arXiv:2303.04779v1 [math.DS] 8 Mar 2023

链环与动力学

瓦列里·巴尔达科夫、塔季扬娜·科兹洛夫斯卡娅和奥尔加·波钦卡

Abstract. 纽结自然地作为流的周期轨道出现在连续动力系统中。然而，离散动力系统也与纽结与链环理论密切相关。例如，对于皮克斯顿微分同胚，Hopf 纽结的等价类是系统拓扑共轭的完全不变量；该纽结是流形 $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$ 中不稳定鞍点分离曲线的轨道空间。本文区分出一类三维 Morse-Smale 微分同胚，其拓扑共轭的完全不变量是 $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$ 中某个链环的等价类。

我们证明，若 M 是 $\mathbb{S}^3$ 中的链环补空间（特别地，是 $\mathbb{S}^3$），或是亏格为 $g \geq 0$ 的把手体 H_g，或是闭、连通、可定向三维流形，则 M 中驯链环的等价类集合是可数的。由此推论可得，$\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$ 中存在可数多个驯链环等价类。我们证明，任意本质链环都可以由所讨论类别中的微分同胚实现。

关键词：纽结、链环、链环的等价类、辫子、混合辫、幺群、3-流形。

*2010*年数学主题分类：主要分类 57M27；次要分类 37A17、37E15、20F36、57M25。

Contents

1. 引言 2 2. 预备知识 5 2.1. 动力系统 5 2.2. 辫子、链环与缠结 5 3. G 微分同胚的动力学 7 3.1. 微分同胚图式 $f \in G$ 7
3.2. 链环的等价性等同于图式的等价性 8 3.3. 通过微分同胚实现链环 9 4.
$\mathbb{S}^3$ 12中链环与空间图的计数 5. 三维流形中链环的计数 13 6.
$\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$ 14中的链环
致谢 15 参考文献 15

日期：2023年3月9日。

1. 引言

动力系统学家使用纽结与链环不变量来描述流的周期轨道，从而更好地理解其背后的常微分方程。然而，离散动力系统领域的专家也积极运用纽结与链环理论来描述动力学的不变量。特别是，对于定义在任意三维流形上的某些莫尔斯–斯梅尔微分同胚，其动力学可以由鞍点分离轨的行为完全确定（在拓扑共轭意义下）；而鞍点分离轨的行为又可由流形 $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$中的一个纽结或链环来描述。

请注意，任意 Morse-Smale三维微分同胚的拓扑分类已在 [6] 中完成，其所使用的完全不变量是某个未知三维流形中一对二维层状结构的等价类。由于三维流形的分类（按同胚分类）仍是一个开放问题，因此自然希望选取那些以研究充分的对象作为不变量的微分同胚。例如，对于一类非游荡集由四个双曲不动点组成的三维微分同胚，其拓扑共轭的完全不变量是 $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$[5], [23]中一个Hopf结的等价类。本文区分出一类Morse-Smale三维微分同胚，其拓扑共轭的完全不变量是 $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$中一个本质链环的等价类。

更详细地说。设 $f\colon\ M^3 \to M^3$ 是定义在一个闭连通可定向三维流形上的莫尔斯–斯梅尔微分同胚。设 $\Omega_q,\ \ q \in \{0,1,2,3\}$ 为其所有满足 $\dim\ W^u_p = q$的周期点的集合p 。用 $|\Omega_q|$ 表示集合 Ω_q中的点数。注意，$|\Omega_0| \geqslant 1,\ \ |\Omega_3| \geqslant 1$ （例如参见 [24]）。同时，如果 $|\Omega_0| = 1$ 或 $|\Omega_3| = 1$，则$M^3 \cong \mathbb{S}^3$ [9]。以下始终假设集合 Ω_3 由单个源点 α组成。在这种情况下，集合 Ω_2 为空 [10]。如果 $\Omega_1 = \emptyset$，则 f 是源汇型微分同胚，并且所有此类微分同胚彼此拓扑共轭 [11]。如果 $|\Omega_1| = 1$，则f 是皮克斯顿微分同胚，而此类微分同胚的拓扑分类完全由 Hopf 纽结的等价类 [5]决定。以下始终假设 $|\Omega_1| > 1$。将集合 Ω_1中的鞍点轨道重新编号:

$$\mathcal{O}_{\sigma_1}, \ldots, \mathcal{O}_{\sigma_k}$$

并将 σ_i 的周期记为 m_i。那么对于 $i \in \{1, \ldots, k\}$，集合 $S_i = W^s_{\sigma_i} \cup \alpha$ 同胚于一个拓扑嵌入 $\mathbb{S}^3$ [11] 中的 2-球面。

将满足以下条件的莫尔斯–斯梅尔微分同胚集合记为 $G\colon\ \mathbb{S}^3 \to \mathbb{S}^3$，使得 2-球面 $S_1, \ldots, S_k$ 在 $\mathbb{S}^3$ 中围成三维球 $B_1, \ldots, B_k$，且它们的内部两两不相交。对于 $f \in G$，令 $B = \bigcup\limits_{i=1}^{k} \left(\bigcup\limits_{j=0}^{m_i-1} f^j(B_i) \right)$。那么集合 $\mathbb{S}^3 \setminus B$ 恰好包含微分同胚 f 的一个周期点，该点是一个固定汇点 [9], ，我们将其记为 ω （见图 1）。

设 $\mathbf{x} = (x_1,\ \ x_2,\ \ x_3) \in \mathbb{R}^3$, $||\mathbf{x}|| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} + x_3^2$ 和 $h\colon\ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ 是由公式 $h(\mathbf{x}) = \mathbf{x}_2$. 给出的微分同胚。定义映射 $p\colon\ \mathbb{R}^3 \setminus O \to \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$，其公式为

$$p(\mathbf{x}) = \left(\frac{x_1}{||\mathbf{x}||}, \frac{x_2}{||\mathbf{x}||}, \log_2(||\mathbf{x}||) \pmod 1 \right).$$

