洛伦兹球的概率方法

ZAKHAR KABLUCHKO、JOSCHA PROCHNO 和 MATHIAS SONNLEITNER

摘要

我们提出一种概率方法，用于研究有限维洛伦兹数列空间 $\ell_{q,1}^n$ 的单位球 $\mathbb{B}_{q,1}^n$ 的体积与几何性质。更具体地说，我们证明，在 $\mathbb{R}^n$ 中体积归一化的洛伦兹球上均匀分布的随机向量 $X^{(n)}$ 的经验分布弱收敛于一个具有显式密度、支撑紧且对称的概率分布；由此，对于 $X^{(n)}$ 的任意固定数量 $k \in \mathbb{N}$ 个坐标，我们得到弱版的 Poincaré–Maxwell–Borel 原理，当 $n \to \infty$ 时成立。此外，我们证明了 $X^{(n)}$ 的最大坐标的中心极限定理，这表明其行为与 ℓ_q^n 球的情形大不相同；在后一情形中，极限分布为冈贝尔分布。最后，我们证明了一个 Schechtman-Schmuckenschläger 型结果，该结果涉及体积归一化的洛伦兹球与 ℓ_p^n 球之交集的渐近体积。

关键词。渐近体积、中心极限定理、测度集中、凸体、洛伦兹空间、最大熵原理、庞加莱–麦克斯韦–玻尔原理**MSC 分类号**。主要分类号：46B09、52A23、60F05；次要分类号：46B06、46B20、46B45、94A17

arXiv:2303.04728v1 [math.FA] 8 Mar 2023

1 引言

T近几十年来，人们揭示了高维凸
b体与概率论之间的深刻联系，且这两个领域相互促进、彼此受益。概率方法
n当人们将 $\mathbb{R}^n$中的一个（高维）凸体视为概率空间时，自然会用到概率方法；也就是说，该凸体是一个紧
a且内部非空的凸集，并在赋予典范
Borel σ-域与归一化均匀测度。
P最著名的凸体族或许是经典有限
d维序列空间 $\ell_p^n (1 \le p \le \infty)$ 的单位球。这一参数化的凸体族可以说是
m几何泛函分析中研究最多的对象之一，其解析性质和几何性质
q如今已相当清楚。在许多情况下，正是前面提到的概率观点
v使我们能够理解空间维数n 趋于
i无穷大，因为均匀分布有一种相当简单的概率表示
$\mathbb{B}_{np}$。这种表示使我们能够从在 $\mathbb{B}_p^n$ 上均匀分布的随机向量出发，从而也能从坐标相依的随机向量（当 $p < \infty$ 时）出发，得到一个其各分量按照所谓的 p-高斯分布独立同分布的随机向量。这极大地简化了计算，因此是研究 ℓ_p^n 球时使用的关键工具之一。Schechtman 和 Zinn [56],，以及独立地，Rachev 和 Rüschendorf [51], 证明，若 $X = (X_1, \dots, X_n)$

在 $\mathbb{B}_p^n$ 上均匀随机分布，则

$$X \overset{\mathrm{d}}{=} U^{1/n} \frac{Y}{\|Y\|_p}, \tag{1}$$

其中U在 $[0,1]$ 上服从均匀分布，而$Y = (Y_1, \ldots, Y_n)$与U相互独立，其中$Y_1, \ldots, Y_n$相互独立且同分布，其在 $\mathbb{R}$ 上的勒贝格密度为

$$f_p(x) := \begin{cases} \frac{1}{2p^{1/p}\Gamma(1+\frac{1}{p})} e^{-|x|^p/p} & : 1 \le p < \infty \\ \frac{1}{2}\mathbb{1}_{[-1,1]}(x) & : p = \infty. \end{cases}$$

此处及下文中，$\mathrm{d}=$表示分布相等。此前的结果在 [7] 中推广到了与 ℓ_p^n 球相关的更广泛的分布类别，其中包括均匀分布和关于锥概率测度的分布作为特例。如上所述，所给出的表示及其推广常用于渐近分析这些单位球的几何和体积性质；例如可参见 [3, 4, 22, 30, 32, 46, 47, 55, 57] 及综述文章 [50]。

对 ℓ_p 空间（及其函数空间对应形式）的一种自然且常被研究的推广，是奥尔利奇空间类；它不仅是泛函分析 [12, 40], 调和分析 [25] 和优化[38], 中的经典研究对象。有限维奥尔利奇空间 $\ell^n{}_M$ $\mathbb{R}^n$ 赋以范数

$$\|(x_i)_{i=1}^n\|_M := \inf\left\{\rho > 0 : \sum_{i=1}^n M\left(\frac{|x_i|}{\rho}\right) \le 1\right\},$$

其中$M:$ $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 是对称、凸的，并且满足$M(0) = 0$ 和$M(x) > 0$ ，对$x \neq 0$ 成立（当$M(t) = |t|^p$时，我们有 $\|\cdot\|_M = \|\cdot\|_p$）。与 ℓ_p^n空间的情形一样，奥尔利奇空间属于有限维1-对称巴拿赫空间这一重要类别，即具有一组基$e_1, \ldots,$ $e_n \in$的空间$(X, \|\cdot\|_X)$，其中X满足

$$\left\| \sum_{i=1}^n x_i e_i \right\|_X = \left\| \sum_{i=1}^n \varepsilon_i x_{\pi(i)} e_i \right\|_X$$

对所有$x_1, \ldots,$ $x_n \in \mathbb{R}$、所有符号 $\varepsilon_1,$ $\ldots,$ $\varepsilon_n \in \{-1, 1\}$，以及数列$\{1, \ldots, n\}$的所有置换 π，上述关系均成立；奥尔利奇空间在泛函分析文献中得到了深入研究，相关讨论可参见 [24, 34, 39,49, 62] 及其中引用的文献。尝试利用 Schechtman-Zinn 概率表示（1）将针对空间 ℓ_p^n 得到的结果推广或一般化，很快便会陷入僵局，因为对于奥尔利奇空间$\ell^n{}_M$ 的单位球 $\mathbb{B}^n{}_M$，目前尚无此类表示。因此，关于 $\mathbb{B}_p^n$ 渐近结构的结果（如上所述）的推广，在相当长一段时间内都难以实现。最近，Kabluchko 和 Prochno [31], 在非相互作用粒子的框架下，运用源自统计力学的最大熵思想，推导出了奥尔利奇空间中 Schechtman-Zinn 型表示的一个渐近 版本，将奥尔利奇球上的均匀分布与势函数由奥利奇函数给出的吉布斯分布联系起来。这一联系使得人们能够在奥尔利奇球的一般框架下获得许多进一步的结果，例如可参见 [2, 8, 21, 28, 35]。

与奥尔利奇空间并列，空间广义化的第二个自然类别是洛伦兹空间。George Lorentz 于20世纪50年代引入了这一概念 [41, 42]。事实上，早在此之前人们就已观察到

马尔琴凯维奇在 [43] 指出，勒贝格空间不足以刻画L^p空间上算子的精细性质。自引入以来，洛伦兹空间已在数学的众多领域中得到广泛应用，例如逼近理论 [16], 、调和分析 [23], 、插值理论 [9], 和信号处理 [20]。我们关注的是有限维洛伦兹空间$\ell^n_{q,p}$，其中 $1 \le p \le q \le \infty$，它不过是配备了如下范数的 $\mathbb{R}^n$

$$\|(x_i)_{i=1}^n\|_{q,p} := \Big(\sum_{i=1}^n |i^{1/q-1/p} x_i^*|^p\Big)^{1/p},$$

其中$x_1^*, \dots, x_n^*$是数值 $|x_1|, \dots, |x_n|$的非递增重排（当$q = p$时，我们有 $\|\cdot\|_{q,p} = \|\cdot\|_p$）。这些空间同样属于重要的1-对称巴拿赫空间类，在泛函分析文献中也得到了深入研究，例如见 [5, 18, 26, 27, 48, 53, 54, 60, 61, 64]。事实上，这些空间中可能出现意想不到的现象；例如，正如 [19], 所证明的，它们是一个关于熵数插值行为的猜想的反例，而该猜想对 ℓ_p 空间成立。关于洛伦兹空间$\ell^n_{q,p}$中单位球 $\mathbb{B}^n_{q,p}$ 的渐近体积与几何结构的概率方法研究，其风格与上述关于 $\mathbb{B}^n_p$ 或 $\mathbb{B}^n{}_M$ 的研究相同，但相关结果在文献中完全缺失。原因之一或许是，范数定义中出现的非递增重排使得任何分析都相当棘手。

因此，我们论文的动机有两方面：一方面，首次发展一种概率方法；另一方面，将其用于研究洛伦兹空间的一些渐近性质 $\ell^n_{q,p}$。鉴于有关以概率方法研究 ℓ^n_p 或更一般的$\ell^n{}_M$ 空间及其单位球的文献浩如烟海，这只是解决许多自然问题的第一步，例如中心极限定理、条件极限定理、中偏差与大偏差 [3, 4, 21, 22, 30, 32, 36],、渐近体积比和薄壳测度集中 [2, 31], 、坐标的渐近独立性 [8] 或渐近薄壳结果 [35], ， 仅举数例。

2 主要结果

现在我们将介绍主要结果，先给出洛伦兹球上均匀分布的概率方法，再介绍其在几何性质和体积性质方面的应用。结果仅适用于参数为$p = 1$ 和 $1 < q \le \infty$的洛伦兹球；不过，我们也提出一个猜想，并通过启发式论证说明在一般情形下预期会有怎样的渐近概率表示。

我们将用以下符号表示

$$\widetilde{\mathbb{D}}^n_{q,p} := n^{1/q}\mathbb{B}^n_{q,p} = \Big\{x \in \mathbb{R}^n \colon \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \Big(\frac{i}{n}\Big)^{p/q-1} |x_i^*|^p \le 1\Big\}$$

对于$q < \infty$ 和

$$\widetilde{\mathbb{D}}^n_{\infty,1} := \log(n+1)\mathbb{B}^n_{\infty,1} = \Big\{x \in \mathbb{R}^n \colon \frac{1}{\log(n+1)}\sum_{i=1}^n \frac{1}{i}|x_i^*| \le 1\Big\}.$$

对于 $q = \infty$，归一化单位球渐近而言在相差常数因子的意义下具有勒贝格体积 1。事实上，这可由巴拿赫空间中单位球体积的经典结果推出

这项结果由 Schütt [59] 给出：$\mathrm{vol}_n(\mathbb{B}^n_{q,1})^{1/n} \asymp_q n^{1/q}$；而如 [18, 定理 7], 所示，对于 $q = \infty$，我们有 $\mathrm{vol}_n(\mathbb{B}^n_{\infty,1})^{1/n} \asymp \log(n+1)^{-1}$；其中 $\asymp_q$ 表示在仅依赖于 q 的常数因子范围内等价，而 $\asymp$ 表示在绝对常数因子范围内等价。

以下随机表示构成了我们结果的基础，本身也具有独立的研究价值。它为研究 $p = 1$ 情形下洛伦兹球的渐近结构提供了概率论切入点。

定理 A. 设 $1 \le q \le \infty$, $n \in \mathbb{N}$，并假设 $X^{(n)}$ 在 $\mathbb{B}^n_{q,1}$ 上均匀分布。那么

$$X^{(n)} \overset{\mathrm{d}}{=} \left(\varepsilon_1 \frac{\sum_{j=\pi(1)}^{n} \kappa_q(j)^{-1} E_j}{\sum_{j=1}^{n+1} E_j}, \dots, \varepsilon_n \frac{\sum_{j=\pi(n)}^{n} \kappa_q(j)^{-1} E_j}{\sum_{j=1}^{n+1} E_j} \right),$$

其中 $E_1, \dots, E_{n+1}$ 是标准指数随机变量，$\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ 在 $\{-1, 1\}^n$ 上均匀分布，π 在由 $\{1, \dots, n\}$ 的置换构成的对称群 S_n 上均匀分布；对于 $j \in \{1, \dots, n\}$,

$$\kappa_q(j) := \sum_{i=1}^{j} i^{1/q-1}.$$

所有随机对象彼此独立。

根据定理 A，对于 $q < \infty$，在 $\widetilde{\mathbb{D}}^n_{q,1} = n^{1/q} \mathbb{B}^n_{q,1}$ 上均匀分布的随机向量的第一个（或任意一个）坐标，其分布等同于

$$\varepsilon_1 \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=u_n}^{n} \frac{n^{1/q}}{\kappa_q(i)} E_i}{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n+1} E_i}, \tag{2}$$

