亚迪斯边界层决定——得到最佳控制[3]。除了与涂布相关，萨基亚迪斯边界层还是许多研究的基础，其中包括涉及各种热质传递模式的移动弹性片研究[4–10]；过去5年中，原始的Sakiadis论文[1]被引用超过400次，这表明它至今仍具有重要的基础意义。

图1展示了 Sakiadis边界层问题的构型，所示坐标系为x-y ；假设流体流动在垂直于图面的方向上保持不变。此处，平壁以速度u_w运动，周围的广义牛顿不可压缩流体则处于静止状态，其密度为 ρ，黏度为 μ。

控制方程通过二维不可压缩稳态连续性方程和纳维–斯托克斯方程体现质量守恒与动量守恒。在基底速度较高时，x方向的速度u远大于y方向的速度v，且y方向的速度梯度在边界层中主导黏性力。这些假设使流体质点的斜率较小，并直接导出适用于 Sakiadis 流的普朗特边界层方程——一个非线性偏微分方程（PDE）系统。对于黏度满足奥斯特瓦尔德–德瓦勒幂律关系的流体，Sakiadis边界层方程可表示为[11]

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0, \tag{1a}$$

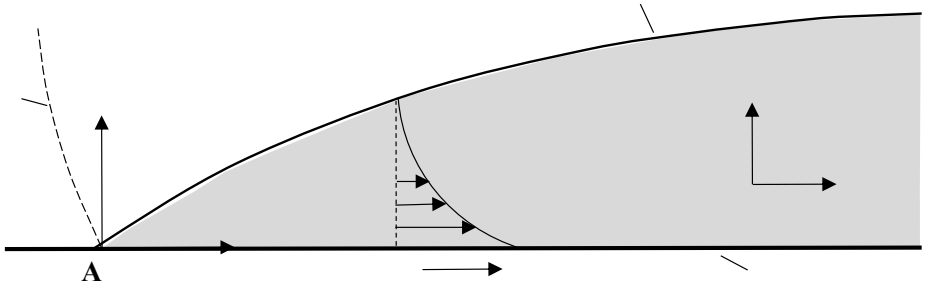


图1：Sakiadis边界层流动示意图。具有特征速度尺度S的缓慢运动或静止流体，与速度为u_w的快速运动壁面接触，如图所示，其中$S << u_w$。因此，在流动方程的边界层近似中，速度$u \to 0$随$y \to \infty$变化。本文将边界层包络定义为满足$u/u_w = 0.1$的点的轨迹。在Sakiadis[1]和Fox等人[11]的原始论文中，流体经由狭缝从点**A**进入定义域，流线在此处被重新绘制为竖直方向，并与壁面重合。在涂层应用中，流线通常与界面重合，此时点**A**为移动接触线[2]。

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}, \tag{1b}$$

$$\tau_{xy} = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right),\ \mu = K\left(-\frac{\partial u}{\partial y}\right)^{\alpha-1}, \tag{1c}$$

$$u = u_w,\ v = 0 \text{ at } y = 0\ ;\ u \to 0 \text{ as } y \to \infty. \tag{1d}$$

在式（1c）中，τ_{xy}为流体中的剪切应力，$K > 0$为稠度系数，α为幂律指数，μ为应变速率依赖黏度。注意，在边界层近似中，应变率$\partial u/\partial y$在流动定义域内为负；因此，如式（1c）的黏度表达式所示，应变率的绝对值前需加负号。通过引入满足连续性方程（1a）的流函数ψ（即$u = \partial\psi/\partial y$和$v = -\partial\psi/\partial x$），Fox等人[11]定义了如下相似变量

$$\eta = y\left(\frac{\rho u_w^{2-\alpha}}{Kx}\right)^{1/(\alpha+1)}, \tag{2a}$$

$$\psi = \left(\frac{y\,u_w}{\eta}\right) f(\eta), \tag{2b}$$

因此u和v 表示为

$$u = u_w \frac{df}{d\eta}\ ,\ \ v = \frac{1}{1+\alpha}\left(\frac{K u_w^{2\alpha-1}}{\rho x \alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha+1}}\left(\eta\frac{df}{d\eta} - f\right). \tag{3}$$

将 (2) 代入系统 (1) 并整理后，Fox等人[11] 得到如下非牛顿 Sakiadis 边界层问题

$$\alpha(\alpha+1)\frac{d^3 f}{d\eta^3} - (-\frac{d^2 f}{d\eta^2})^{(2-\alpha)} f = 0, \quad 0 \le \eta < \infty, \tag{4a}$$

$$f = 0 \text{ at } \eta = 0, \tag{4b}$$

$$\frac{df}{d\eta} = 1 \text{ at } \eta = 0, \tag{4c}$$

$$\frac{df}{d\eta} = 0 \text{ as } \eta \to \infty. \tag{4d}$$

注意，对于牛顿流体（$\alpha = 1$），方程组 (4) 与 Blasius[12] 的方程组相同，唯一不同之处在于条件 (4c) 和 (4d) 的位置互换了[1]。然而，由于其控制方程 (4a) 是非线性的，(4) 的解并不能简单地通过平移与 Blasius 的解联系起来。

Barlow 等人[13],研究了牛顿流体 Sakiadis 问题的解析解，他们指出，关于 $\eta = 0$ 的幂级数解具有有限的收敛半径，无法覆盖整个物理区域 $\eta \in [0,\infty)$。Naghshineh 等人[14] 针对牛顿流体问题，给出了以指数规范函数表示的收敛幂级数解，该解符合远离壁面处解的渐近行为；这一行为表示为

$$f(\eta) \sim C + \tilde{a}_1 e^{-C\eta/2} + \tilde{a}_2\left(e^{-C\eta/2}\right)^2 + O\left(\left(e^{-C\eta/2}\right)^3\right) \text{ as } \eta \to \infty, \tag{5}$$

其中$C > 0$（这与壁面运动在图 1 中沿正x方向产生净体积流量一致），$\tilde{}a_1$ 和 $\tilde{}a_2$ 是渐近常数，根据观察，

$$\lim_{\eta\to\infty} f(\eta) \equiv C. \tag{6}$$

给出的泰勒级数解为

$$g(\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{a}_n \omega^n, \tag{7a}$$

$$\omega(\eta) = e^{-C\eta/2}, \tag{7b}$$

$$f(\eta) \equiv g(\omega(\eta)), \tag{7c}$$

其中所有系数 $\tilde{a}_n$ 均由 Naghshineh 等人提供。[14] 按原文所述，解（7）以 $\eta = \infty$ 为展开点；围绕 $\omega = 1$ （即 $\eta = 0$）[14]，可以对变换规范函数[15]构造一个收敛速度稍快的泰勒级数展开。请注意，包括常数C在内的所有常数，均可通过一种不依赖任何数值信息的算法确定。有关牛顿型 Sakiadis 问题的相关文献综述，请参阅 Naghshineh 等人[14] 。

本研究旨在扩展 Naghshineh 等人的方法，以求得 Ostwald-de Waele 幂律流体的 Sakiadis 边界层解析解，即系统 (4) 在 $\alpha \neq 1$ 下的解。这一点尤为重要，因为薄膜涂布中使用的许多流体都表现出剪切变稀特性[2],，其中 $\alpha \in (0,1)$。在此参数范围内，值得注意的是，幂律模型 (1c) 存在缺陷：当应变率趋近于零（$\partial u/\partial y \to 0$）时，它会导致黏度趋于无穷大，即 (1c) 中的 μ；尽管如此，由于在此极限下剪切应力 τ_{xy} 仍保持有限，仍可作出合理预测，例如管流或狭缝流[16]。幂律模型因其简单，常用于描述具有剪切变稀特性的流动。然而，本文证明，对于一段受限的 α 取值范围（$0.5 < \alpha \leq 1$），由 (4) 给出的幂律非牛顿 Sakiadis 问题才存在解。这是幂律模型自身带来的数学限制，而该模型只是对剪切变稀流体真实行为的一种近似[17,18]。对于在某一应变率区间内呈现幂律关系 $\alpha < 0.5$或 $\alpha > 1$ 的流体，必须采用更复杂的黏度关系进行计算，例如 Carreau 模型[17,18]。当在 (1c) 中用这些模型替代 μ 时，无法确定相似变量，因此必须求解描述边界层流动的完整偏微分方程组[19]。

本文结构如下。第 II 节中，我们首先围绕 $\eta = 0$ 对系统 (4) 进行标准幂级数展开，并发现其发散，这与牛顿流体中的发现相同。第 III 节中，我们接着考察系统 (4) 在 $\eta \to \infty$ 时的渐近解，并以此为依据，采用另一种规范函数进行泰勒级数展开，这与上文讨论的牛顿流体解 (7) 的处理方式相同。通过审慎选择展开点的位置，我们能够为幂律指数约为 $0.74 \leq \alpha < 1$ 的情形得到收敛级数解。对于对应于 $\alpha < 0.74$ 的幂律，规范函数在整个定义域上变得未定义。因此，第 IV 节中我们采用渐近近似解方法[13]，获得一个精确的近似解。这里，两个必要常数通过数值打靶法预先确定。请注意，这种

方法也用于先前研究中 Falkner-Skan边界层方程的求解[20,21]。第 V 节通过展示如何轻松提取流线和速度场，说明了这些解析形式的实用性。第 VI 节给出总结性评论。本研究中用于处理非线性级数展开的公式见附录 A。用于数值求解非牛顿萨基亚迪斯问题 (4) 的射击算法见附录 B；文中所给幂级数及近似解所需的相关常数见附录 C。附录 D 则收录了利用收敛幂级数解本身预测相同常数的算法。

II. 幂级数解

在本节及下一节中，我们求解相似变换后得到的常微分方程（4）。因此，原始系统（1）的物理特性在数学解中被掩盖了。在第五节中，我们将展示如何轻松地从所给的解中提取流线和速度场，并据此给出物理区域中的解。

常微分方程（4）的幂级数解可通过标准方法求得：利用 JCP Miller 公式[22] 和柯西乘积法则[23]（分别见附录 A1 和 A2）将非线性项重新整理为 η 的幂次形式；级数展开为

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \eta^n, \quad |\eta| < \eta_s(\alpha), \tag{8a}$$

$$a_{n+3} = \frac{\sum_{j=0}^{n} b_j \, a_{n-j}}{\alpha(\alpha+1)(n+3)(n+2)(n+1)}, \quad n \geq 0, \tag{8b}$$

$$b_{n>0} = \frac{1}{2na_2} \sum_{j=1}^{n} (3j - \alpha j - n)(j+2)(j+1) a_{j+2} b_{n-j} \quad , \quad b_0 = (-2a_2)^{2-\alpha}, \tag{8c}$$

$$a_0 = 0 \quad , \quad a_1 = 1 \quad , \quad \text{and } a_2 = \kappa/2, \tag{8d}$$

其中 $\eta_s(\alpha)$ 的收敛半径有限。在（8d）中，量 κ 与边界层流动中的壁面剪切应力直接相关，通常称为“壁面剪切”参数[24,25],，其定义为

$$\kappa = f''(0). \tag{9}$$

式 (9) 中的量 κ 是 α的函数，且事先未知；通常通过数值方法确定。或者，如本文第 IIIC 节所示，可通过算法计算 κ，这是对为牛顿型 Sakiadis 问题[14]开发的技术的扩展。

图 2 对比了 $\alpha = 0.8$时的幂级数解 (8) 与方程 (4) 的数值解。数值解采用射击法（见附录 B），将系统 (4) 重写为有限区间长度为 L 的边值问题，其中条件 (4d) 被替换为在 $\eta = L$ 处满足 $df/d\eta = 0$；L 的取值使得将其长度加倍后，κ和 C 的预测值差异分别为 $O(10^{-15})$ 和 $O(10^{-10})$，其中 $\alpha = 0.8$。常数 κ和 C 分别在式 (9) 和式 (6) 中定义。如图 2 所示，幂级数解 (8) 在物理区域内发散。最右侧带箭头 A 标记的竖线表示幂级数解 (8) 的收敛半径，其值为$\eta_s(0.8) \approx 3.09$；如图 3 所示，数值根检验[26], 证实了这一点。

