arXiv:2303.04708v1 [physics.class-ph] 8 Mar 2023

通过波锁定实现带隙拓宽和谐振质量减小

Luca Iorio、Jacopo Maria De Ponti、Alberto Corigliano 和 Raffaele Ardito米兰理工大学
土木与环境工程系，意大利米兰 *Leonardo da Vinci* 广场 *32* 号，邮编 *20133*

（*电子邮箱：raffaele.ardito@polimi.it。）

由局部谐振阵列构成的弹性超材料已被开发为一种有效方法，可为弹性波或声行波产生带隙。其原理是在结构中形成驻态，使波局部化并发生部分反射。另一种更简单的带隙生成方法是采用声子晶体，其产生的带隙源于行波的周期性反射和相位抵消。本文提出了一种不同的超材料结构，通过耦合两个反向传播模态来产生带隙。数值与实验结果将表明，这种超材料能够以更低的附加质量产生更宽的带隙，从而有利于实现轻质结构。

近几十年来，光子学和声子学领域对超材料的研究与开发已成为研究人员感兴趣的课题[1–5]。这些新型结构之所以引人关注，是因为即使与结构相互作用的波长远大于晶格尺寸，它们仍具有内在的波操控能力。这使其能够实现振动衰减、波导引、波局域化，甚至滤波等新特性[6–11]。在振动衰减方面，大量研究已展示了如今所称的局部谐振材料的潜力与优势[4,12–15]。这类结构通常由主波导构成，主波导可以是一维的（梁）、二维的（板）或三维的（块体固体），其中布置有局部谐振结构。这些局部结构能够通过局域化穿过的能量，与行波相互作用，并在与其自身谐振相对应的频率处形成带隙。分析评估也表明，这些局部结构所产生的带隙范围，主要取决于局部谐振系统（通常为外围附加件）与主波导结构之间的质量比。此外，衰减效率很大程度上取决于所采用的单元数量，以及谐振器与主体结构之间的相对刚度[15,16]；后一特性还可实现超材料框架中的波选择性滤波[17]。开发能够实现奇异波操控能力的新型超结构，对于构建新型智能结构至关重要。新的操控效应可以改变所引入带隙的强度、宽度，甚至性质，从而为开发更加高效的系统提供手段，使其能够排斥、局域化甚至抑制不需要的外部或内部振动。

本文提出并评估了一种超材料梁，它利用所谓的锁定效应[18–22] 产生带隙。这种不同的物理现象若得到恰当实现，可为特定结构带来新的优势。例如，正如后文所示，与简单的局域共振结构相比，带隙可大幅拓宽，同时减少额外增加的侧向质量。在所提出的设计中，所分析的带隙由两个反向传播模态（弯曲模态和扭转模态）耦合产生；侧向谐振器的位置偏移使这两个模态得以相互作用。这种结构可显著降低为结构增加质量所需的成本，同时还具有使超材料框架更轻的优点

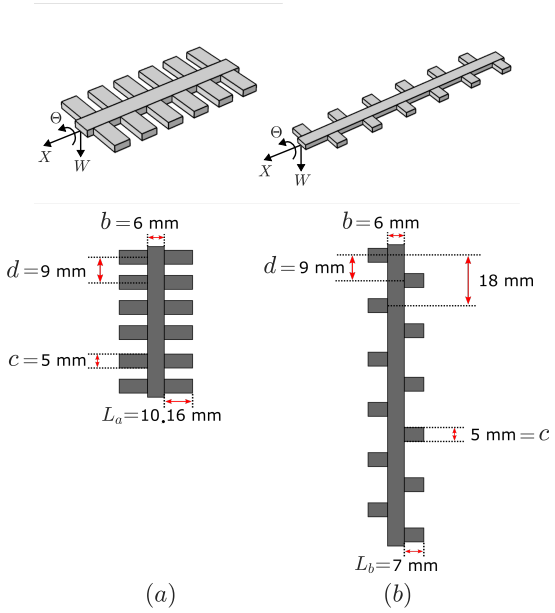
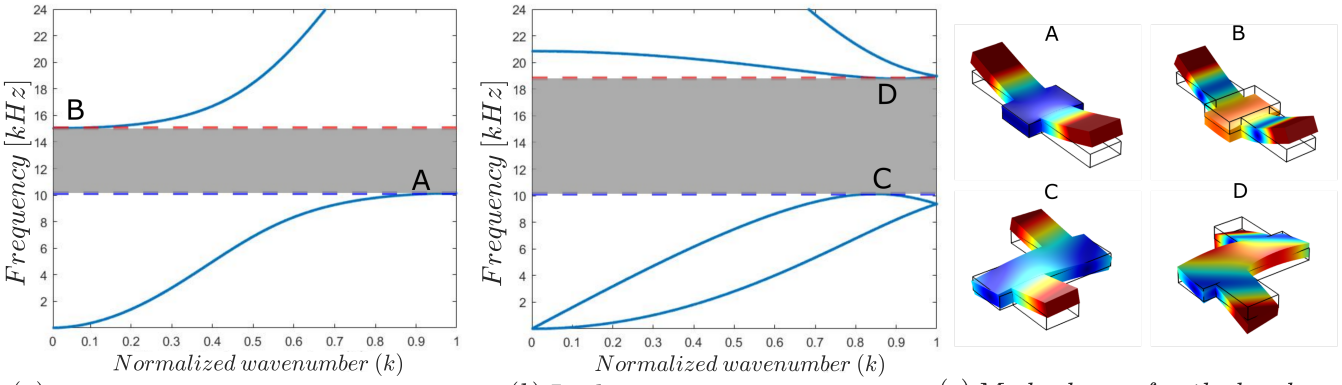