其中，u_n 在 $\{1, \dots, n\}$ 上服从均匀分布，而 ε_1 在 $\{-1, 1\}$ 上服从均匀分布。

注 1. 注意，$q = 1$ 的特殊情形对应于 ℓ_1^n 球，并且与以下众所周知的事实一致：n 个相互独立的标准指数随机变量的次序统计量分布为

$$\frac{E_n}{n}, \frac{E_n}{n} + \frac{E_{n-1}}{n-1}, \dots, \sum_{j=1}^{n} \frac{E_j}{j}$$

从最小的（n^{th}）次序统计量开始，到最大的（1st）次序统计量为止（参见例如 [14, 式 (2.5.5)]）。

作为定理 A 证明的推论，我们可以得到体积半径的如下精确渐近性质；通过细化 [18] 中的计算，也可以得到以下结果。

推论 1。设 $1 \le q \le \infty$。当 $n \to \infty$ 时，有

$$\mathrm{vol}_n(\mathbb{B}^n_{q,1})^{1/n} \sim \begin{cases} \frac{2}{q} e^{1/q} n^{-1/q} & : 1 \le q < \infty, \\ 2(\log n)^{-1} & : q = \infty. \end{cases} \tag{3}$$

在下一个定理中，我们证明经验分布的弱收敛结果。该结果还用于证明随后给出的单个坐标的渐近分布。

定理 B. 令 $1<q\le\infty$，并假设对每个 $n\in\mathbb{N}$，$\widetilde{X}(n)=(\widetilde{X}(n)_1,\dots,\widetilde{X}(n)_n)$ 是一个随机向量，在 $\mathbb{D}_{q,1}^n$ 上均匀分布。于是，对于每个有界连续函数 $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$，我们有

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(\widetilde{X}_i^{(n)}) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} \int_{\mathbb{R}} f(x)\,\nu_{q,1}(\mathrm{d}x),$$

其中 $\nu_{q,1}$ 是 $\mathbb{R}$ 上具有勒贝格密度 f_q 的对称概率测度，其中：$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 给出为

$$f_{q,1}(x) := \frac{1}{2}\begin{cases} q(1-(q-1)|x|)^{1/(q-1)}\mathbb{1}_{[-\frac{1}{q-1},\frac{1}{q-1}]}(x) & : q<\infty \\ \mathbb{1}_{[-1,1]}(x) & : q=\infty. \end{cases}$$

基本上，由于坐标的可交换性，根据定理 B，任意固定选择的 $k\in\mathbb{N}$ 个坐标，在环境空间的维数趋于无穷时，其渐近分布为 $\nu_{q,1}$ 的 k 重乘积。我们将得到归一化洛伦兹球的以下弱庞加莱–麦克斯韦–玻尔原理。

推论 2。令 $1<q\le\infty$，并对每个 $n\in\mathbb{N}$ 假设 $\widetilde{X}(n)=(\widetilde{X}(n)_1,\dots,\widetilde{X}(n)_n)$ 在 $\mathbb{D}_{q,1}^n$ 上均匀分布。对于每个 $k\in\mathbb{N}$，并令 $\nu_{q,1}$ 如定理 B 中所述，对于任意有界连续函数 $f\colon \mathbb{R}^k\to\mathbb{R}$，我们有

$$\mathbb{E}\big[f(\widetilde{X}_1^{(n)},\dots,\widetilde{X}_k^{(n)})\big] \xrightarrow{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^k} f(x)\,\nu_{q,1}^{\otimes k}(\mathrm{d}x),$$

也就是说，$(\widetilde{X}(n)_1,\dots,\widetilde{X}(n)_k)$ 依分布收敛到向量 $Y(k)=(Y_1,\dots,Y_k)\sim \nu_{q,1}^{\otimes k}$。

注 2. 情形 $q=1$ for which $\mathbb{B}_1^n=\mathbb{B}_{1,1}^n$ 已为人所知 [51]，且在此情形下，渐近坐标分布为双侧指数分布。考虑 $q_N:=1+1/N\to 1$，可见这与我们的结果相一致，这是由极限行为所致

$$f_{q_N}(x)=\frac{1+1/N}{2}(1-|x|/N)^N\mathbb{1}_{[-N,N]}(x)\xrightarrow{N\to\infty}\frac{1}{2}\exp(-|x|),\quad x\in\mathbb{R}.$$

注 3. 从 $\mathbb{B}_{q,1}^n$ 和 $\mathbb{B}_q^n$ 的体积归一化版本中均匀随机选取向量，其渐近概率行为的一个显著差异是：前一种情形下，单个坐标的渐近分布具有紧支撑；而后一种情形下，支撑无界（参见 (1) 以及q-高斯分布的定义）。

与归一化 ℓ_q^n 球中均匀随机向量的最大范数呈现冈贝尔波动 [32, 定理 1.1 (c)], 不同，对于洛伦兹球，当 $q>2$时，我们有一个中心极限定理。也就是说，尽管两种情况下体积半径与维数的关系相同，但其概率行为却截然不同。介于两者之间，即当$q\in(1,2]$, 时，我们有一种不同类型的极限定理，似乎在冈贝尔分布与正态分布之间起到插值作用。

定理 C. 设 $1\le q<\infty$、$r\in(0,\infty)$，并假设对每个$n\in\mathbb{N}$，$\widetilde{X}(n)$在$\widetilde{\mathbb{D}}_{q,1}^n$上均匀分布。则有：

(i) 对于 $1\le q<2$

$$n^{1-1/q}\big(\|\widetilde{X}^{(n)}\|_\infty-\mu_{q,n}\big)\xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{d}} R_q\overset{\mathrm{d}}{=}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{E_j-1}{\kappa_q(j)},$$

(ii) 对于 $q=2$

$$\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{\log n}}\big(\|\widetilde{X}^{(n)}\|_\infty-\mu_{2,n}\big)\xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{d}}R_2\sim\mathcal{N}(0,1/4),$$

(iii) 对于 $2<q<\infty$

$$\sqrt{n}\big(\|\widetilde{X}^{(n)}\|_\infty-\mu_{q,n}\big)\xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{d}}\mathcal{N}(0,\sigma_q^2).$$

这里，$R_1+\gamma$ 服从 Gumbel分布，其分布函数为 $x\mapsto e^{-e^{-x}}$，γ 是欧拉–马歇罗尼常数，

$$\mu_{q,n}:=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{n^{1/q}}{\kappa_q(j)}\qquad\text{and}\qquad\sigma_q^2:=\frac{1}{q(q-1)^2(q-2)}.$$

我们还可以利用概率表示来研究在 $\mathbb{D}_{q,1}^n:=\mathrm{vol}_n(\mathbb{B}_{q,1}^n)^{-1/n}\mathbb{B}_q^n$ 中均匀分布的随机向量的 ℓ_r^n范数，即确定其相对于 $\|\cdot\|_r$ 的渐近长度；稍后我们将应用这一结果研究某些交集的体积行为。我们有以下弱大数定律。

定理 D. 设 $1<q\le\infty$、$1<r\le\infty$，并假设对每个 $n\in\mathbb{N}$，$X^{(n)}$ 在$\mathbb{D}_{q,1}^n$上均匀分布。那么

$$n^{-1/r}\|X^{(n)}\|_r\xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}}m_{q,r},$$

其中，当$r<\infty$时，我们有

$$m_{q,r}:=\frac{1}{2e^{1/q}}\frac{q}{q-1}\left(\frac{\Gamma(r+1)\Gamma\left(1+\frac{q}{q-1}\right)}{\Gamma\left(r+1+\frac{q}{q-1}\right)}\right)^{1/r}\ \text{if } q<\infty\quad\text{and}\quad m_{\infty,r}:=\frac{1}{2}\Big(\frac{1}{r+1}\Big)^{1/r}\ \text{if } q=\infty,$$

并且，当$r=\infty$时，我们有

$$m_{q,\infty}:=\frac{1}{2e^{1/q}}\frac{q}{q-1}\ \text{if } q<\infty\quad\text{and}\quad m_{\infty,\infty}:=\frac{1}{2}.$$

因此，我们可以推导出以下关于 Lorentz 球与 ℓ_r^n球交集的渐近体积的 Schechtman-Schmuckenschläger 型结果，从而补充了[29, 30, 31, 32, 33, 55, 56, 58]中的结果。在以下推论中，我们记 $\mathbb{D}_r^n:=\mathrm{vol}_n(\mathbb{B}_r^n)^{-1/n}\mathbb{B}_r^n$。

推论 3. 设 $1<q\le\infty$ 且 $1<r\le\infty$。那么，对所有 $t>0$,

$$\mathrm{vol}_n(\mathbb{D}_{q,1}^n\cap t\mathbb{D}_r^n)\overset{n\to\infty}{\longrightarrow}\begin{cases}1 & : A_{q,r}\,t>1\\ 0 & : A_{q,r}\,t<1,\end{cases}$$

其中，当 $r<\infty$时，我们有

$$A_{q,r}:=\begin{cases}\frac{e^{1/q-1/r}\,\frac{q-1}{q}}{\Gamma(1+1/r)r^{1/r}}\left(\frac{\Gamma(r+1+\frac{q}{q-1})}{\Gamma(r+1)\Gamma(1+\frac{q}{q-1})}\right)^{1/r} & : q<\infty\\ \frac{1}{\Gamma(1+1/r)}\left(\frac{r+1}{re}\right)^{1/r} & : q=\infty,\end{cases}$$

且对于 $r=\infty$，我们有

$$A_{q,\infty}:=\begin{cases}e^{1/q}\,\frac{q-1}{q} & : q<\infty\\ 1 & : q=\infty.\end{cases}$$

注 4. 与 [55], 中得到的关于 ℓ_p^n 球的类似结果相比，我们看到，当 $q=\infty$ 且 $r<\infty$ 时，所得阈值相同。因此，渐近地说，$\mathbb{D}_{\infty,1}^n$ 在与一个 ℓ_r^n 球相交时，其表现有些类似于 $\mathbb{D}_\infty^n$。

此外，对于 $r<\infty$，利用 $\Gamma(x+\alpha)\sim\Gamma(x)x^\alpha$ 对于 $x\to\infty$，我们得到

$$\lim_{q\to 1} A_{q,r}=\frac{e^{1-1/r}}{\Gamma(1+1/r)\Gamma(r+1)^{1/r}r^{1/r}},$$

这等于将 $\mathbb{D}_1^n$ 与 $\mathbb{D}_r^n$ 相交后得到的阈值。也就是说，在边界情形 $q\in\{1,\infty\}$ 中，我们有 $\mathbb{D}_{q,1}^n$ 的表现与 $\mathbb{D}_q^n$ 类似。然而，在两者之间，阈值常数的行为似乎有所不同。例如，当 $q\to\infty$ 时，常数 $A_{q,r}$ 随 $\mathbb{D}_q^n$ 增大而增大，但当 $\mathbb{D}_{q,1}^n$ 时则收敛。

对于参数 $p>1$，目前我们还没有概率表示。不过，我们可以基于最大熵考量运用启发式论证，从而推导出关于极限分布的以下猜想。

猜想 1. 设 $1\le p\le q<\infty$，并假设对于每个 n，$\in\mathbb{N}$ $\widetilde{X}(n)=(\widetilde{X}(n)_1,\dots,\widetilde{X}(n)_n)$ 在 $\mathbb{D}_{q,p}^n$ 上均匀分布。那么，对于每个有界连续函数 $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$，我们有

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n f(\widetilde{X}_i^{(n)})\xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}}\int_{\mathbb{R}} f(x)\,\nu_{q,p}(\mathrm{d}x),$$