III. 渐近动机下的规范函数与展开

A. 当 $\eta \to \infty$ 时的渐近行为

与处理牛顿流体[14], 的方法类似，我们使用主导平衡法[27]来确定f 在 $\eta \to \infty$ 时的渐近行为。这一行为促使我们采用一种规范函数，最终导出收敛级数展开。为此，我们将式 (4a) 的解写为

$$f \sim C + h(\eta), \text{ with } h \to 0 \text{ as } \eta \to \infty, \tag{10a}$$

其中C 是式 (6) 中描述的渐近常数，而$h(\eta)$ 是一个待定函数。将形式 (10a) 代入式 (4a), 得到

$$\alpha(\alpha+1)h''' \sim (C+h)(-h'')^{(2-\alpha)} \text{ as } \eta \to \infty, \tag{10b}$$

其中撇号表示h 关于 η 的导数。注意到当 $\eta \to \infty$ 时h 相对于C 是次主导的，因此可将方程 (10b) 简化为

$$\alpha(\alpha+1)h''' \sim C(-h'')^{(2-\alpha)} \text{ as } \eta \to \infty. \tag{10c}$$

对上式积分一次，得到

$$h'' \sim -\left[E + \frac{C(1-\alpha)}{\alpha(\alpha+1)}\eta\right]^{\frac{1}{\alpha-1}} \text{ as } \eta \to \infty, \tag{10d}$$

其中，E 是待确定的积分常数。将 (10d) 积分两次，并应用边界条件 (4d)，可得 (10d) 的解为

$$h \sim \frac{\alpha(\alpha+1)^2 E^{\frac{2\alpha-1}{\alpha-1}}}{-C^2(2\alpha-1)}\left[1 + \frac{C(1-\alpha)}{\alpha(\alpha+1)E}\eta\right]^{\frac{2\alpha-1}{\alpha-1}}, \ 0.5 < \alpha < 1 \text{ , as } \eta \to \infty, \tag{10e}$$

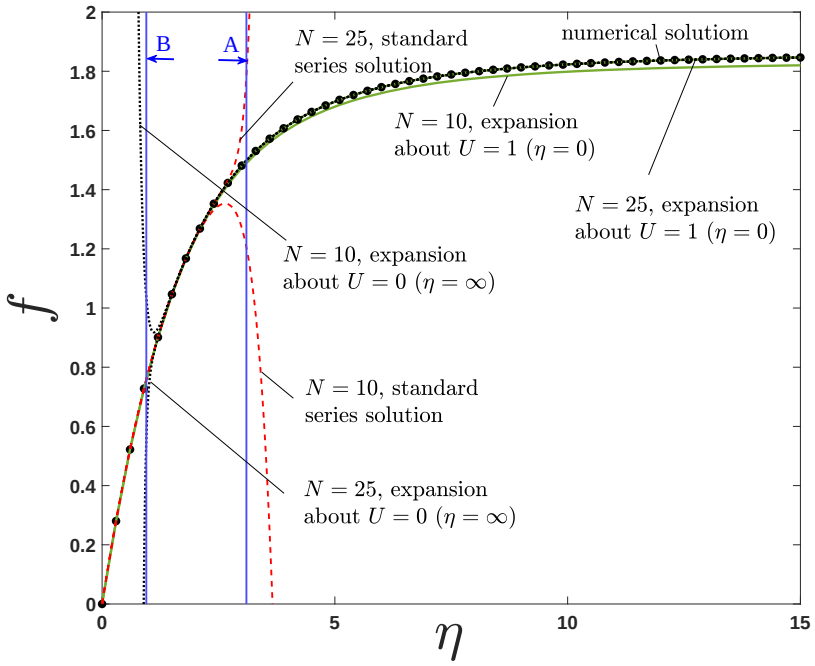


图 2：方程 （4）的解针对 $\alpha = 0.8$ 展示。附录 B 中的数值解具有

$L = 11000$ （黑点）与幂级数解 (8) 的N项截断（虚线）、变换后的级数解（围绕 $\eta = \infty$ 展开）(16)（点线）以及变换后的级数解（围绕 $\eta = 0$ 展开）(18)（实线）进行比较，其中$N = 10$ 且$N = 25$。在图中某条虚线或点线不易辨认的区域，该曲线与数值结果吻合。最右侧的竖线（箭头 A 所示）表示标准级数解 (8) 的收敛半径 $\eta_s \approx 3.09$，最左侧的竖线（箭头 B 所示）表示变换后的级数解 (16) 的收敛半径 $\eta_s \approx 0.95$。对于 $\alpha = 0.8$, 绘图所用常数 κ、C 和 E（定义见第 III 节）的数值计算结果列于附录C 2。

因此，由（10e）可得

$$f \sim C + \frac{\alpha(\alpha+1)^2 E^{\frac{2\alpha-1}{\alpha-1}}}{-C^2(2\alpha-1)} \left[1 + \frac{C(1-\alpha)}{\alpha(\alpha+1)E}\eta\right]^{\frac{2\alpha-1}{\alpha-1}}, \quad 0.5 < \alpha < 1 \text{ , as } \eta \to \infty. \tag{10f}$$

经观察可知，只有当 $\eta \to \infty$ 时，(10f) 才趋近于 C，因此条件 (4d) 仅在此范围内才能满足。因此，系统 (4) 仅在 $0.5 < \alpha \leq 1$ 时有效（牛顿流体对应 $\alpha = 1$）。注意，Fox等人[11] 错误地指出，当 $0 < \alpha < 0.5$ 时系统 (4) 存在解。此外，虽然可以求得系统 (4) 的有限域近似的此类解，其中 (4d) 被替换为 $f'(L) = 0$,

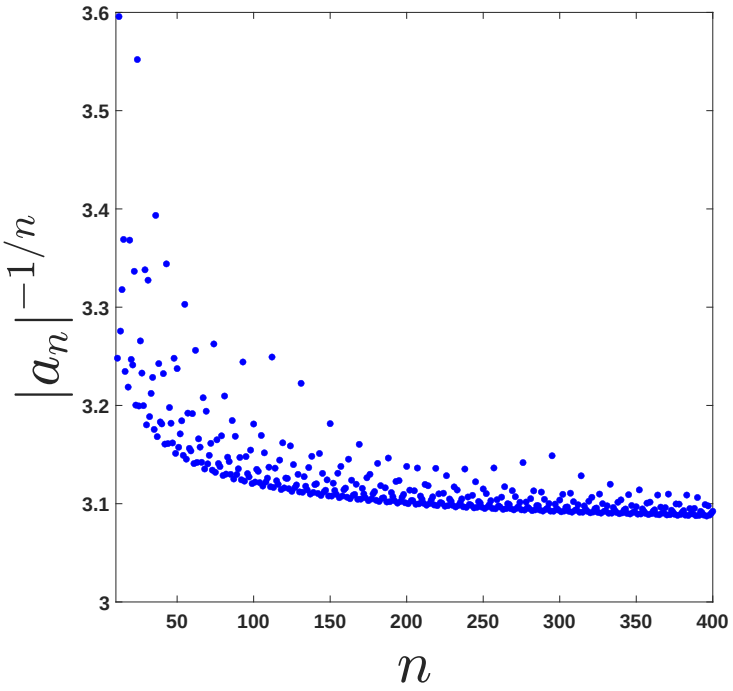


图 3：展示了 $\alpha = 0.8$ 时式 (8) 的根值判别法，表明收敛半径（y 轴）为$\eta_s \approx 3.09$。这与图 2 中观察到的发散行为一致。

但当 $L \to \infty$ 时，这些解并不收敛到定义域无限的解；注意，Pop 等人[28]错误地声称当 $\alpha > 1$ 时存在解。关于这一限制的物理意义，请读者参阅第 I 节中的相关评论。

B. 收敛幂级数解的构造

为克服幂级数解 (8) 的收敛限制，我们遵循 Naghshineh 等人[14] 针对牛顿流体问题（见第 I 节）所采用的方法。受渐近展开 (10f) 启发，本文提出如下变量变换，其效用将在下文得到验证。我们写为

$$U(\eta) = [1 + \mathscr{A}\eta]^{\lambda}, \tag{11a}$$

$$f(\eta) = F(U(\eta)), \tag{11b}$$

$$\mathscr{A} = \frac{C(1-\alpha)}{\alpha(\alpha+1)E} \quad , \quad \lambda = \frac{2\alpha - 1}{\alpha - 1}. \tag{11c}$$

变换 (11) 将 $\eta \in [0, \infty)$ 映射为 $U \in (0, 1]$ 当 $0.5 < \alpha < 1$。

值得注意的是，式 (11a) 中的非牛顿变换在 $\alpha \to 1$ 时会化为式 (7) 给出的牛顿变换，因为

$$\lim_{\alpha\to 1}[1+\mathscr{A}\eta]^{\lambda} = e^{-C\eta/2E}, \tag{12}$$

当 $E = 1$ 时；我们确实已通过数值验证了，当 $E \to 1$ 时，$\alpha \to 1$ （见表 II）。将 (11) 代入 (4a)，应用链式法则并重新整理各项，可得变换后的常微分方程

$$k_1 U^{\left(3-\frac{3}{\lambda}\right)}F''' + k_2 U^{\left(2-\frac{3}{\lambda}\right)}F'' + k_3 U^{\left(1-\frac{3}{\lambda}\right)}F' - \left\{k_4 U^{\left(2-\frac{2}{\lambda}\right)}F'' + k_5 U^{\left(1-\frac{2}{\lambda}\right)}F'\right\}^{2-\alpha} F = 0,$$

其中撇号表示F 关于U的导数。将上式乘以$U^{\left(\frac{3}{\lambda}-1\right)}$，并重新整理常微分方程，使最高阶导数位于方程左侧，可得

$$k_1 U^2 F''' = -k_2 U F'' - k_3 F' + \left\{k_4 U F'' + k_5 F'\right\}^{2-\alpha} F, \tag{13a}$$

其中

$$k_1 = \alpha(\alpha+1)\mathscr{A}^3\lambda^3, \tag{13b}$$

$$k_2 = 3\alpha(\alpha+1)\mathscr{A}^3\lambda^2(\lambda-1), \tag{13c}$$

$$k_3 = 3\alpha(\alpha+1)\mathscr{A}^3\lambda(\lambda-1)(\lambda-2), \tag{13d}$$

$$k_4 = -\mathscr{A}^2\lambda^2, \tag{13e}$$

$$k_5 = -\mathscr{A}^2\lambda(\lambda-1), \tag{13f}$$

且 $\mathscr{A}$和 λ的表达式定义于 (11c) 中。由 (4b) 和 (4c) 得到的 $\eta = 0$ 处边界条件，对应于 $U = 1$，变为

$$F(1) = 0, \tag{13g}$$

$$F'(1) = \frac{1}{\mathscr{A}\lambda}, \tag{13h}$$

$$F''(1) = \frac{\kappa}{\mathscr{A}^2\lambda^2} - \frac{\lambda-1}{\mathscr{A}\lambda^2}, \tag{13i}$$

其中使用边界条件 (9) 得到 (13i) 中的$F''(1)$。

接下来，我们假设 (13a) 的一个解具有如下形式

$$F(U) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n U^n,\ |U| < U_s(\alpha)\ ,\ E > 0, \tag{14}$$

其中$U_s(\alpha)$为收敛半径。$E>0$限制使得可以使用 (10)，而不会在感兴趣的U 定义域内引入分支点奇点。级数 (14) 很容易逐项求导，从而计算F'、F''和F'''。应用 JCP Miller 公式[22] 和柯西乘积法则[23]（分别见附录 A 1 和 A 2）对 (13a) 中的非线性项重新排序后，(13a) 中的常微分方程变为

$$\sum_{n=2}^{\infty} k_1(n+1)n(n-1)A_{n+1}U^n = (-k_3A_1+A_0d_0)+(-2k_2A_2-2k_3A_2+A_0d_1+A_1d_0)U+ \sum_{n=2}^{\infty}\left(-k_2(n+1)nA_{n+1}-K_3(n+1)+A_0\tilde{d}_n+\frac{(2-\alpha)A_0d_0}{c_0}(n+1)(k_4n+k5)A_{n+1}+\tilde{e}_n\right)U^n, \tag{15}$$