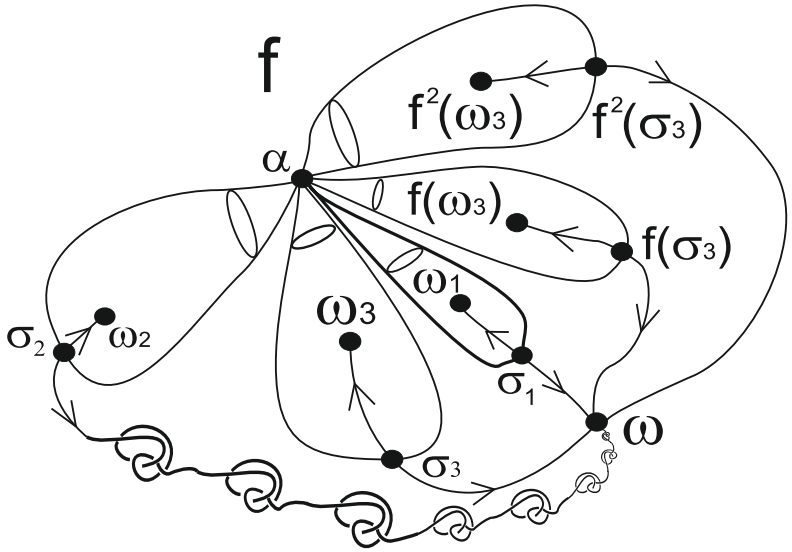

FIGURE 1. 微分同胚的相图 $f \in G$

设 $V_\omega = W^s_\omega \setminus \omega$。由于汇 ω 的双曲性，存在一个微分同胚ψ_ω: $V_\omega \to \mathbb{R}^3 \setminus O$，它将微分同胚 f和 h共轭。设 $p_\omega = p\psi_f$: $V_f \to \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$和 $\mathcal{K}_f = p_\omega(W^u_{\Omega_1} \cap V_\omega)$。根据 [11],，集合 $\mathcal{K}_f$是一个光滑链环，由 $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$ 中的本质 （不可缩）纽结组成（见图 2）。

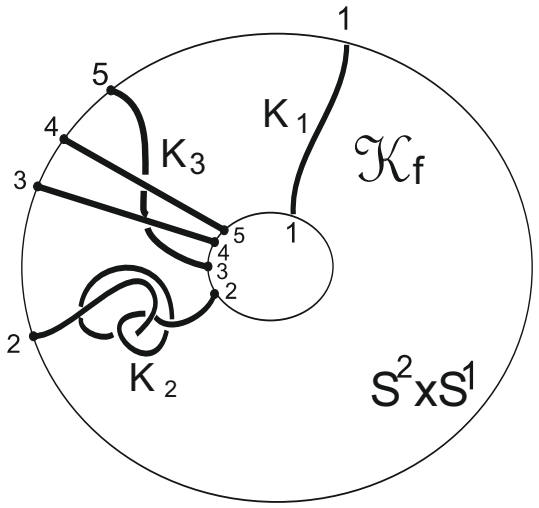

FIGURE 2. 图1中微分同胚的链环 $f \in G$

如果存在一个保持定向的同胚 φ: $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$，使得 $\varphi(\mathcal{K}_f) = \mathcal{K}_{f'}$，则称两个链环 $\mathcal{K}_f$， $\mathcal{K}_{f'}$ 是等价的。

定理1。 两个微分同胚 f、 $f' \in G$ 拓扑共轭，当且仅当它们的链环 $\mathcal{K}_f$、 $\mathcal{K}_{f'}$ 等价。

定理 2. 对于每个光滑本质链环 $\mathcal{K} \subset \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$ ，都存在一个微分同胚 $f \in G$，使得 $\mathcal{K}_f$ 与 $\mathcal{K}$ 等价。

因此，我们将验证两个微分同胚 f， $f' \in G$ 的轨迹连续统在定性上相同这一问题，归结为确定相应链环的等价类是否相同。进一步自然的步骤是描述链环的等价类，而这方面的首要问题是这些等价类的数量。

本文仅考虑驯性链环，即由可定向三维流形 M中的若干两两不相交的多边形纽结组成的链环。若存在保向同胚 $h\colon M \to M$ ，使得 $h(L) = L'$，则称 L 和 L' 在 M 中等价。

本文证明以下结果。

定理 3. 设 M 是下列清单中的一个三维流形

1) $\mathbb{S}^3$的链环补空间，特别是 $\mathbb{S}^3$；*2)* 亏格为 $g \geq 0$的把手体 H_g ；

3) 一个闭、连通、可定向的三维流形。那么， M 中的驯链环等价类集合是可数的。

推论4. 根据定理 3， $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$ 中的驯链环等价类集合是可数的。利用 [1], 中的一系列两两不等价的Hopf结，我们得到 $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$中的本质链环等价类有无穷多个。

本文结构如下。第2节回顾动力系统和低维拓扑中的必要事实，尤其是纽结理论和辫理论中的事实。

第3节利用 [6]中给出的Morse-Smale三维微分同胚的完整分类，证明定理1和定理2。

在第4节中，我们研究三维球面中的链环。利用任意此类链环都是辫子的闭包，且辫子集合是可数的这一事实，我们证明了情形$M^3 = \mathbb{S}^3$下的定理 3。由此可得，在 $\mathbb{S}^3$ 中的有限空间图的等价类集合是可数的。我们还指出，利用 Joyce [13]和 Matveev [22]的结果，也可以证明 $\mathbb{S}^3$ 中的纽结的等价类集合是可数的；该结果表明，纽结的基本幺群几乎是完全不变量。

在第5节中，我们考察其他流形中的链环，并利用论文 [18, 12, 19, 20], 中的结果证明定理 3。该论文将链环表示为辫子的闭包，并证明了某种类似于马尔可夫定理的定理。

在第6节中，我们给出推论4的另一种证明，利用了缠结范畴是有限生成的这一事实。

在文章末尾，我们提出了几个问题，以供进一步研究。

2. Preliminaries

2.1. 动力系统。 本节事实的详细解释可见于 [24], [9], [11]。

设 $f\colon M^n \to M^n$ 是光滑闭（紧且无边界）n维流形（$n \geqslant 1$）M^n 上的一个微分同胚，其度量为 d。

若存在一个同胚 $h\colon M^n \to M^n$，使得 $fh = hf'$，则称两个微分同胚 f，$f'\colon M^n \to M^n$ 是拓扑共轭的。

若存在 x 的一个开邻域 U_x，使得对于每个 $n \in \mathbb{N}$，都有 $f^n(U_x) \cap U_x = \emptyset$，则称点 $x \in M^n$ 对 f 是游荡的。否则，称 x 为非游荡的。微分同胚 f 的非游荡点集称为非游荡集，记作 Ωf。

若集合 Ωf 是有限的，则每个点 $p \in \Omega f$ 都是周期点。记其周期为 $m_p \in \mathbb{N}$。每个周期点 p 都有相应的稳定和不稳定流形，定义如下：

$W_p^s = \{x \in M^n\colon \lim\limits_{k\to+\infty} d(f^{km_p}(x),\ p) = 0\}$,
$W_p^u = \{x \in M^n\colon \lim\limits_{k\to+\infty} d(f^{-km_p}(x),\ p) = 0\}$。