其中 $\nu_{q,p}$ 是定义在 $\mathbb{R}$ 上的对称概率测度，它相对于勒贝格测度绝对连续，且密度函数为 $f_{q,p}\colon\mathbb{R}\to[0,\infty)$，满足 $f_{q,p}(x)=\frac{1}{2}G'(|x|)$。其中 $G\colon[0,\infty)\to\mathbb{R}$ 满足 $G(0)=0$，并且是下述微分方程的唯一解

$$G''(x)=-G'(x)\big(1-G(x)\big)^{p/q-1}x^{p-1},\quad x\in(0,r_{p,q}),$$

其中 $G(0)=0$，且 $\lim_{x\uparrow r_{p,q}}G'(x)=0$，其中 $r_{p,q}\in(0,\infty]$ 是使 $G(r_{p,q})=1$ 成立的第一个点。此外，我们猜想，$r_{p,q}=\infty$ 当且仅当 $p=q$。

改变自由参数 $G'(0)>0$，可得到不同的解；模拟结果见图 1。若 $G'(0)$ 小于某个临界值 $c_{p,q}$，那么我们猜想 $\lim_{x\to\infty}G(x)<1$。若 $G'(0)=c_{p,q}$，则存在一个（最小）值 $r_{p,q}$，使得 $G(r_{p,q})=1$，并且 $\lim_{x\uparrow r_{p,q}}G'(x)=0$。这个临界解正是上述猜想中出现的解。

注 5. 该猜想涵盖了 ℓ_p^n 球的情形，其中 $p=q$，此时它正确地给出了 p- 高斯密度；也涵盖了 $p=1$ 的情形，此时它给出了定理 B 中得到的极限分布。

3 主要结果的证明

现在，我们将给出第 2 节中主要结果的证明。下文中，给定集合 $A\subseteq\mathbb{R}^n$，我们用 $\mathrm{conv}(A)$ 表示集合 A 的凸包，并用 ∂A 表示其边界。此外，我们用 $e_1,\dots,e_n$ 表示 $\mathbb{R}^n$ 中的标准单位向量。

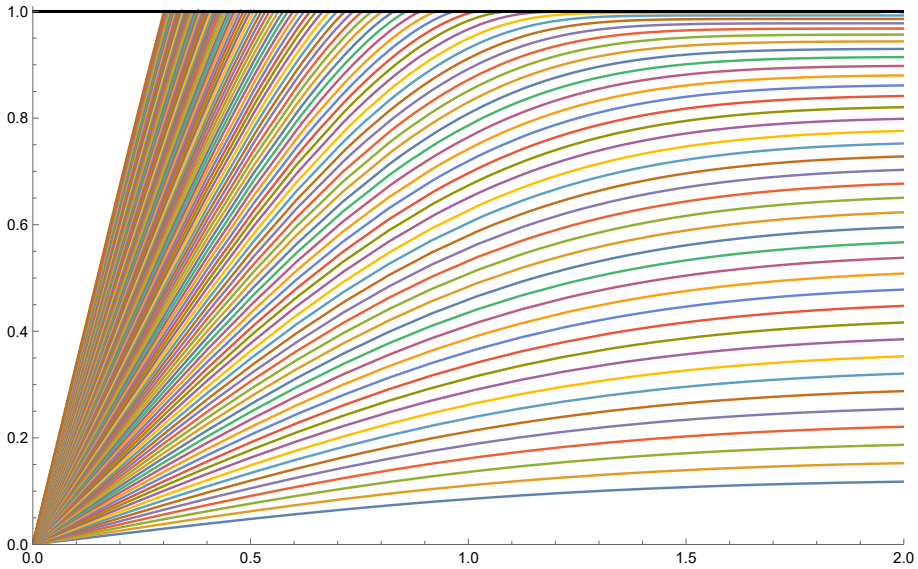

图 1：不同$G'(0)$取值下猜想 1 中微分方程解的模拟。

3.1 定理A的证明

注意，由于洛伦兹范数（因而单位球）具有 1-对称性，只需考察魏尔室

$$W := \{x \in \mathbb{R}^n : x_1 \geq \cdots \geq x_n \geq 0\} \tag{4}$$

与 $\mathbb{B}^n_{q,1}$ 相交。于是该集合具有如下形式

$$\mathbb{B}^n_{q,1} \cap W = \Big\{x \in W : \sum_{i=1}^{n} i^{1/q-1} x_i \leq 1\Big\}.$$

首先，我们确定多面体 $\mathbb{B}^n_{q,1} \cap W$ 的极点（顶点）。

引理 4. 设 $1 < q \leq \infty$。$\mathbb{B}^n_{q,1} \cap W$ 的极点为

$$0, Me_1, Me_2, \ldots, Me_n,$$

其中

$$M := \begin{pmatrix} \kappa_q(1)^{-1} & \kappa_q(2)^{-1} & \cdots & \kappa_q(n)^{-1} \\ 0 & \kappa_q(2)^{-1} & \cdots & \kappa_q(n)^{-1} \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \kappa_q(n)^{-1} \end{pmatrix} \quad \textit{with} \quad \kappa_q(j) = \sum_{i=1}^{j} i^{1/q-1}, \quad j \in \{1, \ldots, n\}.$$

证明。 首先，我们注意到魏尔室W是求和基的正包

$$Ae_1 = e_1, Ae_2 = e_1 + e_2, \ldots, Ae_n = e_1 + \cdots + e_n \quad \text{with} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix},$$

因为每个$x = (x_i)_{i=1}^n \in W$都可以表示为

$$x = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i+1})(Ae_i) = A\Big(\sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i+1})e_i\Big),$$

其中我们令$x_{n+1} := 0$。经过代换可得

$$\mathbb{B}_{q,1}^n \cap W = \Big\{x \in \mathbb{R}^n \colon \sum_{i=1}^{n} i^{1/q-1} x_i \le 1, x = A\Big(\sum_{i=1}^{n} y_i e_i\Big), y_i \ge 0\Big\} = \Big\{Ay \in \mathbb{R}^n \colon \sum_{i=1}^{n} \kappa_q(i) y_i \le 1, y_i \ge 0\Big\}.$$

由于A是线性且双射的，因此极点为 0 和$A(\kappa_q(i)^{-1} e_i) = Me_i, i \in \{1, \dots, n\}$。

□

现在我们用这个引理来证明定理 A。

定理 A 的证明。 由引理 4 可知，$\mathbb{B}_{q,1}^n \cap W$的极点是$M$对 0 和单位向量$e_1, \dots, e_n$的像；$M$如引理 4 中所定义。因此

$$\mathbb{B}_{q,1}^n \cap W = \operatorname{conv}\{0, Me_1, \dots, Me_n\} = M\big(\operatorname{conv}\{0, e_1, \dots, e_n\}\big). \tag{5}$$

凸包 $\operatorname{conv}\{0, e_1, \dots, e_n\}$是标准$n$维单纯形 Δ_n在 $\mathbb{R}^{n+1}$中的投影，即

$$\Delta_n := \Big\{x = (x_i)_{i=1}^{n+1} \in \mathbb{R}^{n+1} : x_i \ge 0, \sum_{i=1}^{n+1} x_i = 1\Big\} = \operatorname{conv}\{e_1, \dots, e_{n+1}\} \subseteq \mathbb{R}^{n+1},$$

投影到前n 个坐标上。众所周知（例如参见 [44]），

$$Z^{(n)} := \Big(\frac{E_1}{\sum_{j=1}^{n+1} E_j}, \dots, \frac{E_{n+1}}{\sum_{j=1}^{n+1} E_j}\Big)$$

在 Δ_n 上均匀分布，其中 E_1,.. 、E_{n+1} 是独立同分布的标准指数随机变量。先作投影，再将 $Z^{(n)}$ 作用于 M，由 (5) 可知随机向量

$$\Big(\frac{\sum_{j=1}^{n} \kappa_q(j)^{-1} E_j}{\sum_{j=1}^{n+1} E_j}, \frac{\sum_{j=2}^{n} \kappa_q(j)^{-1} E_j}{\sum_{j=1}^{n+1} E_j}, \dots, \frac{\sum_{j=n}^{n} \kappa_q(j)^{-1} E_j}{\sum_{j=1}^{n+1} E_j}\Big)$$

在交集 $\mathbb{B}_{q,1}^n \cap W$ 上均匀分布。利用 $\mathbb{B}_{q,1}^n$ 的 1-对称性，我们可以改变坐标的顺序（引入一个随机置换 π，其取值为 $\{1, \dots, n\}$），也可以改变坐标的符号（引入一个随机符号向量 $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in \{-1, 1\}^n$），从而得到所需的概率表示。

□

现在我们给出洛伦兹球体积半径渐近性质的证明。为此以及其他证明，我们需要以下众所周知的渐近性质，参见例如 [30, 引理 3.4]。

引理 5. 设 $\alpha > -1$。存在常数 $c_\alpha \in (0, \infty)$ 以及绝对常数 $c \in (0, \infty)$，使得对所有 $n \in \mathbb{N}$,

$$\Big|\sum_{i=1}^{n} i^{\alpha} - \frac{1}{\alpha+1} n^{\alpha+1}\Big| \le c_\alpha n^{\max\{0,\alpha\}} \qquad \textit{and} \qquad \Big|\sum_{i=1}^{n} i^{-1} - \log n\Big| \le c.$$

推论 *1* 的证明。 由引理 4，参见公式（5），我们知道 $\mathbb{B}_{q,1}^n \cap W = M(\mathrm{conv}\{0, e_1, \ldots, e_n\})$。结合 1-对称性可得

$$\mathrm{vol}_n(\mathbb{B}_{q,1}^n) = 2^n n! \cdot \mathrm{vol}_n\big(\mathbb{B}_{q,1}^n \cap W\big) = 2^n \det(M) = 2^n \prod_{i=1}^n \kappa_q(i)^{-1},$$

其中W如式 (4) 所示，M 如引理 4 所示。现在注意到，由引理 5 可知，对于一个仅依赖于参数 $q > 1$ 的适当常数$c_q \in (0,\infty)$，有如下渐近性质：

$$|\kappa_q(i) - q i^{1/q}| \le c_q \text{ if } q < \infty \quad \text{and} \quad |\kappa_q(i) - \log(i+1)| \le c_\infty \text{ if } q = \infty. \tag{6}$$

我们先讨论$q < \infty$的情形。此时有

$$\begin{aligned}\log\Big(\prod_{i=1}^n \kappa_q(i)^{-1}\Big)^{1/n} &= -\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \log \kappa_q(i) = -\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \log\Big(\frac{\kappa_q(i)\cdot q i^{1/q}}{q i^{1/q}}\Big) \\ &= -\log q - \frac{1}{qn}\sum_{i=1}^n \log i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \log\Big(\frac{\kappa_q(i)}{q i^{1/q}}\Big). \end{aligned} \tag{7}$$

利用 $\log(n!) = n\log n - n + O(\log n)$，可得右侧的第一项和在$n \to \infty$时满足：

$$-\frac{1}{qn}\sum_{i=1}^n \log i = -\frac{1}{q}\log(n) + \frac{1}{q} + O\Big(\frac{\log n}{n}\Big).$$

由式 (6) 可得

$$\lim_{i\to\infty} \log\Big(\frac{\kappa_q(i)}{q i^{1/q}}\Big) = 0.$$

由切萨罗引理,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \log\Big(\frac{\kappa_q(i)}{q i^{1/q}}\Big) = 0.$$

这就得到了所需结果。若$q = \infty$，则可类似处理，但此时使用

$$\frac{1}{n}\sum_{i=3}^n \log\log i = \frac{1}{n}\int_3^n \log\log x + O\Big(\frac{1}{\log n}\Big) = \log\log n - \frac{\mathrm{li}(n)}{n} + O\Big(\frac{1}{\log n}\Big) = \log\log n + O\Big(\frac{1}{\log n}\Big),$$

其中，对数积分 $\mathrm{li}(x) := \int_0^x \mathrm{d}t \ln(t)$，$x > 1$的渐近性质广为人知（[1, 第5]章）。

□

3.2 定理 B 的证明

现在继续证明定理 B，即经验分布的弱收敛结果。下文中，对于两个非负实数数列 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 和 $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$，若存在 $C \in (0,\infty)$，使得对所有 $n \in \mathbb{N}$都有 $a_n \le C b_n$，则记作 $a_n \lesssim b_n$。若进一步有 $a_n \gtrsim b_n$，则记作 $a_n \asymp b_n$。以下结论将在证明中起关键作用。