其中

$$\tilde{d}_n=\frac{1}{nc_0}\sum_{j=1}^{n-1}(3j-\alpha j-n)c_jd_{n-j}\ ,\ \tilde{e}_n=\sum_{j=1}^{n}A_jd_{n-j}, \tag{16a}$$

$$d_{n>0}=\frac{1}{nc_0}\sum_{j=1}^{n}(3j-\alpha j-n)c_jd_{n-j}\ ,\ d_0=(c_0)^{(2-\alpha)}, \tag{16b}$$

$$c_{n>0}=(n+1)A_{n+1}(k_4n+k_5)\ ,\ c_0=k_5A_1. \tag{16c}$$

利用渐近解 (10f)，我们施加

$$A_0=C. \tag{16d}$$

令 (15) 两边的常数项相等，得到

$$A_1=\left[\frac{k_3}{A_0(k_5)^{2-\alpha}}\right]^{\frac{1}{1-\alpha}}, \tag{16e}$$

令 (15) 两边的 U^1 项相等，得到

$$A_2=\frac{A_1d_0}{2k_2+2k_3-\frac{2(2-\alpha)A_0d_0}{c_0}(n+1)(k_4n+k5)}. \tag{16f}$$

我们令式 (15) 中的同类项相等，得到系数 A_{n+1}；对于 $n\geq 2$，则得到递推关系

$$A_{n+1}=\frac{A_0\tilde{d}_n+\tilde{e}_n}{K_1(n+1)n(n-1)+k_2(n+1)n+k_3(n+1)-\frac{(2-\alpha)A_0d_0}{c_0}(n+1)(k_4n+k5)}\ ,\ n\geq 2, \tag{16g}$$

其中，$\tilde{d}_n$和$\tilde{e}_n$在式 (16a) 中定义。通过式 (11) 变换回$f(\eta)$空间后，关于$U=0$（即$\eta=\infty$）的展开为

$$f(\eta)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\left[1+\mathscr{A}\eta\right]^{\lambda}. \tag{16h}$$

尽管我们的最终目标是得到一个不依赖数值确定参数的自洽解，但在此阶段，我们使用式 (16) 中 κ、C 和 E 的数值（见表 III）来评估式 (16) 的有效性。为确定 E 的数值，我们对 (10d) 求解E，得到

$$E=(-h'')^{\alpha-1}-\frac{C(1-\alpha)}{\alpha(\alpha+1)}\eta \text{ as } \eta\to\infty, \tag{17}$$

其中，在数值解中（定义域长度为 L），通过将 η 替换为 L、将 C 替换为 $h(L)$，并将 h'' 替换为 $h''(L)$，对 $\eta\to\infty$ 条件进行近似。图 2 显示，变换后的级数解 (16)（点线）在 $\eta\to\infty$ 时与数值解相符，而标准幂级数解 (8)（虚线）在 $\eta\to 0$ 时与数值解相符，这与预期一致。显然，幂级数解 (16) 在 $\eta\to 0$ 时发散。由于 (16) 的系数符号交替，最近的奇点位于负实U 轴上[29], ，即位于物理区域之外。图 2 中的垂直实线（箭头 B 所示）表示级数解 (16) 的收敛半径。通过数值比值判别法予以确认，其形式为 Domb-Skyes 图[29], ；图 4 展示了相关系数比值随 $1/n$ 变化的关系图。当大 n 时，曲线关于 $1/n$ 呈线性，因此将y截距确定为收敛半径。

Naghshineh 等人[14] 表明，通过改变变换后的常微分方程的幂级数解的展开点，可以增大牛顿流体 Sakiadis问题的收敛半径。受他们工作的启发，我们将方程 (13) 的幂级数解的展开点改为$U=1$，对应于 $\eta=0$。采用上述求得关于$U=0$的级数时所用的相同步骤，关于$U=1$ 的级数定义为

$$F(U)=\sum_{n=0}^{\infty}\hat{A}_n(U-1)^n,\ E>0, \tag{18a}$$

其中

$$\hat{A}_0=0, \tag{18b}$$

$$\hat{A}_1=\frac{1}{\mathscr{A}\lambda}, \tag{18c}$$

$$\hat{A}_2=\frac{1}{2}\left(\frac{\kappa}{\mathscr{A}^2\lambda^2}-\frac{\lambda-1}{\mathscr{A}\lambda^2}\right), \tag{18d}$$

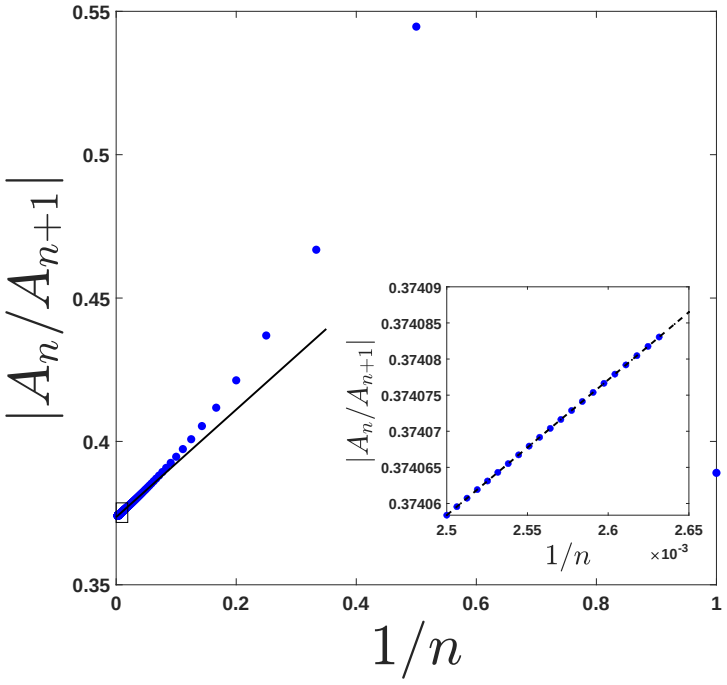


图 4： $\alpha = 0.8$对应的式 (16) 的多姆-赛克斯图，此处， $1/n = 0$ 的截距给出了数值收敛半径（y轴）$U_s \approx 0.37$，这与通过 (11a) 在原始定义域 $\eta_s \approx 0.95$ 中得到的收敛半径一致。这与发散行为相符

observed in Fig. 2.

$$\hat{A}_3 = \frac{1}{6k_1}\left(-2k_2\hat{A}2 - k_3\hat{A}_1\right), \tag{18e}$$

$$\hat{A}_4 = \frac{1}{24k_1}\left(-2k_2\hat{A}2 - 6k_2\hat{A}_3 - 2k_3\hat{A}_2 + \hat{A}_1\hat{d}_0 - 12k_1\hat{A}_3\right). \tag{18f}$$

采用与前面相同的方法，我们得到

$$\hat{A}_{n+3} = \frac{\{-k_2(n+1)n - k_3(n+1) - k_1(n+1)n(n-1)\}\hat{A}_{n+1}}{k_1(n+3)(n+2)(n+1)} + \frac{\{-k_2(n+2)(n+1) - 2k_1(n+2)(n+1)n\}\hat{A}_{n+2} + \hat{e}_n}{k_1(n+3)(n+2)(n+1)}\ , \ n \geq 2, \tag{18g}$$

with

$$\hat{d}_n = \frac{1}{n\hat{c}_0}\sum_{j=1}^{n}(3j - \alpha j - n)\hat{c}_j\hat{d}_{n-j}\ \ ,\ \ \hat{d}_0 = (\hat{c}_0)^{(2-\alpha)} \tag{18h}$$

$$\hat{e}_n = \sum_{j=0}^{n}\hat{A}_j\hat{d}_{n-j} \tag{18i}$$

$$\hat{c}_{n>0} = (k_4 n + k_5)(n+1)\hat{A}_{n+1} + k_4(n+2)(n+1)\hat{A}_{n+2}\ \ ,\ \ \hat{c}_0 = 2k_4\hat{A}_2 + k_5\hat{A}_1. \tag{18j}$$

常数k_1 - k_5 在（13b）-（13f）中定义。

图 2 显示，变换后的级数解 (18)（实线）在 $\eta \to \infty$ 时与数值解吻合，也在 $\eta \to 0$ 时如此。因此，将展开点的位置从$U = 0$ 移至$U = 1$，即可在整个定义域上得到收敛展开。需要指出的是，这与牛顿情形明显不同：在牛顿情形中，关于$U = 0$ 和$U = 1$ 的两个均展开都收敛——尽管后一个展开收敛得更快。图 5a 显示了对于 $\alpha = 0.8$，收敛级数解 (18) 的N项截断与数值解之间的绝对误差（绝对差值）。用于生成该图的常数数值见附录 C 2。这里，我们在构造图 5 时选择截断于$N = 200$，因为绝对误差已接近机器精度。图 6 中的虚线显示了在 $\eta \in [0, L]$ 上，级数解 (18) 的N项截断与数值解之间的无穷范数（最大绝对误差），其中$L = 11000$，适用于 $\alpha = 0.8$；所用常数取自数值解（更多详情见附录 C 2）。图中出现的平台期表明，进一步改进幂级数所产生的误差已小于数值解本身的误差。

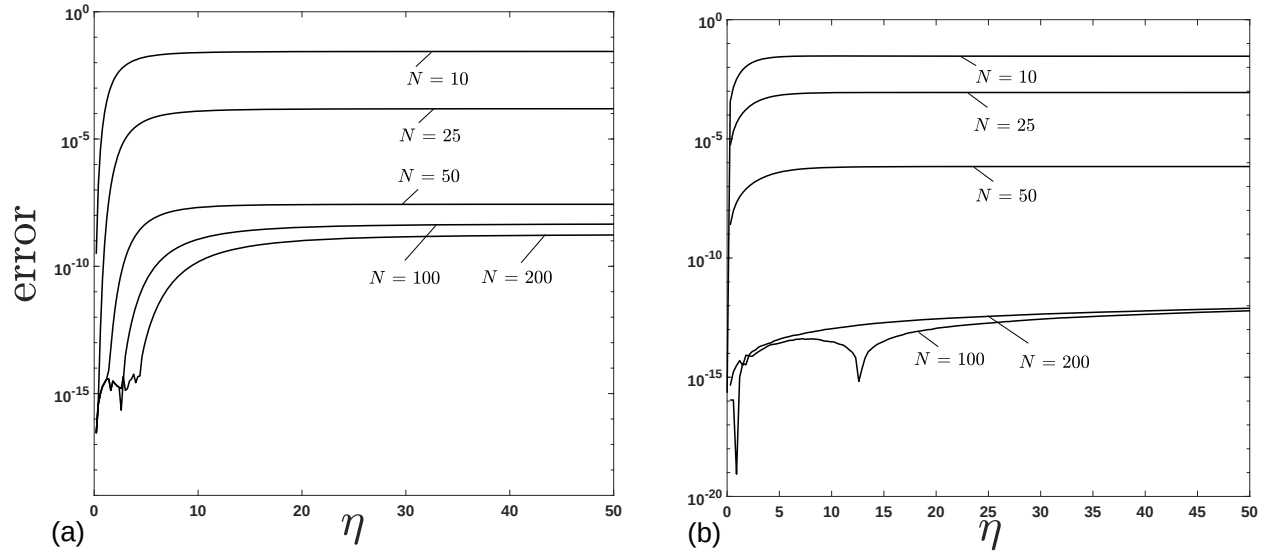


图 5：收敛级数解（18）的N项截断与数值解之间的绝对误差（差值的绝对值）（定义域为 $\eta \in [0, L]$，其中$L = 11000$），针对 $\alpha = 0.8$ 绘制其相对于 η 的图像，使用 κ、C 和 E 值：（a）由数值解生成；（b）由方程组（19）预测，详见第III C节。