稳定流形和不稳定流形都是不变流形。

若周期点 $p \in \Omega f$ 的雅可比矩阵$\left(\frac{\partial f^{m_p}}{\partial x}\right)|_p$的每个特征值的绝对值都不等于 1，则称其为双曲的。若每个特征值的绝对值都小于（大于）1，则 p 是汇（源点）。汇和源点称为结点。若一个双曲点不是结点，则称为鞍点。

根据周期点 p 的双曲结构，其稳定 W_p^s 和不稳定 W_p^u流形分别是空间 $\mathbb{R}^{q_p}$ 和 $\mathbb{R}^{n-q_p}$ 在单浸入下的像，其中 q_p 是雅可比矩阵中绝对值大于 1 的特征值个数。集合 $W_p^u \setminus p$（$W_p^s \setminus p$）的一个道路连通分支称为该点 p的不稳定（稳定）分离曲线。

称闭的 f-不变集 $A \subset M^n$为动力系统 f的吸引子，如果 A具有一个紧邻域 U_A，使得 $f(U_A) \subset int\, U_A$且 $A = \bigcap\limits_{k\geqslant 0} f^k(U_A)$。在这种情况下，$U_A$ 称为陷获 邻域。

A di微分同胚 $f\colon M^n \to M^n$ 称为莫尔斯–斯梅尔微分同胚，当且仅当 f

(1) 非游荡集 Ωf 由有限个双曲轨道组成；(2) 对任意两个非游荡点 p, r，流形 W_p^s，W_r^u横截相交。

2.2. 辫子、链环与缠结。 证明定理 3 需要一些关于三维流形中的辫子和链环的事实。本小节将回顾这些内容（例如，参见[4, 7, 14, 17]）。

2.2.1. 辫子。 阿廷辫群 B_n 是由满足以下关系的生成元 $n-1$,$\sigma_2, \ldots, \sigma_{n-1}$生成的群

$$\sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i = \sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1} \text{ for } i = 1, 2, \ldots, n-2,$$

$$\sigma_i\sigma_j = \sigma_j\sigma_i \text{ for all } i,j = 1,2,\dots,n-1 \text{ with } |i-j| \geq 2.$$

存在唯一的群同态 $\pi\colon B_n \to \Sigma_n$ 从 B_n 到对称群Σ_n，使得对于所有 $i = 1,2,\dots,n-1$，均有 $\pi(\sigma_i) = (i, i+1)$。另一方面，公式$\iota(\sigma_i) = \sigma_i$，其中 $i = 1,2,\dots,n-1$，定义了一个单射群同态

$$\iota\colon B_n \to B_{n+1}.$$

对于 B_n 的元素，可以给出一种几何解释。由 n 条互不相交的拓扑区间组成的集合 $b \subset R^2 \times I$, $I = [0,1]$，称为由 b 构成的 $n \geq 1$ 股几何辫；这些拓扑区间称为辫股，其投影 $\mathbb{R}^2 \times I \to I$ 将每条辫股同胚地映射到 I，并且

$$b \cap (\mathbb{R}^2 \times \{0\}) = \{(1,0,0),(2,0,0),\dots,(n,0,0)\},$$

$$b \cap (\mathbb{R}^2 \times \{1\}) = \{(1,0,1),(2,0,1),\dots,(n,0,1)\}.$$

对于任意 $\beta \in B_n$，闭辫 $\hat{}\,\beta \in \mathbb{S}^3$ 是一个定向几何链环。根据 Alexander 定理，$\mathbb{S}^3$ 中的任意定向链环都同痕于一个闭辫。

无限辫群 $B_\infty = \cup_{n=1}^{\infty} B_n$ 是 $\mathbb{S}^3$ 中纽结理论的基础。在研究三维流形中的链环时（参见 [18]），扩展辫群$B_{m,\,n}$也发挥着同样的作用；其元素称为混合辫，且它们的前 m 股构成恒等子辫。群 $B_{m,\,n}$ 是 B_{m+n} 的子群，其表示具有$m+n-1$ 个生成元

$$a_1, a_2, \dots, a_m, \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n-1}$$

满足以下关系

$$\sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i = \sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1} \text{ for } i = 1,2,\dots,n-2,$$

$$\sigma_i\sigma_j = \sigma_j\sigma_i \text{ for all } i,j = 1,2,\dots,n-1 \text{ with } |i-j| \geq 2,$$

$$a_i\sigma_1 a_i\sigma_1 = \sigma_1 a_i\sigma_1 a_i \text{ for } 1 \leq i \leq m,$$

$$a_i\sigma_k = \sigma_k a_i \text{ for all } k \geq 2,\ 1 \leq i \leq m,$$

$$a_i(\sigma_1 a_r \sigma_1^{-1}) = (\sigma_1 a_r \sigma_1^{-1}) a_i \text{ for } 1 \leq i \leq m.$$

关于 a_i 和 σ_j 的几何解释，见 [18, 图 7]。$B_{m,\,n}$ 的结构在 [2]中进行了研究。

群 $B_{m,n}$ 是研究 m-平凡链环补空间中的纽结与链环，或由 m 个类型为 $L(p,1)$ 的透镜空间作连通和所得空间中的纽结与链环，或亏格为 m 的把手体中的纽结与链环时所适用的辫结构。对于这些流形，某种马尔可夫定理的类比成立（见 [18, 12, 19, 20]）。

2.2.2. 纽结与链环。回顾一下，在三维流形 M^3 中，纽结是一个同胚 $\gamma\colon\ \mathbb{S}^1 \to M^3$，或是该同胚的像 $K = \gamma(\mathbb{S}^1)$，其中

$$\mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$$

是标准单位圆。若纽结 K 位于 M^3 中，则称其为本质的，如果不存在满足 $K \subset D^3$的三维球 $D^3 \subseteq M^3$。

我们只考虑驯纽结。若纽结 K 与多边形纽结等价，则称其为驯的；否则称为野纽结。多边形纽结是由有限条称为边的闭直线段组成的纽结，这些线段的端点是纽结的顶点。若存在保向同胚 $h\colon\ M^3 \to M^3$，使得 $h(K) = K'$，则称两个纽结 K, K' 等价。

流形 M^3 中的链环 L 是有限个纽结的不交并。若链环由本质（驯）纽结组成，则称其为本质的（驯的）。

2.2.3. 缠结。缠结是辫子和链环的推广。对于任意整数 $n > 0$，令 $[n] = \{1, 2, \ldots, n\}$，并假设 $[0]$ 为空集。若 k 和 l 是非负整数，则称缠结 L 为类型 (k, l)；它是 $X = \mathbb{R}^2 \times I$ 中有限条两两不交的简单定向多边形弧的并，且其边界 ∂L 满足 L 的条件

$$\partial L = L \cap (\mathbb{R}^2 \times \{0, 1\}) = ([k] \times \{0\} \times \{0\}) \cup ([l] \times \{0\} \times \{1\}).$$