图1. 本文分析的几何结构：局域共振几何结构 (a) 和锁频几何结构(b)，以及各自的垂直高度。两个系统的厚度均为 $h = 2$ mm。

。这一现象也可以从另一个角度来考察，即考虑惯性放大[23]。事实上，对于局域共振结构，惯性由弯曲引起的平移运动驱动；而在锁定结构中，扭转引入的旋转贡献会进一步增强这一效应。

如上所述，该超材料形成的带隙源于在主波导梁中引入锁定效应。锁定效应是由两个具有不同极化方向的反向传播波耦合而产生的物理现象。这种耦合负责在第一布里渊区内至少产生一个群速度为零的点以及一个带隙。带隙是通过一种波模态与另一种传播方向相反的波模态之间循环进行的能量转换而获得的。当频率高于与群速度为零的点相对应的频率时，这将导致传播波能量被完全反射[20,22]。该



(a) Local resonance dispersion relation (b) Locking dispersion relation (c) Mode shapes for the band gap limiting frequencies

图2. a）局域共振几何结构的色散关系。b）锁频几何结构的色散关系。带隙的开启和闭合以彩色虚线表示，浅灰色区域则突出显示带隙区。c）展示与突出显示的频率对应的振型。

局域共振是通常设计的被动超材料的基础；另一方面，它源于传播模态与驻定模态之间的耦合。在本文中，我们比较了两种表现出上述物理现象的相似装置。在这两种情况下，波导均由欧拉-伯努利梁构成，其上以悬臂梁的形式安装谐振器。为实现经典的局域共振，谐振器相对于梁的轴线对称布置，见图1(a)；相反，通过在每个单元的单侧交替引入谐振器，可以实现波锁定，见图1(b)。关于评估和预测由这两种不同物理现象产生的带隙的解析建模，已有研究进行了讨论[22,24]，并采用相关方程使两个带隙的开启相匹配。更具体地说，为简化起见，我们认为谐振器的运动由悬臂梁的第一本征模态主导。因此，每个谐振器的动力平衡均根据等效弯曲刚度 k 和参与质量m建立。每个谐振器连接点处的反作用力F_n 和反作用力矩M_n 表示为：

$$F_n = k\left[\psi_n - \left(w_n + (-1)^n \theta_n \frac{b+\hat{L}}{2}\right)\right]$$
$$M_n = F_n \frac{\hat{L}}{2}, \tag{1}$$

其中： $\psi_n = \psi_n(t)$ 是描述第n个谐振器运动的自由度；$w_n = w(nd,t)$ 是波导在第n个谐振器对应位置处的横向位移； $\theta_n = \theta(nd,t)$ 是波导在第n个谐振器对应位置处的扭转转角。每个谐振器的运动方程写为：

$$\frac{\partial^2 \psi_n}{\partial t^2} + \omega_0^2\left[\psi_n - \left(w_n + (-1)^n \theta_n \frac{b+\hat{L}}{2}\right)\right] = 0. \tag{2}$$