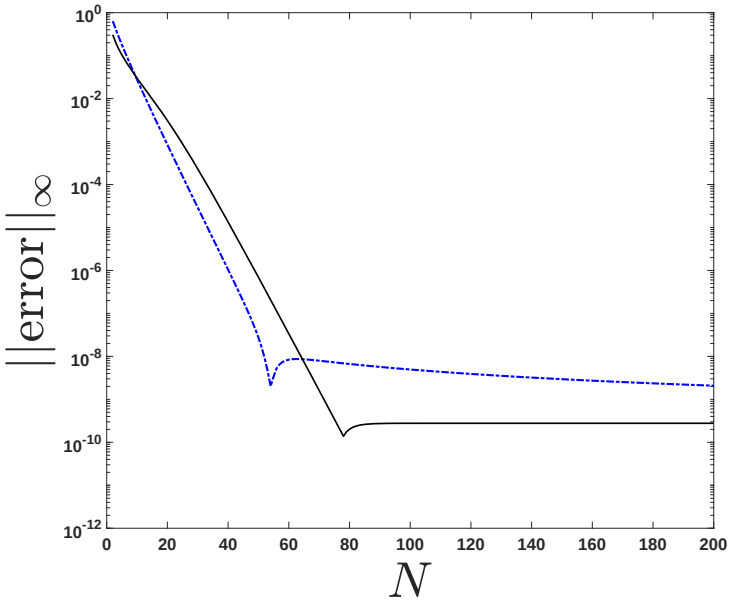


图 6：式 (18) 的N项截断与数值解之间的无穷范数（最大绝对误差）（在 $\eta \in [0,L]$ 且$L = 11000$时出现），随N变化的曲线。虚线和实线分别对应使用 κ、C 和 E 的数值与算法预测值（采用第III C节中讨论的方程组 (19)）。常数的数值与算法预测值的收敛情况分别列于附录 C 2 的表 III 和表 IV 中。

C. 未知参数的预测

到目前为止，所展示的结果均使用数值计算得到的常数值 κ、C 和E 。为了使级数解 (18) 不依赖于数值解，我们采用 Barlow等人[13] 使用的一种算法来预测常数 κ、C 和E的值。在该研究中，只需通过令级数解最后 $\mathcal{N}$ 个系数为零，为未知量构造一个方程组，其中 $\mathcal{N}$为未知量的个数（本问题中 $\mathcal{N} = 3$，即 κ、C 和E）。对于收敛级数，当$N \to \infty$时，最后一项系数必然趋于零，因此这一假设在极限下是自洽的。此外，从方程数与未知量数的角度来看，我们需要三个方程来求出 κ、C 和E。待求方程中隐含的级数收敛假设，可通过算法在级数项数不断增加时自身收敛得到验证。然而，在这一非牛顿扩展中，我们发现这三个 ˆ ˆ ˆ 方程（$A_N = 0$、$A_{N-1} = 0$ 和$A_{N-2} = 0$）线性相关，这一点从行列式可以明显看出

雅可比矩阵。因此，我们调整算法，改为使用方程 ˆ($A_N = 0$)（19c）中的一个方程。对于其余两个方程，我们采用 Naghshineh 等人[14] 使用的算法，从定义域中与级数展开点相对的一侧施加条件。这里使用的方程组为：

$$\left[\sum_{n=0}^{N} \hat{A}_n(-1)^n\right] - C = 0, \tag{19a}$$

$$\left[\sum_{n=0}^{N} n\hat{A}_n(-1)^{n-1}\right] - A_1 = 0, \tag{19b}$$

$$\hat{A}_N = 0, \tag{19c}$$

ˆ其中C、A_1, 和A_N 分别在（6）、（16e）和（18g）中定义。请注意，（19a）和（19b）对应于边界条件$F(U = 0) = C$ 和$F'(U = 0) = A_1$。我们使用牛顿法求解方程组（19），具体细节见附录 D。

图 5b 和图 6（实线）展示了方程组（19）解的典型结果；牛顿法的实现采用了容差 10^{-15}。图 5b 展示了算法预测 $\alpha = 0.8$时的 κ、C和E 与数值解相比，绝对误差随 η 的变化。图 6 中的实线展示了使用方程组（19）的解预测 κ、C和E 时，与数值解相比的最大绝对误差随N 的变化。通过观察可知，解$f(\eta)$的精度会随着级数项数的增加而提高。需要注意的是，我们没有像对（14）中的展开那样（参见（16d）），显式强制$f(\eta \to \infty) \to C$（对所有N）在$U = 0$ 处（对应于（18a）中的 $\eta \to \infty$）成立。因此，对于$N = 100$ 和 200，图 5b 中的曲线最终能够达到比图 5a 所示更低的误差值。

使用级数解 (18) 的关键问题在于，它需要获得渐近常数 E 的值。虽然此处未展示，但我们考察了其他多种允许的 α 取值，发现当 $\alpha < 0.74$ 时，数值 E 最终会变为负值，因此由于物理 η定义域中出现了分支点奇异性，规范函数 (11) 便不再适用；在此范围内，方程组 (19) 无法预测出收敛的 κ、C 和 E 值。尽管如此，当 η 足够大时，E 为负值的渐近形式完全有效，而这正是渐近形式本身适用的区域。

IV. 渐近动机近似解

由于目前仅针对 $0.74 < \alpha < 1$ 得到了收敛幂级数解，我们考虑采用另一种方法，以获得适用于 $0.5 < \alpha < 1$ 全范围的解析形式。请注意，尽管需要一些数值结果，但我们将得到的形式可在 α 的整个范围内替代收敛级数。克服发散级数解收敛障碍的一种方法，是通过帕德逼近[30]对其进行解析延拓。为此，我们采用一种渐近动机逼近[13]，其形式为修正帕德逼近：

$$f_A = C - \left[\frac{\sum_{n=0}^{M+1} P_n \eta^n}{\sum_{n=0}^{M} Q_n \eta^n} \right]^{\lambda} . \tag{20a}$$

在 (20a) 中，C 和 λ 分别由 (6) 和 (11c) 给出。为求出 (20a) 中的系数 P_n 和 Q_n，我们将 (20a) 写成如下形式

$$\left[C - \sum_{n=0}^{\infty} a_n \eta^n \right]^{1/\lambda} = \frac{\sum_{n=0}^{M+1} P_n \eta^n}{\sum_{n=0}^{M} Q_n \eta^n}, \tag{20b}$$

其中系数 a_n 由 (8a) 给出。对 (20b) 左侧使用 JCP Miller 公式（见附录A 1）后，可采用标准帕德求解器求出 (20b) 右侧的系数P_n和 Q_n。注意，对于 $\eta \to \infty$，$f_A \sim C - (P_{M+1}/Q_M)^{\lambda} \eta^{\lambda}$，这与 $\eta \gg E$ 时的渐近形式 (10f) 一致。为实现该近似解，我们采用表I中报告的 κ和C 的数值预测值。Belden等人在针对 Falkner–Skan方程的渐近近似解中，正是采用了这种方法。附录C 2 提供了关于 $\alpha = 0.8$ 在不同定义域长度 L 下数值预测的更多细节。如表I所示，边值问题的数值解表明，参数值对定义域长度高度敏感，且这种敏感性会随着 α 减小而增强。图7和图8分别显示了近似解 (20) 的 M 项截断与 $\alpha = 0.8$ 和 $\alpha = 0.6$ 数值解之间的绝对误差。

在图 7 和图 8 所示的近似解截断之间，会出现少数有缺陷的逼近[31]，其中式 (20b) 的分母在正 η值处变为零；评估解[30]时，通常会忽略这些情况。我们注意到，

表I：非牛顿萨基亚迪斯问题中常数 κ 和 C 的数值。

这些值是使用附录 B 中说明的射击法算法计算的，其中 $\eta = \infty$ 被表中给出的有限替代值 L 所取代。根据逐步增大 L 时的收敛情况， κ 和 C 的值在此处报告的小数位数范围内是准确的。

α	L	κ	C
0.99	100	-0.4434518189261262	1.6250769221853265
0.9	2000	-0.4413601253597191	1.717915813011322
0.8	11000	-0.440672715940425	1.860152537
0.7	11000	-0.442664523	2.08739
0.6	11000	-0.44906693	2.56
0.55	40000	-0.454851	3.1

在 $\alpha = 0.8$ 和 0.6 的情形下，分别在 $M = 26$ 和 $M = 15$ 处获得最小误差。对于更大的 M 值，误差会在与图 7 中 $M = 25$ 和 27、图 8 中 $M = 12$ 和 26 相似的曲线之间振荡。在这两种情形下，我们都接受该解为收敛解，因为其精度（此处定义为这些振荡的振幅）与输入值的精度一致，尤其是 C （见表I）。图 9 显示了当 $M = 20$ 时，在 α 的允许取值范围内，无穷范数（最大绝对误差）随 α 的变化情况；计算中采用了常数 κ 和 C 的数值。

V. 后处理：解析获得的流线

现在我们已经得到了方程 (4) 的精确解析解，可以将由 (16)（适用于 $0.74 \leq \alpha \leq 1$）[32] 或 (20)（适用于 $0.5 < \alpha < 1$）给出的 f 及其导数 $f'(\eta)$（可通过解析方法求得）代入 (3)，从而得到 u 速度场，如图10右侧的图所示。流体质点的运动路径，即 ψ 为常数时的流线，可以直接从解析解中提取。为此，我们通过重排 (2) 中的方程，显式求出给定流线 $\psi =$常数对应的 x 和 y 坐标，得到：

$$y = \frac{\psi\eta}{u_w f(\eta)}, \quad x = \frac{\rho}{K u_w^{2\alpha-1}} \left(\frac{\psi}{f(\eta)} \right)^{\alpha+1}. \tag{21}$$

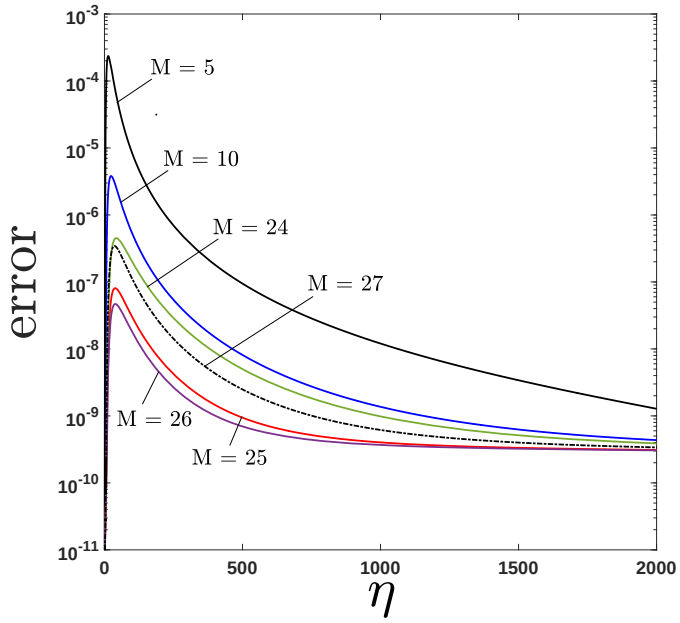


图 7：近似解 (20) 的M项截断与数值解之间的绝对误差（出现在 $\eta \in [0, L]$，其中 $L = 11000$），以 η 为横轴绘制，使用由数值解生成的 κ 和 C。误差持续减小，直至 $M = 26$，之后在类似于 $M = 25$ 和 27 的曲线之间振荡。

方程 (21) 以 η 和$f(\eta)$ 为参数表示流线，其中后者可由 (16) 或 (20) 解析求得。图10展示了以这种方式提取的典型流线图。图中，虚线表示边界层厚度$y = \eta \left(K x u_w^{\alpha-2}/\rho\right)^{1/(\alpha+1)}$，此处将其定义为流体速度降至壁面速度 10% 的点的轨迹；根据 (2a)，这发生在$u/u_w = df/d\eta = 0.1$时。从图10最上方的图可以看出，这发生在 $\eta = 4.04$ 时。解析解的优势在此显而易见：只需较低的计算成本，即可按任意所需分辨率准确生成流线图。

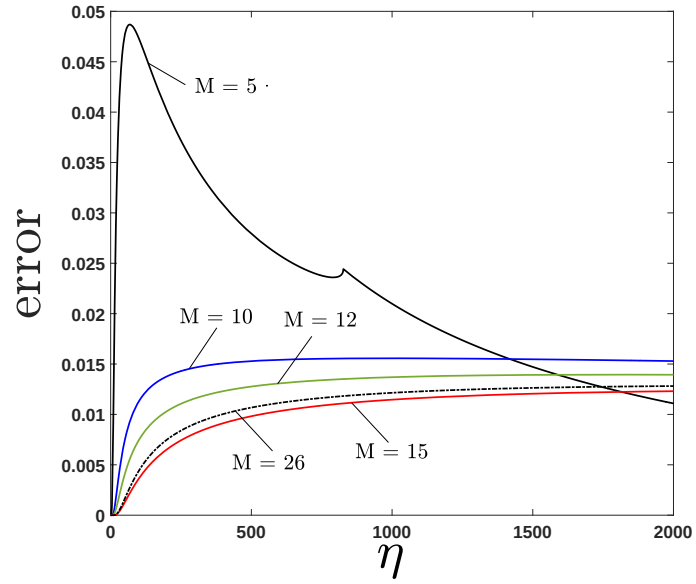


图8：近似解（20）的M项截断与数值解之间的绝对误差（出现在 $\eta \in [0, L]$，其中 $L = 11000$），使用数值解生成的 κ和C，绘制为 η 的函数，其中 $\alpha = 0.6$。误差持续减小，直到$M = 15$，之后在与$M = 12$ 和 26 类似的曲线之间振荡。