注意，$\mathbb{R}^2 \times I$ 中的链环是一个类型为 $(0, 0)$ 的辫子。对于辫子集合上的链环，可以定义一种等价关系。更准确地说，若存在 h 的一个同伦变形，使得 $h(1, L) = L'$，则两个辫子 L 和 L' 等价；其中，X 的同伦变形是一个分段线性映射 $h\colon\ I \times X \to X$，满足对所有 $t \in I$，映射 $h(t, -)$ 是 X 到自身的同胚，在边界 $\partial X = \mathbb{R}^2 \times \{0, 1\}$ 上限制为恒等映射，并且$h(0, -)$ 是 X 上的恒等映射。

3. Dynamic of class G diffeomorphisms

3.1. **微分同胚图式** $f \in G$。本节介绍微分同胚 $f \in G$ 的图式这一概念，其等价类是该微分同胚 $[6]$ 的拓扑共轭的完全不变量。

设 $V_\alpha = W^u_\alpha \setminus \alpha$。由于源点 α 的双曲性，存在一个微分同胚$\psi_\alpha\colon\ V_\alpha \to \mathbb{R}^3 \setminus O$，它将微分同胚 f和 h^{-1}共轭。设 $p_\alpha = p\psi_\alpha\colon\ V_\alpha \to \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$ 和 $\mathcal{T}_f = p_\alpha\ (W^s_{\Omega_1} \cap V_\alpha)$。配对

$$S_f = (\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1, \mathcal{T}_f)$$

称为微分同胚 $f \in G$ 的 方案。根据 $[11],$，集合 $\mathcal{T}_f$ 由同伦非平凡二维环面构成，它们光滑地嵌入于 $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$ 中（见图 3）。

两个方案 $S_f,\ S_{f'}$ 称为等价，如果存在一个同胚 $\psi\colon\ \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$，使得 $\psi(\mathcal{T}_f) = \mathcal{T}_{f'}$。

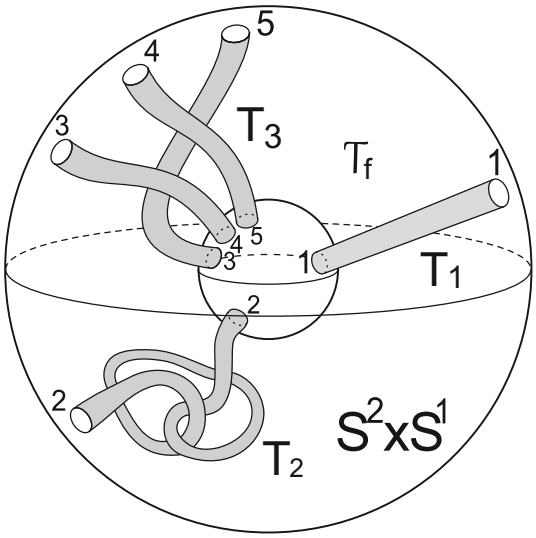

FIGURE 3. 图 S_f 中的微分同胚 $f \in G$ 方案

命题5（[6], 定理1）。微分同胚 f, $f' \in G$ 拓扑共轭，当且仅当它们的方案 S_f, $S_{f'}$ 等价。

因此，要证明定理1，只需证明对于集合 G 的微分同胚而言，链环的等价性等同于方案的等价性。

3.2.链环的等价性等同于方案的等价性。 本节将证明一个结果（引理6），由此可直接推出定理1。

引理6. 微分同胚 $\mathcal{K}_f, \mathcal{K}_{f'}$的链环 $f, f' \in G$等价，当且仅当它们的方案 $S_f, S_{f'}$ 等价。

证明. 对于 $i \in \{1, \dots, k\}$，令 $K_i = p(W^u_{\sigma_i} \setminus \sigma_i)$ $T_i = p_\alpha(W^s_{\sigma_i} \setminus \sigma_i)$。那么

$$\mathcal{K}_f = \bigsqcup_{i=1}^{k} K_i, \ \mathcal{T}_f = \bigsqcup_{i=1}^{k} T_i.$$

记 $U(K_i)$ 为纽结 K_i 的一个管状邻域，它同胚于实心环面。那么 $U(T_i) = q_f(p_f^{-1}(U(K_i)))$ $\cup T_i$ 是环面 T_i 的一个单侧管状邻域。令

$$U(\mathcal{K}_f) = \bigsqcup_{i=1}^{k} U(K_i), \ U(\mathcal{T}_f) = \bigsqcup_{i=1}^{k} U(T_i),$$

$$V = \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1 \setminus \operatorname{int} U(\mathcal{K}_f), \ W = \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1 \setminus \operatorname{int} U(\mathcal{T}_f).$$

根据构造，映射 $\xi = p_\alpha p_\omega^{-1}|_V \colon V \to W$ 是一个同胚。我们证明同胚 ξ 可延拓为同胚 $\xi \colon$ $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$。

对于任意闭曲线 $c \subset \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$，我们用 $\langle c \rangle$ 表示回路 c绕基本群 $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$的生成元的绕数。于是环面 $\partial V_i = \partial V \cap U(K_i)$有生成元 λ_i， μ_i ，满足

$$\langle \lambda_i \rangle = m_i, \langle \mu_i \rangle = 0.$$

由同胚 ξ 的构造可知， $\xi(\lambda_i)$ $\xi(\mu_i)$ 是环面 $\partial W_i = \partial W \cap U(T_i)$ 的生成元，而

$$\langle \xi(\lambda_i) \rangle = m_i, \langle \xi(\mu_i) \rangle = 0.$$

由对类 G 所施加的条件可知，每个环面 ∂W_i 都在 W 中界定实心环面 W_i 。于是，$\xi(\mu_i)$ 是实心环面 W_i 的子午线；根据这一点，同胚 $\xi|_{\partial V_i} : \partial V_i \to \partial W_i$ 将实心环面 $U(K_i)$ 的子午线映射到实心环面 W_i 的子午线，从而将其延拓到实心环面 [?]。

因此，存在同胚 $\xi : \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$ ，使得 $\xi(U(K_i)) = W_i, i \in \{1, \ldots, k\}$。

对于微分同胚 $f' \in G$，我们用撇号引入类似的记号。不失一般性，假设 $U(\mathcal{K}_{f'}) = \varphi(U(\mathcal{K}_f))$。令 $\psi = \xi' \varphi \xi^{-1} : \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$。于是 $\psi(W_i) = W_i'$，并且不失一般性，我们可以假设 $\psi(T_i) = T_i'$。□