引理 6。 设 $1 < q \le \infty$，并且对 $n \in \mathbb{N}$假设 $\tilde{X}(n) = (\tilde{X}(n)_1, \ldots..., \tilde{X}(n)_n)$ 在$\widetilde{\mathbb{D}}_{q,1}^n$中均匀分布。那么，对于任意数列 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$，其中 $a_n \xrightarrow{n\to\infty} \infty$，有

$$\mathbb{P}\Big[\sup_{1\le i\le n}\Big|(\widetilde{X}_i^{(n)})^* - G_q\Big(\frac{i-1}{n}\Big)\Big| \ge a_n \delta_n\Big] \xrightarrow{n\to\infty} 0,$$

其中

$$G_q\colon [0,1]\to[0,(q-1)^{-1}],\quad x\mapsto G_q(x)=\frac{1}{q-1}(1-x^{1-1/q})\quad \text{if } q<\infty$$

以及 $G_\infty\colon\ [0,1]\to[0,1],\ x\mapsto 1-x$。误差界可以如下选取：

$$\delta_n=\begin{cases} n^{-(1-1/q)} & :1<q<2,\\ n^{-1/2}\log n & :q=2,\\ n^{-1/q} & :q\in(2,\infty),\\ (\log n)^{-1} & :q=\infty, \end{cases}\qquad \text{where } n\in\mathbb{N}.$$

证明。设 $1<q<\infty$ 且 $i\in\{1,\dots,n\}$。利用定理 A 的概率表示，对于第 i^{th} 大的项（$\widetilde{X}(n)_i)^*$，即 $(|\widetilde{X}(n)_i|)^n{}_{i=1}$，我们得到

$$(\widetilde{X}_i^{(n)})^* \overset{\mathrm{d}}{=} Y_i^{(n)}\Big(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n+1}E_j\Big)^{-1}\quad\text{with}\quad Y_i^{(n)}=\frac{1}{n}\sum_{j=i}^{n}\frac{n^{1/q}}{\kappa_q(j)}E_j,$$

且在联合分布的意义下也成立。我们将对随机变量 $Y(n)_i$ 证明该结论，而不对（$\widetilde{X}^{(n)}{}_i)^*$ 证明；随后引理中的结论便可轻易推出，因为根据三角不等式和上确界的次可加性，我们有

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}\Big[\sup_{1\le i\le n}\Big|(\widetilde{X}_i^{(n)})^*-G_q\Big(\frac{i-1}{n}\Big)\Big|\ge a_n\delta_n\Big]\\ &\le\mathbb{P}\Big[\sup_{1\le i\le n}\Big|(\widetilde{X}_i^{(n)})^*-Y_i^{(n)}\Big|\ge\frac{a_n}{2}\delta_n\Big]+\mathbb{P}\Big[\sup_{1\le i\le n}\Big|Y_i^{(n)}-G_q\Big(\frac{i-1}{n}\Big)\Big|\ge\frac{a_n}{2}\delta_n\Big].\end{aligned}$$

为了估计右侧的第一个概率，我们利用以下事实：

$$\sup_{1\le i\le n}\Big|(\widetilde{X}_i^{(n)})^*-Y_i^{(n)}\Big|\overset{\mathrm{d}}{=}\Big(\sup_{1\le i\le n}Y_i^{(n)}\Big)\cdot\Big|\Big(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n+1}E_j\Big)^{-1}-1\Big|=\|Y^{(n)}\|_\infty\cdot\Big|\Big(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n+1}E_j\Big)^{-1}-1\Big|.\tag{8}$$

从下面的证明可以看出，(8) 右侧的第一个因子以趋于 1 的概率被某个适当的常数所界。第二个因子满足（由中心极限定理）

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\Big[\Big|\Big(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n+1}E_j\Big)^{-1}-1\Big|\ge\delta_n\Big]&\le\mathbb{P}\Big[\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n+1}E_j\le(1+\delta_n)^{-1}\Big]\le\mathbb{P}\Big[\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}E_j\le(1+\delta_n)^{-1}\Big]\\ &=\mathbb{P}\Big[\frac{s_n}{n}\sum_{j=1}^{n}(E_j-1)\le-1\Big]=\mathbb{P}\Big[\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{j=1}^{n}(E_j-1)\le-\frac{\sqrt{n}}{s_n}\Big]\overset{n\to\infty}{\longrightarrow}0,\end{aligned}$$

其中，$s_n:=1+\delta_n^{-1}\asymp\delta_n^{-1}$ 满足 $\sqrt{n}/s_n\to+\infty$，这是由引理中所述 δ_n 的定义得出的。考虑到 (8) 以及 $Y(n)$ 的最大坐标上界，很容易得出将 $\widetilde{X}^{(n)}$ 替换为 $Y(n)$ 时的结论。

现在开始证明关于 $Y(n)_i$ 的陈述。考虑分解式

$$Y_i^{(n)}-G_q\Big(\frac{i-1}{n}\Big)=\frac{1}{n}\sum_{j=i}^{n}\frac{n^{1/q}}{\kappa_q(j)}E_j-\frac{1}{q}\int_{(i-1)/n}^{1}x^{-1/q}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{n}\sum_{j=i}^{n}A_j+\frac{1}{n}\sum_{j=i}^{n}B_j+\frac{1}{qn}\sum_{j=i}^{n}C_j\tag{9}$$

其加项为

$$A_j = \frac{n^{1/q}}{\kappa_q(j)}(E_j - 1), \quad B_j = \frac{n^{1/q}}{\kappa_q(j)} - \frac{n^{1/q}}{q j^{1/q}}, \quad C_j = \left(\frac{j}{n}\right)^{-1/q} - \int_{j-1}^{j} \left(\frac{x}{n}\right)^{-1/q} \mathrm{d}x, \quad j = i, \dots, n.$$

这里我们使用了$G_q(x) = \frac{1}{q}\int_x^1 y^{-1/q}\mathrm{d}y$, $x \in [0,1]$。右侧 (9) 中只有第一项求和是随机的，其方差为

$$\frac{1}{n^2}\sum_{j=i}^{n} \mathrm{Var}(A_j) = \frac{1}{n^2}\sum_{j=i}^{n}\left(\frac{n^{1/q}}{\kappa_q(j)}\right)^2 \lesssim_q n^{-2(1-1/q)} \sum_{j=1}^{n} j^{-2/q} \lesssim_q \begin{cases} n^{-2(1-1/q)} & \text{if } 1 < q < 2, \\ n^{-1}\log n & \text{if } q = 2, \\ n^{-1} & \text{if } q > 2, \end{cases}$$

当$n \to \infty$时趋于零。这里我们使用了渐近性质$\kappa_q(j) \asymp_q j^{1/q}$以及和式-积分近似，见 (6) 和引理 5。

对于第二项求和，由 (6) 可得

$$|B_j| = \frac{n^{1/q}}{q j^{1/q}} \frac{|q j^{1/q} - \kappa_q(j)|}{\kappa_q(j)} \asymp_q \frac{n^{1/q}}{j^{1/q}} \frac{1}{j^{1/q}} = n^{1/q} j^{-2/q},$$

由此可得

$$\frac{1}{n}\sum_{j=i}^{n} |B_j| \lesssim_q n^{1/q-1} \sum_{j=1}^{n} j^{-2/q} \lesssim_q \begin{cases} n^{-(1-1/q)} & \text{if } 1 < q < 2, \\ n^{-1/2}\log n & \text{if } q = 2, \\ n^{-1/q} & \text{if } q > 2. \end{cases}$$

对于第三项求和，我们利用如下事实：对任意$j \geq 1$，都可以找到 $\xi \in (j-1, j)$，使得

$$0 \leq \int_{j-1}^{j} \left(\frac{x}{n}\right)^{-1/q} \mathrm{d}x - \left(\frac{j}{n}\right)^{-1/q} = \left(\frac{\xi}{n}\right)^{-1/q} - \left(\frac{j}{n}\right)^{-1/q} \lesssim \left(\frac{j}{n}\right)^{-1/q} \frac{1}{j},$$

这由两次使用中值定理可得。因此，第三项求和满足

$$\frac{1}{n}\sum_{j=i}^{n} |C_j| \lesssim_q n^{-(1-1/q)} \sum_{j=1}^{n} j^{-(1+1/q)} \lesssim_q n^{-1+1/q}.$$

最后，我们注意到

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left[\sup_{1\leq i\leq n}\left|Y_i^{(n)} - G_q\left(\frac{i-1}{n}\right)\right| \geq a_n\delta_n\right] &\leq \mathbb{P}\left[\sup_{1\leq i\leq n}\left|\frac{1}{n}\sum_{j=i}^{n} A_j\right| \geq \frac{a_n}{3}\delta_n\right] \\ &\quad + \mathbb{P}\left[\sup_{1\leq i\leq n}\left|\frac{1}{n}\sum_{j=i}^{n} B_j\right| \geq \frac{a_n}{3}\delta_n\right] \\ &\quad + \mathbb{P}\left[\sup_{1\leq i\leq n}\left|\frac{1}{n}\sum_{j=i}^{n} C_j\right| \geq \frac{a_n}{3}\delta_n\right]. \end{aligned}$$

当n足够大时，由于前面的估计，最后两个加项趋于零，而根据柯尔莫哥洛夫不等式（[37, 定理 5.28]），第一项趋于零。这就证明了$q < \infty$的情形。

如果$q = \infty$我们需要进行若干修改，特别是通过将$n^{1/q}$替换为$\log(n+1)$来调整$Y^{(n)}$的定义。对于$i \in \{1, \dots, n\}$，我们再次将坐标记为方程（9）中的形式，即：

$$Y_i^{(n)} - G_\infty\left(\frac{i-1}{n}\right) = \frac{1}{n}\sum_{j=i}^{n} \frac{\log(n+1)}{\kappa_\infty(j)} E_j - \left(1 - \frac{i-1}{n}\right) = \frac{1}{n}\sum_{j=i}^{n} A_j + \frac{1}{n}\sum_{j=i}^{n} B_j + \frac{1}{n}\sum_{j=i}^{n} C_j$$

其加项为

$$A_j = \frac{\log(n+1)}{\kappa_\infty(j)}(E_j - 1), \quad B_j = \frac{\log(n+1)}{\kappa_\infty(j)} - \frac{\log(n+1)}{\log(j+1)}, \quad C_j = \frac{\log(n+1)}{\log(j+1)} - 1.$$

调整 δ_n 后，可以类似地估计误差。对于第一个求和式，由 (6) 可得 $\kappa_\infty(j) \asymp \log(j+1)$，因此

$$\frac{1}{n^2}\sum_{j=i}^{n} \mathrm{Var}(A_j) = \frac{1}{n^2}\sum_{j=i}^{n}\Big(\frac{\log(n+1)}{\kappa_\infty(j)}\Big)^2 \lesssim \frac{\log^2(n+1)}{n^2}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{\log^2(j+1)} \lesssim \frac{1}{n},$$

在最后一个估计中，我们利用了 $\log^2(n+1)$ 缓慢变化这一性质，因此算术平均值与最大的加项等价，另见 [10, 命题 1.5.8]。类似地，我们有

$$\frac{1}{n}\sum_{j=i}^{n}|B_j| \lesssim \frac{\log(n+1)}{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{\log^2(j+1)} \lesssim \frac{1}{\log(n+1)}.$$

第三个求和式满足

$$\frac{1}{n}\sum_{j=i}^{n}|C_j| \le \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}|C_j| = \frac{\log(n+1)}{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{\log(j+1)} - 1 \lesssim \frac{1}{\log(n+1)},$$

这里我们使用了近似

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{\log(j+1)} = \int_2^{n+1}\frac{1}{\log x}\,\mathrm{d}x + O(1) = \mathrm{li}(n+1) + O(1) = \frac{n}{\log(n+1)} + O\Big(\frac{n}{\log^2(n+1)}\Big).$$

现在，证明可按 $q < \infty$ 的情形完成。 □

证明定理 B 时，我们使用一个对称化技巧，并在下面的引理中给出；这一结果或许早已为人所知，但我们未能在文献中找到。

引理 7. 对于每个 $n \in \mathbb{N}$，设 $X^{(n)} = (X^{(n)}_1, \dots, X^{(n)}_n)$ 是一个 $\mathbb{R}^n$ 随机向量，其各个坐标同分布，且满足 $(\varepsilon_1 X^{(n)}_1, \dots, \varepsilon_n X^{(n)}_n) \overset{\mathrm{d}}{=} X^{(n)}$ 对任意符号选择 $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in \{-1, 1\}^n$ 均成立。若对于每个有界连续函数 $f\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f\big(|X_i^{(n)}|\big) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} \int_0^\infty f(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x,$$