谐振器的本征频率记为 $\omega_0 = \sqrt{k/m}$。

对于这两种器件，波导的运动方程采用不同形式。对于经典局域共振的情况，由于谐振器呈对称分布，扭转转角为零，而横向平衡方程则包含每个单元中两个谐振器的作用：

$$EI\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \rho A\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} 2F_n \delta(x-nd)$$
$$\theta = 0. \tag{3}$$

在上述方程中，E 是杨氏模量， ρ 是波导材料的质量密度；A 和I 分别表示其横截面的面积和惯性矩； δ 是狄拉克δ函数。

在波锁定的情况下，非对称构型会引入与扭转行为的耦合，因此运动方程为：

$$EI\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \rho A\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} F_n \delta(x-nd)$$
$$GJ\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} - \rho I_p \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = -\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} (-1)^n F_n \frac{b+\hat{L}}{2}\delta(x-nd). \tag{4}$$

其中：切线模量 是材料的切线模量；I_P 和扭转刚度 分别是横截面的极惯性矩和（主要）扭转刚度。

方程组(1)、(2)、(3)以及方程组(1)、(2)均可采用(4)面波展开法（PWEM）求解，具体方法已在先前的论文中说明[22]。解析解有助于设计带隙开启频率相同的器件。如图1所示，我们假设波导具有相同的横截面，且元胞尺寸相同d 。侧向谐振器的横截面

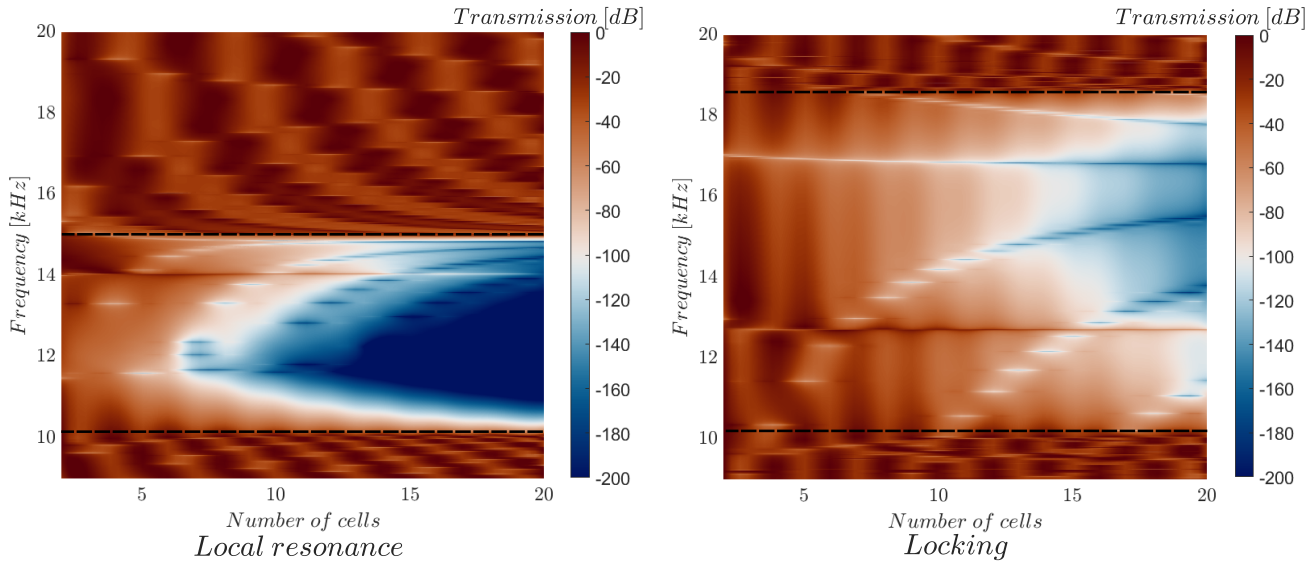


图3. 评估两种超材料在带隙区域内的衰减效果，并改变所考虑的单元数量。黑色水平虚线表示带隙理论上的开启频率和闭合频率

也相同，但长度不同。我们为呈现波锁定的系统设定一个预定义值L_b，并通过考察解析色散曲线，求得L_a的取值，以匹配带隙开启频率。结果表明，在波锁定情况下，谐振器比经典谐振情况下短31.10%。

下面报告的数值分析均采用商用软件 COMSOL Multyphysics 进行，并对图1所示器件进行三维建模。两种构型所使用的材料均为铝（E =70 GPa， $\rho = 2710$ kg/m^3， $\nu = 0.33$）。