3.3. 通过微分同胚实现链环。 在本节中，我们证明定理 2，即我们通过微分同胚 实现由本质纽结组成的任意链环 $\mathcal{K} \subset \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$

$$\mathcal{K} = K_1 \sqcup \cdots \sqcup K_k$$

由微分同胚 $f \in G$。

设 $\langle K_i \rangle = m_i$。则集合 $\bar{K}_i = p^{-1}(K_i)$ 由 h-不变的弧的并组成

$$\bar{K}_i = \bar{K}_i^0 \sqcup h(\bar{K}_i^0) \sqcup \cdots \sqcup h^{m_i - 1}(\bar{K}_i^0).$$

设 $U(K_i) \subset \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$ 是纽结 K_i 的一个管状邻域。则 $U(\bar{K}_i) = p^{-1}(U(K_i))$ 是弧 $\bar{K}_i$ 的一个 h-不变邻域，由 m_i 个连通分支组成 $U(\bar{K}_i^0) \sqcup \cdots \sqcup h^{m_i-1}(U(\bar{K}_i^0))$，每个分支都与 $\mathbb{D}^2 \times \mathbb{R}^1$ 微分同胚。

设 $C = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_2^2 + x_3^2 \leqslant 4\}$，并设流 $g^t : C \to C$定义如下

$$g^t(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + t, x_2, x_3).$$

那么存在一个微分同胚 $\zeta_i\colon U(\bar{K}_i^0) \to C$，它将微分同胚$h^{m_i}|_{U(\bar{K}_i^0)}$与 $g = g^1|_C$共轭。下面用以下公式定义 C 上的流 ϕ^t：

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \begin{cases} 1 - \frac{1}{9}(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 4)^2, & x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leqslant 4 \\ 1, & x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 > 4 \end{cases} \\ \dot{x}_2 = \begin{cases} \frac{x_2}{2}\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}\left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 3\right)\right) - 1\right), & 2 < x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leqslant 4 \\ -x_2, & x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leqslant 2 \\ 0, & x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 > 4 \end{cases} \\ \dot{x}_3 = \begin{cases} \frac{x_3}{2}\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}\left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 3\right)\right) - 1\right), & 2 < x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leqslant 4 \\ -x_3, & x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leqslant 2 \\ 0, & x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 > 4. \end{cases} \end{cases}$$

根据构造 ，微分同胚 $\phi = \phi^1$ 有两个不动点：鞍点 $P(1, 0, 0$)

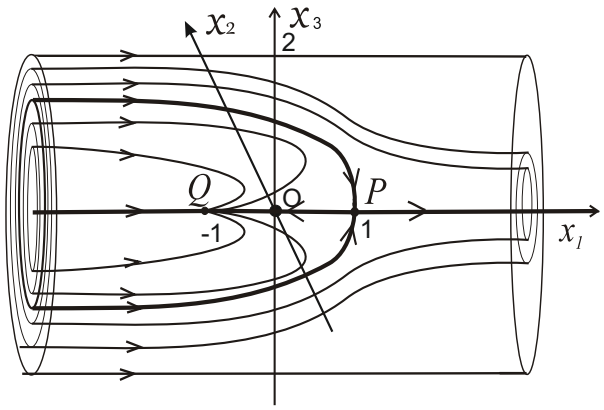

FIGURE 4. 流 ϕ^t的轨线

以及汇 $Q(-1, 0, 0)$（见图 4），二者均为双曲的。鞍点 P的一条不稳定分离曲线与开区间 $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3\colon |x_1| < 1, \quad x_2 = x_3 = 0\}$重合，该区间属于汇 Q的吸引域；另一条则是射线 $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3\colon x_1 > 1, \quad x_2 = x_3 = 0\}$。注意， ϕ 在球 $\{(x_1, x_2, x_3) \in C : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leqslant 4\}$之外与微分同胚 $g = g^1$ 重合。

定义一个微分同胚 $\bar{f}_{\mathcal{K}}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$，使得 $f_{\mathcal{K}}$ 在 $U(K_1) \cup \cdots \cup U(K_k)$ 之外与 h 重合，并且与微分同胚 $h_i\colon U(K_i) \to U(K_i)$重合，该微分同胚由以下公式给出

$$h_i(h^j(x)) = \begin{cases} h(h^j(x)),\ j \in \{0, \ldots, m_i - 2\},\ x \in U(\bar{K}_i^0); \\ \zeta_i^{-1}(\phi(\zeta_i(x))),\ j = m_i - 1,\ x \in U(\bar{K}_i^0). \end{cases}$$

那么， $\bar{f}_{\mathcal{K}}$ 在 $U(\bar{K}_i)$ 中有两个周期为 m_i 的周期轨道：汇 $\omega_i = \zeta_i^{-1}(Q)$ 的轨道和鞍点 $\sigma_i = \zeta_i^{-1}(P)$ 的轨道，它们都是双曲的（见图 5）。现在我们将动力系统投影到三维球面上。记 $N(0, 0, 0, 1)$ 为球面 $\mathbb{S}^3 =$ 的北极

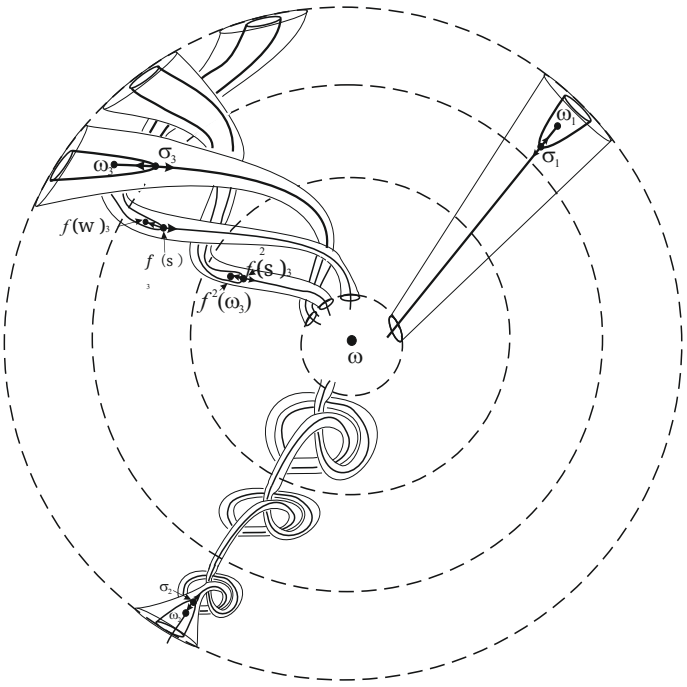

FIGURE 5. 微分同胚 $f_{\mathcal{K}}$ 的相图

$\{\mathbf{x} = (x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4)\colon\ \ ||\mathbf{x}|| = 1\}$。对于每个点 $\mathbf{x} \in (\mathbb{S}^3 \setminus \{N\})$，都存在一条经过 N 和 $\mathbf{x}$、位于 $\mathbb{R}^4$ 中的直线，且该直线与 $\mathbb{R}^3$ 相交于唯一一点 $\vartheta_+(\mathbf{x})$。点 $\mathbf{x}$ 的立体投影是点 $\vartheta_+(\mathbf{x})$。容易验证

$$\vartheta_+(x_1, x_2, x_3, x_4) = \left(\frac{x_1}{1-x_4}, \frac{x_2}{1-x_4}, \frac{x_3}{1-x_4}\right).$$