对某个密度 $\varphi\colon [0,\infty) \to [0,\infty)$ 成立，则对于每个有界连续函数 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f\big(X_i^{(n)}\big) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi(|x|)\,\mathrm{d}x.$$

证明. 设 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 是一个有界连续函数。两个映射

$$f_1\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x) \quad \text{and} \quad f_{-1}\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(-x)$$

在 $[0,\infty$ 上再次有界连续）。令 $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ 为相互独立的拉ademacher随机变量，且与所有其他随机对象相互独立。那么，$X^{(n)}$ 的对称性意味着

$$S_n := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f\big(X_i^{(n)}\big) \overset{\mathrm{d}}{=} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f\big(\varepsilon_i |X_i^{(n)}|\big) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f_{\varepsilon_i}\big(|X_i^{(n)}|\big).$$

由条件期望的线性性，我们得到

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\big[S_n|X^{(n)}\big] &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}\big[f_{\varepsilon_i}\big(|X_i^{(n)}|\big)|X^{(n)}\big] \\ &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{(f_1+f_{-1})(|X_i^{(n)}|)}{2} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} \int_0^\infty \frac{(f_1+f_{-1})(x)}{2}\varphi(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi(|x|)\,\mathrm{d}x. \qquad (10)\end{aligned}$$

此外，条件方差满足

$$\mathrm{Var}\big[S_n|X^{(n)}\big] = \frac{1}{2n^2}\sum_{i=1}^{n}\Big(f_1\big(|X_i^{(n)}|\big) - \frac{(f_1+f_{-1})(|X_i^{(n)}|)}{2}\Big)^2 + \Big(f_{-1}\big(|X_i^{(n)}|\big) - \frac{(f_1+f_{-1})(|X_i^{(n)}|)}{2}\Big)^2 \le \frac{4\|f\|_\infty^2}{n}.$$

在给定 $X^{(n)}$ 的条件下，切比雪夫不等式给出，对每个 $\varepsilon>0$,

$$\mathbb{P}\big[|S_n - \mathbb{E}[S_n|X^{(n)}]| > \varepsilon|X^{(n)}\big] \le \frac{\mathrm{Var}\big[S_n|X^{(n)}\big]}{\varepsilon^2}.$$

因此，由全期望公式可得

$$\mathbb{P}\big[|S_n - \mathbb{E}[S_n|X^{(n)}]| > \varepsilon\big] \le \frac{\mathbb{E}\big[\mathrm{Var}[S_n|X^{(n)}]\big]}{\varepsilon^2} \le \frac{4\|f\|_\infty^2}{\varepsilon^2 n} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

结合 (10)，这意味着

$$S_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi(|x|)\,\mathrm{d}x,$$

至此，证明完成。 □

定理 B 的证明。 我们使用引理 7，它使我们能够转而考虑绝对值。令 $\varepsilon>0$ 和$f\colon\ [0,\infty)\to[0,\infty)$ 有界连续。我们有

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left[\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f\big(|\widetilde{X}_i^{(n)}|\big) - \int_{\mathbb{R}_+} f(x)\,\nu_{q,1}(\mathrm{d}x)\right| > \varepsilon\right] &\le \mathbb{P}\left[\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f\big(|\widetilde{X}_i^{(n)}|\big) - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f\Big(G_q\Big(\frac{i-1}{n}\Big)\Big)\right| > \frac{\varepsilon}{2}\right] \\ &\quad + \mathbb{P}\left[\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f\Big(G_q\Big(\frac{i-1}{n}\Big)\Big) - \int_{\mathbb{R}_+} f(x)\,\nu_{q,1}(\mathrm{d}x)\right| > \frac{\varepsilon}{2}\right]. \qquad (11)\end{aligned}$$

对于右侧的第一个加项，我们注意到

$$\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f\big(|\widetilde{X}_i^{(n)}|\big) - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f\Big(G_q\Big(\frac{i-1}{n}\Big)\Big)\right| \le \sup_{1\le i\le n}\left|f\big((\widetilde{X}_i^{(n)})^*\big) - f\Big(G_q\Big(\frac{i-1}{n}\Big)\Big)\right|,$$

由于我们可以任意排列绝对值而不改变平均值。设 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 是一个数列，满足 $a_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow}\infty$，且 $a_n\delta_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$，并且对所有 $n\in\mathbb{N}$，都有 $a_n\delta_n\le 1$。对于 $n\in\mathbb{N}$，我们定义事件

$$A_n := \left\{\sup_{1\le i\le n}\left|(\widetilde{X}_i^{(n)})^* - G_q\Big(\frac{i-1}{n}\Big)\right| \le a_n\delta_n\right\}.$$

那么在 A_n上成立：$(\widetilde{\ }X_{(n)\,i})^* \le (\widetilde{\ }X_{(n)\,1})^* \le G_q(0) + 1$对所有 $i\in\{1,\dots,n\}$ 均成立，并且

$$\sup_{1\le i\le n}\left|f\big((\widetilde{X}_i^{(n)})^*\big) - f\Big(G_q\Big(\frac{i-1}{n}\Big)\Big)\right| \le \sup_{\substack{x,y\in[0,G_q(0)+1]\\ |x-y|\le a_n\delta_n}} |f(x)-f(y)|,$$

由于 f 在 $[0, G_q(0) + 1]$ 上一致连续，因此它趋于零。根据引理 6，有 $\mathbb{P}[A_n] \xrightarrow{n\to\infty} 1$，所以式 (11) 中的第一个加项也趋于零。对于式 (11) 中的第二个加项，我们注意到，f 和 $G_q\colon [0,1] \to [0,\infty)$ 的连续性通过代换可推出

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f\Big(G_q\Big(\frac{i-1}{n}\Big)\Big) \xrightarrow{n\to\infty} \int_0^1 f(G_q(x))\,\mathrm{d}x = \int_0^{G_q(0)} f(x)(-G_q^{-1})'(x)\,\mathrm{d}x,$$

其中

$$G_q^{-1}\colon [0, G_q(0)], \quad x \mapsto (1-(q-1)x)^{q/(q-1)},$$

若 $q < \infty$ 和 $G_\infty^{-1} = G_\infty$，使得 $(-G_q^{-1})'$ 是 ν_q,1 的密度。 □

借助定理 B，我们能够推导出关于单个坐标渐近分布的推论 2。

推论 *2* 的证明。 结果基本上源于 $\tilde{}X^{(n)} = (\tilde{}X(n)\,1, \ldots, \tilde{}X(n)n)$ 各坐标的可交换性；在数理物理文献中，这一现象称为混沌传播，参见例如 Sznitman 的著作 [63] ；请注意，可交换性意味着坐标的任意排列都具有与原来相同的联合分布。为方便读者，我们改编了 [15, 第 326] 页中的一个论证。

令 $k \in \mathbb{N}$。我们证明，对任意有界连续函数 $f\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$，均有

$$\mathbb{E}\big[f(\widetilde{X}_1^{(n)}, \ldots, \widetilde{X}_k^{(n)})\big] \xrightarrow{n\to\infty} \big(\mathbb{E} f(Y)\big)^k,$$

其中 Y 是服从勒贝格密度 f_q,1 的实值随机变量。只需假设 $f = \prod^k{}_{i=1} f_i$ 对于 $f_i\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 有界连续（见 [15, 附录 D，第 356]页）。由可交换性和线性性，我们有

$$\mathbb{E}\Big[\prod_{i=1}^{k} f_i(\widetilde{X}_i^{(n)})\Big] = \mathbb{E}\Big[\frac{(n-k)!}{n!}\sum_{i_1\neq\cdots\neq i_k}\prod_{i=1}^{k} f_i(\widetilde{X}_{i_j}^{(n)})\Big].$$

令 $L_{\tilde{}X^{(n)}} = \frac{1}{_}n\sum^n{}_{i=1}\delta_{\tilde{}X^{(n)}{}_i}$。那么我们还有

$$\mathbb{E}\Big[\int\prod_{i=1}^{k} f_i\,\mathrm{d}L^{\otimes k}_{\widetilde{X}^{(n)}}\Big] = \mathbb{E}\Big[\prod_{i=1}^{k}\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} f_i(\widetilde{X}_j^{(n)})\Big] = \frac{1}{n^k}\mathbb{E}\Big[\sum_{i_1,\ldots,i_k}\prod_{i=1}^{k} f_i(\widetilde{X}_{i_j}^{(n)})\Big].$$

因此，有

$$\Big|\mathbb{E}\prod_{i=1}^{k} f_i(\widetilde{X}_i^{(n)}) - \mathbb{E}\int\prod_{i=1}^{k} f_i\mathrm{d}L^{\otimes k}_{\widetilde{X}^{(n)}}\Big| = \Big|1 - \frac{n!}{(n-k)!n^k}\Big|\max_{1\le i\le k}\|f_i\|_\infty^k \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

将连续映射定理应用于 f_i们，定理 B 和连续映射定理给出了收敛 e

$$\int\prod_{i=1}^{k} f_i\,\mathrm{d}L^{\otimes k}_{\widetilde{X}^{(n)}} = \prod_{i=1}^{k}\int f_i\,\mathrm{d}L_{\widetilde{X}^{(n)}} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} \prod_{i=1}^{k} f_i(Y).$$

根据一致有界性，我们可以对等式两边取期望，从而完成证明。 □

3.3 定理C的证明

我们现在证 得到了洛伦兹球中随机向量最大范数的中心极限定理。

定理 C 的证明。我们有

$$\|\widetilde{X}^{(n)}\|_\infty \overset{\mathrm{d}}{=} \frac{Y_n}{Z_n} \quad \text{with} \quad Y_n := \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{n^{1/q}}{\kappa_q(j)} E_j \quad \text{and} \quad Z_n := \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n+1} E_j.$$

我们首先证明 (i)。令 $1 \le q < 2$ 并记作

$$Y_n = n^{1/q-1}\sum_{j=1}^{n} \frac{E_j - 1}{\kappa_q(j)} + \mu_{q,n} \quad \text{with} \quad \mu_{q,n} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{n^{1/q}}{\kappa_q(j)}$$

如定理陈述所示。注意

$$\mathbb{E}\Big[\frac{E_j - 1}{\kappa_q(j)}\Big] = 0 \quad \text{and} \quad \mathrm{Var}\Big[\frac{E_j - 1}{\kappa_q(j)}\Big] = \frac{1}{\kappa_q(j)^2}.$$

由于 $\kappa_q(j) \asymp_q j^{1/q}$，我们有

$$\sum_{j=1}^{\infty} \mathrm{Var}\Big[\frac{E_j - 1}{\kappa_q(j)}\Big] = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\kappa_q(j)^2} < \infty$$

因此，由鞅收敛定理（[37, 定理 11.4]）

$$\widetilde{Y}_n := n^{1-1/q} Y_n - \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{\kappa_q(j)} = \sum_{j=1}^{n} \frac{E_j - 1}{\kappa_q(j)} \xrightarrow[n\to\infty]{\text{a.s.}} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{E_j - 1}{\kappa_q(j)} =: R_q. \tag{12}$$

记

$$n^{1-1/q}\big(\|\widetilde{X}^{(n)}\|_\infty - \mu_{q,n}\big) \overset{\mathrm{d}}{=} n^{1-1/q}\Big(\frac{Y_n}{Z_n} - \mu_{q,n}\Big) = \frac{\widetilde{Y}_n + \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{\kappa_q(j)}}{1 + n^{-1/2}\widetilde{Z}_n + n^{-1}} - \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{\kappa_q(j)},$$

其中 $\widetilde{Z}_n := n^{-1/2}\sum_{j=1}^{n+1}(E_j - 1) \xrightarrow{\mathrm{d}} \mathcal{N}(0,1)$，这是由中心极限定理和斯卢茨基定理（[37,定理 13.18]）得到的，因为 $E_{n+1}/\sqrt{n} \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$。化简后，由斯卢茨基定理，

$$n^{1-1/q}\big(\|\widetilde{X}^{(n)}\|_\infty - \mu_{q,n}\big) \overset{\mathrm{d}}{=} \frac{\widetilde{Y}_n - n^{-1/2}\Big(\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{\kappa_q(j)}\Big)(\widetilde{Z}_n + n^{-1/2})}{1 + n^{-1/2}\widetilde{Z}_n + n^{-1}} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{d}} R_q,$$