图2给出了两种几何结构的色散关系。在锁定情况下，第一弯曲模态与第一扭转模态之间存在明显耦合，并由此产生带隙。这种耦合是通过改变谐振器的位置、破坏单元的对称性而实现的。与声子晶体中的局域共振或布拉格散射相比，锁定效应的设计更加复杂，因为需要对单元几何结构（谐振器、单元长度等）进行精细调整，使得在倒易空间中，两个反向传播模态之间存在可解除的偶然简并。这对于低频率而言尤其难以实现。色散关系表明，两种几何结构的带隙开启频率相同（10156 Hz），而闭合频率则明显不同：对于局域共振几何结构，闭合频率为15012 Hz；对于锁频几何结构，闭合频率为18788 Hz。随后对带隙中隙比进行评估，以获得一个避免频率依赖性的无量纲参数。公式如下：

$$BG = \frac{2(f_{top} - f_{bot})}{f_{top} + f_{bot}} \cdot 100 \qquad (5)$$

其中，f_{bot} 和f_{top} 是界定带隙的频率。由方程（5）可知，局域共振情况的带隙中隙比为 38.56%，而锁定时为 59.65%。鉴于每个单元的总附加质量减少了 31.10%，这表明在减少结构附加质量的同时，形成更宽带隙的效能有所提升。这些结果可以通过考虑两个系统中实际参与谐振的质量不同来解释。局域共振中，只有侧向谐振器参与谐振运动，实际上它们是各模态中唯一的谐振质量。另一方面，锁定情况下，参与所评估模态运动的不仅有侧向谐振器的质量，还有整个结构的质量。