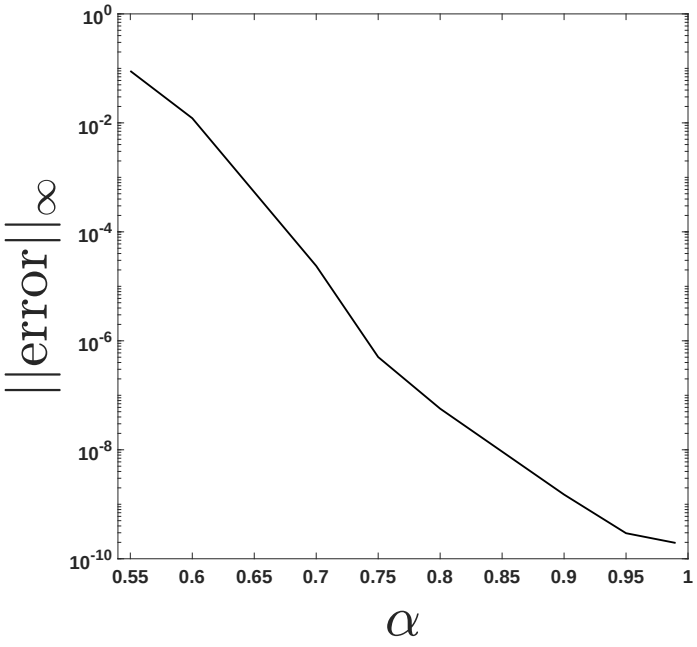


图9：近似解（20）（其中 $M = 20$）与数值解之间的最大绝对误差（出现在 $\eta \in [0, L]$），使用数值解生成的 κ和C，绘制为 α 的函数。C 和 κ 的值见表I。

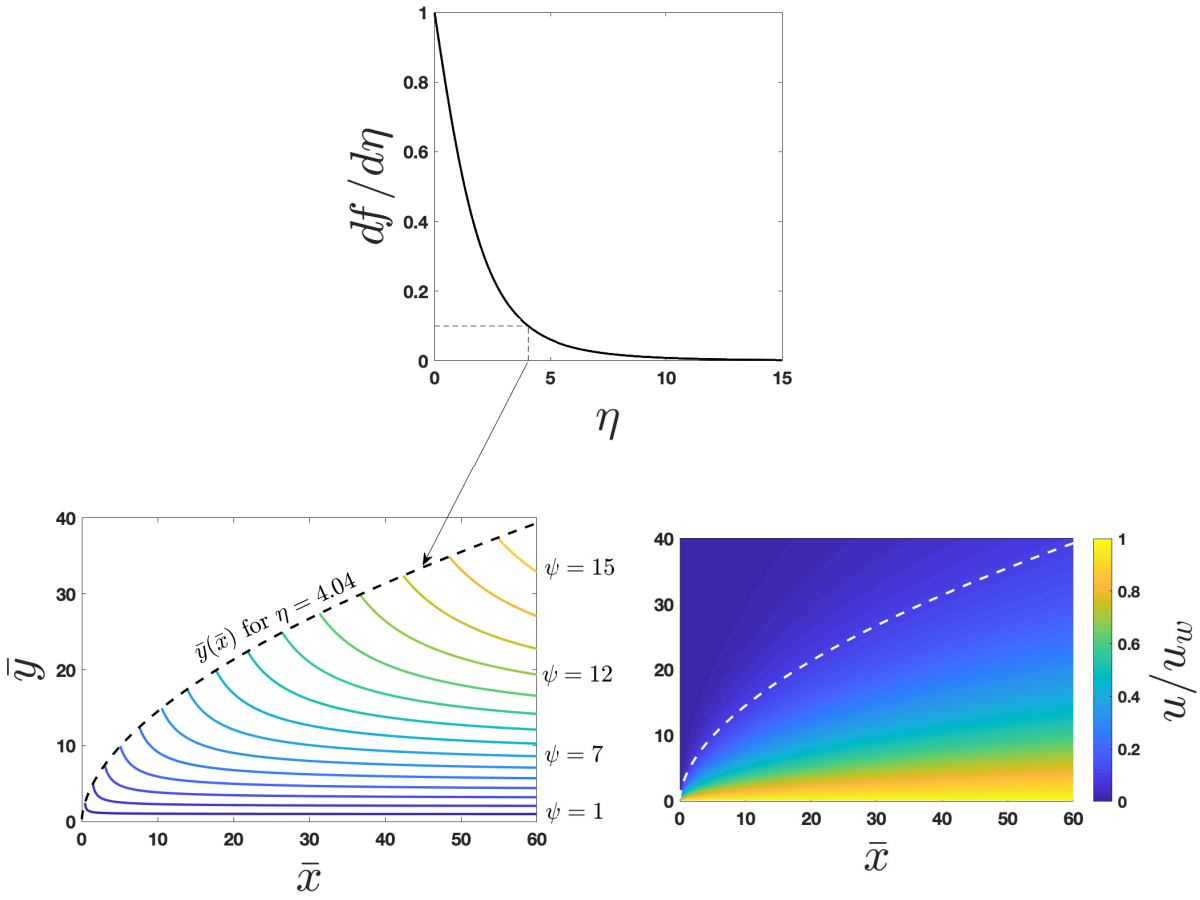


图10：（上）使用方程组（19），将表 IV 中的 C、 κ 和 E 值与 N $= 400$ 代入（16），解析得到 $\alpha = 0.8$ 的 d f /dη；网格线表示在 $\eta \approx 4.04$ 处 d f /dη =u/u$_w = 0.1$ 。（左）将 27 项与（2b）代入（16），解析得到常数 ψ 的等值线；在 $\bar{}$y $\equiv$ u$_w$y 对 $\bar{}$x $\equiv$ Ku $^{2\alpha-1}_{w}$x/ρ 平面上，以 $\Delta\psi = 1$ 为间隔显示。虚线曲线为边界层的包络线（此处选取 u/u $_w = 0.1$ 所在点的轨迹），并限制了 u/u$_w > 0.1$ 时对应速度的流线显示范围。（右）将 27 项与（3）代入（16），解析得到 u 速度场。

六、结论

在本文中，我们利用渐近展开作为 $\eta \to \infty$，为级数确定一个规范函数，从而为非牛顿萨基亚迪斯边界层问题提供了一个在 $0.74 \leq \alpha < 1$范围内有效的收敛幂级数解。当

由于渐近形式中出现分支点奇异性，规范函数无法完全遍历物理区域时，这种受渐近分析启发的级数便会失效。我们指出，尽管我们开发了一种渐近近似解来描述 $0.5 < \alpha < 0.74$的情形，但该近似解能够表示范围 $0.5 < \alpha < 1$内所有 α 值对应的解。获得解析解后，即可高效地进行后处理，以提取所需任意分辨率的流线。

附录 A：级数运算公式

1. 将级数乘方

以下关系式是 JCP Miller 公式，用于将级数乘方[22] ：

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)^{\gamma} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n, \tag{A1a}$$

其中

$$b_{n>0} = \frac{1}{n\, a_0} \sum_{j=1}^{n} (j\gamma - n + j) a_j b_{n-j}\ ,\ b_0 = (a_0)^{\gamma}\ ,\ a_0 \neq 0. \tag{A1b}$$

2. 两个级数的乘积

以下关系式是众所周知的两个级数的柯西乘积[23]:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{n} a_j b_{n-j}\right) x^n. \tag{A2}$$

附录B：数值解：射击法

以下算法的灵感来自 Cebeci 等人为 Falkner-Skan 边界层问题开发的方法。这里，我们将他们的方法扩展到式 (4) 给出的非牛顿萨基亚迪斯问题。为了确定式 (9) 定义的 κ，我们用以下定义在有限区间上的初值问题 (IVP) 近似定义在半无限域上的边值问题 (4)：$f(\eta)$（定义在半无限域上）近似为以下$f(\eta;\ \kappa)$ 中的初值问题 (IVP)（定义在有限区间上）：

$$\alpha(\alpha+1) f''' - (-f'')^{(2-\alpha)} f = 0,\ \ 0 \leq \eta \leq L \tag{B1a}$$

其中初始条件（取自 (4b)、(4c) 和 (9)）

$$f(0;\kappa) = 0\ \ ,\ \ f'(0;\kappa) = 1\ \ ,\ \ f''(0;\kappa) = \kappa, \tag{B1b}$$

其中f'表示f关于 η 的导数。为了确定 κ，我们对初值问题 (B1) 施加约束

$$f'(L;\kappa)=0, \tag{B2}$$

其中包含条件 (4d)，使得当$L\to\infty$时，(B1) 的解趋近于 (4) 的解。通过下文所述的射击法，确定 κ 并求出 (B1)（满足 (B2)）中f本身的数值解。

首先，将 (B1a) 替换为一个由三个一阶常微分方程组成的系统。为此，令 $\mathscr{U}(\eta;\ \kappa)$、$\mathscr{V}(\eta;\ \kappa)$ 和 $\mathscr{V}'(\eta;\ \kappa)$ 分别表示$f'(\eta;\ \kappa)$、$f''(\eta;\ \kappa)$ 和$f'''(\eta;\ \kappa)$。因此，(B1) 可写为如下系统：

$$f'=\mathscr{U}\ ,\ \mathscr{U}'=\mathscr{V}\ ,\ \mathscr{V}'=\frac{(-\mathscr{V})^{(2-\alpha)}f}{\alpha(\alpha+1)}, \tag{B3a}$$

初始条件为

$$f(0;\kappa)=0\ ,\ \mathscr{U}(0;\kappa)=1\ ,\ \mathscr{V}(0;\kappa)=\kappa. \tag{B3b}$$

目标是求出初值问题 (B3) 的一个解，使约束条件 (B2) 得到满足。也就是说，我们通过求解 κ 来求出 (B3) 的解，使得

$$\mathscr{U}(L;\kappa)=0, \tag{B4}$$

其中L 逐步增大，使得 (B1) 的 κ 值趋近于 (4) 的 κ 值。

为了确定 (B3b) 中的 κ，我们使用由下式定义的牛顿法[33]：

$$\kappa^{\gamma+1}=\kappa^{\gamma}-\frac{\mathscr{U}(L;\kappa^{\gamma})}{\frac{\partial}{\partial\kappa}(\mathscr{U}(L;\kappa^{\gamma}))}\ ,\ \gamma=0,\ 1,\ 2,\ ...,$$

其中，κ^0 是 κ的初始估计值，γ 为迭代次数。为了获得 $\mathscr{U}$ 关于 κ的导数，我们对 (B3) 关于 κ求导，从而得到以下附加初值问题：

$$\frac{\partial f'}{\partial\kappa}=\frac{\partial\mathscr{U}}{\partial\kappa}\ ,\ \frac{\partial\mathscr{U}'}{\partial\kappa}=\frac{\partial\mathscr{V}}{\partial\kappa}\ ,\ \frac{\partial\mathscr{V}'}{\partial\kappa}=(\alpha-2)\frac{\partial\mathscr{V}}{\partial\kappa}\frac{(-\mathscr{V})^{(1-\alpha)}}{\alpha(\alpha+1)}f+\frac{(-\mathscr{V})^{(2-\alpha)}}{\alpha(\alpha+1)}\frac{\partial f}{\partial\kappa}, \tag{B5a}$$

带有条件

$$\frac{\partial f}{\partial\kappa}(0;\kappa)=0\ ,\ \frac{\partial\mathscr{U}}{\partial\kappa}(0;\kappa)=0\ ,\ \frac{\partial\mathscr{V}}{\partial\kappa}(0;\kappa)=1. \tag{B5b}$$