因此，立体投影 $\vartheta_+\colon\ \mathbb{S}^3 \setminus \{N\} \to \mathbb{R}^3$ 是一个微分同胚。根据¯构造，微分同胚 $f_{\mathcal{K}}$ 在初始点 O 及无穷远点的某个邻域内与 h 重合，因此，它在 $\mathbb{S}^3$ 上诱导出莫尔斯–斯梅尔微分同胚

$$f_{\mathcal{K}}(\mathbf{x}) = \begin{cases} \vartheta_+^{-1}(\bar{f}_{\mathcal{K}}(\vartheta_+(\mathbf{x}))),\ \mathbf{x} \neq N; \\ N,\ \mathbf{x} = N \end{cases}.$$

根据构造可直接得出，微分同胚 $f_{\mathcal{K}}$ 属于集合G，我们将这类微分同胚称为模型。以下结论可由定理1直接得出。

推论7。

- 任意微分同胚 $f \in G$ 都与某个模型微分同胚 $f_{\mathcal{K}}$拓扑共轭。
- 模型微分同胚 $f_{\mathcal{K}},\ f_{\mathcal{K}'}$ 拓扑共轭，当且仅当它们的链环$\mathcal{K},\ \mathcal{K}'$ 等价。

4. Counting of links and spatial graphs in $\mathbb{S}^3$

本节证明 $M^3 = \mathbb{S}^3$ 情形下的定理 3。为便于后续引用，我们将其表述为一个命题。

Prop命题 8. S^3 中驯链环的等价类集合是可数的 e.

证明。设 $B_\infty = \cup_{n=1}^{\infty} B_n$ 为具有无限多条辫股的辫群。B_n 的任意元素都可以用字母表 $\{\sigma_1^{\pm 1}, \sigma_2^{\pm 1}, \ldots, \sigma_{n-1}^{\pm 1}\}$中的一个词表示。这样的词集合是可数的。因此，$B_n$ 的元素集合是可数的；又由于可数个可数集的并集仍是可数集，故 B_∞ 的元素集合是可数的。

对于任意辫子 $\beta \in B_\infty$，我们都可以构造相应的几何辫 b，并取其闭包$\hat{b}$，从而得到一个链环。根据亚历山大定理，$\mathbb{S}^3$ 中的任意驯链环都可以通过这一过程构造出来。此外，根据马尔可夫定理，$\mathbb{S}^3$ 中的两个链环等价，当且仅当存在一系列有限的、所谓的马尔可夫变换，将表示第一个链环的辫子变为表示第二个链环的辫子。特别地，$\mathbb{S}^3$ 中驯链环的等价类集合的基数不大于B_∞中辫子集合的基数，因此是可数的。□

注 9. 要证明 $\mathbb{S}^3$ 中纽结的等价类数量是可数的，我们可以采用另一种方法。Joyce [13]和 Matveev [22] 定义了一种只有一个二元代数运算的代数系统，现在称为幺群（Matveev 称之为右可逆自分配群胚）。对于 $\mathbb{S}^3$中纽结 K 的任意纽结图 D_K，Joyce 和 Matveev 定义了基本幺群 $Q(D_K)$，并证明 $Q(D_K)$是 K的不变量，即不依赖于图 D_K。

我们来证明基本幺群的集合是可数的。事实上，假设图示 D_K 有 n 个交叉点。由于 D_K 是圆的一个原像，它有 n 个连通分支。幺群 $Q(D_K)$由元素 x_1、x_2、……、x_n生成，每个连通分支对应一个生成元，并由 n 个关系（每个交叉点对应一个）定义，其形式为 $x_k = x_i * x_j$；若在该交叉点处相遇的是三个连通分支，标签分别为 x_i、x_j 和 x_k。由此可知，对于固定的 n，基本幺群只有有限多个。因此，$\mathbb{S}^3$中的驯纽结的基本幺群有可数多个。由于基本幺群是一个近乎完备的纽结不变量（这意味着，若纽结 K和 J的基本幺群 $Q(D_K)$ 与 $Q(D_J)$ 同构，那么 K 等价于 J，或者 K 等价于 $-J$，即 J 的镜像并取相反定向），由这些观察可知，$\mathbb{S}^3$ 中的驯纽结的等价类集合是可数的。

空间图 Γ （见 [17]）是组合图在$\mathbb{S}^3$中的几何实现。若存在保向同胚 $h\colon \mathbb{S}^3 \longrightarrow \mathbb{S}^3$ 将 Γ 映射到 Γ'，则两个空间图 Γ 和 Γ' 等价。关于空间图的一个基本拓扑问题是：如何用有效方法判定给定的同一组合图的两个空间图是否等价。

空间图理论是三维空间中纽结理论的一种推广。L. Kauffman [16] 和 D. Yetter [26] 分别定义了空间图集合上的等价关系，

并证明了一些类似于 Reidemeister 定理的结果。由命题 8 可得。

推论 10. 三维球面中的有限空间图的等价类集合是可数的。 $\mathbb{S}^3$

证明。 正如 [3] 中所证明的，任意有限空间图都是一个有限平面图与一个辫子的连通和。由于有限平面图的集合和辫子的集合都是可数的，我们便得到了所需的断言。□

5. Counting of links in 3-manifolds

本节我们讨论三维流形中的链环。

证明　　定理 *3*。令 H_g 表示一个亏格为 g的把手体。它通常定义为　　as

$$(\text{a closed disc} \setminus \{g \text{ open discs}\}) \times I,$$

其中 I 是单位区间。等价地， H_g 可以定义为

$$(\mathbb{S}^3 \setminus \text{ an open tubular neighbourhood of } I_g),$$

其中 I_g 表示 g 个区间 I的不交并，它们都在无穷远点处相交。因此， H_g 可以在 $\mathbb{S}^3$ 中由平凡的 g股辫子 I_g 表示（见 [12]）。 L 中的一个链环将由 $\mathbb{S}^3$中的混合链环 $I_g \cup L$ 表示。 H_g 中的两个定向链环 L_1、L_2 在 H_g 中等价，当且仅当对于混合链环 $I_g \cup L_1$ 和 $I_g \cup L_2$，存在一个同胚 h: $\mathbb{S}^3 \to \mathbb{S}^3$，它保持定向， h（$I_g \cup L_1$） $= I_g \cup L_2$，并且逐点固定 I_g。