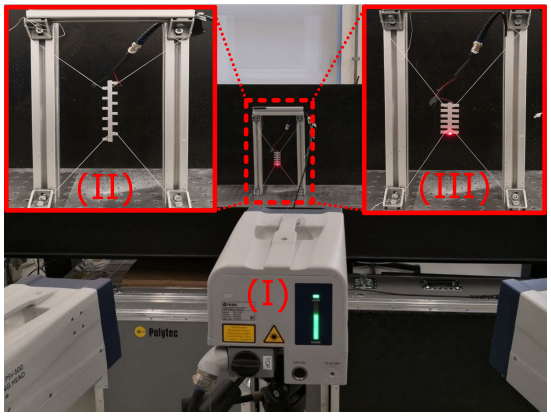


图 4. 实验装置照片：(I) 标示测振仪三个探头之一，(II) 为锁定试样，(III) 为局域谐振试样。

图3现报告了为评估带隙有效性而开展的分析。通过在频域分析中进行频率扫描，评估超材料在不同频率下的衰减能力。将其与对单元数量进行的第二次扫描相结合

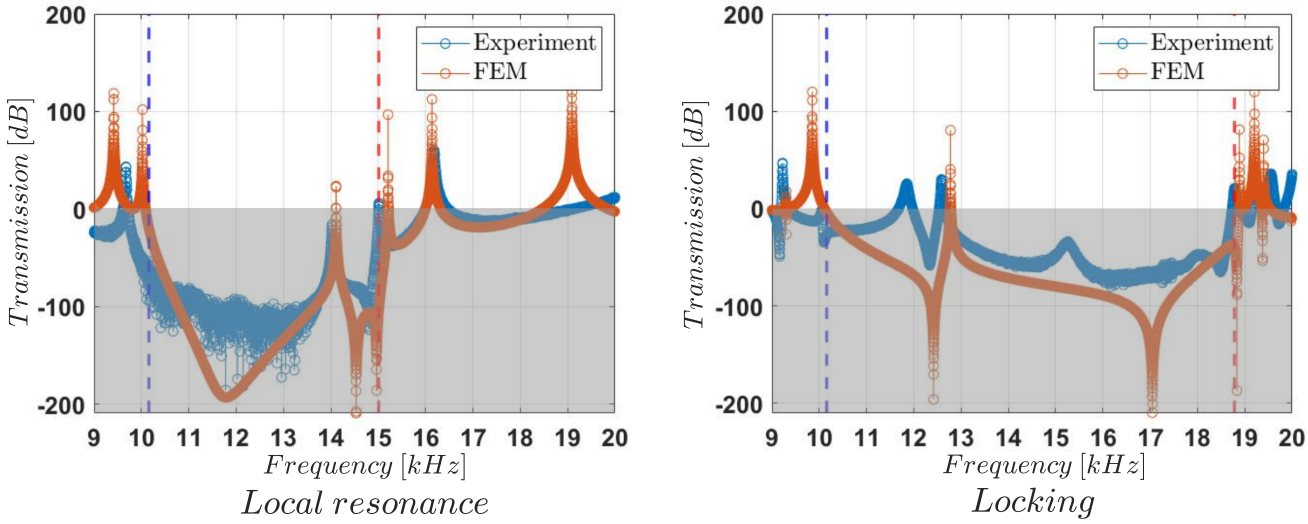


图 5. 两种结构在相同频率扫描条件下的传输评估（单位：dB）。我们报告了实验测得的结果以及采用有限元方法获得的数值结果。

可以清晰地表明带隙所在的位置，以及获得有效衰减所需的单元数量。我们得出结论：对于相同数量的单元，局部共振材料的衰减能力明显高于锁定情况。这意味着，尽管带隙可能更宽，但衰减效率却较低。正如先前研究[15]所述，对于较少数量的单元，带隙比色散关系所定义的带隙更宽（尽管衰减几乎可以忽略不计）；随后，随着单元数量增加，带隙逐渐变窄，其开启频率和闭合频率也随之确定。锁定构型同样如此，但似乎其实现带隙稳定性所需的单元数量更少，因为在八个单元时边界已经得到明确定义。

为验证通过有限元仿真获得的结果，还对实际试样进行了实验。试样通过激光切割具有所需厚度的铝板制成。经分析初步数值结果后确定，满足所需性能的基本单元数量为六个。实验装置如下：将试样悬挂在垂直支架上，以实现自由端边界条件。在一端粘贴PZT-5H压电贴片（E_P =61 GPa，$\nu_p = 0.31$，$\rho_p = 7800\ \mathrm{kg/m^3}$，介电常数为$\varepsilon_{33}^T/\varepsilon_0 = 3500$，压电系数为 $\varepsilon_{31} = -9.2\mathrm{C/m^2}$），用于施加弯曲激励。随后，借助Polytec 3D扫描激光多普勒测振仪（扫描激光多普勒测振仪），提取超材料梁中心线各点的面外速度，以评估衰减特性。图4展示了实验室装置和试样。图5给出了两种超结构的结果，并将其与相应的有限元仿真结果进行了对比。显然，数值仿真预测的带隙同样出现在制备的试样中。不过，二者之间仍存在一些差异，主要表现为有限元模型与实际试样之间的差异，这主要是由于共振模态的存在。这可能归因于试样中的微小缺陷、非理想的边界条件，以及压电贴片的存在。

总之，本文提出了一种隔振超材料梁的设计理念。分析表明，减少质量并打破谐振器位置的对称性，可以形成更宽、但效率略低的带隙。即使结构采用的单元数量有限，这种方法也同样有效。这种衰减能力降低的代价是附加质量显著减少。此外，与局域共振方案相比，单元几何形状受到更多限制，因为它需要更大的单元，而且模态设计更为复杂；必须以恰当的方式弯曲模态，才能产生锁定效应，进而形成带隙。对这些锁定设计的进一步研究，有望推动新一代金属晶格和超材料框架的发展，进一步促进隔振框架的进步。

致谢

谨此感谢 H2020 FET-proactive 项目 project MetaVEH（资助协议编号：952039）提供的支持。

数据可用性声明

本研究结果所依据的数据可在合理请求后向通讯作者获取。

[1]J. B. Pendry，“负折射造就完美透镜”，Physical Review Letters **85**, 3966 (2000年)。[2]J. B. Pendry、A. J. Holden、D. J. Robbins 和 W. Stewart，“导体产生的磁性与增强的非线性现象”，IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques**47**, 2075–2084 (1999)。