Fo为清晰起见，我们将关于 κ 的导数赋予如下新变量 s

$$\mathfrak{F}(\eta;\kappa)\equiv\frac{\partial f}{\partial\kappa}(\eta;\kappa),\ \mathfrak{U}(\eta;\kappa)\equiv\frac{\partial\mathscr{U}}{\partial\kappa}(\eta;\kappa),\ \mathfrak{V}(\eta;\kappa)\equiv\frac{\partial\mathscr{V}}{\partial\kappa}(\eta;\kappa),$$

在 (B5) 中，将对 η （以撇号表示）求导与对 κ 求导互换，并将 (B3) 和 (B5) 合并为在 $\kappa=\kappa^{\gamma}$ 处求值的单个初值问题：

$$\frac{d}{d\eta}\begin{bmatrix} f\\ \mathscr{U}\\ \mathscr{V}\\ \mathfrak{F}\\ \mathfrak{U}\\ \mathfrak{V}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \mathscr{U}\\ \mathscr{V}\\ \frac{(-\mathscr{V})^{(2-\alpha)}f}{\alpha(\alpha+1)}\\ \mathfrak{U}\\ \mathfrak{V}\\ (\alpha-2)\mathfrak{V}\frac{(-\mathscr{V})^{(1-\alpha)}}{\alpha(\alpha+1)}f+\frac{(-\mathscr{V})^{(2-\alpha)}}{\alpha(\alpha+1)}\mathfrak{F}\end{bmatrix},\quad\begin{bmatrix} f\\ \mathscr{U}\\ \mathscr{V}\\ \mathfrak{F}\\ \mathfrak{U}\\ \mathfrak{V}\end{bmatrix}_{\eta=0}=\begin{bmatrix} 0\\ 1\\ \kappa^{\gamma}\\ 0\\ 0\\ 1\end{bmatrix}.\qquad\text{(B6)}$$

根据 (B6)，可以确定 $\mathscr{U}(L;\ \kappa^{\gamma})$ 和 $\mathfrak{U}(L;\ \kappa^{\gamma})$；随后可通过以下方式将猜测值 κ^{γ}推进到下一次迭代：

$$\kappa^{\gamma+1}=\kappa^{\gamma}-\frac{\mathscr{U}(L;\kappa^{\gamma})}{\mathfrak{U}(L;\kappa^{\gamma})}\ ,\ \gamma=0,\ 1,\ 2,\ ...,\qquad\text{(B7)}$$

以计算 $\kappa^{\gamma+1}$。我们采用四阶龙格-库塔法，并使用 $\Delta\eta=0.001$ 求解 (B6)。在牛顿迭代 (B7) 中，要求收敛至 $|\kappa^{\gamma+1}-\kappa^{\gamma}|<10^{-15}$。

附录 C： κ、C 和 E 的计算

1. E 的数值计算

本节将说明，当 $\alpha\to1$ 时，常数 $E\ \to1$ 。这些值通过数值计算获得：采用附录 B 中介绍的射击法，并结合 (17) 中定义的 E 。

2. κ、C 和 E 的评估： $\alpha=0.8$

下文将给出用于 $\alpha=0.8$ 的解析解 (8)、(11)、(18) 和 (20) 的常数。这些常数通过两种方式获得：要么通过射击法进行数值计算（表 III 和附录 B），要么通过使用幂级数的自包含算法获得（表 IV 和附录 (D)）。

表 II：式 (17) 中定义的常数E 的数值。使用附录 B 中说明的射击法算法进行计算，其中将 $\eta = \infty$ 替换为表中给出的有限替代值L。

α	L	E
0.99	100	0.996357144778925
0.9	2000	0.921210805240775
0.8	11000	0.639133894794667
0.75	11000	0.249305949228073

表 III：非牛顿萨基亚迪斯问题中常数 κ、C 和 E （ $\alpha = 0.8$ ）的数值。使用附录 B 中说明的射击法算法计算这些数值，其中 $\eta = \infty$ 被有限替代值 L （表中所列）取代。该数值算法采用牛顿迭代，容差为 10^{-15}，并结合步长为 $\triangle\eta = 0.001$ 的 4^{th} 阶 Runge-Kutta 求解器。

L	κ	C	E
40	-0.44069277587148	1.85680030949222	0.654388901675618
100	-0.44067330624905	1.85989634054125	0.641907516688146
240	-0.44067273476661	1.86013263767144	0.639639542413533
540	-0.44067271669187	1.86015073982904	0.639235534657387
1000	-0.44067271600486	1.86015225132246	0.639163575176951
2000	-0.44067271594447	1.86015250138706	0.639141167249476
5000	-0.44067271594052	1.86015253504567	0.639134860809690
11000	-0.44067271594043	1.86015253716140	0.639133894794667

表 IV：非牛顿萨基亚迪斯问题中常数 κ、C 和 E （ $\alpha = 0.8$ ）的预测值。使用第（ IIIC）节中说明的方程组 (19) 的解计算这些数值，表中给出了 N 的取值。该算法采用牛顿迭代，容差为 10^{-15}。

N	κ	C	E
50	-0.440672770686287	1.860151847487335	0.639137961392650
100	-0.440672715934279	1.860152537361902	0.639133656731447
200	-0.440672715934271	1.860152537362062	0.639133656729539
400	-0.440672715934270	1.860152537362068	0.639133656729520

附录 D：用于预测常数的牛顿法

该算法所用的方程组为：

$$\mathscr{F}_1(\kappa, C, E) = \left[\sum_{n=0}^{N} \hat{A}_n (-1)^n\right] - C, \tag{D1a}$$

$$\mathscr{F}_2(\kappa, C, E) = \left[\sum_{n=0}^{N} n\hat{A}_n (-1)^{n-1}\right] - A_1, \tag{D1b}$$

$$\mathscr{F}_3(\kappa, C, E) = \hat{A}_N, \tag{D1c}$$

ˆ其中C、A_1, 和A_N 分别在式（6）、（16e）和（18g）中定义。

我们分别对（D1a）至（D1c）关于 κ、C和E求导，得到雅可比矩阵：

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathscr{F}_1}{\partial C} & \frac{\partial \mathscr{F}_1}{\partial E} & \frac{\partial \mathscr{F}_1}{\partial \kappa} \\ \frac{\partial \mathscr{F}_2}{\partial C} & \frac{\partial \mathscr{F}_2}{\partial E} & \frac{\partial \mathscr{F}_2}{\partial \kappa} \\ \frac{\partial \mathscr{F}_3}{\partial C} & \frac{\partial \mathscr{F}_3}{\partial E} & \frac{\partial \mathscr{F}_3}{\partial \kappa} \end{bmatrix}, \tag{D2}$$

该方法用于牛顿法

$$\begin{bmatrix} C^{j+1} \\ E^{j+1} \\ \kappa^{j+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C^{j} \\ E^{j} \\ \kappa^{j} \end{bmatrix} - \mathbf{J}^{-1} \begin{bmatrix} \mathscr{F}_1(C^j, E^j, \kappa^j) \\ \mathscr{F}_2(C^j, E^j, \kappa^j) \\ \mathscr{F}_3(C^j, E^j, \kappa^j) \end{bmatrix}. \tag{D3}$$

为构造雅可比矩阵（D2），我们对（D1a - (D1c)）分别关于C、E和 κ 求导，如下所示:

$$\frac{\partial \mathscr{F}_1}{\partial C}=\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\partial \hat{A}_n}{\partial C}(-1)^n\right]-1\ ,\ \frac{\partial \mathscr{F}_1}{\partial E}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\partial \hat{A}_n}{\partial E}(-1)^n\ ,\ \frac{\partial \mathscr{F}_1}{\partial \kappa}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\partial \hat{A}_n}{\partial \kappa}(-1)^n, \tag{D4a}$$

$$\frac{\partial \mathscr{F}_2}{\partial C}=\left[\sum_{n=0}^{\infty}n\frac{\partial \hat{A}_n}{\partial C}(-1)^{n-1}\right]-\frac{\partial A_1}{\partial C}, \tag{D4b}$$

$$\frac{\partial \mathscr{F}_2}{\partial E}=\left[\sum_{n=0}^{\infty}n\frac{\partial \hat{A}_n}{\partial E}(-1)^{n-1}\right]-\frac{\partial A_1}{\partial E}, \tag{D4c}$$

$$\frac{\partial \mathscr{F}_2}{\partial \kappa}=\left[\sum_{n=0}^{\infty}n\frac{\partial \hat{A}_n}{\partial \kappa}(-1)^{n-1}\right]-\frac{\partial A_1}{\partial \kappa}, \tag{D4d}$$

$$\frac{\partial \mathscr{F}_3}{\partial C}=\frac{\partial \hat{A}_N}{\partial C}\ ,\ \frac{\partial \mathscr{F}_3}{\partial E}=\frac{\partial \hat{A}_N}{\partial E}\ ,\ \frac{\partial \mathscr{F}_3}{\partial \kappa}=\frac{\partial \hat{A}_N}{\partial \kappa}. \tag{D4e}$$

我们对未知数C、E和 κ求 (11c) 的导数。需要注意的是， λ 不是这三个常数中任何一个的函数。因此，我们只对 (11c) 中的 $\mathscr{A}$求导，如下所示:

$$\frac{\partial \mathscr{A}}{\partial C}=\frac{1-\alpha}{\alpha(\alpha+1)E}\ ,\ \frac{\partial \mathscr{A}}{\partial E}=\frac{-C(1-\alpha)}{\alpha(\alpha+1)E^2}\ ,\ \frac{\partial \mathscr{A}}{\partial \kappa}=0. \tag{D5}$$

我们使用链式法则对 (13b)-(13f) 求导，如下所示:

$$\frac{\partial k_1}{\partial C}=3\alpha(\alpha+1)\lambda^3\mathscr{A}^2\frac{\partial \mathscr{A}}{\partial C}\ ,\ \frac{\partial k_1}{\partial E}=3\alpha(\alpha+1)\lambda^3\mathscr{A}^2\frac{\partial \mathscr{A}}{\partial E}\ ,\ \frac{\partial k_1}{\partial \kappa}=0, \tag{D6a}$$

$$\frac{\partial k_2}{\partial C}=9\alpha(\alpha+1)\lambda^2(\lambda-1)\mathscr{A}^2\frac{\partial \mathscr{A}}{\partial C}\ ,\ \frac{\partial k_2}{\partial E}=9\alpha(\alpha+1)\lambda^2(\lambda-1)\mathscr{A}^2\frac{\partial \mathscr{A}}{\partial E}\ ,\ \frac{\partial k_2}{\partial \kappa}=0, \tag{D6b}$$

$$\frac{\partial k_3}{\partial C}=3\alpha(\alpha+1)\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)\mathscr{A}^2\frac{\partial \mathscr{A}}{\partial C}, \tag{D6c}$$

$$\frac{\partial k_3}{\partial E}=3\alpha(\alpha+1)\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)\mathscr{A}^2\frac{\partial \mathscr{A}}{\partial E}\ ,\ \frac{\partial k_3}{\partial \kappa}=0, \tag{D6d}$$

$$\frac{\partial k_4}{\partial C}=-2\lambda^2\mathscr{A}\frac{\partial \mathscr{A}}{\partial C}\ ,\ \frac{\partial k_4}{\partial E}=-2\lambda^2\mathscr{A}\frac{\partial \mathscr{A}}{\partial E}\ ,\ \frac{\partial k_4}{\partial \kappa}=0, \tag{D6e}$$

$$\frac{\partial k_5}{\partial C}=-2\lambda(\lambda-1)\mathscr{A}\frac{\partial \mathscr{A}}{\partial C}\ ,\ \frac{\partial k_5}{\partial E}=-2\lambda(\lambda-1)\mathscr{A}\frac{\partial \mathscr{A}}{\partial E}\ ,\ \frac{\partial k_5}{\partial \kappa}=0. \tag{D6f}$$