因为 $n^{-1/2}\Big(\sum_{j=1}^{n} \kappa_q^{-1}(j)\Big) \xrightarrow{n} 0$。

为方便读者，我们证明 R_1 服从 Gumbel 分布（参见例如 [32, 定理 1.1 (c)]）。众所周知，$\sum_{j=1}^{n} j^{-1} = \log n + \gamma + o(1)$，由注 1 可推得

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{E_j - 1}{j} \overset{\mathrm{d}}{=} \max_{1\le j\le n} E_j - \log n - \gamma + e_n,$$

其中 $e_n \xrightarrow{n} 0$。现在，众所周知，$\max_{1\le j\le n} E_j - \log n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{d}} G$，其中 G服从标准冈贝尔分布。由斯卢茨基定理和极限的唯一性可知，$R_1 \overset{\mathrm{d}}{=} G - \gamma$。

~为证明 (ii)，令 $q=2$。将 Y_n 定义为 (12) 左侧的表达式，根据 [13, Thm. 5.3]，中的林德伯格中心极限定理的一个版本，我们有

$$\frac{1}{\sqrt{\log n}}\widetilde{Y}_n=\frac{1}{\sqrt{\log n}}\sum_{j=1}^{n}\frac{E_j-1}{\kappa_2(j)}\xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{d}}\mathscr{N}(0,1/4),$$

因为 $\sum^n{}_{j=1}\frac{1}{\kappa_2(j)^2}\sim\frac{1}{4}\log n\,{}_n\xrightarrow{\to\infty}\infty$。

类似地改写，并再次应用斯卢茨基定理，可得

$$\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{\log n}}\big(\|\widetilde{X}^{(n)}\|_\infty-\mu_{2,n}\big)=\frac{\frac{\widetilde{Y}_n}{\sqrt{\log n}}-\frac{n^{-1/2}}{\sqrt{\log n}}\Big(\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{\kappa_2(j)}\Big)(\widetilde{Z}_n+1)}{1+n^{-1/2}\widetilde{Z}_n+n^{-1/2}}\xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{d}}\mathscr{N}(0,1/4),$$

因为 $n^{-1/2}\Big(\sum^n{}_{j=1}\frac{1}{\kappa_2(j)}\Big)\asymp\frac{1}{\sqrt{\log n}}\,n\xrightarrow{\to\infty}0$。

为了证明 (iii)，现在令 $q>2$。我们将证明向量 $\sqrt{n}(Y_n-\mu_{q,n},Z_n-1)$ 依概率收敛于一个高斯随机向量，然后利用泰勒定理完成证明。我们有

$$\sqrt{n}(Y_n-\mu_{q,n},Z_n-1)=\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{j=1}^{n}\Big(\frac{n^{1/q}}{\kappa_q(j)}(E_j-1),E_j-1\Big)+\Big(0,\frac{E_{n+1}}{\sqrt{n}}\Big).$$

注意，由于 $E\sqrt{}^{n+1}$ n 依概率趋于零，根据斯卢茨基定理，在讨论依分布收敛时可以省略最后一个加项。对于右侧的随机向量之和，我们验证它满足多元中心极限定理的李雅普诺夫条件（例如，参见 [45, 定理 3.2.2]）。为此，令 $\delta>0$，其中 $q>2+\delta$，并计算

$$\begin{aligned}n^{-(2+\delta)/2}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}\Big|\frac{n^{1/q}}{\kappa_q(j)}E_j\Big|^{2+\delta}&\lesssim n^{-(2+\delta)/2}\sum_{i=1}^{n}\Big|\frac{n^{1/q}}{\kappa_q(j)}\Big|^{2+\delta}\\&\lesssim_q n^{(2+\delta)(-1/2+1/q)}\sum_{i=1}^{n}j^{-(2+\delta)/q}\lesssim_q n^{1-(2+\delta)/2}\xrightarrow{n\to\infty}0.\end{aligned}$$

接下来需要计算协方差矩阵的极限。对于所有 $n\Big[\sum^n{}_{j=1}E_j\Big]=1$，我们有 $\mathrm{Var}\Big[\frac{1}{\sqrt{}}$，以及

$$\lim_{n\to\infty}\mathrm{Var}\Big[\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{j=1}^{n}\frac{n^{1/q}}{\kappa_q(j)}E_j\Big]=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{n^{2/q}}{\kappa_q(j)^2}=\frac{1}{q^2}\int_0^1x^{-2/q}\mathrm{d}x=\frac{1}{q(q-2)}=:s_q^2,$$

其中我们利用了当$j\to\infty$时，$\kappa_q(j)\sim qj^{1/q}$。类似地，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\mathrm{Cov}\Big[\frac{n^{1/q}}{\kappa_q(j)}E_j,E_j\Big]=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{n^{1/q}}{\kappa_q(j)}=\frac{1}{q}\int_0^1x^{-1/q}\mathrm{d}x=\frac{1}{q-1}=:\mu_{q,\infty}.$$

因此，极限协方差矩阵为

$$\Sigma:=\lim_{n\to\infty}\mathrm{Cov}\big[\sqrt{n}(Y_n-\mu_{q,n},Z_n-1)\big]=\begin{pmatrix}s_q^2&\mu_{q,\infty}\\\mu_{q,\infty}&1\end{pmatrix}$$

并且我们推导出中心极限定理

$$\sqrt{n}(Y_n-\mu_{q,n},Z_n-1)\xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{d}}(Y,Z)\sim\mathscr{N}(0,\Sigma).\tag{13}$$

为了证明Y_n/Z_n的中心极限定理，请注意，函数$(x,y)\mapsto F(x,y)=x/y$关于x、$y>0$且$\nabla F(x,y)=(1/y,-x/y^2)^\top$连续可微。因此，根据泰勒定理，

$$\sqrt{n}\big(F(Y_n,Z_n)-F(\mu_{q,n},1)\big)=\sqrt{n}\big((Y_n,Z_n)-(\mu_{q,n},1)\big)\nabla F(\mu_{q,n},1)^\top+e_{n,q},\tag{14}$$

其中随机误差项为

$$e_{n,q}:=\|\sqrt{n}(Y_n-\mu_{q,n},Z_n-1)\|_2\,h(Y_n-\mu_{q,n},Z_n-1),$$

其中h是一个函数，当其自变量趋于零时，该函数也趋于零。由式 (13) 中的中心极限定理可知，随机变量$\|\sqrt{n}(Y_n-\mu_{q,n},Z_n-1)\|_2$依概率有界，而$h(Y_n-\mu_{q,n},Z_n-1)$依概率趋于零。因此，误差满足$e_{n,q}\xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}}0$。对于式 (14) 右侧的第一项，我们注意到$\nabla F(\mu_{q,n},1)^\top\xrightarrow{n\to\infty}\nabla F(\mu_{q,\infty},1)^\top$。因此，由式 (13) 和式 (14)，结合斯卢茨基定理，可得

$$\sqrt{n}(F(Y_n,Z_n)-F(\mu_{q,n},1))\xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{d}}(Y,Z)\nabla F(\mu_{q,\infty},1)^\top\sim\mathcal{N}(0,\sigma_q^2)$$

with

$$\sigma_q^2:=(1,-\mu_{q,\infty})\Sigma(1,-\mu_{q,\infty})^\top=\frac{1}{q(q-1)^2(q-2)}.$$

这就推出了所声称的关于$\|\tilde{X}^{(n)}\|_\infty$的中心极限定理。 □

3.4 定理 D 的证明

现在我们给出定理 D 的证明，即随机点在归一化洛伦兹球中时，其ℓ_r^n范数满足的弱大数定律。引理 6 同样是一个关键要素。

定理 *D* 的证明。令$r<\infty$，并首先假设$\tilde{X}^{(n)}$在$\widetilde{\mathbb{D}}_{q,1}^n$上均匀分布。首先，由于$\ell_r^n$范数具有置换不变性，我们有

$$n^{-1}\|\widetilde{X}^{(n)}\|_r^r=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n\Big((\widetilde{X}_i^{(n)})^*\Big)^r.$$

因此，根据引理 6，并采用与定理 B 证明中相同的论证，

$$\Big|n^{-1}\|\widetilde{X}^{(n)}\|_r^r-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n G_q\Big(\frac{i-1}{n}\Big)^r\Big|\xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}}0.$$

因此，只需计算确定性极限

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n G_q\Big(\frac{i-1}{n}\Big)^r=\int_0^1 G_q(x)^r\,\mathrm{d}x=\begin{cases}\int_0^1\Big(\frac{1}{q-1}(1-x^{1-1/q})\Big)^r\,\mathrm{d}x & :q<\infty,\\ \int_0^1(1-x)^r\,\mathrm{d}x & :q=\infty.\end{cases}\tag{15}$$

该积分可通过代换和贝塔函数求得。
情形$r=\infty$可直接由以下事实以及引理 6 得出：$\|\tilde{X}^{(n)}\|_\infty=(\tilde{X}_1^{(n)})^*$。
根据推论 1，只需将所得常数乘以$q\,2e^{1/q}$（对应$q<\infty$），以及乘以$1\,2$（对应$q=\infty$），即可得到$X^{(n)}$在$\mathbb{D}_{q,1}$中均匀分布时的结果。 □

最后，我们给出归一化 Lorentz 球与 ℓ_r^n球的交集的渐近体积阈值结果的证明。证明基于关于 ℓ_r^n范数的弱大数定律（见定理 D）。回顾一下，对于每个$r \in (0,\infty)$

$$\mathrm{vol}_n(\mathbb{B}_r^n)^{1/n} = \frac{2\Gamma(1+\frac{1}{r})}{\Gamma\big(1+\frac{n}{r}\big)^{1/n}} \sim 2\Gamma\Big(1+\frac{1}{r}\Big)(er)^{1/r} n^{-1/r}, \quad \text{as } n \to \infty, \tag{16}$$

至少自狄利克雷的工作 [17] 以来，这一点便已为人所知。

推论 *3* 的证明。我们先证明 $q < \infty$ 时的结论。对于在 $\mathbb{D}_q^n$ 上均匀分布的 $X^{(n)}$,1，我们可以写成

$$\mathrm{vol}_n\big(\mathbb{D}_{q,1}^n \cap t\mathbb{D}_r^n\big) = \mathbb{P}\left[\|X^{(n)}\|_r \le \frac{t}{\mathrm{vol}_n(\mathbb{B}_r^n)^{1/n}}\right].$$

然后，简单地改写前一个表达式，可得

$$\mathrm{vol}_n\big(\mathbb{D}_{q,1}^n \cap t\mathbb{D}_r^n\big) = \mathbb{P}\left[n^{-1/r}\|X^{(n)}\|_r - m_{q,r} \le \frac{t}{n^{1/r}\mathrm{vol}_n(\mathbb{B}_r^n)^{1/n}} - m_{q,r}\right],$$

其中 $m_{q,r}$ 与定理 D 中相同；特别地，当 $r < \infty$ 时，

$$m_{q,r} = \frac{1}{2e^{1/q}} \frac{q}{q-1} \left(\frac{\Gamma(r+1)\Gamma\Big(1+\frac{q}{q-1}\Big)}{\Gamma\Big(r+1+\frac{q}{q-1}\Big)}\right)^{1/r}.$$

由式 (16) 中给出的体积半径渐近性质，我们知道

$$\frac{1}{n^{1/r}\mathrm{vol}_n(\mathbb{B}_r^n)^{1/n}} \xrightarrow{n\to\infty} c_{q,r} := \begin{cases} \frac{1}{2(er)^{1/r}\Gamma(1+1/r)} & : r < \infty \\ \frac{1}{2} & : r = \infty. \end{cases}$$

因此，根据定理 D 中的弱大数定律，当$tc_{q,r} > m_{q,r}$时，概率趋于 1；而当 $tc_{q,r} < m_{q,r}$时，概率趋于0。因此，该结论在阈值为 $A_{q,r} = c_{q,r}(m_{q,r})^{-1}$ 时成立。若 $q = \infty$，则可类似地利用 $m_{\infty,r} = \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{r+1}\Big)^{1/r}$ 进行证明。证毕。 □