正如在 [12] 中所证明的， H_g 中的任意链环都可以表示为某个代数混合辫 $I_g \cup B \in B_{g,\ n} \subseteq B_{g+n}$的闭包，记作 $I_g \cup B$；它通过用竖直线段连接 B_n-部分中每一对相应的端点来定义。因此， H_g中的任意链环都可以由某个辫子表示，该辫子位于 $B_{g,\ n}$ 中，其中 g。因此，根据上一节的结果，我们证明了 $M^3 = H_g$情形下的定理 3。

现在令 M^3 为 $\mathbb{S}^3$ 中一个链环的补空间。根据 Alexander 定理，该链环同痕于辫子 B 的闭包 $\hat{}B$。因此，我们可以写作 $M^3 = \mathbb{S}^3 \setminus \hat{}B$，这意味着 M^3 可由 $\mathbb{S}^3$ 中的 $\hat{}B$ 表示。进一步，令 M^3 为一个闭、连通、定向的三维流形（为简便起见，简称 c.c.o. 三维流形）。根据 Lickorish [21] 和 Wallace [25] M^3 的结果， [25] M^3 可通过沿带整数框架的带框架链环进行手术，从 $\mathbb{S}^3$ 得到。不失一般性，可以假设手术链环是手术辫子 B 的闭包 B。$\hat{}B$ 的框架在手术辫子 B 上诱导出一个框架。因此，我们可以写作 $M^3 = \chi(\mathbb{S}^3, \hat{}B)$，且 M^3 可由 $\mathbb{S}^3$ 中的 $\hat{}B$ 表示。此外，正如 [21], 中所证明的，可以假设手术链环的所有分支都是平凡结，并且它们等价于纯辫子的闭包。因此，对于 c.c.o. 三维流形，我们可以假设 B 是纯辫子。

假设现在 L 是 $M^3 = \mathbb{S}^3 \setminus \hat{}B$ 或 $\chi(\mathbb{S}^3, \hat{}B)$ 中的一个定向链环。逐点固定 $\hat{}B$ 后，我们可以用混合链环 $\hat{}B \cup L$ 在 $\mathbb{S}^3$ 中无歧义地表示 L，它由固定部分 B 和与 B 相链的移动部分 L 组成。混合链环图是一个图

$\hat{\sim}$ $\hat{}\hat{}B\cup L$，位于 B 的平面上。这一平面配备了 B 的自上而下方向 $\hat{\sim}$。根据 Alexander 定理，并如 [19, 定理 5.3], 所述， $B\cup L$ 的图 $B\cup L$ 可以转化为一个闭包等价的混合辫 $B\cup\beta$。这是 $\mathbb{S}^3$ 中的一种辫子，包含两组不同的股线。其中一组由固定子辫 B 构成，另一组股线则表示流形 M^3 中的链环。因此， M^3 可以用 $\mathbb{S}^3$ 中的开辫 B 表示。

此外，当且仅当相应的混合链环 $\hat{}\hat{B}\cup L_1$ 和 $\hat{}\hat{B}\cup L_2$ 在 $\mathbb{S}^3$ 中通过保持 $\mathbb{S}^3$ 定向且逐点固定 B 的同胚而等价。

因此，如果 M^3 是定理 3 中的一个三维流形，那么任意链环 $L\subset M^3$ 都可以由来自 B_∞的辫子表示，该辫子取决于 M^3。由于这类辫子的集合是可数的，并且正如 [18, 12, 19, 20] 中所证明的， M^3 中链环等价类的集合是辫子关于某种马尔可夫变换推广的商集，因此链环等价类的集合是可数的。定理得证。

6. Links in $\mathbb{S}^2\times\mathbb{S}^1$

流形 $\mathbb{S}^2\times\mathbb{S}^1$ 在动力系统中发挥着重要作用。在该流形中的纽结理论与实心环面（亏格为 1 的把手体）中的纽结理论，或与 $\mathbb{S}^3$ 中平凡结补空间中的纽结理论相同。因此，推论4可由定理 3推出。另一方面，也可以给出一个独立的证明。

*推论4的独立证明。*我们将利用这样一个事实：任意链环 L 在 $\mathbb{S}^2\times\mathbb{S}^1$ 中经过同伦变形后，都可以画成一个缠结的闭包 P_L （例如参见 [8, 图5]），并且我们可以假设该缠结位于 $\mathbb{S}^3$ 中。因此，只要证明表示驯链环的缠结集合是可数的，推论便得证。

我们将使用缠结范畴的一些性质，这些性质可见于 [15, 第12]章。缠结构成如下的严格张量范畴 $\mathcal{T}$。 $\mathcal{T}$ 的对象由有限个 $\pm$ 符号组成的序列构成，其中包括空序列 $\emptyset$; $\mathcal{T}$ 的态射则是有向缠结的同伦变形类。缠结的复合 $L\circ L'$ 通过将 L' 置于 L之上得到。此外，还可以在 $\mathcal{T}$上引入张量积。若 L 和L'是有向缠结的同伦变形类，则 $L\otimes L'$是将 L' 置于 L右侧所得有向缠结的同伦变形类。配备张量积的缠结范畴 $\mathcal{T}$是一个严格张量范畴，其中单位元 I 为空集 $\emptyset$。严格张量范畴 $\mathcal{T}$由以下六个态射生成

$$\cup,\ \overleftarrow{\cup},\ \cap,\ \overleftarrow{\cap},\ X_+,\ X_-,$$

并由有限关系集定义（参见 [15, 定理12.2.2]）。这意味着，闭包对应于 $\mathbb{S}^2\times\mathbb{S}^1$ 中定向链环的辫子集合是可数的。

为了证明 $\mathbb{S}^2\times\mathbb{S}^1$ 中本质链环的等价类集合是无限的，我们可以将该流形中的任意链环表示为 $\mathbb{S}^3$ 中添加了平凡结 U 的链环。容易看出，如果某个分支 K_i 与

链环的链接数 (,) 不为零，那么该链环就是本质链环。由于 $\mathbb{S}^3$ 中的链环数量可数，因此 $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$ 中本质链环的集合是无限且可数的。

为了研究 $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$ 中的链环，我们可以将它们表示为B_1中的辫子的闭包$_{,\ \infty}$并使用类似于马尔可夫定理 [12]的定理。这样便可以定义一些多项式不变量，并构造出不等价的链环。另一方面， $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$ 中的链环可以表示为实心环面 $V = D^2 \times S^1$中的链环。尽管 n 股上的每个辫子 β 都对应于实心环面中的一个闭 n辫，而且 V 中的两个闭辫若作为定向链环同痕，则它们同痕，但一般而言， V 中的链环并不同痕于 V中的闭辫。例如，位于 V 的小三维球内的链环绝不同痕于闭ˆ辫。但是根据定理 2.1 [14], ，对于任意 $n \geq 1$ 和任意 β、 $\beta' \in B_n$，闭辫 β与ˆβ' 在实心环面中同痕，当且仅当 β 与 β' 在 B_n 中共轭。众所周知，共轭问题在辫群中是可解的。