ˆ ˆ 我们对 (18b)-(18f) 中从A_0 到A_4 求导，结果如下

$$\frac{\partial \hat{A}_0}{\partial C}=0\ ,\ \frac{\partial \hat{A}_0}{\partial E}=0\ ,\ \frac{\partial \hat{A}_0}{\partial \kappa}=0. \tag{D7a}$$

$$\frac{\partial \hat{A}_1}{\partial C} = \frac{-1}{\lambda \mathscr{A}^2}\frac{\partial \mathscr{A}}{\partial C} \;\;,\;\; \frac{\partial \hat{A}_1}{\partial E} = \frac{-1}{\lambda \mathscr{A}^2}\frac{\partial \mathscr{A}}{\partial E} \;\;,\;\; \frac{\partial \hat{A}_1}{\partial \kappa} = 0, \tag{D7b}$$

$$\frac{\partial \hat{A}_2}{\partial C} = \frac{1}{2\lambda^2}\left(\frac{-2\kappa}{a^3} + \frac{\lambda - 1}{\mathscr{A}^2}\right)\frac{\partial \mathscr{A}}{\partial C}, \tag{D7c}$$

$$\frac{\partial \hat{A}_2}{\partial E} = \frac{1}{2\lambda^2}\left(\frac{-2\kappa}{a^3} + \frac{\lambda - 1}{\mathscr{A}^2}\right)\frac{\partial \mathscr{A}}{\partial E} \;\;,\;\; \frac{\partial \hat{A}_2}{\partial \kappa} = \frac{1}{2\lambda^2 \mathscr{A}^2}. \tag{D7d}$$

$$\frac{\partial \hat{A}_3}{\partial C} = u_1\frac{\partial v_1}{\partial C} + v_1\frac{\partial u_1}{\partial C} \;\;,\;\; \frac{\partial \hat{A}_3}{\partial E} = u_1\frac{\partial v_1}{\partial E} + v_1\frac{\partial u_1}{\partial E} \;\;,\;\; \frac{\partial \hat{A}_3}{\partial \kappa} = u_1\frac{\partial v_1}{\partial \kappa}, \tag{D7e}$$

其中

$$u_1 = \frac{1}{6k_1} \;\;,\;\; v_1 = -2k_2\hat{A}_2 - k_3\hat{A}_1, \tag{D7f}$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial C} = \frac{-1}{6(k_1)^2}\frac{\partial k_1}{\partial C} \;\;,\;\; \frac{\partial u_1}{\partial E} = \frac{-1}{6(k_1)^2}\frac{\partial k_1}{\partial E} \;\;,\;\; \frac{\partial u_1}{\partial \kappa} = 0, \tag{D7g}$$

$$\frac{\partial v_1}{\partial C} = -2\left(k_2\frac{\partial \hat{A}_2}{\partial C} + \hat{A}_2\frac{\partial k_2}{\partial C}\right) - \left(k_3\frac{\partial \hat{A}_1}{\partial C} + \hat{A}_1\frac{\partial k_3}{\partial C}\right), \tag{D7h}$$

$$\frac{\partial v_1}{\partial E} = -2\left(k_2\frac{\partial \hat{A}_2}{\partial E} + \hat{A}_2\frac{\partial k_2}{\partial E}\right) - \left(k_3\frac{\partial \hat{A}_1}{\partial E} + \hat{A}_1\frac{\partial k_3}{\partial E}\right), \tag{D7i}$$

$$\frac{\partial v_1}{\partial \kappa} = -2k_2\frac{\partial \hat{A}_2}{\partial \kappa}. \tag{D7j}$$

$$\frac{\partial \hat{A}_4}{\partial C} = u_2\frac{\partial v_2}{\partial C} + v_2\frac{\partial u_2}{\partial C} \;\;,\;\; \frac{\partial \hat{A}_4}{\partial E} = u_2\frac{\partial v_2}{\partial E} + v_2\frac{\partial u_2}{\partial E} \;\;,\;\; \frac{\partial \hat{A}_4}{\partial \kappa} = u_2\frac{\partial v_2}{\partial \kappa}, \tag{D7k}$$

and

$$u_2 = \frac{1}{24k_1} \;\;,\;\; v_2 = -2k_2\hat{A}_2 - 6k_2\hat{A}_3 - 2k_3\hat{A}_2 + \hat{A}_1\hat{d}_0 - 12k_1\hat{A}_3, \tag{D7l}$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial C} = \frac{-1}{24(k_1)^2}\frac{\partial k_1}{\partial C} \;\;,\;\; \frac{\partial u_2}{\partial E} = \frac{-1}{24(k_1)^2}\frac{\partial k_1}{\partial E} \;\;,\;\; \frac{\partial u_2}{\partial \kappa} = 0, \tag{D7m}$$

$$\frac{\partial v_2}{\partial C} = -2\left(k_2\frac{\partial \hat{A}_2}{\partial C} + \hat{A}_2\frac{\partial k_2}{\partial C}\right) - 6\left(k_2\frac{\partial \hat{A}_3}{\partial C} + \hat{A}_3\frac{\partial k_2}{\partial C}\right) - 2\left(k_3\frac{\partial \hat{A}_2}{\partial C} + \hat{A}_2\frac{\partial k_3}{\partial C}\right) + \hat{A}_1\frac{\partial \hat{d}_0}{\partial C} + \hat{d}_0\frac{\partial \hat{A}_1}{\partial C} - 12\left(k_1\frac{\partial \hat{A}_3}{\partial C} + \hat{A}_3\frac{\partial k_1}{\partial C}\right), \tag{D7n}$$

$$\frac{\partial v_2}{\partial E} = -2\left(k_2\frac{\partial \hat{A}_2}{\partial E} + \hat{A}_2\frac{\partial k_2}{\partial E}\right) - 6\left(k_2\frac{\partial \hat{A}_3}{\partial E} + \hat{A}_3\frac{\partial k_2}{\partial E}\right) - 2\left(k_3\frac{\partial \hat{A}_2}{\partial E} + \hat{A}_2\frac{\partial k_3}{\partial E}\right) + \hat{A}_1\frac{\partial \hat{d}_0}{\partial E} + \hat{d}_0\frac{\partial \hat{A}_1}{\partial E} - 12\left(k_1\frac{\partial \hat{A}_3}{\partial E} + \hat{A}_3\frac{\partial k_1}{\partial E}\right), \tag{D7o}$$

$$\frac{\partial v_2}{\partial \kappa} = -2k_2\frac{\partial \hat{A}_2}{\partial \kappa} - 6k_2\frac{\partial \hat{A}_3}{\partial \kappa} - 2k_3\frac{\partial \hat{A}_2}{\partial \kappa} + \hat{A}_1\frac{\partial \hat{d}_0}{\partial \kappa} - 12k_1\frac{\partial \hat{A}_3}{\partial \kappa}, \tag{D7p}$$

$$\frac{\partial \hat{d}_0}{\partial C} = (2-\alpha)(\hat{c}_0)^{1-\alpha}\frac{\partial \hat{c}_0}{\partial C}, \tag{D7q}$$

$$\frac{\partial \hat{d}_0}{\partial E} = (2-\alpha)(\hat{c}_0)^{1-\alpha}\frac{\partial \hat{c}_0}{\partial E} \ , \ \frac{\partial \hat{d}_0}{\partial \boldsymbol{\kappa}} = (2-\alpha)(\hat{c}_0)^{1-\alpha}\frac{\partial \hat{c}_0}{\partial \boldsymbol{\kappa}}, \tag{D7r}$$

$$\frac{\partial \hat{c}_0}{\partial C} = 2\left(k_4\frac{\partial \hat{A}_2}{\partial C} + \hat{A}_2\frac{\partial k_4}{\partial C}\right) + k_5\frac{\partial \hat{A}_1}{\partial C} + \hat{A}_1\frac{\partial k_5}{\partial C}, \tag{D7s}$$

$$\frac{\partial \hat{c}_0}{\partial E} = 2\left(k_4\frac{\partial \hat{A}_2}{\partial E} + \hat{A}_2\frac{\partial k_4}{\partial E}\right) + k_5\frac{\partial \hat{A}_1}{\partial E} + \hat{A}_1\frac{\partial k_5}{\partial E} \ , \ \frac{\partial \hat{c}_0}{\partial \boldsymbol{\kappa}} = 2k_4\frac{\partial \hat{A}_2}{\partial \boldsymbol{\kappa}}. \tag{D7t}$$

接下来，我们对式 (18g) 求导如下

$$\frac{\partial \hat{A}_{n+3}}{\partial C} = \frac{v_3\frac{\partial u_3}{\partial C} - u_3\frac{\partial v_3}{\partial C}}{(v_3)^2} \ , \ \frac{\partial \hat{A}_{n+3}}{\partial E} = \frac{v_3\frac{\partial u_3}{\partial E} - u_3\frac{\partial v_3}{\partial E}}{(v_3)^2} \ , \ \frac{\partial \hat{A}_{n+3}}{\partial \boldsymbol{\kappa}} = \frac{\frac{\partial u_3}{\partial \boldsymbol{\kappa}}}{v_3}, \tag{D8a}$$

其中

$$u_3 = \{-k_2(n+1)n - k_3(n+1) - k_1(n+1)n(n-1)\}\hat{A}_{n+1} + \{-k_2(n+2)(n+1) - 2k_1(n+2)(n+1)n\}\hat{A}_{n+2} + \hat{e}_n, \tag{D8b}$$

$$v_3 = k_1(n+3)(n+2)(n+1), \tag{D8c}$$

$$\frac{\partial u_3}{\partial C} = \{-k_2(n+1)n - k_3(n+1) - k_1(n+1)n(n-1)\}\frac{\partial \hat{A}_{n+1}}{\partial C} + \hat{A}_{n+1}\left\{-\frac{\partial k_2}{\partial C}(n+1)n - \frac{\partial k_3}{\partial C}(n+1) - \frac{\partial k_1}{\partial C}(n+1)n(n-1)\right\} + \{-k_2(n+2)(n+1) - 2k_1(n+2)(n+1)n\}\frac{\partial \hat{A}_{n+2}}{\partial C} + \hat{A}_{n+2}\left\{-\frac{\partial k_2}{\partial C}(n+2)(n+1) - 2\frac{\partial k_1}{\partial C}(n+2)(n+1)n\right\} + \frac{\partial \hat{e}_n}{\partial C}, \tag{D8d}$$

$$\frac{\partial u_3}{\partial E} = \{-k_2(n+1)n - k_3(n+1) - k_1(n+1)n(n-1)\}\frac{\partial \hat{A}_{n+1}}{\partial E} + \hat{A}_{n+1}\left\{-\frac{\partial k_2}{\partial E}(n+1)n - \frac{\partial k_3}{\partial E}(n+1) - \frac{\partial k_1}{\partial E}(n+1)n(n-1)\right\} + \{-k_2(n+2)(n+1) - 2k_1(n+2)(n+1)n\}\frac{\partial \hat{A}_{n+2}}{\partial E} + \hat{A}_{n+2}\left\{-\frac{\partial k_2}{\partial E}(n+2)(n+1) - 2\frac{\partial k_1}{\partial E}(n+2)(n+1)n\right\} + \frac{\partial \hat{e}_n}{\partial E}, \tag{D8e}$$

$$\frac{\partial u_3}{\partial \boldsymbol{\kappa}} = \{-k_2(n+1)n - k_3(n+1) - k_1(n+1)n(n-1)\}\frac{\partial \hat{A}_{n+1}}{\partial \boldsymbol{\kappa}} + \{-k_2(n+2)(n+1) - 2k_1(n+2)(n+1)n\}\frac{\partial \hat{A}_{n+2}}{\partial \boldsymbol{\kappa}} + \frac{\partial \hat{e}_n}{\partial \boldsymbol{\kappa}}, \tag{D8f}$$

$$\frac{\partial v_3}{\partial C} = (n+3)(n+2)(n+1)\frac{\partial k_1}{\partial C} \;\;,\;\; \frac{\partial v_3}{\partial E} = (n+3)(n+2)(n+1)\frac{\partial k_1}{\partial E} \;\;,\;\; \frac{\partial v_3}{\partial \kappa} = 0, \tag{D8g}$$

$$\frac{\partial \hat{e}_n}{\partial C} = \sum_{j=0}^{n} \hat{A}_j \frac{\partial \hat{d}_{n-j}}{\partial C} + \hat{d}_{n-j}\frac{\partial \hat{A}_j}{\partial C}, \tag{D8h}$$

$$\frac{\partial \hat{e}_n}{\partial E} = \sum_{j=0}^{n} \hat{A}_j \frac{\partial \hat{d}_{n-j}}{\partial E} + \hat{d}_{n-j}\frac{\partial \hat{A}_j}{\partial E}, \tag{D8i}$$