4 一般 $p > 1$ 的猜想——最大熵启发式

下面说明促使我们提出猜想 1，尤其是其中微分方程的启发式思路。我们的论证基于最大熵考量 [52], ，但并不严谨（参见 [31] ，其中针对奥尔利奇球给出了类似的严谨结果）。我们用 $\mathscr{M}_1(\mathbb{R}_+)$ 表示 $\mathbb{R}_+$ 上配备弱拓扑的概率测度集合，它是一个波兰空间。由于洛伦兹球属于 1-对称凸体这一类，我们可以将考量限制在正正交象限内（另见引理 7），并考虑一个均匀分布的随机向量 $X^{(n)}$ 在

$$\widetilde{\mathbb{D}}_{q,p,+}^n = \left\{x \in \mathbb{R}_+^n : \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \Big(\frac{i}{n}\Big)^{p/q-1} |x_i^*|^p \le 1\right\}.$$

现在考虑一列独立同分布的“随机变量”$Y_1, Y_2, \ldots$，假设它们按照无限勒贝格测度 λ on $\mathbb{R}_+$“均匀分布”。

在给定$Y(n) := (Y_1, \ldots, Y_n) \in \widetilde{\mathbb{D}}^n_{q,p,+}$的条件下（这称为能量约束），“随机向量”$Y^{(n)}$在$\widetilde{\mathbb{D}}^n_{q,p,+}$中均匀分布。最大熵原理指出（在适当条件下），与$Y(n)$相关联的随机经验概率测度$L_{Y^{(n)}}$，其中对于$x \in \mathbb{R}^n$

$$L_x := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \delta_{x_i},$$

当以留在闭凸集 $K \subset \mathscr{M}_1(\mathbb{R}_+)$ 中这一稀有事件为条件时，收敛到使相对熵最小的测度 μ^*

$$H(\mu|\lambda) := \begin{cases} \int_0^\infty p(x)\log p(x)\,\lambda(\mathrm{d}x) & : p = \frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}\lambda} \text{ exists}, \\ \infty & \text{otherwise} \end{cases}$$

在K上（参见 Sanov 定理 [52, 第 5 节2] 及其关于无限测度的版本 [6]）。为了将条件$Y(n) \in \widetilde{\mathbb{D}}^n_{q,p,+}$改写为经验测度的形式，我们使用分位数函数（即累积分布函数的反函数）。对于任意概率测度 $\mu \in \mathscr{M}_1(\mathbb{R}_+)$，它定义为

$$Q_\mu \colon [0,1] \to [0,\infty], \quad Q_\mu(t) := \inf\{s \geq 0 \colon \mu([0,s]) \geq t\}.$$

下面的引理可由一个简单的改写得到，这种改写也出现在 L 统计量的分析中，参见例如 [11]。

引理 8. 设 $n \in \mathbb{N}$。对于任意 $x \in \mathbb{R}^n_+$，有

$$x \in \widetilde{\mathbb{D}}^n_{q,p,+} \iff L_x \in K_n := \left\{\mu \in \mathscr{M}_1(\mathbb{R}_+) \colon \int_0^1 Q_\mu(t)^p J_n(t)\,\mathrm{d}t \leq 1\right\},$$

其中

$$J_n(t) := \sum_{i=1}^{n} \left(1 - \frac{i-1}{n}\right)^{p/q-1} \mathbb{1}_{(\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}]}(t).$$

证明。 根据定义

$$x \in \widetilde{\mathbb{D}}^n_{q,p,+} \quad \iff \quad \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{i}{n}\right)^{p/q-1} |x_i^*|^p \leq 1.$$

此外，我们注意到，对于 $t \in [0,1]$

$$Q_{L_x}(t) = \inf\{s \geq 0 : L_x([0,s]) \geq t\} = \inf\left\{s \geq 0 \colon \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \delta_{x_i}([0,s]) \geq t\right\} \geq 0.$$

函数 $s \mapsto {}^1{}_n\sum^n{}_{i=1}\delta_{x_i}([0,s])$ 返回不大于 s 的坐标所占的比例。因此，在 t处取值的分位数函数，就是使这一比例仍大于 t 的最小 s。如果 $t \in (\,{}_{i-1}{}_n, {}_i{}_n\,]$，那么这个值必定是 $s = x^*{}_{n-i+1}$（第 i^{th} 小的坐标），因为在此之后，至少有 i 个 n 个坐标不大于 s，而任何更小的值都不满足这一条件。因此，我们有

$$Q_{L_x}(t) = x^*_{n-i+1} \quad \text{for } t \in \left(\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right], \; i \in \{1, \ldots, n\}.$$

现在我们进一步观察到，对于所有 $t \in [0,1]$,

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{i}{n}\right)^{p/q-1} |x_i^*|^p = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \left(1 - \frac{i-1}{n}\right)^{p/q-1} |x^*_{n-i+1}|^p$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} J_n(t) Q_{L_x}(t)^p \mathbb{1}_{(\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}]}(t).$$

由于两个函数在$t \in (^{i-1}\,n, i\,n]$, 上都是常数，因此因子 $1/n$ 可以解释为这些函数在该区间上的积分，即：

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} J_n(t) Q_{L_x}(t)^p \mathbb{1}_{(\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}]}(t) = \sum_{i=1}^{n} \int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} J_n(t) Q_{L_x}(t)^p \,\mathrm{d}t = \int_0^1 J_n(t) Q_{L_x}(t)^p \,\mathrm{d}t.$$

这就立即证明了该引理。 □

根据引理 8，在我们的设定中有

$$Y^{(n)} \in \widetilde{\mathbb{D}}^n_{q,p,+} \iff L_{Y^{(n)}} \in K_n.$$

若要应用所用吉布斯条件化原理的变体（例如 [21] 和 [36], 中的变体），我们必须考虑到集合 K_n 依赖于 n 这一事实。当 n 足够大时，它将近似等于集合

$$K := \left\{ \mu \in \mathscr{M}_1(\mathbb{R}_+) \colon \int_0^1 Q_\mu(t)^p J(t) \,\mathrm{d}t \le 1 \right\},$$

其中

$$J \colon [0,1] \to \mathbb{R}, \quad J(t) = (1-t)^{p/q-1}, \quad t \in [0,1],$$

是数列 J_n, $n \in \mathbb{N}$ 的逐点极限。我们略去技术细节。

为了在 K 中的所有测度上最小化相对熵，显然可以忽略相对熵为 ∞ 的非绝对连续测度。令 F_μ 为极小值点的分布函数，$F'_\mu = \mathrm{d}\mu\,\mathrm{d}\lambda$ 为其概率密度函数，并令 $F_\mu^{-1} = Q_\mu$ 为分位数函数。利用代换 $x = F_\mu^{-1}(y)$，以及 $Q'_\mu(y) = (F_\mu^{-1})'(y) = 1/F'_\mu(F_\mu^{-1}(y))$ 这一事实，可以写成

$$H(\mu|\lambda) = \int_0^\infty F'_\mu(x) \log F'_\mu(x)\, \lambda(\mathrm{d}x) = \int_0^1 \log F'_\mu(F_\mu^{-1}(y))\, \lambda(\mathrm{d}y) = -\int_0^1 \log Q'_\mu(y)\, \lambda(\mathrm{d}y).$$

这将导出以下变分问题

$$\begin{aligned} \max \quad & \int_0^1 \log Q'(x) \,\mathrm{d}x \\ \text{s.t.} \quad & Q \colon [0,1] \to [0,\infty] \\ & Q \text{ is nondecreasing and differentiable} \\ & \int_0^1 Q(x)^p (1-x)^{p/q-1} \,\mathrm{d}x \le 1. \end{aligned}$$

其解将是相对熵极小化者 $\mu^* \in K$ 的分位数函数，也就是假设的极限分布的分位数函数。为方便起见，我们设 $\alpha := p/q - 1 \in [-1,0]$。接下来，我们将以启发式方法求解这一问题，并推导相应分布函数的微分方程。

我们来计算变分，并设$P := Q + \varepsilon g$，其中 $\varepsilon > 0$ 较小，且g是一个连续可微函数： $[0,1] \to \mathbb{R}$，满足$g(0) = 0$:

$$\int_0^1 \log(Q+\varepsilon g)' \mathrm{d}x = \int_0^1 \log Q'(x) \,\mathrm{d}x + \int_0^1 \log\Big(1 + \varepsilon \frac{g'(x)}{Q'(x)}\Big) \mathrm{d}x.$$

我们预期，当 ε 变小时，以下近似

$$\int_0^1 \log\Big(1+\varepsilon\frac{g'(x)}{Q'(x)}\Big)\,\mathrm{d}x = \varepsilon\int_0^1 \frac{g'(x)}{Q'(x)}\,\mathrm{d}x + o(\varepsilon)$$

是有效的，因此

$$\varepsilon^{-1}\Big(\int_0^1 \log(Q+\varepsilon g)'\,\mathrm{d}x - \int_0^1 \log Q'(x)\,\mathrm{d}x\Big) \xrightarrow{\varepsilon\to 0} \int_0^1 \frac{g'(x)}{Q'(x)}\mathrm{d}x.$$

现在我们考察这些约束并计算

$$\int_0^1 \big(Q(x)+\varepsilon g(x)\big)^p (1-x)^\alpha\,\mathrm{d}x = \int_0^1 Q(x)^p\Big(1+\varepsilon\frac{g(x)}{Q(x)}\Big)^p (1-x)^\alpha\,\mathrm{d}x.$$

同样，我们预期当 ε 变小时，近似

$$\begin{aligned}\int_0^1 Q(x)^p\Big(1+\varepsilon\frac{g(x)}{Q(x)}\Big)^p (1-x)^\alpha\,\mathrm{d}x &= \int_0^1 Q(x)^p\Big(1+\varepsilon\frac{pg(x)}{Q(x)}\Big)(1-x)^\alpha\,\mathrm{d}x + o(\varepsilon)\\ &= \int_0^1 Q(x)^p(1-x)^\alpha\mathrm{d}x + \varepsilon\int_0^1 pg(x)Q(x)^{p-1}(1-x)^\alpha\,\mathrm{d}x + o(\varepsilon)\end{aligned}$$

是有效的。因此，

$$\varepsilon^{-1}\Big(\int_0^1 (Q+\varepsilon g)^p(1-x)^\alpha\mathrm{d}x - \int_0^1 Q(x)^p(1-x)^\alpha\,\mathrm{d}x\Big) \xrightarrow{\varepsilon\to 0} \int_0^1 pg(x)Q(x)^{p-1}(1-x)^\alpha\,\mathrm{d}x.$$

因此，我们只允许满足 $g\colon [0,1]\to\mathbb{R}$、且 $g(0)=0$ 的函数，以及

$$p\int_0^1 g(x)Q(x)^{p-1}(1-x)^\alpha\,\mathrm{d}x = 0.$$

极大化函数的一个必要条件是，对于每个这样的 g,

$$0 = \int_0^1 \frac{g'(x)}{Q'(x)}\,\mathrm{d}x = \frac{g(1)}{Q'(1)} - \int_0^1 g(x)\Big(\frac{1}{Q'}\Big)'(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 g(x)\Big(\frac{\delta_1(x)}{Q'(1)} - \Big(\frac{1}{Q'}\Big)'(x)\Big)\,\mathrm{d}x,$$

在第二个等式中，我们使用了分部积分。现在我们使用以下结果。

引理9。 设 μ_1,μ_2 是 $[0,1]$ 上的符号测度，满足：若 $\int_0^1 g(x)\mu_1(\mathrm{d}x)=0$ 对某个 $g\in C[0,1]$ 成立，且 $g(0)=0$，那么 $\int_0^1 g(x)\mu_2(\mathrm{d}x)=0$ 也成立。于是，$\mu_2=\alpha\mu_1+\beta\delta_0$ 存在某些常数 $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$。

应用于上述情形，我们可以得出存在某个 $c\neq 0$，使得对所有 $x\in[0,1]$,

$$\Big(\frac{1}{Q'}\Big)'(x) = cQ(x)^{p-1}(1-x)^\alpha \quad\text{and}\quad \frac{1}{Q'(1)} = 0.$$