[3]R. V. Craster 和 S. Guenneau，声学超材料：负折射、成像、透镜效应与隐身，第166卷（Springer Science & Business Media，2012年）。[4]Z. Liu、X. Zhang、Y. Mao、Y. Zhu、Z. Yang、C. T. Chan 和 P. Sheng，“局域共振声学材料”，《科学》**289**, 1734–1736 (2000年)。[5]A. O. Krushynska、D. Torrent、A. M. Aragón、R. Ardito、O. R. Bilal、B. Bonello、F. Bosia、Y. Chen、J. Christensen、A. Colombi、S. A. Cum- mer、B. Djafari-Rouhani、F. Fraternali、P. I. Galich、P. D. Garcia、J. Groby、S. Guenneau、M. R. Haberman、M. I. Hussein、S. Janbaz、N. Jiménez、A. Khelif、V. Laude、M. J. Mirzaali、P. Packo、A. Palermo、Y. Pennec、R. Picó、M. R. López、S. Rudykh、M. Serra-Garcia、C. M. Sotomayor Tor- res、T. A. Starkey、V. Tournat 和 O. B. Wright，“纳米声子学以及弹性、声学和机械超材料的新兴主题：综述”，《纳米光子学》**12**, 659–686 (2023年)。[6]V. Laude，声子晶体（Walter de Gruyter GmbH，德国柏林，2015年）。[7]M. Alshaqaq 和 A. Erturk，“用于宽带振动衰减和能量采集的梯度多功能压电超结构”，《智能材料与结构》**30**, 015029 (2020年)。[8]J. M. De Ponti，用于能量采集的梯度弹性超材料（Springer，2021年）。[9]J. M. De Ponti、L. Iorio、E. Riva、F. Braghin、A. Corigliano 和 R. Ardito，“通过梯度谐振器的弯曲模态增强弹性梁中弯曲波的能量采集”，《材料前沿》**8** (2021年)。[10]L. D’Alessandro、A. O. Krushynska、R. Ardito、N. M. Pugno 和 A. Corigliano，“匹配周期超材料和非周期超材料带隙的设计策略”，《科学报告》**10**, 16403 (2020年)。[11]D. Colquitt、A. Colombi、R. Craster、P. Roux 和 S. Guenneau，“地震超表面：亚波长谐振器与瑞利波的相互作用”，《固体力学与物理学杂志》**99**, 379–393 (2017)。[12]H. Sun、X. Du 和 P. F. Pai，“用于宽带振动吸收的超材料梁理论”，《智能材料系统与结构杂志》**21**, 1085–1101 (2010)。[13]D. Yu、Y. Liu、H. Zhao、G. Wang 和 J. Qiu，“具有两个自由度局域共振结构的欧拉-伯努利梁中的弯曲振动带隙”，《物理评论B》**73**, 064301 (2006)。[14]Y. Xiao、J. Wen、D. Yu 和 X. Wen，“带有周期性附加振动吸收器的梁中的弯曲波传播：带隙行为与带隙形成机制”，《声学与振动杂志》**332**，867– 893（2013）。[15]C. Sugino、S. Leadenham、M. Ruzzene 和 A. Erturk，“局域共振有限弹性超材料中的带隙形成机制”，《应用物理学杂志》**120**，134501（2016）。[16]M. I. Hussein、M. J. Leamy 和 M. Ruzzene，“声子学材料与结构的动力学：历史渊源、近期进展与未来展望”，《应用力学评论》**66**（2014）。[17]J. M. De Ponti、E. Riva、F. Braghin 和 R. Ardito，“用于选择性波过滤与偏振控制的弹性三维超框架”，《应用物理快报》**119**，211903（2021）。[18]J. L. du Bois、N. A. Lieven 和 S. Adhikari，“局域化与曲线回避：模态相互作用的另一种视角”，载于第*27*届国际模态分析会议论文集（2009）。[19]P.-T. Chen 和 J. Ginsberg，“特征值轨迹回避与特征函数参数灵敏度之间的关系”，《振动与声学杂志》**114**，141–148（1992）。[20]B. R. Mace 和 E. Manconi，“波动与色散现象：回避、锁定与强耦合效应”，《美国声学学会杂志》**131**，1015–1028（2012）。[21]G. Trainiti、J. Rimoli 和 M. Ruzzene，“周期起伏梁和板中的波传播”，《国际固体与结构杂志》**75-76**，260–276（2015）。[22]J. M. De Ponti、L. Iorio、E. Riva、R. Ardito、F. Braghin 和 A. Corigliano，“通过梯度弹性波导实现选择性模态转换和彩虹俘获”，《应用物理评论》**16**，034028（2021）。[23]R. Zaccherini、A. Colombi、A. Palermo、H. R. Thomsen 和 E. N. Chatzi，“用于振动衰减的应力优化、相反手性惯性放大超结构”，arXiv 预印本 arXiv:2111.08594（2021）。[24] E. A. Skelton、R. V. Craster、A. Colombi 和 D. J. Colquitt，“多物理场超楔：流体负载弹性板上的梯度阵列，以及彩虹俘获和模态转换的力学类比”，《新物理学杂志》**20**，053017（2018）。