$$\frac{\partial \hat{e}_n}{\partial \kappa} = \sum_{j=0}^{n} \hat{A}_j \frac{\partial \hat{d}_{n-j}}{\partial \kappa} + \hat{d}_{n-j}\frac{\partial \hat{A}_j}{\partial \kappa}, \tag{D8j}$$

$$\frac{\partial \hat{d}_{n>0}}{\partial C} = \frac{-1}{n(\hat{c}_0)^2}\frac{\partial \hat{c}_0}{\partial C}\sum_{j=1}^{n}(3j-\alpha j-n)\hat{c}_j\hat{d}_{n-j} + \frac{1}{n\hat{c}_0}\sum_{j=1}^{n}(3j-\alpha j-n)\frac{\partial \hat{c}_j}{\partial C}\hat{d}_{n-j} + \frac{1}{n\hat{c}_0}\sum_{j=1}^{n}(3j-\alpha j-n)\hat{c}_j\frac{\partial \hat{d}_{n-j}}{\partial C}, \tag{D8k}$$

$$\frac{\partial \hat{d}_{n>0}}{\partial E} = \frac{-1}{n(\hat{c}_0)^2}\frac{\partial \hat{c}_0}{\partial E}\sum_{j=1}^{n}(3j-\alpha j-n)\hat{c}_j\hat{d}_{n-j} + \frac{1}{n\hat{c}_0}\sum_{j=1}^{n}(3j-\alpha j-n)\frac{\partial \hat{c}_j}{\partial E}\hat{d}_{n-j} + \frac{1}{n\hat{c}_0}\sum_{j=1}^{n}(3j-\alpha j-n)\hat{c}_j\frac{\partial \hat{d}_{n-j}}{\partial E}, \tag{D8l}$$

$$\frac{\partial \hat{d}_{n>0}}{\partial \kappa} = \frac{-1}{n(\hat{c}_0)^2}\frac{\partial \hat{c}_0}{\partial \kappa}\sum_{j=1}^{n}(3j-\alpha j-n)\hat{c}_j\hat{d}_{n-j} + \frac{1}{n\hat{c}_0}\sum_{j=1}^{n}(3j-\alpha j-n)\frac{\partial \hat{c}_j}{\partial \kappa}\hat{d}_{n-j} + \frac{1}{n\hat{c}_0}\sum_{j=1}^{n}(3j-\alpha j-n)\hat{c}_j\frac{\partial \hat{d}_{n-j}}{\partial \kappa}, \tag{D8m}$$

$$\frac{\partial \hat{c}_{n>0}}{\partial C} = (k_4 n+k_5)(n+1)\frac{\partial \hat{A}_{n+1}}{\partial C} + \left(\frac{\partial k_4}{\partial C}n + \frac{\partial k_5}{\partial C}\right)(n+1)\hat{A}_{n+1} + k_4(n+2)(n+1)\frac{\partial \hat{A}_{n+2}}{\partial C} + \frac{\partial k_4}{\partial C}(n+2)(n+1)\hat{A}_{n+2}, \tag{D8n}$$

$$\frac{\partial \hat{c}_{n>0}}{\partial E} = (k_4 n+k_5)(n+1)\frac{\partial \hat{A}_{n+1}}{\partial E} + \left(\frac{\partial k_4}{\partial E}n + \frac{\partial k_5}{\partial E}\right)(n+1)\hat{A}_{n+1} + k_4(n+2)(n+1)\frac{\partial \hat{A}_{n+2}}{\partial E} + \frac{\partial k_4}{\partial E}(n+2)(n+1)\hat{A}_{n+2}, \tag{D8o}$$

$$\frac{\partial \hat{c}_{n>0}}{\partial \kappa} = (k_4 n+k_5)(n+1)\frac{\partial \hat{A}_{n+1}}{\partial \kappa} + \left(\frac{\partial k_4}{\partial \kappa}n + \frac{\partial k_5}{\partial \kappa}\right)(n+1)\hat{A}_{n+1} + k_4(n+2)(n+1)\frac{\partial \hat{A}_{n+2}}{\partial \kappa} + \frac{\partial k_4}{\partial \kappa}(n+2)(n+1)\hat{A}_{n+2}. \tag{D8p}$$

最后，我们对式 (16e) 求导如下

$$\frac{\partial A_1}{\partial C} = \frac{1}{1-\alpha}\left(\frac{u_4}{v_4}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}\left(\frac{v_4\frac{\partial u_4}{\partial C} - u_4\frac{\partial v_4}{\partial C}}{(v_4)^2}\right), \tag{D9a}$$

$$\frac{\partial A_1}{\partial E} = \frac{1}{1-\alpha}\left(\frac{u_4}{v_4}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}\left(\frac{v_4\frac{\partial u_4}{\partial E} - u_4\frac{\partial v_4}{\partial E}}{(v_4)^2}\right) \ , \ \frac{\partial A_1}{\partial \kappa} = 0, \tag{D9b}$$

其中

$$u_5 = k_3 \ , \ v_5 = A_0(k_5)^{2-\alpha}, \tag{D9c}$$

$$\frac{\partial u_5}{\partial C} = \frac{\partial k_3}{\partial C} \ , \ \frac{\partial u_5}{\partial E} = \frac{\partial k_3}{\partial E} \ , \ \frac{\partial u_5}{\partial \kappa} = 0, \tag{D9d}$$

$$\frac{\partial v_5}{\partial C} = A_0(2-\alpha)(k_5)^{1-\alpha}\frac{\partial k_5}{\partial C} + (k_5)^{2-\alpha} \ , \ \frac{\partial v_5}{\partial E} = A_0(2-\alpha)(k_5)^{1-\alpha}\frac{\partial k_5}{\partial E} \ , \ \frac{\partial v_5}{\partial \kappa} = 0. \tag{D9e}$$

参考文献

[1]B. C. Sakiadis, 《连续固体表面上的边界层行为：II，连续平面上的边界层》，《美国化学工程师学会期刊》**7**，221–225（1961）。[2]S. J. Weinstein 和 K. J. Ruschak, 《涂层流》，《流体力学年度评论》**36**，29–53（2004）。[3]T. D. Blake、A. Clarke 和 K. J. Ruschak, 《动态润湿的流体动力学辅助》，《美国化学工程师学会期刊》**40**，229–242（1994）。[4]N. V. Ganesh、Q. M. Al-Mdallal、K. Reena 和 S. Aman, 《不同几何形状勃姆石氧化铝纳米颗粒的$h_2o-c_2h_6o_2$ (50:50)基纳米液体的Blasius和Sakiadis滑移流》，《热工程案例研究》**16** （2019），https://doi.org/10.1016/j.csite.2019.100546。[5]I. Azhar 和 A. Tasawar, 《铜（cu）-乙二醇基纳米颗粒在径向伸展片上的传热强化研究》，《亚历山大工程杂志》**71**，13–20（2023）。[6]A. Abbas、I. Ijaz、M. Ashraf 和 H. Ahmad, 《变密度与热辐射对磁流体动力学Sakiadis流的综合影响》，《热工程案例研究》**28** （2021），https://doi.org/10.1016/j.csite.2021.101640。[7]W. K. Usafzai, 《多孔介质中二次纳米流体滑移流与热传输的多个精确解》，《热科学与工程进展》**40**（2023），https://doi.org/10.1016/j.tsep.2023.101759。

[8]P. Mishra、D. Kumar、Y. D. Reddy 和 B. S. Goud，《非线性热生成/吸收作用下非线性拉伸板上的磁流变威廉姆森微极流体流动》，《印度化学学会会刊》100（2023），https://doi.org/10.1016/j.jics.2022.100845。[9]W. K. Usafzai 和 E. H. Aly，《双向移动板微极滑移流与传热的多个精确解》，《热科学与工程进展》37（2023），https://doi.org/10.1016/j.tsep.2022.101584。[10]M. Khazayinejad 和 S. S. Nourazar，《混合纳米流体对磁流体动力学边界层流动中空间分数阶热传导的影响》，《国际热科学杂志》172（2022），https://doi.org/10.1016/j.ijthermalsci.2021.107265。[11]V. G. Fox、T. L. E. Erickson 和 L. T. Fan，《浸没于非牛顿流体中的移动连续平板上的层流边界层》，《美国化学工程师学会期刊》15，327–333（1969）。[12]H. Blasius，《低摩擦液体中的边界层》，《数学与物理杂志》56，1–37（1908）。[13]N. S. Barlow、C. R. Stanton、N. Hill、S. J. Weinstein 和 A. G. Cio，《通过渐近近似解对发散、截断和欠规定幂级数求和》，《季刊力学与应用数学》70，21–48（2017）。[14]N. Naghshineh、W. C. Reinberger、N. S. Barlow、M. A. Samaha 和 S. J. Weinstein，《利用渐近启发的规范函数获得非线性常微分方程收敛级数解》，《IMA应用数学杂志》（2023），doi:10.1093/imamat/hxad006。[15]规范函数是级数展开中常用的自变量。例如，在 $e^x = \sum(x^n/n!)$ 中，x 是规范函数。如果我们写作 $\exp(e^x) = \sum(e^{nx}/n!)$，那么 e^x 就是规范函数[34,35]。[16]R. B. Bird、R. Armstrong 和 O. Hassager，《聚合物流体动力学》（约翰·威利父子出版公司，1987）。[17]P. Schweizer，《预计量涂布方法：优势与局限》（Springer，2022）。[18]E. Glass 和 R. K. Prud’homme，《液膜涂布》，（S. F. Kistler 和 P. M. Schweitzer，纽约：Chapman and Hall，1997）第Coating Rheology: Component Influence on the rheological response and performance in water-borne coatings in roll applications章。[19]A. Pantokratoras，《非牛顿Carreau流体的非相似Blasius和Sakiadis流》，《台湾化学工程师学会会刊》56，1–5（2015）。[20]T. Cebeci 和 H. B. Keller，《求解Falkner-Skan边界层方程的射击法与并行射击法》，J. Comp. Phys. 7，289–300（1971）。[21]E. R. Belden、Z. A. Dickman、S. J. Weinstein、A. D. Archibee、E. Burroughs 和 N. S. Bar-

low, “Falkner-Skan边界层方程的渐近近似解,” 《季刊力学与应用数学》**73**, 36–50 (2020).[22]P. Henrici, “利用幂级数进行自动计算,” JACM**3**, 10–15 (1956).[23]R. V. Churchill, “复变数,” (麦格劳-希尔, 1948) 第VI章：幂级数.[24]C. R. Bataller, “Blasius流与Sakiadis流的数值比较,” MATEMATIKA **26**, 187–196 (2010).[25]R. Fazio, “Sakiadis问题的迭代变换法,” 《计算与流体》 **106**, 196–200 (2015).[26](8)中的某些系数a_n为零；因此，我们使用根值判别法而非比值判别法。[27]C. M. Bender and S. A. Orszag, 《科学家与工程师高级数学方法 I：渐近方法与摄动理论》(麦格劳-希尔, 1978).[28]I. Pop and R. S. R. G. Gorla, “非牛顿流体中连续运动表面的二阶边界层解,” 《国际工程科学杂志》**4**, 313–322 (1990).[29]M. Van Dyke, 《流体力学中的摄动方法》(Academic出版社, 1964).[30]G. A. Baker and P. Graves-Morris,《帕德逼近》 (剑桥, 1996).[31]对于特定的分母和分子次数，帕德近似解的极点可能出现在问题的物理区域内。如果预期精确解在物理区域内有限，则这些帕德逼近被视为有缺陷的。正因如此，我们没有在图8中使用$M = 25$，因为它会导致 $\alpha = 0.6$这一情形下的缺陷逼近。[32]对于 $\alpha = 1$，可以用牛顿流体结果(7)代替(16)；Naghshineh等人给出了(7)的系数[14]。[33]E. Isaacson and H. B. Keller, 《数值方法分析》 (约翰·威利父子出版公司, 纽约, 1966).[34]M. Van Dyke, “流体力学中的摄动方法,” (Parabolic, 1975) 第3.2章：规范函数与阶符号。[35]L. G. Leal, “层流与对流输运过程：标度原理与渐近分析,” (巴特沃思-海涅曼, 1992) 第6.B章：渐近展开——一般性考虑。