经过代换可得

$$F''(x) = cF'(x)(1-F(x))^\alpha x^{p-1},\quad x\in\mathbb{R}_+.$$

必有 $F(0)=0$，且存在 $r>0$，使得当 $x\geq$ 时，$F(x)=1$ r（$r=+\infty$ 也是可能的）。此外，关于 Q 的条件可转化为（若我们取最大值）

$$1 = \int_0^r x^p(1-F(x))^\alpha F'(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{c}\int_0^r xF''(x)\,\mathrm{d}x.$$

利用 $F'(r)=0$，由 $Q'(1)=+\infty$ 这一事实可知；再结合分部积分，我们看到右端为 -1 c。因此，我们得出 $c=-1$，从而得到所需的微分方程。

参考文献

[1] M. Abramowitz 和 I. A. Stegun。数学函数手册：含公式、图表和数学表格。美国国家标准局应用数学丛书，第55号。美国政府印刷局，华盛顿哥伦比亚特区，1964年。[2] D. Alonso-Gutiérrez 和 J. Prochno。通过中等偏差和吉布斯测度研究奥尔利奇球中随机向量的薄壳集中。*J. Funct. Anal.*，282(1)：论文编号109291，共35页，2022年。[3] D. Alonso-Gutiérrez、J. Prochno 和 C. Thäle。高维 ℓ_p^n球的随机投影的高斯涨落。伯努利，25(4A)：3139–3174，2019年。[4] D. Alonso-Gutiérrez、J. Prochno 和 C. Thäle。大偏差、中等偏差与 KLS 猜想。*J. Funct. Anal.*，280(1)：108779，共33页，2021年。[5] Z. Altshuler。Lorentz 序列空间中的一致凸性。*Israel J. Math.*，20(3-4)：260–274，1975年。[6] V. Bakhtin 和 E. Sokal。无限测度的 Kullback–Leibler 信息函数。熵，18(12)：448，2016年。[7] F. Barthe、O. Guédon、S. Mendelson 和 A. Naor。研究 ℓ_p^n球几何的概率方法。概率年刊，33(2)：480–513，2005年。[8] F. Barthe 和 P. Wolff。高维奥利奇球的体积性质。*arXiv* 电子印本，页码 arXiv:2106.01675，2021年6月。[9] C. Bennett 和 R. Sharpley。算子插值，纯数学丛书第129卷。学术出版社，波士顿，马萨诸塞州，1988年。[10] N. H. Bingham、C. M. Goldie 和 J. L. Teugels。正则变差，数学及其应用百科全书第27卷。剑桥大学出版社，剑桥，1987年。[11] H. Boistard。*L*统计量的大偏差。*Statist. Decisions*，25(2)：89–125，2007年。[12] S. Brazitikos、A. Giannopoulos、P. Valettas 和 B.-H. Vritsiou。各向同性凸体的几何，数学调查与专著第196卷。美国数学会，罗德岛州普罗维登斯，2014年。[13] A. DasGupta。统计学与概率的渐近理论。施普林格统计学丛书。施普林格，纽约，2008年。[14] H. A. David 和 H. N. Nagaraja。次序统计量。Wiley 概率与统计丛书。Wiley-Interscience [John Wiley & Sons]，霍博肯，新泽西州，第三版，2003年。[15] A. Dembo 和 O. Zeitouni。大偏差技术与应用，随机建模与应用概率第38卷。施普林格出版社，柏林，2010年。第二版（1998年）的修订重印本。

[16] R. A. DeVore 和 G. G. Lorentz。《构造性逼近》，收录于数学科学基础丛书第303卷 *[*数学科学基本原理*]*。施普林格出版社，柏林，1993年。[17] P. G. L. Dirichlet。《论一种确定多重积分的新方法》。纯粹与应用数学杂志，第164–168页，1839年。[18] A. Doležalová 和 J. Vybíral。有限维洛伦兹空间单位球的体积。逼近理论杂志，255：105407，20，2020年。[19] D. E. Edmunds 和 Y. Netrusov。熵数与插值。数学年刊，351(4)：963–977，2011年。[20] S. Foucart 和 H. Rauhut。《压缩感知数学导论》。应用与数值调和分析。比克豪泽/施普林格，纽约，2013年。[21] L. Frühwirth 和 J. Prochno。高维奥利茨球的 Sanov型大偏差与条件极限定理。*arXiv* 电子预印本，第 arXiv:2111.04691 页，2021年11月。[22] N. Gantert、S. S. Kim 和 K. Ramanan。ℓ^p 球随机投影的大偏差。概率年刊，45(6B)：4419–4476，2017年。[23] L. Grafakos。《现代傅里叶分析》，收录于数学研究生教材第250卷。施普林格，纽约，第三版，2014年。[24] C. Hao、A. Kami´nska 和 N. Tomczak-Jaegermann。凸性或凹性常数为一的奥利茨空间。数学分析与应用杂志，320(1)：303–321，2006年。[25] E. Hewitt 和 K. Stromberg。《实分析与抽象分析》。数学研究生教材，第25号。施普林格出版社，纽约—海德堡，1975年。实变量函数理论的现代论述，第三次印刷。[26] A. Hinrichs 和 C. Michels。对称序列空间之间恒等算子的格尔范德数。*Positivity*，10(1)：111–133，2006年。[27] W. B. Johnson、B. Maurey、G. Schechtman 和 L. Tzafriri。巴拿赫空间中的对称结构。美国数学会回忆录，19(217)：v+298，1979年。[28] S. G. G. Johnston 和 J. Prochno。广义奥利茨球的麦克斯韦原理。亨利·庞加莱研究所概率与统计年刊（即将出版），第1–25页， 2023+。[29] M. Juhos、Z. Kabluchko 和 J. Prochno。混合范数序列空间的极限定理及其在体积分布中的应用。*arXiv* 电子预印本，第 arXiv:2209.08937 页，2022年9月。[30] M. Juhos 和 J. Prochno。*p*-椭球交集的谱平坦性与体积。复杂性杂志，70：21，2022年。文章编号101617。

[31] Z. Kabluchko 和 J. Prochno。最大熵原理与奥利茨球的体积性质。数学分析与应用杂志，495(1)：第124687号论文，19，2021年。[32] Z. Kabluchko、J. Prochno 和 C. Thäle。ℓ_p^n-球中随机向量的高维极限定理。当代数学通讯，21(1)：1750092，30，2019年。[33] Z. Kabluchko、J. Prochno 和 C. Thäle。经典矩阵系综中单位球的交集。以色列数学杂志，239(1)：129–172，2020年。[34] A. Kami´nska。奥利茨空间局部一致凸性的判据。数学研究，79(3)：201–215，1984年。[35] S. S. Kim、Y.-T. Liao 和 K. Ramanan。随机多维投影的渐近薄壳条件与大偏差。应用数学进展，134：第102306号论文，64，2022年。[36] S. S. Kim 和 K. Ramanan。高维 ℓ^p-球面的条件极限定理。应用概率杂志，55(4)：1060–1077，2018年。[37] A. Klenke。《概率论》。Universitext。施普林格出版社（伦敦）有限公司，伦敦，2008年。全面课程，译自2006年德文原版。[38] P. Kosmol 和 D. Müller-Wichards。《函数空间中的优化》。De Gruyter，柏林、纽约，2011年。[39] S. Kwapie´n 和 C. Schütt。若干组合与概率不等式及其在巴拿赫空间理论中的应用。数学研究，82(1)：91–106，1985年。[40] J. Lindenstrauss 和 L. Tzafriri。《经典巴拿赫空间 I》。数学及其边界领域成果，第92卷。施普林格出版社，柏林—纽约，1977年。序列空间。[41] G. G. Lorentz。若干新的函数空间。数学年刊，51(1)：37–55，1950年。[42] G. G. Lorentz。论空间 Λ理论。太平洋数学杂志，1(3)：411–429，1951年。[43] J. Marcinkiewicz。论算子的插值。巴黎科学院通讯，208：1272–1273，1939年。[44] A. M. Mathai。《几何概率导论》，收录于统计分布与应用模型第1卷。Gordon and Breach Science Publishers，阿姆斯特丹，1999年。分布方面及其应用。[45] M. M. Meerschaert 和 H.-P. Scheffler。《相互独立随机向量和的极限分布》。Wiley 概率与统计丛书：概率与统计。约翰·威立父子公司，纽约，2001年。理论与实践中的重尾。[46] A. Naor。l_p^n球面上的曲面测度与锥测度。美国数学会汇刊，359(3)：1045–1079，2007年。

[47] A. Naor 和 D. Romik. 将球面的曲面测度投影到 ℓ_p^n 上. 亨利·庞加莱研究所概率与统计年刊，39(2):241–261，2003年。[48] J. Prochno. 奥利奇-洛伦兹空间到 L_1 的嵌入. 代数与分析，32(1):78–93，2020年。[49] J. Prochno 和 C. Schütt. 组合不等式与 L_1 的子空间. 数学研究，211(1):21–39，2012。[50] J. Prochno、C. Thäle 和 N. Turchi. ℓ_p^n球的几何：经典结果与最新进展. 载于《概率学进展：高维概率 VIII》。Birkhäuser，2020年。[51] S.T. Rachev 和 L. Rüschendorf. 球面上分布的近似独立性及其稳定性. 概率年刊，19(3):1311–1337，1991。[52] F. Rassoul-Agha 和 T. Seppäläinen. 《大偏差课程：兼论吉布斯测度》，数学研究生教材第162卷。美国数学会，罗德岛州普罗维登斯，2015年。[53] S. Reisner. 巴拿赫格中的因子分解定理及其在洛伦兹空间中的应用. 傅里叶研究所年刊（格勒诺布尔），31(1):viii, 239–255，1981。[54] S. Reisner. 关于洛伦兹函数空间与序列空间的对偶空间. 印第安纳大学数学杂志，31(1):65–72，1982。[55] G. Schechtman 和 M. Schmuckenschläger. 关于两个 L_p^n 球交集体积的另一则评论. 载于《泛函分析的几何方面》（1989–90），数学讲义第1469卷，第174–178页。施普林格，柏林，1991年。[56] G. Schechtman 和 J. Zinn. 关于两个 L_p^n 球交集的体积. 美国数学会汇刊，110(1):217–224，1990。[57] G. Schechtman 和 J. Zinn. l_p^n 球上的集中现象. 载于《泛函分析的几何方面》，数学讲义第1745卷，第245–256页。施普林格，柏林，2000年。[58] M. Schmuckenschläger. ℓ_p^n球交集的中心极限定理与体积. 专献几何，85(1- 3):189–195，2001年。[59] C. Schütt. 关于巴拿赫空间中单位球的体积. 数学汇刊，47(3):393–407，1982年。[60] C. Schütt. 对称巴拿赫空间之间对角算子的熵数. 逼近理论杂志，40(2):121–128，1984年。[61] C. Schütt. 同构于 L^1 子空间的洛伦兹空间. 美国数学会汇刊，314(2):583–595，1989年。[62] C. Schütt. 2-凹奥利奇空间到 L^1 的嵌入. 数学研究，113(1):73–80，1995年。

[63] A.-S. Sznitman. 混沌传播专题. 载于圣弗卢尔概率暑期学校 *XIX—1989*，数学讲义第*1464*卷，第165–251页。施普林格，柏林，1991年。

[64] N. Tomczak-Jaegermann。《Banach–Mazur 距离与有限维算子理想》，Pitman 纯粹与应用数学专著与综述》第38卷。Longman Scientific & Technical，哈洛；并由约翰·威立父子公司在美国纽约联合出版，1989年。

ZAKHAR KABLUCHKO：明斯特大学数学与计算机科学学院，Orléans-Ring 10，48149 明斯特，德国。电子邮件：zakhar.kabluchko@uni-muenster.de

JOSCHA PROCHNO：帕绍大学计算机科学与数学学院，Dr.-Hans-Kapfinger-Straße 30，94032 帕绍，德国。电子邮件：joscha.prochno@uni-passau.de

MATHIAS SONNLEITNER：帕绍大学计算机科学与数学学院，Dr.-Hans-Kapfinger-Straße 30，94032 帕绍，德国。电子邮件：mathias.sonnleitner@uni-passau.de