最后，我们提出以下问题。

问题 11。 是否存在一个三维流形（或拓扑空间） M ，使得 M 中链环的等价类集合是不可数的？如果这些流形（拓扑空间）存在，那么关于基本群 $\pi_1(M)$，我们能得出什么结论？

问题 12。 我们知道，某个三维流形 M^3 中的链环 L 可以由混合辫表示。是否可以利用辫群 B_n 的阿廷表示，通过自由群的自同构（如同 $\mathbb{S}^3$中链环的情形），求出M^3 中补空间 L 的基本群 $\pi_1(M^3 \setminus L)$?

Acknowledgments

这项工作的拓扑部分得到了俄罗斯科学与高等教育部的资助（协议编号：075-02-2023-943）。动力学部分得到俄罗斯科学基金会的资助（项目编号：21-11-00010）。作者感谢 Andrey Malyutin 和 Misha Neshchadim 的有益讨论。此外，作者还感谢“托木斯克十二月日”会议（2022年12月）的组织者，感谢他们举办了这次精彩的会议，我们正是在那里开始撰写本文的。

References

[1] P. Akhmet’ev, T. V. Medvedev, O. Pochinka, 皮克斯顿微分同胚拓扑共轭类的数量, 动力系统定性理论, 20, 2021, 文章 76.[2] V. G. Bardakov, 把手体中的辫群及相应的赫克代数, 拓扑与计算结构及应用的代数建模, 数学与统计学论文集, 第 219 卷, 2017, 189–203.[3] V. G. Bardakov, A. Kawauchi, 作为平面图与辫子连通和的空间图, 《结理论及其影响》, 30, 第 11 期 (2021), https://doi.org/10.1142/S0218216521500772.[4] J. S. Birman, 辫子、链环与映射类群, 《数学研究年刊》, 第 82 号。普林斯顿大学出版社，普林斯顿，新泽西州；东京大学出版社，东京，1974。ix+228 页.[5] C. Bonatti and V. Grines, 作为球面上梯度型微分同胚拓扑不变量的纽结 S^3, 《动力系统与控制系统杂志》, 6, 第 4 期 (2000), 579–602.[6] C. Bonatti, V. Grines, and O. Pochinka, 三维流形上莫尔斯–斯梅尔微分同胚的拓扑分类, 《杜克数学杂志》, 168, 第 13 期 (2019), 2507–2558。

[7] R. H. Crowell and R. H. Fox, 纽结理论导论，根据在哈弗福德学院飞利浦讲座计划期间所作的讲座编写，Ginn and Co.，波士顿，马萨诸塞州，1963，x+182 页。[8] C. W. Davis, M. Nagel, J. Park, and A. Ray，$S^1 \times S^2$中的纽结同痕，arXiv:1707.04542v2。[9] V. Grines V., E. Gurevich, E. Zhuzhoma, O. Pochinka，莫尔斯–斯梅尔系统分类与底流形的拓扑结构，《数学科学进展》, 74, 2019, 41–116。[10] V. Z. Grines, E. V. Zhuzhoma, V. S. Medvedev, and O. V. Pochinka，莫尔斯–斯梅尔微分同胚的全局吸引子与排斥子，《斯捷克洛夫数学研究所论文集》, 271, 第 1 期 (2010), 103–124。[11] V. Grines, T. Medvedev, and O. Pochinka，二维与三维流形上的动力系统，第 46 卷。2016 年 1 月。[12] R. Häring-Oldenburg, S. Lambropoulou，柄体中的纽结理论，KNTR, 11, 第 6 期 (2002), 921–941。[13] D. Joyce，纽结的一个分类不变量：纽结拟群，《纯粹与应用代数杂志》, 23 (1982), 37–65。[14] C. Kassel, V. Turaev，辫群，《数学研究生教材》247，施普林格科学与商业媒体有限公司，2008。[15] C. Kassel，量子群，《数学研究生教材》；第 155 卷，Springer-Verlag, 1995。[16] L. H. Kauffman，三维空间中图的不变量，《美国数学会汇刊》, 1989, 311, 697–710。[17] A. Kawauchi，纽结理论综述，由作者从 1990 年日文原版翻译并修订。Birkhluser Verlag，巴塞尔，1996。xxii+420 页。[18] S. Lambropoulou，纽结补空间、把手体和三维流形中的辫结构，《希腊纽结 '98》论文集，世界科学出版社，《纽结及其相关主题丛书》，2000, 24, 274–289。[19] S. Lambropoulou, C. P. Rourke，三维流形中的马尔可夫定理，《拓扑学及其应用》, 78, 第 1 期 (1997), 95–122。[20] S. Lambropoulou, C. P. Rourke，三维流形中链环的代数马尔可夫等价，《数学汇编》, 142 (2006), 1039–1062。[21] W. B. R. Lickorish，可定向组合三维流形的一种表示，《数学年刊》, 1962, 76, 531–538。[22] S. Matveev，纽结理论中的分配群胚，（俄文）《数学文集》（新编）119 (161), 78–88, 160 (1982)。[23]O. Pochinka, E. Talanova, D. Shubin，四个不动点的莫尔斯–斯梅尔三维微分同胚的完全不变量：纽结，《数学文集》, 2023。[24] S. Smale，可微动力系统，《美国数学会通报》, 73, 第 6 期 (1967), 747–817。[25] A. D. Wallace，修改与共边流形，《加拿大数学杂志》, 1960, 12, 503–528。[26] D. N. Yetter，$\mathbb{S}^3$中带纽结图的范畴论表示，《数学进展》, 77 (1989), 137–155。

瓦列里·巴尔达科夫[†, ‡, *, **] (bardakov@math.nsc.ru),

塔季扬娜·科兹洛夫斯卡娅 [†](t.kozlovskaya@math.tsu.ru),

奥尔加·波钦卡 [***] (olga-pochinka@yandex.ru)

[†] 托木斯克国立大学，列宁大街36号，634050，托木斯克，俄罗斯，
[‡] 索伯列夫数学研究所，科普秋格院士大街4号，630090，新西伯利亚，俄罗斯，
[**] 新西伯利亚国立农业大学，多布罗柳博夫街160号，630039，新西伯利亚，俄罗斯。
[***] 高等经济大学，B. 佩切尔斯卡亚街25/12号，603155，下诺夫哥罗德，俄罗斯。